

УДК 539.12.01

ДИНАМИКА КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ ВЫСШИХ СПИНОВ В ПРОСТРАНСТВЕ AdS_d РАЗМЕРНОСТИ $d \geq 5$

К. Б. Алкалаев*

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва

В данном обзоре обсуждается реперная формулировка динамики безмассовых калибровочных полей произвольного спина, распространяющихся в пространстве Минковского и анти-де Ситтера произвольной размерности. В рамках реперного описания вводится понятие поля высшего спина, калибровочных симметрий и калибровочно-инвариантных напряженностей. Обсуждается общая процедура построения явно калибровочно-инвариантных функционалов действия для свободных полей высших спинов, а также приводятся несколько содержательных примеров действий для полей частных спинов. Предлагаемая реперная формулировка является эффективным инструментом построения взаимодействия полей высших спинов на фоне геометрии анти-де Ситтера. В качестве примера построена нелинейная AdS_5 $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная теория полей высших спинов, описывающая взаимодействия безмассовых полей высших спинов между собой и гравитацией на уровне функционала действия в кубическом приближении.

In this review the frame-like formulation of massless gauge fields of any spin propagating in Minkowski and (anti-)de Sitter spaces of any dimension is discussed. The notions of higher-spin gauge fields, gauge symmetries, and gauge-invariant field strengths are introduced in the framework of the frame-like description. The general building procedure for the gauge-invariant action functionals for free higher-spin fields is discussed. Also, several substantial examples of actions for fields of particular spins are considered. The proposed frame-like formulation represents the effective tool for constructing interactions of higher-spin fields on the AdS background. As a case in point, non-linear AdS_5 $\mathcal{N} = 1$ SUSY higher-spin gauge theory on the level of the cubic action functional describing interactions of massless higher-spin fields between themselves and gravity is constructed.

1. ВВЕДЕНИЕ

О калибровочных теориях высших спинов можно думать как о расширении обычных теорий супергравитации путем включения полей произвольно высокого спина. Такая точка зрения оправдана исторически: именно надежда на то, что естественное расширение суперсимметрии теории, ассоциированное с включением полей высших спинов, позволит удалить все ультрафиолетовые расходимости, преодолев известный барьер $\mathcal{N} \leq 8$, она мотивировала

*E-mail: alkalaev@lpi.ru

поиски теорий, описывающих взаимодействие полей со спином выше, чем у гравитона [1]. Последовательное развитие в этом направлении привело к созданию теорий высших спинов, для которых определяющими явились следующие свойства (см. обзоры [2]):

- присутствие бесконечного набора безмассовых возбуждений произвольного спина, $0 \leq s < \infty$ [3];
- ненулевая (отрицательная) космологическая постоянная $\Lambda \neq 0$ [3, 4].

Указанные выше свойства не являются полностью независимыми друг от друга и возникают как следствие структуры калибровочных симметрий высших спинов, диктуемой соответствующей калибровочной алгеброй высших спинов [3]. Алгебра высших спинов — это бесконечномерная неабелева (супер)алгебра Ли, содержащая алгебру изометрий пространства анти-де Ситтера (AdS_d) либо ее суперсимметричные расширения в качестве подалгебры (см. п. 1.2). Калибровочные поля, возникающие в результате процедуры калибровки алгебры высших спинов, образуют последовательность полей всех спинов, причем появление поля спина старше 2 влечет за собой появление полей всех спинов вплоть до бесконечности.

Геометрия AdS_d , возникающая в качестве пертурбативного вакуума теорий высших спинов, имеет определяющее значение при построении непротиворечивого и нетривиального взаимодействия полей высших спинов, т. к. позволяет обойти теорему Коулмена–Мандулы, доказательство которой основано на S -матричном подходе, применимом для динамических систем только на фоне плоской геометрии (известно, что попытка сформулировать формализм S -матрицы в AdS_d наталкивается на концептуальные трудности при определении *in*- и *out*-состояний). С технической точки зрения присутствие в теории размерного параметра, коим является космологическая постоянная, позволяет строить бесконечное число вершин взаимодействия, вовлекающих произвольное число полей и производных, обезразмериваемых отрицательными степенями космологической постоянной. Поэтому формальный предел $\Lambda = 0$ не определен, что делает плоскую геометрию неадекватным фоном для динамики взаимодействующих полей высших спинов. Тем не менее, если исключить гравитационное взаимодействие калибровочных полей высших спинов, примеры непротиворечивых кубических взаимодействий полей высших спинов могут быть построены и на плоском фоне [5–9]. Свойство неаналитичности взаимодействия полей высших спинов по космологической постоянной, скорее всего, означает, что симметрии высших спинов должны быть спонтанно нарушены при переходе к плоской геометрии. В связи с этим интересно отметить тесную аналогию со структурой вершин взаимодействия в теориях струн, где роль обезразмеривающего параметра играет наклон траектории Редже α' . В частности, в пределе нулевого наклона $\alpha' \rightarrow \infty$ для струнных амплитуд рассеяния возникает бесконечный набор тождеств Уорда, что может являться прямым указанием на бесконечномерную пространственно-

временную симметрию, которая соответствует некоторой теории высших спинов [10].

Важно отметить, что калибровочные теории высших спинов однозначно определяются принципом калибровочной симметрии и содержат лишь две фундаментальные константы связи: гравитационную и космологическую постоянные. В четырех измерениях безразмерная комбинация этих констант совпадает с константой связи в янг-миллсовском секторе теории*.

Актуальность изучения калибровочных теорий высших спинов резко возросла после осознания исключительной роли геометрии пространства анти-де Ситтера в окрестности частных решений теории суперструн и возникшего на основе этого явления *AdS/CFT* соответствия [11–13]. Как известно, гипотеза Малдасены сформулирована для ПВ-теории суперструн на $AdS_5 \times S^5$ с постоянной 5-формой напряженности поля Рамон–Рамона в пятимерном «объеме» и $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса на четырехмерной «границе» и предполагает полную эквивалентность данных теорий (изоморфизм пространств состояний) для произвольных значений параметров теорий \mathcal{N} (число «цветов»): g_{YM} (константа связи в теории Янга–Миллса), R (радиус кривизны пространства AdS), $T \sim 1/\alpha'$ (натяжение струны), связанных соотношением $g_{YM}^2 \mathcal{N} = R^4 T^2$.

На сегодняшний день все нетривиальные тесты гипотезы Малдасены проведены в режиме больших значений постоянной 'т Хоофта $g_{YM}^2 \mathcal{N}$, что соответствует сильнопerturbативному режиму в теории Янга–Миллса и квазиклассическому описанию теории суперструн в супергравитационном пределе. Несмотря на то, что в противоположном режиме ($g_{YM}^2 \mathcal{N} \rightarrow 0$) теория на границе является свободной, дуальность не поддается проверке. Причина этого в том, что теория струн на пространстве AdS является сильно нелинейной и анализ спектра состояний является нерешенной проблемой [14].

Было предложено трактовать теорию в объеме, являющуюся в пределе $g_{YM}^2 \mathcal{N} \rightarrow 0$ теорией струн с «почти» нулевым натяжением, как некоторую нелинейную калибровочную теорию высших спинов, дуальную свободной конформной теории на границе [15, 16]. Данное предположение хорошо подтверждается результатами работы [17], где было показано, что сохраняющиеся токи, билинейные по свободному безмассовому скалярному полю в d -измерениях, находятся в однозначном соответствии с полностью симметричными калибровочными полями высших спинов в $(d + 1)$ -измерениях. Также было показано, что $4d$ -конформная симметрия высших спинов, одновременно являющаяся симметрией высших спинов AdS_5 -полей, реализуется

*В случае $4d$ -теории высших спинов такое поведение констант связи аналогично «калиброванным» теориям супергравитации, которые могут рассматриваться как результат сферических компактификаций $11d$ -теории супергравитации.

на супермультиплетях свободных полей граничной теории [18]. Возможные связи теории калибровочных полей высших спинов с теорией струн на AdS (в пределе нулевого натяжения) с граничными конформными моделями интенсивно изучались в работах [15–32].

Как мы видим, одно из направлений, в рамках которого возможно более глубокое понимание голографической дуальности и самой теории струн, сводится к анализу (возможно, скрытых) симметрий высших спинов и изучению соответствующих калибровочных теорий высших спинов. Очевидно, что центральной задачей самой теории высших спинов является построение теории взаимодействующих полей всех спинов в любом порядке по взаимодействию в произвольной размерности. На данный момент известны следующие нелинейные теории высших спинов:

- на уровне функционала действия в размерностях $d = 4, 5$, описывающие взаимодействия симметричных полей в кубическом приближении [4, 33, 88];
- на уровне уравнений движения в произвольной размерности, описывающие взаимодействия симметричных полей в любом порядке по взаимодействию [34, 35].

Причины, по которым существующие теории высших спинов ограничиваются взаимодействием симметричных полей, с одной стороны, и кубическим приближением (на уровне функционала действия), с другой стороны, состоят в том, что последовательной формулировки лагранжевой динамики несимметричных (смешанного типа симметрии) полей на фоне геометрии AdS_d до недавних пор не было известно (см. [92]), и попытка распространить существующий механизм анализа кубического взаимодействия на уровне функционала действия на старшие порядки упирается в пока неразрешенные проблемы (см. [86]).

Вопрос ковариантного лагранжева описания полей произвольного спина, распространяющихся на фоне геометрий Минковского, рассматривался в работах [36–52] и, в случае геометрии анти-де Ситтера, в работах [53–65]. Как уже указывалось выше, интерес к подобным исследованиям мотивирован как желанием построить расширение теорий супергравитации в область высших спинов, так и желанием понять наиболее симметричную фазу теории струн. На сегодняшний день теория симметричных полей (массивных и безмассовых) является наиболее разработанной по сравнению с полями, реализующими несимметричные представления групп Пуанкаре и AdS_d [37, 38, 41, 53–56, 59]. До некоторой степени акцент на симметричные поля обусловлен тем, что в $4d$ -измерениях у групп изометрий нет представлений смешанного типа симметрии. Исключением являются теории, в которых несимметричные поля являются дуальными переменными описания симметричных полей [50, 51, 67–70]. Однако при увеличении числа пространственно-временных измерений (начиная с $d = 5$) у групп изометрий появляются несимметричные представления. В случае пространства Минковского для описания таких полей было предло-

жено несколько различных подходов [47,48,50,52,62]. В случае пространства анти-де Ситтера полная ковариантная формулировка несимметричных полей произвольного вида была построена в работах [89,90,92] в рамках реперного подхода, обсуждаемого в этом обзоре. Существует также ряд других подходов [58,61,62,64,65,74,89,90], рассматривающих поля частного типа симметрии. При построении динамики несимметричных полей в пространстве анти-де Ситтера существует особенность, которая не позволяет осуществить прямое обобщение результатов, достигнутых для несимметричных полей в пространстве Минковского. Дело в том, что классификации безмассовых представлений групп Пуанкаре и анти-де Ситтера принципиально различны: безмассовые поля смешанного типа симметрии в AdS_d не классифицируются согласно неприводимым представлениям малой группы $SO(d-2)$, как это можно было бы ожидать по аналогии с пространством Минковского. Точнее, каждое неприводимое безмассовое поле на фоне AdS_d распадается на совокупность неприводимых безмассовых полей на плоском фоне [58]. С теоретико-полевой точки зрения это означает совершенно различную структуру калибровочных симметрий полей в пространствах Минковского и AdS_d [57, 58]. Отметим, что обсуждаемое явление не имеет места для представлений, соответствующих прямоугольным диаграммам Юнга. Именно поэтому, вне зависимости от того, равна нулю космологическая постоянная Λ или нет, не существует принципиальных различий в теоретико-полевого описании полностью симметричных полей или полностью антисимметричных полей p -форм.

В последующих двух вводных пунктах мы объясняем тетрадную формулировку теории гравитации и обобщение данного подхода для построения динамики полностью симметричных полей высших спинов на уровне функционала действия. Изложение основано на работах [2,33].

В разд. 2 мы подробно описываем реперную формулировку динамики безмассовых полей произвольного типа симметрии. Будут рассмотрены общая конструкция полей реперного типа, их калибровочных симметрий, калибровочно-инвариантных напряженностей и метод построения калибровочно-инвариантных функционалов действия.

В разд. 3 рассмотрено применение реперного подхода на примере безмассовых полей частного типа симметрии, соответствующих прямоугольным диаграммам Юнга с двумя горизонтальными строками и диаграммам Юнга с двумя вертикальными строками произвольной высоты.

В разд. 4 и 5 в рамках реперного подхода строится нелинейная теория полностью симметричных бозонных и фермионных безмассовых полей в пространстве AdS_5 на уровне функционала действия в кубическом приближении. Специфика выбора этой размерности обусловлена тем, что для AdS_5 полностью известна классификация калибровочных (супер)алгебр высших спинов [18], что является необходимым условием построения взаимодействующей теории.

1.1. Тетрадная формулировка AdS_d -гравитации. Теория гравитации на фоне геометрии AdS произвольной размерности d с сигнатурой $(+ - \dots -)$ допускает описание в терминах калибровочных полей $\Omega^{AB} = -\Omega^{BA} = dx^{\underline{m}}\Omega_{\underline{n}}^{AB}$, ассоциированных с генераторами G_{AB} алгебры $\mathfrak{h} = o(d-1, 2)$ изометрий пространства AdS_d . Подчеркнутые индексы $\underline{m}, \underline{n} = 0 \div d-1$ являются мировыми индексами, индексы $A, B = 0 \div d$ являются индексами векторного представления алгебры \mathfrak{h} . Произвольная 1-форма со значениями в $o(d-1, 2)$ может быть представлена в виде

$$\Omega = \Omega^{AB}G_{AB} = \omega^{ab}L_{ab} + \lambda e^a P_a, \quad (1.1)$$

где $a, b = 0 \div d-1$ являются индексами векторного представления алгебры Лоренца $o(d-1, 1)$. 1-форма ω^{ab} есть поле спиновой связности, ассоциированное с генераторами алгебры Лоренца L_{ab} , 1-форма e^a есть поле репера, ассоциированное с генераторами AdS_d трансляций P_a . В формуле (1.1) постоянная λ ($\lambda^2 = -\Lambda$, где Λ есть космологическая постоянная) введена для того, чтобы поле репера e^a стало безразмерным.

Разбиение поля Ω^{AB} на лоренц-ковариантные поля спиновой связности и репера может быть осуществлено $o(d-1, 2)$ -ковариантным способом с помощью поля компенсатора [71] $V^A(x)$, нормированного условием

$$V^A V_A = 1. \quad (1.2)$$

Это позволяет отождествить подалгебру Лоренца $o(d-1, 1)$ в AdS_d -алгебре $o(d-1, 2)$ со стабилизатором вектора $V^A(x)$. С помощью компенсатора ковариантное разбиение $o(d-1, 2)$ 1-формы связности Ω^{AB} на поле репера E^A и спиновую связность $\omega^{AB} = -\omega^{BA}$ определим следующим образом:

$$\lambda E^A = DV^A \equiv dV^A + \Omega^{AB}V_B, \quad \omega^{AB} = \Omega^{AB} - \lambda(E^A V^B - E^B V^A). \quad (1.3)$$

Отсюда следует, что

$$E^A V_A = 0, \quad DV^A = dV^A + \omega^{AB}V_B \equiv 0. \quad (1.4)$$

Метрический тензор определяется как $g_{\underline{m}\underline{n}} = E_{\underline{m}}^A E_{\underline{n}}^B \eta_{AB}$, где $\eta_{AB} = (+ + - \dots -)$.

Пусть R^{AB} есть кривизна, ассоциированная с $o(d-1, 2)$ калибровочными полями:

$$R^{AB} = d\Omega^{AB} + \Omega^{AC} \wedge \Omega_C^B, \quad d = dx^{\underline{n}} \frac{\partial}{\partial x^{\underline{n}}}. \quad (1.5)$$

Фоновая геометрия пространства AdS_d , соответствующая фоновым полям $\Omega_0^{AB} = (h^a, \omega_0^{ab})$, описывается уравнением нулевой кривизны (см., например, работы [2]):

$$R^{AB}(\Omega_0) \equiv d\Omega_0^{AB} + \Omega_0^A \wedge \Omega_0^{CB} = 0. \quad (1.6)$$

2-форма кручения определяется как

$$t^A \equiv DE^A \equiv \lambda^{-1} R^{AB} V_B, \quad (1.7)$$

и условие нулевого кручения есть $t^A = 0$.

Лоренц-ковариантные калибровочные кривизны для $o(d-1, 2)$ имеют вид

$$R_{\underline{m}\underline{n}}{}^{ab} = \partial_{\underline{m}} \omega_{\underline{n}}{}^{ab} + \omega_{\underline{m}}{}^a{}_c \omega_{\underline{n}}{}^{cb} - 2\lambda^2 e_{\underline{m}}{}^a e_{\underline{n}}{}^b - (\underline{m} \leftrightarrow \underline{n}), \quad (1.8)$$

$$R_{\underline{m}\underline{n}}{}^a = \partial_{\underline{m}} e_{\underline{n}}{}^a + \omega_{\underline{m}}{}^a{}_c e_{\underline{n}}{}^c - (\underline{m} \leftrightarrow \underline{n}). \quad (1.9)$$

При условии, что $\det e_{\underline{n}}{}^a \neq 0$, спиновая связность $\omega_{\underline{n}}{}^{ab}$ может быть выражена стандартным образом через репер $e_{\underline{n}}{}^a$ с помощью связи $R_{\underline{m}\underline{n}}{}^a = 0$ (1.6). Подставляя выражение $\omega_{0\underline{n}}{}^{ab} = \omega_{0\underline{n}}{}^{ab}(h)$ в (1.8), можно видеть, что условие $R_{\underline{m}\underline{n}}{}^{ab} = 0$ эквивалентно тому, что тензор Римана задается выражением

$$\mathcal{R}_{\underline{m}\underline{n}}{}^{ab} = 2\lambda^2 (h_{\underline{m}}{}^a h_{\underline{n}}{}^b - h_{\underline{n}}{}^a h_{\underline{m}}{}^b) \quad (1.10)$$

и, следовательно, описывает пространство AdS_d радиуса $(\sqrt{2}\lambda)^{-1}$ (при этом $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}_{ab}{}^{ba} = -2d(d-1)\lambda^2$). Отметим, что при $\lambda^2 < 0$ уравнение (1.10) описывает пространство dS_d с алгеброй симметрии $o(d, 1)$. Пространство Минковского возникает при $\lambda = 0$.

Введение компенсатора позволяет построить [33] d -мерный аналог $4d$ -действия Макдауэлла–Мансури–Стелле–Веста для гравитации [71, 72]:

$$S = -\frac{1}{4\lambda^2 \kappa^{d-2}} \int_{M_d} \epsilon_{A_1, \dots, A_{d+1}} R^{A_1 A_2} \wedge R^{A_3 A_4} \wedge E^{A_5} \wedge \dots \wedge E^{A_d} V^{A_{d+1}}, \quad (1.11)$$

где κ есть гравитационная константа. Очевидно, что теория, определяемая действием (1.11), имеет решение $R^{AB} = 0$, что согласно (1.6) задает геометрию AdS_d в качестве пертурбативного вакуума. Компенсатор V^A делает $o(d-1, 2)$ -калибровочную симметрию явной:

$$\delta\Omega^{AB} = D\epsilon^{AB}(x), \quad \delta V^A = \epsilon^{AB}(x) V_B, \quad (1.12)$$

где $\epsilon^{AB}(x)$ есть параметры $o(d-1, 2)$ -вращений.

Вариация действия (1.11) по отношению к спиновой связности

$$\delta\Omega^{AB} = \delta\xi^{AB}, \quad \delta\xi^{AB} V_B = 0 \quad (1.13)$$

приводит к уравнению

$$\epsilon_{A_1 \dots A_{d+1}} t^{A_3} \wedge \left(E^{A_4} \wedge E^{A_5} - \frac{d-4}{2\lambda^2} R^{A_4 A_5} \right) \wedge E^{A_6} \wedge \dots \wedge E^{A_d} V^{A_{d+1}} = 0. \quad (1.14)$$

Пертурбативно (т. е. для малых R^{AB}) уравнение движения (1.14) эквивалентно условию нулевого кручения.

Обобщенные уравнения Эйнштейна, возникающие при вариации действия (1.11) по отношению к полю репера:

$$\delta\Omega^{AB} = \lambda(\delta\xi^A V^B - \delta\xi^B V^A), \quad \delta\xi^A V_A = 0, \quad (1.15)$$

имеют вид

$$\epsilon_{A_1 \dots A_{d+1}} R^{A_2 A_3} \wedge \left(E^{A_4} \wedge E^{A_5} - \frac{d-4}{4\lambda^2} R^{A_4 A_5} \right) \wedge E^{A_6} \wedge \dots \wedge E^{A_d} V^{A_{d+1}} = 0. \quad (1.16)$$

Первое слагаемое в этом уравнении воспроизводит обычные уравнения Эйнштейна. Второе слагаемое описывает некоторое нелинейное взаимодействие, не аналитичное по λ и не дающее вклада в линеаризованные полевые уравнения. В случае $d = 4$ этот дополнительный вклад равен нулю, что является следствием варьирования топологического слагаемого Гаусса–Бонне в действии (1.11).

Если выписать вариацию действия (1.11) по отношению к полю компенсатора, можно видеть [33], что получаемое выражение пропорционально 2-форме кручения t^A . Это означает, что существует, по крайней мере пертурбативно, такая вариация полей

$$\delta V^A = \epsilon^A(x), \quad \delta\Omega^{AB} = \zeta^{AB}(R, \epsilon) \quad (1.17)$$

при $\epsilon^A V_A = 0$ и некоторых параметрах $\zeta^{AB}(R, \epsilon)$, билинейных по R^{AB} и ϵ^A , что действие \mathcal{S} остается инвариантным. Эта дополнительная симметрия позволяет зафиксировать компенсатор V^A в любом виде, удовлетворяющем условию нормировки (1.2). Другими словами, с полем V^A не связано никаких степеней свободы.

1.2. Тетрадный подход в теории полей высших спинов. Подход к описанию взаимодействующих безмассовых полей высших спинов, исходно развитый в $4d$ -случае в работах [4, 54], является обобщением тетрадного формализма теории гравитации. Центральная идея этого обобщения состоит в описании калибровочных полей высших спинов в терминах полей типа Янга–Миллса и соответствующих кривизн, ассоциированных с некоторой алгеброй высших спинов g , являющейся бесконечномерным расширением конечномерной алгебры изометрий AdS_d пространства $h = o(d-1, 2)$. Алгеброй высших спинов будем называть бесконечномерную (супер)алгебру Ли со следующими определяющими свойствами [3, 73]:

(i) (супер)алгебра g содержит подалгебру Лоренца $o(d-1, 1)$ и распадается на прямую сумму конечномерных представлений алгебры $o(d-1, 1)$;

(ii) (супер)алгебра g содержит подалгебру анти-де Ситтера $o(d-1, 2)$ либо ее суперсимметричные расширения, которая, в свою очередь, содер-

жит в себе подалгебру Лоренца $o(d-1, 1)$. Линеаризация кривизн, ассоциированных с калибровочными полями алгебры g , по отношению к фоновой AdS_d -геометрии, задаваемой калибровочными полями $o(d-1, 2)$, приводит к линеаризованным кривизнам, используемым для правильного описания свободной динамики полей высших спинов;

(iii) (супер)алгебра g удовлетворяет «условию допустимости», т. е. калибровочные поля, возникающие из процедуры калибрования, должны соответствовать безмассовым представлениям алгебры g^* .

Пусть 1-форма $\Omega(x) = dx^{\underline{a}}\Omega_{\underline{a}}(x)$ является калибровочным полем алгебры g с 2-формой кривизны:

$$R = d\Omega + \Omega \wedge \star \Omega, \quad (1.18)$$

где \star есть некоторое ассоциативное произведение, приводящее к реализации алгебры g через (супер)коммутаторы.

Инфинитезимальное преобразование высших спинов определяется как

$$\delta^g \Omega = D\epsilon, \quad (1.19)$$

где 0-форма $\epsilon(x)$ есть произвольный инфинитезимальный параметр симметрии, принимающий в g значения

$$Df = df + [\Omega, f]_{\star} \quad (1.20)$$

и

$$[a, b]_{\star} = a \star b - b \star a. \quad (1.21)$$

Кривизна высших спинов имеет стандартный однородный закон преобразования:

$$\delta^g R = [R, \epsilon]_{\star}. \quad (1.22)$$

Уравнения высших спинов формулируются в терминах кривизн высших спинов и поэтому допускают вакуумное решение с нулевой кривизной $R = 0$. Так как алгебра пространственно-временных изометрий h вложена в алгебру высших спинов g , возможным решением уравнения нулевой кривизны будет анзац, в котором все вакуумные поля равны нулю, за исключением поля Ω_0 , принимающего значения в h (см. формулу (1.6)).

Предположим, что существует теория, инвариантная относительно калибровочных преобразований (1.19). Глобальная симметрия теории определяется как часть калибровочных преобразований, оставляющих инвариантным

*В качестве примера (конечномерной) супералгебры, не удовлетворяющей «условию допустимости», можно взять суперсимметричное расширение алгебры $4d$ анти-де Ситтера $osp(4, \mathcal{N})$. Калибровочные поля $osp(4, \mathcal{N})$ имеют спин $s \leq 2$, в то время как безмассовые супермультиплеты содержат поля $s > 2$ при $\mathcal{N} > 8$, поэтому не существует $\mathcal{N} > 8$ теорий супергравитации.

вакуумное решение Ω_0 . Тем самым параметры глобальной симметрии ϵ^{gl} удовлетворяют уравнению

$$0 = D_0 \epsilon^{\text{gl}}, \quad (1.23)$$

в котором

$$D_0 f = df + [\Omega_0, f]_{\star}. \quad (1.24)$$

Условие нулевой кривизны (1.6), наложенное на вакуумное поле Ω_0 , гарантирует, что выражение (1.23) непротиворечиво. Зафиксируем значение параметра $\epsilon^{\text{gl}}(x_0)$ в некоторой точке x_0 . Тогда уравнение (1.23) позволяет восстановить параметр $\epsilon^{\text{gl}}(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 . Так как D_0 является производной, \star -коммутатор любых двух решений уравнения (1.23) опять приводит к его решению. Таким образом, алгебра глобальных симметрий вакуума совпадает с алгеброй \star -коммутаторов в любой фиксированной точке пространства-времени x_0 и является алгеброй g . Заметим, что такое заключение остается в силе и для теории, инвариантной относительно деформированных калибровочных преобразований вида

$$\delta\Omega = D\epsilon + \Delta(R, \epsilon), \quad (1.25)$$

где $\Delta(R, \epsilon)$ обозначает некоторую деформацию, такую, что $\Delta(0, \epsilon) = 0$. Действительно, все дополнительные члены не дают вклада в условие инвариантности (1.23) при условии, что вакуумное решение удовлетворяет (1.6). Важно отметить, что деформация калибровочных преобразований вида (1.25) имеет место во всех теориях, включающих гравитацию, и, в частности, в теориях высших спинов.

Введем пертурбативное разложение

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1, \quad (1.26)$$

в котором Ω_1 является флуктуацией калибровочных полей алгебры высших спинов g над фоном Ω_0 . Так как выполняется условие $R(\Omega_0) = 0$, справедливо разложение

$$R = R_1 + R_2, \quad (1.27)$$

в котором

$$R_1 = d\Omega_1 + \Omega_0 \star \wedge \Omega_1 + \Omega_1 \star \wedge \Omega_0, \quad R_2 = \Omega_1 \star \wedge \Omega_1. \quad (1.28)$$

Часть калибровочных преобразований (1.19) младшего порядка имеет вид

$$\delta_0 \Omega_1 = D_0 \epsilon. \quad (1.29)$$

Из (1.22) и (1.6) следует, что

$$\delta_0 R_1 = 0. \quad (1.30)$$

Действие высших спинов строится из кривизн высших спинов R в виде, аналогичном действию гравитации (1.11), рассмотренному в п. 1.1:

$$S = \int U \wedge R \wedge R, \quad (1.31)$$

где $(d-4)$ -формы U являются некоторыми коэффициентами, построенными из полей репера и компенсатора. В целом проблема построения правильного действия сводится к нахождению коэффициентов U . В рамках принятого пертурбативного разложения первым шагом будет нахождение правильного квадратичного действия, описывающего свободные поля заданного спина s :

$$S_2^s = \int U_0^s \wedge R_1^s \wedge R_1^s. \quad (1.32)$$

Отметим, что для случая полностью симметричных бозонных и фермионных полей любого спина при произвольном числе измерений квадратичные действия были построены в работах [54–56]. В силу инвариантности (1.30) любое действие вида (1.32) является инвариантным относительно абелевых калибровочных преобразований высших спинов свободных полей (1.29). Однако при произвольных коэффициентах U_0^s несмотря на калибровочную инвариантность действие (1.32) не обязательно должно описывать правильную полевую динамику высших спинов. Дело в том, что $o(d-1, 2)$ -ковариантное поле 1-формы Ω_1^s , отвечающее спину s , разложенное по отношению к подалгебре Лоренца, приводит к совокупности лоренц-ковариантных полей 1-форм $\omega^{s,t}$, где $t = 0, 1, \dots, s-1$. Физическое поле отождествляется с $\omega^{s,0}$. Требуется, чтобы остальные поля $\omega^{s,t}$ при $t > 0$ не давали вклада в действие, что устраняет степени свободы, ассоциированные с этими полями. В бозонном случае поле с $t = 1$ является вспомогательным и выражается через производные физического поля на решениях своих уравнений движения. Поля с $t \geq 2$ называются экстраполями. При рассмотрении квадратичного действия вариация по этим полям подчинена условию отщепления экстраполей:

$$\frac{\delta S_2^s}{\delta \omega^{s,t}} \equiv 0, \quad t \geq 2. \quad (1.33)$$

Выполнение (1.33) гарантирует, что квадратичное действие содержит производные физического поля не старше второго порядка. Оказывается, что условие отщепления экстраполей однозначно фиксирует квадратичное действие (т.е. вид коэффициентов U_0^s) по модулю слагаемых, являющихся полными производными, и общего произвольного фактора перед действием каждого спина. В фермионном случае все поля с $t \geq 1$ являются экстраполями и условие отщепления экстраполей гарантирует, что квадратичное действие не содержит производных старше первого порядка.

Несмотря на то, что вспомогательные и экстраполя не дают вклада в квадратичное действие, они с необходимостью появляются в нелинейной теории. В рассматриваемой далее кубической деформации квадратичного действия вспомогательные и экстраполя могут быть выражены через производные физического поля с помощью некоторых уравнений связи. В кубическом приближении калибровочно-инвариантные связи выбираются в виде некоторых линейных комбинаций линеаризованных кривизн высших спинов

$$\Phi^{\text{lin}}(R_1) = 0 \quad (1.34)$$

с коэффициентами, построенными из фонового поля репера. Решение этих уравнений приводит к выражениям вида

$$\omega^{s,t} \sim \left(\frac{\partial}{\lambda \partial x} \right)^t (\omega^{s,0}) + \text{чисто калибровочный вклад (1.29)}. \quad (1.35)$$

Как следствие определения поля репера (1.1), эти соотношения содержат явную зависимость от AdS_d радиуса $\sim \lambda^{-1}$. Выражения (1.35), возникающие при решении уравнений связи для экстраполей, приводят к появлению высших производных в вершинах взаимодействия высших спинов. Наличие отрицательных степеней космологической постоянной делает их безразмерными. Рассмотрение старших порядков по взаимодействию требует обобщения уравнений связи (1.34), которое в данный момент неизвестно. Анализ (1.34) в совокупности с уравнениями движения свободной теории позволяет сформулировать первую теорему массовой поверхности [54–56], утверждающую, что на массовой поверхности большинство компонент 2-форм линеаризованных кривизн R_1 могут быть положены равными нулю, за исключением компонент специального типа симметрии C , которые являются 0-формами и называются обобщенными тензорами Вейля, т. е.

$$R_1 = h \wedge h C + X \left(\frac{\delta \mathcal{S}_2}{\delta \Omega} \right). \quad (1.36)$$

Здесь h обозначает фоновое поле репера (см. п. 1.1), с помощью которого пара касательных индексов тензоров Вейля C переводится в мировые индексы 2-форм кривизн R , а X есть некоторые линейные функционалы от левых частей свободных уравнений движения $\frac{\delta \mathcal{S}_2}{\delta \Omega} = 0$.

Рассмотрим деформацию квадратичного действия в первом нетривиальном (кубическом) приближении. В рамках принятого пертурбативного разложения полей (1.26) действие принимает вид

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_3 + \dots \quad (1.37)$$

Квадратичное действие \mathcal{S}_2 описывает свободную динамику полей высших спинов. \mathcal{S}_3 есть кубическая поправка. Поправки старших порядков не дают

вклада в рассматриваемом приближении. Аналогичным образом разложим калибровочные преобразования полей (1.25):

$$\delta\Omega = \delta_0\Omega + \delta_1\Omega + \dots, \quad (1.38)$$

где $\delta_0\Omega$ есть линеаризованные абелевы преобразования (1.29), а $\delta_1\Omega$ содержит члены, линейные по динамическим полям Ω_1 . Напомним, что фоновые поля Ω_0 удовлетворяют условию $R_0 = 0$, и поэтому разложение R начинается с первого порядка по полям (1.28). В результате деформация $\Delta(R, \epsilon)$ в (1.25) дает вклад начиная с $\delta_1\Omega$. Т.к. квадратичное действие по построению инвариантно относительно линеаризованных калибровочных преобразований, $\delta_0\mathcal{S}_2 = 0$, часть вариации, линейная по динамическим полям, равна нулю. Поэтому первое нетривиальное слагаемое билинейно по динамическим полям:

$$\delta_1\mathcal{S} = \delta_0\mathcal{S}_3 + \delta_1\mathcal{S}_2 \sim \Omega_1^2\epsilon. \quad (1.39)$$

Решение задачи будет состоять в нахождении такого действия \mathcal{S}_3 , что оно допускает нетривиальную деформацию калибровочных преобразований, при которой вариация (1.39) была бы равна нулю.

Используя разложение (1.25), можно переписать условие $\delta_1\mathcal{S} = 0$ в эквивалентном виде:

$$0 = \delta^g\mathcal{S} + \Delta\mathcal{S}_2 + O(\Omega_1^3\epsilon), \quad (1.40)$$

где δ^g обозначает исходные калибровочные преобразования (1.19), которые содержат члены не старше первого порядка по полям. Другие возможные линейные вклады содержатся в вариации $\Delta\Omega_1$. Т.к.

$$\Delta\mathcal{S}_2 = \frac{\delta\mathcal{S}_2}{\delta\Omega_{\text{phys}}} \Delta\Omega_{\text{phys}}, \quad (1.41)$$

(локальная) деформация $\Delta\Omega_{\text{phys}}$, удовлетворяющая условию инвариантности (1.40), существует тогда и только тогда, когда

$$\delta^g\mathcal{S} = -Y\left(\Omega_1, \frac{\delta\mathcal{S}_2}{\delta\Omega_{\text{phys}}}, \epsilon\right) + O(\Omega_1^3\epsilon), \quad (1.42)$$

где $Y\left(\Omega_1, \frac{\delta\mathcal{S}_2}{\delta\Omega_{\text{phys}}}, \epsilon\right)$ есть некоторый трilinearный функционал. Другими словами, условие инвариантности имеет место, если вариация действия $\mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_3$ по отношению к недеформированным калибровочным преобразованиям равна нулю в уравнениях $\frac{\delta\mathcal{S}_2}{\delta\Omega_{\text{phys}}} = 0$.

Отметим, что деформация вариации вспомогательных и экстраполей не дает вклада в вариацию действия в рассматриваемом приближении, т.к. вариация \mathcal{S}_2 по отношению к этим полям тождественно равна нулю либо в

силу условия отщепления экстраполей (1.33), либо на основании связей для вспомогательных полей (т. е. используется 1,5 (полуторный) формализм).

Дальнейший анализ калибровочной инвариантности основан на использовании первой теоремы массовой поверхности (1.36), а именно: вариация $\delta^g \mathcal{S}$ является билинейным функционалом кривизн высших спинов R , которые могут быть заменены в рассматриваемом порядке линеаризованными кривизнами R_1 . Накладывая на вспомогательные и экстраполя связи (1.34), воспользуемся соотношениями (1.36). В X все члены пропорциональны левым частям свободных полевых уравнений и поэтому приводят к вариации вида (1.42), которая может быть компенсирована подходящей деформацией $\Delta\Omega_1$. Слагаемые, которые не могут быть компенсированы таким образом, — это остаточные билинейные комбинации тензоров Вейля C . Поэтому условием того, что действие высших спинов инвариантно относительно некоторой деформации калибровочных преобразований высших спинов, является условие, согласно которому вариация действия по отношению к исходным (т. е. недеформированным) преобразованиям равна нулю, если линеаризованные кривизны R_1 заменены тензорами Вейля C согласно (1.36), т. е.

$$\delta^g \mathcal{S} \Big|_{R=h \wedge h C} = 0. \quad (1.43)$$

Программа построения взаимодействия высших спинов на уровне функционала действия в кубическом приближении, описанная в этом разделе и приводящая к решению условия (1.43), была впервые осуществлена в $4d$ -случае в работах [3,4,54]. В $5d$ -случае в работе [33] была построена чисто бозонная теория симметричных полей высших спинов. Расширение $5d$ -анализа на случай суперсимметричных кубических взаимодействий будет рассмотрено в разд. 5. При произвольном числе измерений задача построения нелинейного действия в кубическом приближении остается нерешенной.

2. БЕЗМАССОВЫЕ ПОЛЯ СМЕШАННОГО ТИПА СИММЕТРИИ В AdS_d

В этом разделе мы рассматриваем новый подход к ковариантному описанию полей смешанного типа симметрии произвольного спина, распространяющихся на фоне AdS_d -геометрии [89]. Данный метод обобщает тетрадную формулировку динамики полностью симметричных полей, развитую ранее в работах [33,41,54–56], и аналогичный формализм первого порядка, разработанный в работе [65] на примерах частных несимметричных полей.

Суть метода состоит в следующем. Пусть имеется унитарное представление младшего веса AdS_d алгебры $o(d-1,2)$, характеризующее вакуумным пространством низшего значения энергии, реализованного как представление алгебры $o(d-1) \subset o(d-1,2)$ в виде бесследовой диаграммы Юнга

$Y_{o(d-1)}$, у которой самая длинная строка имеет длину s и самый короткий столбец имеет высоту p . Тогда соответствующая теоретико-полевая система может быть описана калибровочным полем p -формы, принимающей значения в представлении алгебры $o(d-1, 2)$, соответствующем бесследовой диаграмме Юнга $Y_{o(d-1,2)}$, получающейся из $Y_{o(d-1)}$ в результате отрезания крайнего правого столбца высотой p и добавления самой длинной строки длиной $s-1$. Получившееся AdS_d -калибровочное поле p -формы содержит лоренц-ковариантное физическое поле высшего спина вместе со всеми необходимыми вспомогательными и экстраполями и позволяет построить явно калибровочно-инвариантные кривизны, используемые для построения функционалов действия в форме Макдауэлла–Мансури [72]. Предложенная формулировка полей высших спинов в терминах p -форм связностей и кривизн высших спинов позволяет геометрически контролировать калибровочные симметрии высших спинов.

Для бозонных полей предложенный формализм применим и при описании динамики на фоне геометрии де Ситтера. Для фермионов это не так, потому что условия вещественности для безмассовых полей на пространстве dS требуют присутствия в действии мнимых массовоподобных слагаемых, построенных на основе космологической постоянной. Для определенности мы будем рассматривать динамику полей только на пространстве AdS_d , отдельно оговаривая случаи пространств Минковского и dS_d .

В последующем изложении используется сигнатура $(+ - \dots -)$. Обозначения $\underline{m}, \underline{n} = 0 \div d-1$ соответствуют мировым индексам, $a, b = 0 \div d-1$ — касательным $so(d-1, 1)$ векторным индексам и $A, B = 0 \div d$ — касательным $so(d-1, 2)$ векторным индексам. Также используются конденсированные обозначения из работы [54] для набора симметризованных индексов: $a(k) \equiv (a_1 \dots a_k)$. Верхние (нижние) индексы, обозначенные одной буквой, считаются симметризованными следующим образом: $X^a Y^a \equiv \frac{1}{2!} (X^{a_1} Y^{a_2} + X^{a_2} Y^{a_1})$.

2.1. Диаграммы Юнга и следовые условия. Пусть $A^{(s_1, \dots, s_q)}$ обозначает тензор

$$A^{a_1(s_1), a_2(s_2), \dots, a_q(s_q)}, \tag{2.1}$$

симметричный по каждой группе индексов* $a_i(s_i)$ и удовлетворяющий свойству симметрии Юнга, ассоциированному с диаграммой Юнга типа

*Обычно параметр q в (2.1) удовлетворяет неравенству $q \leq \nu$, где $\nu = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor - 1$ — ранг малой группы $SO(d-2)$ для пространства Минковского либо $\nu = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ — ранг $SO(d-1)$ в случае пространства AdS_d , хотя возможны и дуальные теории с большим параметром q .

$Y(s_1, s_2, \dots, s_q)$, составленной из q строк с длинами $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \dots \geq s_q > 0$, т. е. симметризация всех индексов в i -й строке с любым индексом из $(i + k)$ -й строки при $k > 0$ дает нуль.

Пусть тензор (2.1) удовлетворяет условиям

$$\eta_{a_i a_i} \eta_{a_i a_i} A^{a_1(s_1), a_2(s_2), \dots, a_q(s_q)} = 0, \quad 0 < i \leq m, \quad (2.2)$$

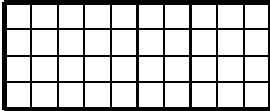
и

$$\eta_{a_i a_i} A^{a_1(s_1), a_2(s_2), \dots, a_q(s_q)} = 0, \quad m < i \leq q, \quad (2.3)$$

где η_{ab} есть некоторая метрика сигнатуры (p, r) (например, в случае лоренцевской сигнатуры имеем $p = d - 1$ и $r = 1$) и m есть некоторое неотрицательное число. Условие (2.2) означает, что свертка любых двух пар индексов любой из первых m строк диаграммы Юнга дает нуль. Условие (2.3) означает, что свертка любой пары индексов любой из последних $q - m$ строк дает нуль.

Линейное пространство тензоров (2.1), являющихся диаграммами Юнга типа $Y(s_1, \dots, s_q)$ и удовлетворяющих условиям (2.2), (2.3), будет обозначаться через $B_m^{p,r}(s_1, \dots, s_q)$. Заметим, что при $i < j$ справедливо вложение $B_i^{p,r}(s_1, \dots, s_q) \subset B_j^{p,r}(s_1, \dots, s_q)$. В частности, $B_0^{p,r}(s_1, \dots, s_q)$ есть пространство бесследовых тензоров с диаграммными свойствами типа $Y(s_1, \dots, s_q)$.

Удобно работать с диаграммами Юнга, построенными, в качестве элементарных составляющих, из прямоугольных блоков (s, p) длиной s и высотой p :

s


p

(2.4)

Тогда индексы в строках диаграммы Юнга $Y(s_1, \dots, s_q)$ перераспределяются по блокам следующим образом:

$$A^{(s_1, \dots, s_q)} \sim A^{(\tilde{s}_1, p_1); (\tilde{s}_2, p_2); \dots; (\tilde{s}_k, p_k)}, \quad (2.5)$$

где блоки описываются наборами пар положительных целых чисел (\tilde{s}_i, p_i) с $\tilde{s}_1 > \tilde{s}_2 > \dots > \tilde{s}_k > 0$ и некоторыми p_i , для которых выполняется условие $\sum_i p_i = q$. Точное отождествление в (2.5) имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1 = \underbrace{s_1 = \dots = s_{p_1}}_{p_1} > \tilde{s}_2 = \underbrace{s_{p_1+1} = \dots = s_{p_1+p_2}}_{p_2} > \dots > \\ > \tilde{s}_k = \underbrace{s_{p_1+\dots+p_{k-1}+1} = \dots = s_q}_{p_k}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для верхнего блока иногда будет удобно использовать следующие обозначения: $\tilde{s}_1 = s$ и $p_1 = p$.

Отметим, что прямоугольный блок является инвариантным (возможно, с точностью до знака) при перестановке его строк, что является следствием юнговской симметрии.

2.2. Ковариантные производные. Фоновая геометрия пространств Минковского и AdS_d описывается полем репера $h^a = h_{\underline{n}}^a dx^{\underline{n}}$ и полем спиновой связности $\omega_0^{ab} = \omega_{0\underline{n}}^{ab} dx^{\underline{n}}$, которые удовлетворяют уравнению (1.6). Действие фоновой ковариантной производной на произвольный лоренц-ковариантный тензор имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\underline{n}} A^{a_1(s_1), \dots, a_q(s_q)} &= \partial_{\underline{n}} A^{a_1(s_1), \dots, a_q(s_q)} + s_1 \omega_{0\underline{n}c}^{a_1} A^{a_1(s_1-1)c, \dots, a_q(s_q)} + \dots, \\ \partial_{\underline{n}} &= \frac{\partial}{\partial x^{\underline{n}}}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

и

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_{\underline{m}}, \mathcal{D}_{\underline{n}}] A^{a_1(s_1), \dots, a_q(s_q)} &= \\ &= \lambda^2 (s_1 h_{\underline{m}}^{a_1} h_{\underline{n}c}^{a_1} A^{a_1(s_1-1)c, \dots, a_q(s_q)} + \dots) - (\underline{m} \leftrightarrow \underline{n}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ковариантным оператором Д'Аламбера является

$$\mathcal{D}^2 \equiv \mathcal{D}^a \mathcal{D}_a \equiv h_{\underline{m}}^a \mathcal{D}^{\underline{m}} (h_{\underline{n}, a} \mathcal{D}^{\underline{n}}), \tag{2.9}$$

где фоновая лоренц-ковариантная производная задается выражением (2.7).

В последующем изложении мы пользуемся AdS_d -ковариантными обозначениями и оперируем тензорами $A^{A_1(s_1), A_2(s_2), \dots, A_k(s_k)}(x)$, соответствующими диаграммам Юнга типа $Y(s_1, \dots, s_k)$. Действие фоновой производной D_0 на произвольный AdS_d -тензор имеет вид

$$\begin{aligned} D_0 A^{A_1(s_1), \dots, A_k(s_k)} &= dA^{A_1(s_1), \dots, A_k(s_k)} + \\ &+ s_1 \Omega_0^{A_1 C} \wedge A^{CA_1(s_1-1), \dots, A_k(s_k)} + \dots + \\ &+ s_k \Omega_0^{A_k C} \wedge A^{A_1(s_1), \dots, CA_k(s_k-1)}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где фоновая связность Ω_0^{AB} удовлетворяет условию нулевой кривизны (1.6).

2.3. Безмассовые бозонные поля смешанного типа симметрии. Релятивистские поля в AdS_d , допускающие непротиворечивое квантово-механическое описание, классифицируются по унитарным представлениям младшего веса алгебры $o(d-1, 2)$. Унитарность является стандартным квантово-механическим условием, в то время как младший вес гарантирует, что энергия ограничена снизу. Отметим, что в случае пространства dS_d представлений, являющихся одновременно и унитарными, и младшего (старшего) веса, не суще-

ствует, что является важным отличием от пространства AdS_d (и пространства Минковского). Унитарные представления младшего веса $D(E_0, \mathbf{s})$ строятся стандартным образом с помощью операторов рождения и уничтожения, действующих на вакуумное пространство $|E_0, \mathbf{s}\rangle$, которое является унитарным конечномерным представлением максимальной компактной подалгебры $o(2) \oplus o(d-1) \subset o(d-1, 2)$. E_0 обозначает нижнее граничное собственное значение оператора энергии, а $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_q)$ при $q \leq \nu = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ есть обобщенный спин. В терминах диаграмм Юнга s_i задает длину i -й строки $o(d-1)$ -диаграммы Юнга типа $Y(s_1, \dots, s_q)$, т.е. вакуумное представление алгебры $o(d-1, 2)$ с некоторым значением энергии E_0 образует конечномерное представление $o(d-1)$, характеризуемое $o(d-1)$ -бесследовой диаграммой Юнга:

(2.11)

Безмассовые поля на AdS_d описываются унитарными представлениями с ограниченной энергией, не выходящей за пределы границы унитарности $E_0 = E_0(\mathbf{s})$. Как показано в работе [57], для бозонных безмассовых полей существует соотношение

$$E_0(\mathbf{s}) = s - p + d - 2. \quad (2.11)$$

В рамках нашего подхода безмассовая бозонная частица смешанного типа симметрии спина $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_q)$ описывается полем

$$\Phi^{a_1(s_1), a_2(s_2), \dots, a_q(s_q)}(x) \in B_p^{d-1,1}(s_1, \dots, s_q), \quad (2.13)$$

где p есть высота верхнего прямоугольного блока диаграммы Юнга типа $Y(s_1, s_2, \dots, s_q)$, т. е.

$$s = s_1 = s_2 = \dots = s_p > s_{p+1} \geq \dots \geq s_q > 0, \quad 0 < p \leq q. \quad (2.14)$$

Поле $\Phi^{(s_1, \dots, s_q)}(x)$ обобщает флуктуационную часть поля метрики в гравитации и будет в дальнейшем называться полем *метрического типа*. (У поля метрического типа можно писать как касательные, так и мировые индексы. В любом случае они могут быть конвертированы друг в друга с помощью фонового поля репера h_m^a .)

Следовые условия (2.2), (2.3), наложенные на поле метрического типа $\Phi^{(s_1, \dots, s_q)}(x)$, обобщают на поля высших спинов произвольного типа симметрии условия двойной бесследовости Фронсдала для полностью симметричных полей [38]. Следует отметить, что в литературе существуют другие обобщения следовых условий Фронсдала на поля смешанного типа симметрии [46–48]. Наш выбор отличается от них тем, что условие двойной бесследовости наложено только на верхний прямоугольный блок, в то время как оставшаяся часть диаграммы Юнга удовлетворяет условию одинарной бесследовости. (Исключительная роль верхнего блока ясна из выражения для энергии (2.11).) Это различие между нашим и другими подходами проявляется для непрямоугольных диаграмм Юнга, которые содержат, по крайней мере, два различных блока длиной 2 и более. Простейшим примером является диаграмма Юнга типа $Y(3, 2)$.

В нашем формализме калибровочные преобразования высших спинов имеют структуру, аналогичную предложенной в работе [47]:

$$\delta\Phi^{(s_1, \dots, s_q)} = \sum_{i=p}^q \mathcal{P}^{(i)} \left(\mathcal{D}_{\xi_i}^{(s_1, \dots, s_i-1, \dots, s_q)} \right), \quad (2.15)$$

где калибровочные параметры $\xi_i^{(s_1, \dots, s_i-1, \dots, s_q)}$ соответствуют различным диаграммам Юнга типа $Y(s_1, \dots, s_i - 1, \dots, s_q)$ при условии, что $s_i - 1 \geq s_{i+1}$. Калибровочный параметр $\xi_p^{(s_1, \dots, s_1-1, s_{p+1}, \dots, s_q)}$ принадлежит $B_{p-1}^{d-1,1}(s_1, \dots,$

$s_1 - 1, s_{p+1}, \dots, s_q$), а параметры $\xi_k^{(s_1, \dots, s_{k-1}, \dots, s_q)}$, $k > p$, принадлежат $B_p^{d-1,1}(s_1, \dots, s_k - 1, \dots, s_q)$. $\mathcal{P}^{(i)}$ в (2.15) обозначают проекторы, вовлекающие симметризации по Юнгу и следовые условия, необходимые для того, чтобы спроектировать правые части на пространство $B_p^{d-1,1}(s_1, \dots, s_q)$.

Из условия унитарности следует, что калибровочные симметрии поля смешанного типа симметрии различны для полей на пространстве Минковского и AdS_d [57]. Согласно выводам работы [57] калибровочные симметрии высших спинов в (2.15) с параметрами $\xi_i^{(s_1, \dots, s_{i-1}, \dots, s_q)}$, $i > p$, отсутствуют в пространстве AdS_d . Другими словами, чтобы получить правильный набор AdS_d -калибровочных параметров, разрешается отрезать клетку только от верхнего прямоугольного блока. Калибровочные параметры с $i > p$ с необходимостью появляются при переходе к плоскому пространству. Однако они могут возникать и в AdS_d -теории как параметры симметрии, соответствующие калибровочным полям Штюкельберга [58].

2.4. Реперная формулировка безмассовых бозонных полей. Идея предлагаемого реперного подхода состоит в замене поля *метрического типа* $\Phi^{(s_1, \dots, s_q)}(x)$ (2.13) полем p -формы *реперного типа*:

$$\omega_{(p)}^{a_1(s-1), \dots, a_p(s-1), a_{p+1}(s_{p+1}), \dots, a_q(s_q)} = dx^{\underline{n}_1} \wedge \dots \wedge dx^{\underline{n}_p} \omega_{[\underline{n}_1 \dots \underline{n}_p]}^{a_1(s-1), \dots, a_p(s-1), a_{p+1}(s_{p+1}), \dots, a_q(s_q)}, \quad (2.16)$$

которое принимает значения в бесследовом тензорном представлении $B_0^{d-1,1}(s-1, \dots, s-1, s_{p+1}, \dots, s_q)$ группы Лоренца. Другими словами, мы обрезаем последний столбец в верхнем прямоугольном блоке высотой p диаграммы Юнга типа $Y(s_1, \dots, s_q)$, заменяя его на независимые мировые индексы p -формы.

Требуется, чтобы калибровочные симметрии поля p -формы $\omega_{(p)}$ имели вид

$$\delta \omega_{(p)}^{(s-1, \dots, s_q)} = \mathcal{D} \xi_{(p-1)}^{(s-1, \dots, s_q)} + \sum_{l=p+1}^{q+1} \mathcal{P}^{(i)} \left(h \wedge \xi_{(p-1)}^{(s-1, \dots, s_{l+1}, \dots, s_q, 0)} \right). \quad (2.17)$$

$(p-1)$ -форма калибровочного параметра $\xi_{(p-1)}^{(s-1, \dots, s_q)}$, обобщающая линейризованные диффеоморфизмы поля репера в гравитации, принадлежит тому же представлению $B_0^{d-1,1}(s-1, \dots, s-1, s_{p+1}, \dots, s_q)$ группы Лоренца, что и поле $\omega_{(p)}$. $(p-1)$ -формы сдвиговых калибровочных параметров $\xi_{(p-1)}^{(s-1, \dots, s_{l+1}, \dots, s_q, s_{q+1})}$, $p+1 \leq l \leq q+1$ (считается, что $s_{q+1} = 0$), принадлежат пространству $B_0^{d-1,1}(s-1, \dots, s_{l+1}, \dots, s_q, s_{q+1})$ и обобщают линейризованные преобразования Лоренца поля репера в гравитации. Они принимают значения в некоторой касательной диаграмме Юнга, которая отличается от

$\omega_{(p)}$ на одну клетку в l -й строке. Этот дополнительный индекс всегда сворачивается с касательным индексом фонового поля репера h^a . Через $\mathcal{P}^{(i)}$ обозначают проекторы, вовлекающие необходимые симметризации по Юнгу.

Поле метрического типа выражается через компоненты поля (2.16) следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi^{a_1(s_1), a_2(s_2), \dots, a_q(s_q)}(x) = \\ = \omega^{[a_1 \dots a_p]; a_1(s-1), \dots, a_p(s-1), a_{p+1}(s_{p+1}), \dots, a_q(s_q)}(x), \end{aligned} \quad (2.18)$$

т. е. оно возникает в результате симметризации мировых индексов p -формы (конвертированных в касательные индексы) с касательными индексами первых p строк в $\omega_{(p)}$. Из этой формулы следует, что таким образом определенное поле $\Phi^{(s_1, \dots, s_q)}$ принадлежит пространству $B_p^{d-1,1}(s_1, \dots, s_q)$. Действительно, диаграммные свойства очевидны из явного вида (2.18), так как симметризация любого индекса из нижней строки со всеми индексами некоторой верхней строки дает нуль, либо благодаря диаграммным свойствам касательных индексов поля (2.16) (если симметризованный индекс принадлежит касательным индексам поля $\omega_{(p)}$), либо благодаря антисимметрии мировых индексов формы (если симметризованный индекс принадлежит мировым индексам поля $\omega_{(p)}$). Ненулевые следы поля $\Phi^{(s_1, \dots, s_q)}$ могут возникать только при свертке мировых и касательных индексов. Именно это наблюдение приводит к следовым условиям (2.2), (2.3).

Роль калибровочных параметров $\xi_{(p-1)}$, появляющихся в калибровочном законе преобразования (2.17) без производных, состоит в том, чтобы скомпенсировать лишние компоненты поля p -формы (2.16) по сравнению с полем метрического типа (2.18). Сдвиговая симметрия в законе преобразования (2.17) компенсирует все компоненты, за исключением компонент, соответствующих полю $\Phi^{(s_1, \dots, s_q)}$. Простейший способ убедиться в том, что сдвиговые параметры не дают вклада в калибровочные преобразования поля $\Phi^{(s_1, \dots, s_q)}$, состоит в наблюдении, что лоренц-инвариантное скалярное произведение поля $\Phi^{(s_1, \dots, s_q)}$ и сдвиговых параметров равно нулю в силу их диаграммных свойств, т. е. они описываются различными диаграммами Юнга.

Часть закона преобразования (2.17), содержащая производные, такова, что калибровочное преобразование поля $\Phi^{(s_1, \dots, s_q)}$ совпадает с (2.15) при условии, что все калибровочные параметры ξ_i , $i > p$, отсутствуют. Таким образом, на фоне геометрии AdS_d поле p -формы (2.16), наделенное калибровочным законом преобразования (2.17), описывает поле метрического типа $\Phi^{(s_1, \dots, s_q)}$ с правильными AdS_d -калибровочными симметриями. Введенное таким способом поле p -формы обобщает 1-форму калибровочной связности $e_{\underline{n}}^{a(s-1)}$, введенную в работе [41] для описания полностью симметричных калибровочных полей спина s . Следует заметить, что этот же формализм может быть применен для описания динамики полей на пространстве dS_d .

Чтобы построить явно калибровочно-инвариантное действие, следует ввести больше полей, которые обобщают вспомогательные и экстраполя, введенные в работах [41, 54, 55]. Идея введения этих полей состоит в том, что сдвиговым параметрам закона преобразования (2.17) следует сопоставить новые калибровочные поля, обобщающие спиновую связность в гравитации. Будем называть их вспомогательными полями, а исходное поле p -формы (2.16) будем называть физическим полем. Вспомогательные поля имеют законы преобразования, аналогичные по форме закону (2.17), в которых часть с производными будет определяться сдвиговыми параметрами закона преобразования физического поля p -формы (2.17). При этом возникнут некоторые новые сдвиговые параметры. В свою очередь, этим новым сдвиговым параметрам можно сопоставить новые калибровочные поля, которые мы будем называть экстраполями. Процедура продолжается до тех пор, пока не будет получен полный набор физического, вспомогательных и экстраполей, необходимых для построения $(p + 1)$ -форм кривизны, явно инвариантных относительно полного набора калибровочных симметрий.

Как будет видно из анализа следующего раздела, структура точного списка необходимых вспомогательных и экстраполей выясняется с помощью наблюдения, сделанного в работе [33] в случае полностью симметричных полей и состоящего в том, что все они возникают в результате «размерной» редукции калибровочного поля p -формы, несущей специальное неприводимое представление алгебры $o(d - 1, 2)$.

2.5. AdS_d -ковариантная формулировка. Подходящий набор калибровочных полей (физического, вспомогательных и экстраполей) возникает из рассмотрения калибровочного поля p -формы:

$$\Omega_{(p)}^{A_0(r_0), A_1(r_1), \dots, A_q(r_q)}, \quad (2.19)$$

которое принимает значения в представлении AdS_d -алгебры, описываемом бесследовой диаграммой Юнга типа $Y(r_0, r_1, \dots, r_q)$ с параметрами

$$r_0 = r_1 = \dots = r_p = s - 1, \quad r_i = s_i, \quad i > p. \quad (2.20)$$

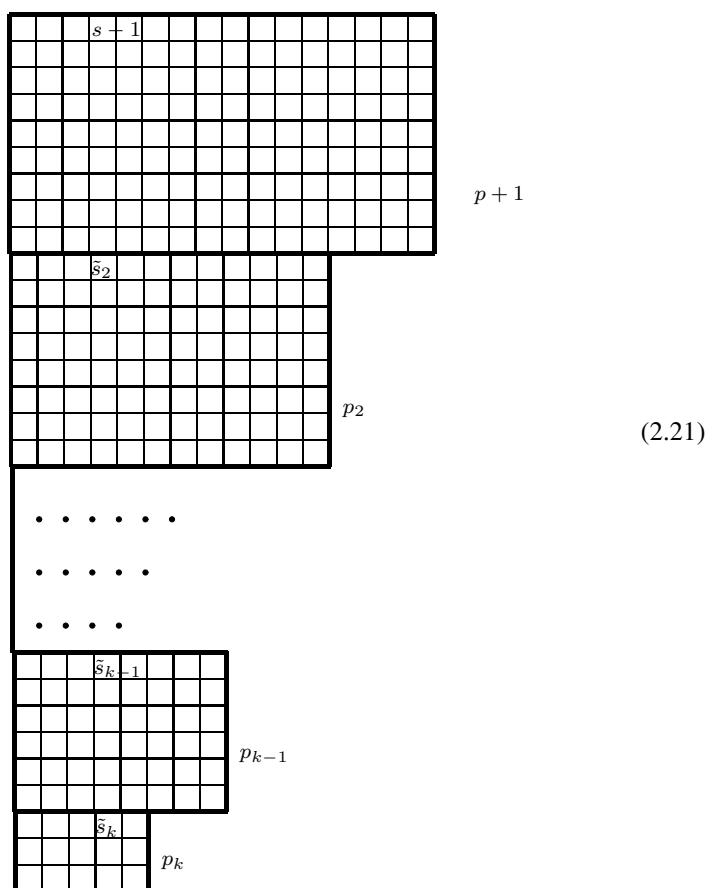
(Свертка любых двух касательных индексов A с $o(d - 1, 2)$ -инвариантной метрикой η_{AB} дает нуль.) Другими словами, для описания безмассовой частицы, ассоциированной с вакуумным представлением (2.11)

$$B_0^{d-1,0}(\underbrace{s, \dots, s}_p, s_{p+1}, \dots, s_q)$$

алгебры $o(d - 1) \subset o(d - 1, 2)$, мы предлагаем использовать p -форму связности (2.19), принимающую значения в представлении

$$B_0^{d-1,2}(\underbrace{s - 1, \dots, s - 1}_{p+1}, s_{p+1}, \dots, s_q)$$

AdS_d -алгебры $o(d-1, 2)$. Таким образом, предписание состоит в следующем: чтобы получить AdS_d -тензорное представление калибровочного поля, следует обрезать наименьший столбец и затем добавить самую длинную строку в диаграмме Юнга, соответствующей рассматриваемому вакуумному представлению. Калибровочным полем является p -форма, у которой p — это высота обрезанного столбца исходной вакуумной диаграммы Юнга. Тензоры, принадлежащие пространству $B_0^{d-1,2}(\underbrace{s-1, \dots, s-1}_{p+1}, s_{p+1}, \dots, s_q)$, изображаются следующим образом:



Набор всех возможных лоренц-ковариантных калибровочных полей p -форм, включая физическое, вспомогательные и экстраполя, ассоциированных с дан-

ным представлением AdS_d -алгебры, находится в однозначном соответствии с набором неприводимых представлений подалгебры Лоренца $o(d-1, 1) \subset o(d-1, 2)$, содержащихся в $B_0^{d-1,2}(\underbrace{s-1, \dots, s-1}_{p+1}, s_{p+1}, \dots, s_q)$. На практике лоренц-ковариантные поля отождествляются с различными независимыми бесследовыми V -поперечными компонентами (здесь V^A — это вектор компенсатора, введенный в п. 1.1) исходной $o(d-1, 2)$ бесследовой диаграммы Юнга. В частном случае гравитации данный механизм реализован в уравнении (1.3). Разложение произвольного поля смешанного типа симметрии приводит к набору лоренц-ковариантных полей p -форм с касательными индексами, образующими нижеследующие $o(d-1, 1)$ -диаграммы Юнга:

(2.22)

где

$$\tilde{s}_{i+1} \leq t_i \leq \tilde{s}_i \tag{2.23}$$

(считается, что $\tilde{s}_1 = s-1$ и $\tilde{s}_{k+1} = 0$). Соответствующие лоренц-ковариантные тензоры возникают при свертке части индексов исходного $o(d-1, 2)$ -тензора с компенсатором V^A и проекции на направление, ортогональное компенсатору V^A по отношению к оставшимся индексам. В диаграмме (2.22) индексы, свернутые с компенсатором, обозначены через \square . Они пропадают в конечной лоренцевской диаграмме, выделенной жирной линией, потому что компенсатор является, по определению, лоренц-инвариантным. Очевидно, что результат эквивалентен размерной редукции неприводимого тензора в размерность на единицу меньше*. Отметим, что в конечном наборе лоренц-ковариантных полей свертки компенсаторов с индексами не могут располагаться в одном столбце, т.е. никакие две клетки \square не могут быть расположены одна над другой. Данное свойство является следствием того, что произведение двух компенсаторов $V^A V^B$ есть симметричный тензор.

Таким образом, разложение AdS_d -калибровочного поля p -формы с касательными индексами, образующими бесследовую $o(d-1, 2)$ -диаграмму Юнга (2.21), в набор лоренц-ковариантных полей p -форм задается выражением

$$\Omega_{(p)} \rightarrow \bigoplus_{(t_1, \dots, t_k)} \omega_{(p)}^{(t_1, \dots, t_k)}, \tag{2.24}$$

в котором поля $\omega_{(p)}^{(t_1, \dots, t_k)}$, параметризованные целочисленными параметрами t_i (2.23), имеют касательные индексы, образующие различные бесследовые $o(d-1, 1)$ -диаграммы Юнга (2.22), (2.23).

Динамическая интерпретация различных лоренц-ковариантных полей такова:

- Физическое поле соответствует диаграмме (2.22) с $t_i = \tilde{s}_{i+1}$ для всех i , что эквивалентно обрезанию верхней строки в диаграмме Юнга (2.21). Это означает, что физическое поле отождествляется с V -поперечной компонентой AdS -поля (2.19), ассоциированной со сверткой $s-1$ индексов с V^A , т.е.

$$\begin{aligned} \omega_{(p)}^{a_1(s-1), \dots, a_p(s-1), a_{p+1}(s_{p+1}), \dots, a_q(s_q)} = \\ = \underbrace{V_{A_0} \dots V_{A_0}}_{s-1} \Omega_{(p)}^{A_0(s-1), a_1(s-1), \dots, a_q(s_q)}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

*Интерпретация диаграммы (2.22) является, до некоторой степени, схематичной в том отношении, что непосредственная размерная редукция неприводимой диаграммы Юнга путем сворачивания части индексов с компенсатором, вообще говоря, не приводит к неприводимому представлению в размерности на единицу меньше. Тем не менее можно видеть, что полный набор лоренц-ковариантных неприводимых компонент правильно воспроизводится диаграммами Юнга, очерченными жирной линией на диаграмме (2.22).

Отметим, что свертка любых s индексов поля $\Omega_{(p)}^{A_0(s-1), \dots, A_q(s_q)}$ с компенсатором V^A дает нуль в силу диаграммных свойств поля $\Omega_{(p)}^{A_0(s-1), \dots, A_q(s_q)}$.

- Вспомогательные поля имеют структуру касательных индексов, отличающуюся от физического поля на один дополнительный индекс. Таким образом, они соответствуют диаграммам (2.22) с $t_j = \tilde{s}_{j+1} + 1$ для некоторого j и $t_i = \tilde{s}_{i+1}$ для всех остальных i . Для диаграммы (2.21), составленной из k блоков, возникает k различных вспомогательных полей.

- Класс экстраполей включает все оставшиеся лоренцевские диаграммы (2.22), у которых на 2 и более индексов больше, чем у диаграммы физического поля.

Линеаризованные $(p+1)$ -формы кривизн высших спинов, ассоциированные с калибровочным полем p -формы (2.19)–(2.21), определяются как

$$R_{(p+1)}^{A_0(s-1), \dots, A_q(s_q)} = D_0 \Omega_{(p)}^{A_0(s-1), \dots, A_q(s_q)}, \quad (2.26)$$

где $o(d-1, 2)$ -ковариантная производная D_0 определена в соответствии с (2.10).

$(p+1)$ -форма линеаризованной кривизны явно инвариантна:

$$\delta R_{(p+1)}^{A_0(s-1), \dots, A_q(s_q)} = 0, \quad (2.27)$$

относительно калибровочных преобразований

$$\delta \Omega_{(p)}^{A_0(s-1), \dots, A_q(s_q)} = D_0 \xi_{(p-1)}^{A_0(s-1), \dots, A_q(s_q)} \quad (2.28)$$

с $(p-1)$ -формой калибровочного параметра $\xi_{(p-1)}^{A_0(s-1), \dots, A_q(s_q)}$ и удовлетворяет тождествам Бьянки

$$D_0 R_{(p+1)}^{A_0(s-1), \dots, A_q(s_q)} = 0, \quad (2.29)$$

что является следствием условия нулевой кривизны (1.6). Другим следствием условия нулевой кривизны является приводимость калибровочных преобразований (2.28). Существует набор калибровочных параметров и преобразований уровня $(l+2)$ ($0 \leq l \leq p-2$), имеющих вид

$$\delta \xi_{(p-l-1)}^{A_0(s-1), \dots, A_q(s_q)} = D_0 \xi_{(p-l-2)}^{A_0(s-1), \dots, A_q(s_q)}. \quad (2.30)$$

Закон калибровочного преобразования (2.28) воспроизводит точный вид преобразований (2.17), а также вид калибровочных преобразований для всех вспомогательных и экстраполей.

2.6. Реперная формулировка безмассовых фермионных полей. Формулировка безмассовых фермионных полей произвольного типа симметрии полностью аналогична приведенному выше анализу бозонного случая. Рассмотрим фермионное поле, описывающее после квантования унитарный модуль

AdS_d -алгебры симметрии $o(d-1, 2)$, индуцированный с вакуумного представления максимальной компактной подалгебры $o(2) \oplus o(d-1)$, характеризуемый некоторым значением энергии E_0 и спином $\mathbf{s} = (h_1, \dots, h_q)$ с $h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_q > 1/2$, где все $2h_i$ являются нечетными числами и $q \leq \nu = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$. Для диаграммы Юнга, ассоциированной с соответствующим спин-тензорным представлением алгебры $o(d-1)$, $s_i = (h_i - 1/2)$ есть длина i -й строки. Вакуумная энергия E_0 безмассовых фермионных полей дается выражением [57]:

$$E_0 = s_1 - p + d - \frac{3}{2}, \tag{2.31}$$

в котором p — это высота верхнего прямоугольного блока соответствующей $o(d-1)$ -диаграммы Юнга.

Введем лоренц-ковариантное *спин-тензорное* поле

$$\psi^{\alpha | a_1(s_1), a_2(s_2), \dots, a_q(s_q)}, \tag{2.32}$$

которое симметрично по каждой группе индексов $a_i(s_i)$ и является диаграммой Юнга типа $Y(s_1, s_2, \dots, s_q)$. α есть лоренцевский спинорный индекс.

Пусть спин-тензор (2.32) удовлетворяет условиям

$$(\gamma_{a_i} \gamma_{a_i} \gamma_{a_i})^{\alpha}_{\beta} \psi^{\beta | a_1(s_1), a_2(s_2), \dots, a_q(s_q)} = 0, \quad 0 < i \leq m, \tag{2.33}$$

и

$$\gamma_{a_i}^{\alpha}_{\beta} \psi^{\beta | a_1(s_1), a_2(s_2), \dots, a_q(s_q)} = 0, \quad m < i \leq q, \tag{2.34}$$

где γ_a — это матрицы Дирака; $\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\eta_{ab}$ и m есть некоторое неотрицательное целое число. Линейное пространство $o(d-1, 1)$ спин-тензоров (2.32), являющихся диаграммами Юнга типа $Y(s_1, \dots, s_q)$ и удовлетворяющих условиям (2.33), (2.34), будет обозначаться через $F_m^{d-1,1}(s_1, \dots, s_q)$ (соответственно, $F_m^{p,r}(s_1, \dots, s_q)$ для $o(p, r)$). Из условия (2.33) следует, что свертка любых двух пар индексов, принадлежащих любой из первых m строк, дает нуль. Также из условия (2.34) следует, что свертка двух индексов, принадлежащих любой из последних $q - m$ строк, дает нуль.

Для описания AdS_d -динамики безмассового фермиона спина \mathbf{s} введем лоренц-ковариантное спин-тензорное поле

$$\psi^{\alpha | a_1(s_1), a_2(s_2), \dots, a_q(s_q)}(x) \in F_p^{d-1,1}(s_1, \dots, s_q), \tag{2.35}$$

где p — это высота верхнего прямоугольного блока диаграммы Юнга типа $Y(s_1, s_2, \dots, s_q)$, т. е.

$$s = s_1 = s_2 = \dots = s_p > s_{p+1} \geq \dots \geq s_q > 0, \quad 0 < p \leq q. \tag{2.36}$$

По аналогии с бозонными полями поле метрического типа (2.35) следует заменить спин-тензорным полем p -формы*:

$$\Omega_{(p)}^{\hat{\alpha}} |A_0(s-1), \dots, A_q(s_q), \quad (2.37)$$

которое принимает значения в представлении

$$F_0^{d-1,2} \left(\underbrace{s-1, \dots, s-1}_{p+1}, s_{p+1}, \dots, s_q \right)$$

алгебры $o(d-1, 2)$. Здесь $\hat{\alpha}$ есть некоторый неприводимый $o(d-1, 2)$ -спинорный индекс, т.е. это либо майорановский, либо вейлевский спинор, либо их комбинация в том случае, когда это возможно.

Действие фоновой ковариантной производной на произвольный AdS_d -спин-тензор определяется стандартным образом:

$$\begin{aligned} D_0 \Upsilon^{\hat{\alpha}} |A_1(s_1), \dots, A_m(s_m) &= \\ &= d \Upsilon^{\hat{\alpha}} |A_1(s_1), \dots, A_m(s_m) + \frac{1}{2} \Omega_{BC} (\sigma^{BC})^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}} \wedge \Upsilon^{\hat{\beta}} |A_1(s_1), \dots, A_m(s_m) + \\ &+ s_1 \Omega_0^{A_1}{}_C \wedge \Upsilon^{\hat{\alpha}} |CA_1(s_1-1), \dots, A_m(s_m) + \dots + s_m \Omega_0^{A_m}{}_C \wedge \Upsilon^{\hat{\alpha}} |A_1(s_1), \dots, CA_m(s_m-1), \end{aligned} \quad (2.38)$$

где фоновая связность Ω_0^{AB} удовлетворяет условию нулевой кривизны (1.6) и

$$\sigma^{BC} = \frac{1}{4} [\gamma^B, \gamma^C], \quad \{\gamma_A, \gamma_B\} = 2\eta_{AB}.$$

Фермионная линеаризованная кривизна

$$R_{(p+1)}^{\hat{\alpha}} |A_0(s-1), \dots, A_q(s_q) = D_0 \Omega_{(p)}^{\hat{\alpha}} |A_0(s-1), \dots, A_q(s_q) \quad (2.39)$$

инвариантна:

$$\delta R_{(p+1)}^{\hat{\alpha}} |A_0(s-1), \dots, A_q(s_q) = 0, \quad (2.40)$$

относительно калибровочных преобразований

$$\delta \Omega_{(p)}^{\hat{\alpha}} |A_0(s-1), \dots, A_q(s_q) = D_0 \xi_{(p-1)}^{\hat{\alpha}} |A_0(s-1), \dots, A_q(s_q). \quad (2.41)$$

Физическое поле определяется как

$$\begin{aligned} \omega_{(p)}^{\alpha} |a_1(s-1), \dots, a_p(s-1), a_{p+1}(s_{p+1}), \dots, a_q(s_q) &= \\ &= \underbrace{V_{A_0} \dots V_{A_0}}_{s-1} \Omega_{(p)}^{\hat{\alpha}} |A_0(s-1), a_1(s-1), \dots, a_q(s_q). \end{aligned} \quad (2.42)$$

* Аналогичная конструкция была использована в работах [87, 88] для описания симметричных безмассовых фермионов в AdS_5 (см. разд. 4, 5).

Для фермионов все остальные лоренц-ковариантные компоненты поля

$$\Omega_{(p)}^{\hat{\alpha}} |A_0(s-1), \dots, A_q(s_q) \tag{2.43}$$

будут называться экстраполями. Физическое поле метрического типа строится так же, как и для бозонных полей:

$$\begin{aligned} \psi^{\alpha | a_1(s_1), a_2(s_2), \dots, a_q(s_q)}(x) = \\ = \omega^{\alpha | [a_1 \dots a_p]; a_1(s-1), \dots, a_p(s-1), a_{p+1}(s_{p+1}), \dots, a_q(s_q)}(x). \end{aligned} \tag{2.44}$$

В результате оно удовлетворяет условиям (2.33) и (2.34) и принадлежит пространству $F_p^{d-1,1}(s_1, \dots, s_q)$.

2.7. Действия высших спинов. Построив калибровочно-инвариантные линейаризованные кривизны (2.26) и (2.39), можно искать свободное действие высших спинов в виде [55]:

$$S_2 = \int_{\mathcal{M}^d} \alpha^{\dots}(V) \underbrace{E^{\dots} \wedge \dots \wedge E^{\dots}}_{d-2p-2} \wedge R_{(p+1)}^{\dots} \wedge R_{(p+1)}^{\dots}. \tag{2.45}$$

Здесь E — это фоновое поле репера; $\alpha^{\dots}(V)$ — это некоторые коэффициенты, параметризующие различные типы индексных сверток между кривизнами, полями репера и компенсаторами. Любое действие такого вида является калибровочно-инвариантным по отношению к полному набору калибровочных преобразований в силу соотношений (2.27), (2.28) и (2.40), (2.41).

Коэффициенты определяются из условия отщепления экстраполей, которое требует, чтобы действие не зависело от высших производных физического поля (см. также п. 1.2). В фермионном случае уравнения высших спинов должны быть первого порядка, что гарантировано, если вариация действия S_2 по отношению ко всем экстраполям тождественно равна нулю [56]. В бозонном случае уравнения высших спинов должны быть второго порядка. Вспомогательные поля выражаются через первые производные физического поля метрического типа $\Phi^{(s_1, \dots, s_q)}$ на решениях уравнений движения для вспомогательных полей. В результате полевые уравнения для бозонов будут второго порядка при условии, что вариация действия S_2 по отношению к экстраполям будет тождественно равна нулю [55]. Действие, удовлетворяющее условию отщепления экстраполей, будет по построению инвариантным относительно правильных преобразований высших спинов и приведет к инвариантным дифференциальным уравнениям второго порядка для поля метрического типа $\Phi^{a_1(s_1), a_2(s_2), \dots, a_q(s_q)}(x)$ в бозонном случае и для поля $\psi^{\alpha | a_1(s_1), a_2(s_2), \dots, a_q(s_q)}(x)$ в фермионном случае. В случае AdS_5 -бозонных и фермионных безмассовых полей смешанного типа симметрия такая программа была реализована в работе [91] и в случае AdS_d -безмассовых бозонных полей смешанного типа симметрии — в работе [92]. В следующем

разделе будет проиллюстрировано, как данная процедура работает для полей специального типа симметрии.

В качестве заключительного комментария отметим, что, так как калибровочные поля p -форм высших спинов должны возникать при процедуре калибрования неабелевых симметрий высших спинов, предложенный подход дает важную информацию о структуре этих симметрий и соответствующих (супер)алгебр высших спинов.

Отметим также, что по сравнению с другими формализмами, известными в литературе [47], наш подход дает меньшее число компонент произвольного поля смешанного типа симметрии. Это явление имеет место начиная с первого нетривиального примера поля, соответствующего диаграмме Юнга типа $Y(3, 2)$. Остается выяснить, является ли этот факт указанием на некоторого рода приводимость моделей [47], или он устраняется в результате выбора специальной калибровки, или он является особенностью AdS_d -динамики. По сравнению с другими примерами несимметричной динамики [48] в нашем подходе присутствует также большее число явных калибровочных симметрий.

3. ПРИМЕРЫ

3.1. Двухстрочные прямоугольные диаграммы. Рассмотрим произвольное двухстрочное прямоугольное лоренц-ковариантное бозонное поле, распространяющееся на фоне плоской или AdS_d -геометрии. Анализ, проводимый в данном разделе, во многих отношениях аналогичен рассмотрению полностью симметричных полей высших спинов в работах [33, 55].

Введем калибровочное поле 2-формы, которое образует по отношению к касательным индексам AdS_d -тензор, описываемый трехстрочной прямоугольной диаграммой Юнга типа $Y(s-1, s-1, s-1)$:

$$\Omega_{(2)}^{A(s-1), B(s-1), C(s-1)} = dx^m \wedge dx^n \Omega_{[mn]}^{A(s-1), B(s-1), C(s-1)}, \quad (3.1)$$

и подчиненный условию бесследовости

$$\Omega_{(2)}^{A(s-1), B(s-1), C(s-1)} \eta_{A(2)} = 0. \quad (3.2)$$

Все остальные следы также равны нулю в силу диаграммных свойств. Другими словами, $\Omega_{(2)} \in B_0^{d-1, 2}(s-1, s-1, s-1)$. Разложение на лоренц-ковариантные тензоры высших спинов дает

$$\Omega_{(2)}^{A(s-1), B(s-1), C(s-1)} \sim \bigoplus_{t=0}^{s-1} \omega_{(2)}^{a(s-1), b(s-1), c(t)}, \quad (3.3)$$

где все диаграммы Юнга в правой части (3.3) являются бесследовыми. В соответствии с предписанием разд. 1 лоренц-ковариантное поле 2-формы с нулевой третьей строкой ($t = 0$) называется физическим, поля с ненулевой третьей строкой будут вспомогательным ($t = 1$) и экстраполями ($t > 1$), они выражаются через производные физического поля посредством определенных связей. Мы не будем обсуждать структуру этих связей для экстраполей, так как они не дают вклада в свободные уравнения движения. Вспомогательное поле выражается через физическое посредством своих уравнений движения.

Калибровочные преобразования имеют вид

$$\delta\Omega_{(2)}^{A(s-1),B(s-1),C(s-1)} = D_0\xi_{(1)}^{A(s-1),B(s-1),C(s-1)}, \quad (3.4)$$

где 1-форма калибровочного параметра $\xi_{(1)}$ подчинена тем же условиям неприводимости, что и поле $\Omega_{(2)}$. В свою очередь, параметр $\xi_{(1)}$ приводит к калибровочным преобразованиям второго уровня

$$\delta\xi_{(1)}^{A(s-1),B(s-1),C(s-1)} = D_0\chi_{(0)}^{A(s-1),B(s-1),C(s-1)} \quad (3.5)$$

с параметром $\chi_{(0)}$, являющимся 0-формой.

3-формы линеаризованных кривизн высших спинов

$$R_{(3)}^{A(s-1),B(s-1),C(s-1)} = D_0\Omega_{(2)}^{A(s-1),B(s-1),C(s-1)} \quad (3.6)$$

инвариантны относительно калибровочных преобразований (3.4).

Согласно общей формуле (2.18) поле метрического типа

$$\Phi^{a(s),b(s)} = \omega^{[ab]; a(s-1), b(s-1)} \quad (3.7)$$

является частью физического поля, у которого мировые индексы 2-формы переведены в касательные. Другие компоненты поля $\omega_{(2)}^{[mn] a(s-1), b(s-1)}$ могут быть откалиброваны с помощью сдвиговых параметров $\xi_{(1)}^{\underline{m} a(s-1), b(s-1), c}$. Как следствие условия бесследовости (3.2), поле (3.7) удовлетворяет условиям двойной бесследовости:

$$\Phi^{a(s),b(s)}\eta_{a(2)}\eta_{b(2)} = 0. \quad (3.8)$$

Таким образом, $\Phi^{a(s),b(s)} \in B_2^{d-1,1}(s, s)$. Из (3.8) также следует, что

$$\Phi^{a(s),b(s)}\eta_{ab}\eta_{b(2)} = 0, \quad \Phi^{a(s),b(s)}\eta_{a(2)}\eta_{b(2)} + 2\Phi^{a(s),b(s)}\eta_{ab}\eta_{ab} = 0. \quad (3.9)$$

Эти соотношения воспроизводят следовые условия работы [48], в которой рассматривались поля смешанного типа симметрии с двумя строчками на пространстве Минковского.

Закон калибровочных преобразований имеет вид

$$\delta\Phi^{a(s),b(s)} = \mathcal{D}^b \Lambda^{a(s),b(s-1)} + (-)^s \mathcal{D}^a \Lambda^{b(s),a(s-1)}. \quad (3.10)$$

Калибровочный параметр Λ определен как

$$\Lambda^{a(s),b(s-1)} = \zeta^{a;a(s-1),b(s-1)} \quad (3.11)$$

и удовлетворяет следовым условиям следующего вида:

$$\Lambda^{a(s),b(s-1)} \eta_{a(2)} \eta_{a(2)} = 0, \quad \Lambda^{a(s),b(s-1)} \eta_{b(2)} = 0. \quad (3.12)$$

Будучи следствием калибровочного закона (3.4), это определение совместимо с условиями (3.8) и (3.10). Очевидно, что $\Lambda^{a(s),b(s-1)} \in B_1^{d-1,1}(s, s-1)$.

Калибровочные поля метрического типа (3.7), подчиненные следовым условиям (3.8), аналогичны полям, рассмотренным в работе [48]. Следовые условия, накладываемые на поля из работы [48], автоматически возникают в рамках нашего подхода как результат неприводимости поля 2-формы по касательным индексам. Однако отличие состоит в отсутствии требования бесследовости калибровочного параметра. Вместо этого наложены более слабые следовые условия (3.12), т. е. в рамках нашего подхода имеется больше явных калибровочных симметрий.

Будем искать P -инвариантное действие* в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}^d} \sum_{p=0}^{s-2} a(s,p) \epsilon_{A_1 \dots A_{d+1}} E^{A_7} \wedge \dots \wedge E^{A_d} V^{A_{d+1}} V_{D_1} \dots V_{D_{2(s-p-2)}} \wedge \\ \wedge R_{(3)}^{A_1 B(s-2), A_2 C(s-2), A_3 D(s-2-p) F(p)} \wedge \\ \wedge R_{(3)}^{A_4 B(s-2), A_5 C(s-2), A_6 D(s-2-p) F(p)}, \quad (3.13) \end{aligned}$$

в котором произвольные коэффициенты $a(s,p)$ следует зафиксировать на основе условия отщепления экстраполей. Такое действие имеет смысл только

*Подразумевается инвариантность относительно преобразований P -четности группы Лоренца.

в размерностях $d \geq 6$. Вариация имеет вид

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_2 = & \frac{(-)^d \lambda}{(d-5)} \int_{\mathcal{M}^d} \times \\ & \times \sum_{p=0}^{s-2} \left(\frac{(s-p+1)(d-9+2(s-p))}{(s-p-1)} a(s,p) + (s-p-1)a(s,p-1) \right) \times \\ & \times \epsilon_{A_1 \dots A_{d+1}} E^{A_6} \wedge \dots \wedge E^{A_d} V^{A_{d+1}} V_{D_1} \dots V_{D_{2(s-p)-3}} \wedge \\ & \wedge \left(R_{(3)}^{A_1 B(s-2), A_2 C(s-2), D(s-p-1) F(p)} \wedge \delta \Omega_{(2)}^{A_3 B(s-2), A_4 C(s-2), A_5 D(s-p-2)} F(p) - \right. \\ & \left. - \delta \Omega_{(2)}^{A_1 B(s-2), A_2 C(s-2), D(s-p-1) F(p)} \wedge R_{(3)}^{A_3 B(s-2), A_4 C(s-2), A_5 D(s-p-2)} F(p) \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Для наложения условия отщепления экстраполей следует потребовать, чтобы все слагаемые в (3.14) были равны нулю, за исключением вклада с $p = 0$. Это требование однозначно фиксирует коэффициенты $a(s, p)$ с точностью до нормировочного фактора $\tilde{a}(s)$:

$$a(p, s) = \tilde{a}(s) (-)^p \frac{(s-p)(s-p-1)(d-11+2(s-p))!!}{(s-p-2)!}. \quad (3.15)$$

После выбора подобным образом коэффициентов $a(p, s)$ действие зависит только от поля

$$\Omega_{(2)}^{A(s-1), B(s-1)} \equiv \Omega_{(2)}^{A(s-1), B(s-1), C(s-1)} V_{C(s-1)}, \quad (3.16)$$

которое автоматически является V -поперечным, и от V -поперечной части поля

$$\Omega_{(2)}^{A(s-1), B(s-1), C} \equiv \Omega_{(2)}^{A(s-1), B(s-1), CD(s-2)} V_{D(s-2)}. \quad (3.17)$$

Это, соответственно, физическое поле ($t = 0$) и вспомогательное поле ($t = 1$). Экстраполя не дают вклада в квадратичное действие, что гарантируется условием отщепления экстраполей. Вспомогательное поле $\omega_{(2)}^{a(s-1), b(s-1), c}$ выражается через производные физического поля $\omega_{(2)}^{a(s-1), b(s-1)}$ посредством своих уравнений движения. После этого подстановка выражения для вспомогательного поля $\omega_{(2)}^{a(s-1), b(s-1), c}$ обратно в действие приводит к действию, полностью выраженному в терминах поля метрического типа (3.7) и его вторых производных. Калибровочная инвариантность имеет место по построению. Плоский предел теории не дает дополнительных калибровочных симметрий. Этот факт находится в согласии с выводами работы [58], где было показано, что класс представлений группы Пуанкаре, соответствующий прямоугольным

диаграммам, допускает гладкую (без скачка степеней свободы) деформацию в пространство AdS_d . В итоге получившееся действие высших спинов обладает нужными калибровочными симметриями и приводит к правильному описанию свободной динамики в пространствах Минковского и AdS_d .

3.2. Двухстолбцовые диаграммы. Рассмотрим лоренц-ковариантное тензорное поле $\phi^{(s,p)}(x)$ на d -мерном пространстве-времени*:

$$\phi^{a[s], b[p]}(x) \equiv \phi^{[a_1 \dots a_s], [b_1 \dots b_p]}(x), \quad (3.18)$$

которое является антисимметричным по обеим группам индексов, удовлетворяет условию симметрии Юнга $\phi^{[a_1 \dots a_s, a_{s+1}] b_2 \dots b_p}(x) = 0$ и содержит все свои следы. Согласно терминологии разд. 2 тензор $\phi^{(s,p)}(x)$ будем называть полем *метрического типа*.

Считается, что высоты столбцов s и p удовлетворяют следующему неравенству:

$$0 < p \leq s \leq \nu. \quad (3.19)$$

Значение верхней границы в (3.19) различно для безмассовых полей в пространстве Минковского и AdS_d . Для пространства Минковского $\nu \equiv \nu_{\text{Mink}} = \left\lfloor \frac{d-2}{2} \right\rfloor$ является рангом малой группы $SO(d-2)$. Для AdS_d -пространства $\nu \equiv \nu_{AdS} = \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ является рангом вакуумной группы $SO(d-1)$. Отсюда следует неравенство $\nu_{\text{Mink}} \leq \nu_{AdS}$, позволяющее заключить, что теории безмассовых полей в AdS_d при взятии плоского предела могут приводить к дуальным описаниям безмассовых полей в пространстве Минковского**. Если $s > \nu_{AdS}$ и $0 < p \leq s$, то соответствующая AdS_d -теория высших спинов дуальна некоторой частной AdS_d -теории с параметрами \tilde{p} , \tilde{s} , удовлетворяющими (3.19).

Поле метрического типа $\phi^{(s,p)}(x)$ (3.18) является калибровочным полем с законом преобразования, заданным двумя типами параметров [47] (см. также формулу (2.15)):

$$\delta \phi^{(s,p)} = \partial S^{(s-1,p)} + \partial \Lambda^{(s,p-1)}, \quad (3.20)$$

в котором тензоры $S^{(s-1,p)}$ и $\Lambda^{(s,p-1)}$ содержат все свои следы и описываются диаграммами Юнга, полученными в результате отрезания клетки соответственно из первого и второго столбцов поля $\phi^{(s,p)}(x)$.

*Для набора антисимметризованных индексов используются конденсированные обозначения: $a[k] \equiv [a_1 \dots a_k]$. Индексы, обозначенные одной буквой, считаются антисимметризованными: $X^a Y^a \equiv \frac{1}{2!} (X^{a_1} Y^{a_2} - X^{a_2} Y^{a_1})$.

**Обсуждение дуальных формулировок свободных полей высших спинов в пространстве Минковского содержится в работах [50, 67, 68, 70].

Далее мы развиваем калибровочно-инвариантную AdS_d -теорию поля метрического типа $\phi^{(s,p)}(x)$ с произвольными значениями s и p , которые удовлетворяют (3.19). Перед тем, как начать изложение реперного формализма в случае двухстолбцовых полей, обсудим, как можно было бы поступить, чтобы получить AdS_d -теорию начиная с некоторого лагранжиана \mathcal{L} , инвариантного относительно (3.20) на плоском фоне. Общее предписание состоит в замене $\partial \rightarrow \mathcal{D}$, где \mathcal{D} есть фоновая лоренц-ковариантная производная, коммутирующая как $[\mathcal{D}, \mathcal{D}] \sim \lambda^2$, и добавлении массовоподобных слагаемых в \mathcal{L} , которые обеспечивают калибровочную инвариантность. Как мы знаем [57, 58], такая процедура не всегда является непротиворечивой для поля смешанного типа симметрии общего вида: только часть калибровочных симметрий может быть продеформирована в AdS_d . В рассматриваемом случае симметрия, которая выживает в AdS_d , соответствует калибровочному параметру $\Lambda^{(s,p-1)}$. Отсутствие одной из калибровочных симметрий на AdS_d приводит к разнице между физическими степенями свободы поля $\phi^{(s,p)}(x)$ на фоне плоской и AdS_d -геометрий. Баланс может быть восстановлен при введении поля Штюкельберга для отсутствующей симметрии $S^{(s-1,p)}$, которое, однако, может быть откалибровано при $\lambda \neq 0$. Плоский предел таким образом расширенных теорий описывает не одно, а два независимых поля [58, 64].

3.2.1. Калибровочные поля p -форм. Следуя общему предписанию разд. 2, мы описываем двухстолбцовое поле $\phi^{(s,p)}$ (3.18), распространяющееся в пространстве AdS_d , в терминах калибровочного поля p -формы *реперного типа*:

$$e_{(p)}^{a[s]} = e_{[m_1 \dots m_p]}^{[a_1 \dots a_s]} dx^{m_1} \wedge \dots \wedge dx^{m_p}. \quad (3.21)$$

Удобно заменить мировые индексы в (3.21) касательными индексами:

$$e^{[a_1 \dots a_s]; [b_1 \dots b_p]} \equiv e_{[m_1 \dots m_p]}^{[a_1 \dots a_s]} h^{m_1; b_1} \dots h^{m_p; b_p}, \quad (3.22)$$

где $h^{m; a}$ является фоновым полем репера на AdS_d .

При тензорном перемножении мировых и касательных индексов калибровочного поля p -формы реперного типа (3.21) возникает совокупность компонент:

$$e^{a[s]; b[p]} \sim \bigoplus_{i=0}^p \phi^{a[s+i], b[p-i]}. \quad (3.23)$$

Здесь каждая тензорная компонента $\phi^{a[s+i], b[p-i]}$ соответствует диаграмме Юнга с $(s+i)$ антисимметричными индексами в первом столбце, $(p-i)$ антисимметричными индексами во втором столбце и содержит все свои следы. Удобно каждую компоненту в (3.23) обозначить как $\phi^{(i)}$. Первая компонента $i=0$ в (3.23) отождествляется с полем метрического типа: $\phi^{(0)} \equiv \phi^{(s,p)}$ (3.18).

В принципе, калибровочного поля p -формы (3.21) достаточно для того, чтобы построить калибровочно-инвариантный функционал действия, который правильно описывает AdS_d -динамику калибровочного поля $\phi^{(s,p)}$. Однако для того, чтобы контролировать калибровочные симметрии явным образом, следует ввести дополнительные калибровочные поля. В рассматриваемом случае подходящий набор полей задается $e_{(p)}^{a[s]}$ и $\omega_{(p)}^{a[s+1]}$, которые согласно терминологии разд. 2 будем называть физической и вспомогательной p -формами.

$(p+1)$ -формы абелевых кривизн, ассоциированных с физическим и вспомогательным калибровочными полями p -форм, задаются как

$$r_{(p+1)}^{a[s]} = \mathcal{D}e_{(p)}^{a[s]} + h_b \wedge \omega_{(p)}^{a[s]b}, \quad \mathcal{R}_{(p+1)}^{a[s+1]} = \mathcal{D}\omega_{(p)}^{a[s+1]} - (s+1)\lambda^2 h^a \wedge e_{(p)}^{a[s]}. \quad (3.24)$$

Они инвариантны относительно калибровочных преобразований с параметрами $\Lambda_{(p-1)}^{a[s]}$ и $\xi_{(p-1)}^{a[s+1]}$, являющимися $(p-1)$ -формами:

$$\delta e_{(p)}^{a[s]} = \mathcal{D}\Lambda_{(p-1)}^{a[s]} + h_b \wedge \xi_{(p-1)}^{a[s]b}, \quad \delta \omega_{(p)}^{a[s+1]} = \mathcal{D}\xi_{(p-1)}^{a[s+1]} - (s+1)\lambda^2 h^a \wedge \Lambda_{(p-1)}^{a[s]}. \quad (3.25)$$

В частности, структура калибровочной инвариантности (3.25) требует, чтобы кривизны удовлетворяли тождествам Бьянки:

$$\mathcal{D}r_{(p+1)}^{a[s]} + h_b \wedge \mathcal{R}_{(p+1)}^{a[s]b} = 0, \quad \mathcal{D}\mathcal{R}_{(p+1)}^{a[s+1]} - (s+1)\lambda^2 h^a \wedge r_{(p+1)}^{a[s]} = 0. \quad (3.26)$$

Калибровочные преобразования (3.25) приводимы. Существует набор калибровочных преобразований уровня $(l+2)$ ($0 \leq l \leq p-2$) вида

$$\begin{aligned} \delta \Lambda_{(p-l-1)}^{a[s]} &= \mathcal{D}\Lambda_{(p-l-2)}^{a[s]} + h_b \wedge \xi_{(p-l-2)}^{a[s]b}, \\ \delta \xi_{(p-l-1)}^{a[s+1]} &= \mathcal{D}\xi_{(p-l-2)}^{a[s+1]} - (s+1)\lambda^2 h^a \wedge \Lambda_{(p-l-2)}^{a[s]}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Роль калибровочных параметров сдвига $\xi_{(p-1)}^{a[s+1]}$ в преобразованиях (3.25) состоит в том, чтобы скомпенсировать все компоненты физического поля p -формы в (3.23) при $i > 0$. Это может быть легко достигнуто при разложении калибровочных параметров $\xi_{(p-1)}^{a[s+1]}$, аналогичном (3.23):

$$\xi_{[s+1]; b[p-1]}^a \sim \bigoplus_{i=0}^{p-1} \xi_{[s+i+1]; b[p-i-1]}^a, \quad (3.28)$$

в котором тензоры в правой части имеют диаграммные свойства Юнга и содержат все свои следы. Таким образом, путем фиксации калибровки и использования сдвиговых параметров $\xi_{(p-1)}^{a[s+1]}$ калибровочное поле p -формы (3.21) сводится к компоненте $\phi^{(0)}$, соответствующей $i = 0$ в разложении (3.23),

которую следует отождествить с полем метрического типа (3.18). Часть преобразований (3.25) с производными может быть проанализирована таким же способом, а именно: введем разложение калибровочных параметров $\Lambda_{(p-1)}^{a[s]}$, аналогичное (3.28):

$$\Lambda^{a[s]; b[p-1]} \sim \bigoplus_{i=0}^{p-1} \Lambda^{a[s+i], b[p-i-1]}, \quad (3.29)$$

в котором тензоры в правой части имеют диаграммные свойства Юнга и содержат все свои следы. Тогда из (3.23) и (3.29) находим, что поле метрического типа $\phi^{(0)} \equiv \phi^{(s,p)}$ преобразуется согласно

$$\delta\phi^{(0)} = \mathcal{D}\Lambda^{(0)}, \quad (3.30)$$

где калибровочный параметр $\Lambda^{(0)}$ является первой компонентой $i = 0$ в (3.29) и имеет тот же тип симметрии Юнга, что и $\Lambda^{(s,p-1)}$ в (3.20). Как следствие из (3.27), калибровочное преобразование (3.30) является приводимым до p -го уровня.

Следует отметить, что наш подход сформулирован таким образом, что он приводит к калибровочной симметрии, являющейся правильной симметрией для поля метрического типа $\phi^{(s,p)}$ на фоне AdS_d только с параметром $\Lambda^{(s,p-1)}$ (3.20). Другой тип калибровочной симметрии с параметром $S^{(s,p-1)}$ (3.20) не имеет места в AdS_d -формулировке, а появляется в плоском пределе $\lambda = 0$. Мы обсудим это явление ниже.

На лоренц-ковариантные калибровочные поля p -форм, введенные для того, чтобы описать поле смешанного типа симметрии в AdS_d , можно смотреть как на результат разложения по отношению к группе Лоренца калибровочного поля p -формы, несущей специальное неприводимое представление AdS_d алгебры $o(d-1, 2)$. В нашем случае поля $e_{(p)}^{a[s]}$ и $\omega_{(p)}^{a[s+1]}$ получаются из следующего калибровочного поля AdS_d p -формы:

$$\Omega_{(p)}^{A[s+1]} \sim e_{(p)}^{a[s]} \oplus \omega_{(p)}^{a[s+1]}. \quad (3.31)$$

С помощью вектора компенсатора (см. п. 1.1) изоморфизм (3.31) принимает точный вид:

$$\Omega_{(p)}^{A[s+1]} = \omega_{(p)}^{A[s+1]} + \lambda(s+1) V^A e_{(p)}^{A[s]}, \quad (3.32)$$

дополненный условиями поперечности:

$$e_{(p)}^{A[s-1]C} V_C = 0, \quad \omega_{(p)}^{A[s]C} V_C = 0. \quad (3.33)$$

Появление постоянной λ в (3.32) мотивировано различными массовыми размерностями физического и вспомогательного полей p -форм, т. к. на уровне

уравнений движения вспомогательное поле выражается через первые производные физического поля.

В AdS_d -ковариантном формализме калибровочные преобразования и кривизны задаются выражениями ($0 \leq l \leq p-2$)

$$R_{(p+1)}^{A[s+1]} = D_0 \Omega_{(p)}^{A[s+1]}, \quad \delta \Omega_{(p)}^{A[s+1]} = D_0 \xi_{(p-1)}^{A[s+1]}, \quad \delta \xi_{(p-l-1)}^{A[s+1]} = D_0 \xi_{(p-l-2)}^{A[s+1]}, \quad (3.34)$$

где

$$R_{(p+1)}^{A[s+1]} \sim r_{(p+1)}^{a[s]} \oplus \mathcal{R}_{(p+1)}^{a[s+1]}, \quad \xi_{(p-l-1)}^{A[s+1]} \sim \Lambda_{(p-l-1)}^{a[s]} \oplus \xi_{(p-l-1)}^{a[s+1]} \quad (3.35)$$

и ковариантная производная D_0 берется по отношению к фоновой $o(d-1, 2)$ -связности. Тожества Бьянки $D_0 R_{(p+1)}^{A[s+1]} = 0$ являются следствиями условия нулевой кривизны (1.6).

3.2.2. Динамика. Согласно предписанию п. 2.7 наиболее общее действие для двухстолбцовых полей имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 = & \frac{\kappa_1}{\lambda^2} \int_{\mathcal{M}_d} H_{A[2p+2]} \wedge R_{(p+1)}^{A[p+1]B[s-p]} \wedge R_{(p+1)}^{A[p+1]}{}_{B[s-p]} + \\ & + \frac{\kappa_2}{\lambda^2} \int_{\mathcal{M}_d} H_{A[2p+2]} \wedge R_{(p+1)}^{A[p+1]B[s-p-1]C} \wedge R_{(p+1)}^{A[p+1]}{}_{B[s-p-1]}{}^D V_C V_D, \quad (3.36) \end{aligned}$$

где используется обозначение $H_{A[m]} = \epsilon_{A_1 \dots A_m B_{m+1} \dots B_{d+1}} h^{B_{m+1}} \wedge \dots \wedge h^{B_d} V^{B_{d+1}}$, а $\kappa_{1,2}$ есть произвольные безразмерные константы. Произвол в выборе $\kappa_{1,2}$ может быть фиксирован с точностью до общего множителя перед действием (3.36) путем добавления члена с полной производной:

$$\mathcal{O} = \int_{\mathcal{M}_d} d \left(H_{A[2p+3]} \wedge R_{(p+1)}^{A[p+2]B[s-p-1]} \wedge R_{(p+1)}^{A[p+1]}{}_{B[s-p-1]}{}^C V_C \right). \quad (3.37)$$

Отметим, что вид действия накладывает естественное ограничение $p \leq \left\lfloor \frac{d-2}{2} \right\rfloor$, в то время как s не ограничен.

Вариация действия (3.36) приводит к уравнениям движения:

$$\epsilon^{A[p+1]}{}_{B[p+1]C[d-2p-1]} h^{C_1} \wedge \dots \wedge h^{C_{d-2p-1}} \wedge R_{(p+1)}^{A[s-p]B[p+1]} = 0. \quad (3.38)$$

Для того чтобы прояснить динамическое содержание этих уравнений, удобно проводить анализ в терминах лоренц-ковариантных компонент. Введем разложение тензоров кривизны (3.24), аналогичное (3.23):

$$r^{a[s]; b[p+1]} \sim \bigoplus_{i=0}^{p+1} r^{a[s+i], b[p-i+1]}, \quad \mathcal{R}^{a[s+1]; b[p+1]} \sim \bigoplus_{i=0}^{p+1} \mathcal{R}^{a[s+i+1], b[p-i+1]}, \quad (3.39)$$

в котором тензоры в правых частях обладают свойствами симметрии Юнга и содержат все свои следы. В результате прямого вычисления показывается, что уравнения (3.38) могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} p < s : \quad r_{(p+1)}^{a[s]} &= h_{b_1} \wedge \dots \wedge h_{b_{p+1}} T^{a[s], b[p+1]}, \\ p = s : \quad r_{(p+1)}^{a[s]} &= 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

и

$$p \leq s : \quad \mathcal{R}_{(p+1)}^{a[s+1]} = h_{b_1} \wedge \dots \wedge h_{b_{p+1}} C^{a[s+1], b[p+1]} \quad (3.41)$$

с произвольными бесследовыми 0-формами $T^{a[s], b[p+1]}$ и $C^{a[s+1], b[p+1]}$, соответствующими двухстолбцовым диаграммам Юнга. Все остальные компоненты кривизн (3.39) равны нулю. Следует заметить, что бесследовость для $T^{a[s], b[p+1]}$ имеет место только при $\lambda \neq 0$ (это следует из тождеств Бьянки).

В случае $p = s$, который соответствует физическому полю метрического типа, описываемому прямоугольной диаграммой Юнга, 0-форма C является *примарным* тензором Вейля [89]. Он параметризует те компоненты кривизн, которые не исчезают на массовой поверхности и не могут быть выражены через производные других компонент кривизны. В случае, когда физическое поле метрического типа описывается непрямоугольной диаграммой Юнга с $p < s$, примарным тензором Вейля является 0-форма T , а 0-форма C есть вторичный тензор Вейля [89], выражающийся через первые производные примарного тензора Вейля T на основе тождеств Бьянки.

Обратимся теперь к подробному анализу уравнений (3.40), (3.41). По аналогии с (3.23) введем разложение p -формы вспомогательного поля:

$$\omega^{a[s+1]; b[p]} \sim \bigoplus_{i=0}^p \omega^{a[s+i+1], b[p-i]}. \quad (3.42)$$

Тогда все компоненты $\omega^{(i)}$ вспомогательного поля p -формы (3.42) могут быть выражены через первые производные компонент $\phi^{(i)}$, $0 \leq i \leq p$, физического поля p -формы:

$$\omega^{(i)} = \mathcal{D}\phi^{(i)} + \mathcal{D}\phi^{(i+1)}, \quad 0 \leq i \leq p. \quad (3.43)$$

Это выражение является следствием того факта, что вспомогательное поле входит в физическую кривизну (3.24) без производных и уравнения (3.40) являются на самом деле линейными однородными уравнениями по отношению к компонентам вспомогательного поля p -формы. Отметим, что при $p < s$ компонента кривизны $T^{a[s], b[p+1]}$ не равна нулю и не содержит компонент вспомогательного поля p -формы (3.42). Поэтому число линейных однородных уравнений (3.40) в точности совпадает с числом компонент вспомогательной p -формы. Другими словами, выражение (3.40) является связью, которая

позволяет выразить вспомогательное поле через производные физического поля.

Как обсуждалось выше, характерная черта калибровочного параметра $\xi_{(p-1)}^{a[s+1]}$ состоит в том, что он входит алгебраически в калибровочные преобразования для физического поля p -формы (3.25) и через производную — для вспомогательного поля p -формы. Из (3.28) следует, что калибровочные преобразования (3.25) могут быть приведены к виду

$$\delta\phi^{(i)} = \xi^{(i-1)}, \quad 1 \leq i \leq p; \quad \delta\omega^{(j)} = \mathcal{D}\xi^{(j)} + \mathcal{D}\xi^{(j-1)}, \quad 0 \leq j \leq p. \quad (3.44)$$

Объединяя эти выражения с (3.43) и полагая равными нулю все избыточные компоненты физического поля p -формы, путем фиксации калибровки находим, что вспомогательное поле выражается через физическое как

$$\omega^{(0)} = \mathcal{D}\phi^{(0)}. \quad (3.45)$$

Вследствие соотношений (3.41) динамические уравнения движения второго порядка на физическое поле метрического типа $\phi^{(s,p)}$ возникают как след компоненты $\mathcal{R}^{(0)}$ (3.39):

$$\mathcal{R}^{a[s]c, b[p]} = 0, \quad (3.46)$$

в которой вспомогательное поле выражено через первые производные физического согласно (3.45). Очевидно, что тензор в левой части (3.46) имеет тот же тип симметрии Юнга, что и поле метрического типа $\phi^{(s,p)}$.

Для того чтобы найти точный вид динамических уравнений движения, упростим вычисления следующим образом. Введем операторы рождения и уничтожения $\alpha_i^a, \bar{\alpha}_j^b$, $i, j = 1, 2$, определенные на фоковском вакууме $\bar{\alpha}_c^i|0\rangle = 0$ и удовлетворяющие алгебре

$$\{\bar{\alpha}_a^i, \alpha_b^j\} = \delta^{ij}\eta_{ab}, \quad \{\alpha_a^i, \alpha_b^j\} = 0, \quad \{\bar{\alpha}_a^i, \bar{\alpha}_b^j\} = 0. \quad (3.47)$$

Следующие обозначения удобны при вычислениях:

$$L_{ij} = \bar{\alpha}_i^a \bar{\alpha}_{ja}, \quad T_{ij} = \alpha_i^a \bar{\alpha}_{ja}, \quad N_{ij} = \alpha_i^a \alpha_{ja}, \quad D_i = \alpha_i^a \mathcal{D}_a, \quad \bar{D}_i = \bar{\alpha}_i^a \mathcal{D}_a. \quad (3.48)$$

В терминах фоковского пространства поле метрического типа задается в виде

$$|\phi\rangle = \phi_{[a_1 \dots a_s], [b_1 \dots b_p]} \alpha_1^{a_1} \dots \alpha_1^{a_s} \alpha_2^{b_1} \dots \alpha_2^{b_p} |0\rangle \quad (3.49)$$

и удовлетворяет условиям

$$T_{12}|\phi\rangle = 0, \quad T_{11}|\phi\rangle = s_1|\phi\rangle, \quad T_{22}|\phi\rangle = s_2|\phi\rangle, \quad (3.50)$$

отражающим его диаграммные свойства.

В терминах операторов (3.48) вспомогательное поле (3.45) и калибровочные преобразования (3.30) приобретают вид

$$|\omega\rangle = D_1|\phi\rangle, \quad (3.51)$$

$$\delta|\phi\rangle = \left(D_2 - \frac{1}{s-p+1} D_1 T_{21} \right) |\Lambda\rangle. \quad (3.52)$$

Компонента $i = 0$ разложения (3.39) $|\mathcal{R}^{(0)}\rangle$ выражается в виде

$$|\mathcal{R}^{(0)}\rangle = \left(D_2 - \frac{1}{s-p+1} D_1 T_{21} \right) |\omega\rangle - \lambda^2(s-p+2)N_{12}|\phi\rangle. \quad (3.53)$$

Подставляя выражение для вспомогательного поля (3.51) в кривизну (3.53) и вычисляя след $L_{12}|\mathcal{R}^{(0)}\rangle = 0$ (3.46), мы находим уравнения движения:

$$\left(\mathcal{D}^2 - D_1 \bar{D}_1 - D_2 \bar{D}_2 - D_1 D_2 L_{12} + \lambda^2 N_{12} L_{12} + \lambda^2 (d(p-1) + 2p - p^2 + s) \right) |\phi\rangle = 0, \quad (3.54)$$

где ковариантный оператор Д'Аламбера \mathcal{D}^2 задается формулой (2.9).

В калибровке $\bar{D}_i|\phi\rangle = 0$ и $L_{12}|\phi\rangle = 0$ уравнения (3.54) принимают вид

$$\left(\mathcal{D}^2 + \lambda^2 (d(p-1) + 2p - p^2 + s) \right) |\phi\rangle = 0. \quad (3.55)$$

Чтобы сравнить (3.55) с уже известными результатами, мы воспроизводим здесь уравнения высших спинов из работы [57], записанные в ковариантной калибровке для произвольных безмассовых полей смешанного типа симметрии $\phi^{(h_1, \dots, h_\nu)}$, соответствующих AdS_d -представлениям $D(E_0, \mathbf{s})$ с энергией E_0 , лежащей на границе унитарности, и спином $\mathbf{s} = (h_1, \dots, h_\nu)$ (h_l — это длины строк соответствующей бесследовой $o(d-1)$ -диаграммы Юнга и $\nu \equiv \nu_{AdS}$ — это ранг $o(d-1)$):

$$\left(\mathcal{D}^2 - \lambda^2 (h_k - k - 1)(h_k - k - 2 + d) + \lambda^2 \sum_{l=1}^{\nu} h_l \right) \phi^{(h_1, \dots, h_\nu)} = 0. \quad (3.56)$$

Здесь h_k — это длина верхнего прямоугольного блока и k — это номер нижней строки в этом блоке (т. е. k — это высота блока). Случай двухстолбцовых диаграмм Юнга соответствует

$$k = p, \quad h_k = 2, \quad h_l = \begin{cases} 2, & 1 \leq l \leq p, \\ 1, & p < l \leq s. \end{cases} \quad (3.57)$$

Подставляя эти значения в (3.56), мы действительно приходим к уравнениям (3.55).

Следует отметить, что уравнения (3.56) справедливы в четных размерностях для любого h_l и в нечетных размерностях при $h_{(d-1)/2} = 0$ [57] и не должны считаться заведомо справедливыми для самодуальных и антисамодуальных представлений, которые появляются при ненулевых $\pm h_{(d-1)/2}$. В нашей формулировке $h_{(d-1)/2}$ может принимать ненулевые значения и на самом деле входит в теорию только как $|h_{(d-1)/2}|$. Мы считаем, что наши уравнения описывают сумму неприводимых представлений с $-h_{(d-1)/2}$ и $+h_{(d-1)/2}$.

Обсудим теперь плоский предел $\lambda = 0$ полевых уравнений (3.54). Оказывается, что в дополнение к симметрии, определенной выражением (3.52), появляется новая симметрия $\delta|\phi\rangle = \partial_1|S\rangle$. В результате общие калибровочные преобразования принимают вид

$$\delta|\phi\rangle = \partial_1|S\rangle + \left(\partial_2 - \frac{1}{s-p+1} \partial_1 T_{21} \right) |\Lambda\rangle, \quad (3.58)$$

в котором фоковский вектор $|S\rangle$ ассоциирован с тензором $S^{(s-1,p)}$ (3.20) и операторы ∂_i получены из D_i (3.48) путем замены $\mathcal{D}^a \rightarrow \partial^a$. Можно непосредственно убедиться в том, что уравнения (3.54) действительно являются инвариантными относительно калибровочных преобразований (3.58) с параметром $|S\rangle$ при $\lambda = 0$. Однако простейший способ доказать эту инвариантность состоит в наблюдении того, что вспомогательное поле, будучи выраженным через физическое, является инвариантным выражением по отношению к $\delta|\phi\rangle = \partial_1|S\rangle$. Таким образом, эта дополнительная инвариантность следует для уравнений движения на плоском фоне.

4. СВОБОДНЫЕ ФЕРМИОННЫЕ ПОЛЯ В AdS_5

Начиная с этого раздела мы переходим к построению нелинейной системы полностью симметричных полей в пространстве AdS_5 . С этой целью построено свободное фермионное действие в явно калибровочно-инвариантном виде, проанализирована его общая структура и показано, что с точностью до вкладов с полными производными произвол в коэффициентах сводится к общему фактору перед действием данного спина. Существенным моментом оказывается использование мультиспинорного описания AdS_5 -полей, которое, в свою очередь, основано на хорошо известном изоморфизме между AdS_5 -алгеброй $o(4,2)$ и алгеброй $su(2,2)$. Полученные результаты дополняют спинорное описание AdS_5 -бозонных полей высших спинов, предложенное в работе [33]. Следует заметить, что полностью симметричные фермионные поля высших спинов исходно были рассмотрены в рамках лоренц-ковариантных спин-тензоров и соответствующие свободные действия были построены в [56]. Однако описание с помощью спин-тензоров, по-видимому,

является неадекватным проблеме построения взаимодействия, потому что уже на свободном уровне рассмотрения возникают большие технические трудности. С другой стороны, как мы увидим, анализ в терминах мультиспиноров существенно проще.

4.1. Предварительные сведения. Приведем основные факты $su(2, 2)$ -спиринового формализма. Аналогично работе [33] введем набор осцилляторов:

$$[a_\alpha, b^\beta]_* = \delta_\alpha^\beta, \quad [a_\alpha, a_\beta]_* = [b^\alpha, b^\beta]_* = 0, \quad \alpha, \beta = 1 \div 4, \quad (4.1)$$

где звездочка $*$ обозначает произведение по Вейлю:

$$(A \star B)(a, b) = A(a, b) \exp(\Delta) B(a, b), \quad (4.2)$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial a_\alpha}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial b^\alpha}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial b^\alpha}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial a_\alpha}} \right),$$

и коммутаторы берутся по отношению к \star -произведению. Бесследовые билинейные комбинации t_α^β из a_α и b^β , коммутирующие с $a_\alpha b^\alpha$, являются генераторами $sl_4(\mathbb{C})$ -алгебры [33, 75]. Алгебра $su(2, 2)$ является вещественной формой $sl_4(\mathbb{C})$ и возникает из условия вещественности $\bar{a}_\alpha = b^\beta C_{\beta\alpha}$, $\bar{b}^\alpha = C^{\alpha\beta} a_\beta$, где черта обозначает комплексное сопряжение, $C^{\alpha\beta}$ и $C_{\beta\alpha}$ есть некоторые вещественные антисимметричные матрицы (матрицы «зарядового сопряжения»), удовлетворяющие $C_{\alpha\gamma} C^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\beta$. Осцилляторы b^α и a_α образуют фундаментальное и сопряженное фундаментальному представлению алгебры $su(2, 2)$, эквивалентные двум спиновым представлениям алгебры $o(4, 2)$.

AdS_5 -гравитационные поля отождествляются с 1-формой связности, принимающей значение в AdS_5 -алгебре $su(2, 2)$ (см. п. 1.1):

$$\Omega = \Omega^\alpha_\beta t_\alpha^\beta. \quad (4.3)$$

Введем поле компенсатора [33, 71], которое является антисимметричным биспинором*: $V^{\alpha\beta} = -V^{\beta\alpha}$, и подчинено условию нормировки $V_{\alpha\gamma} V^{\beta\gamma}$. Так как подалгебра Лоренца отождествляется со стабилизатором биспинора $V^{\alpha\beta}$, справедливы следующие соотношения для поля репера $E^{\alpha\beta}$ и спиновой связности W^α_β : $E^{\alpha\beta} = DV^{\alpha\beta}$, $W^\alpha_\beta = \Omega^\alpha_\beta + \frac{1}{2} E^{\alpha\gamma} V_{\gamma\beta}$, где явная зависимость от космологического параметра λ опущена и ковариантная производная D берется по отношению к 1-форме связности (4.3).

*Мы будем рассматривать $V^{\alpha\beta}$ в качестве симплектической формы, которая позволяет поднимать и опускать спиновые индексы лоренц-ковариантным образом: $A^\alpha = V^{\alpha\beta} A_\beta$, $A_\alpha = A^\beta V_{\beta\alpha}$.

Тензор кривизны, ассоциированный с полями (4.3), имеет вид

$$R_\alpha^\beta = d\Omega_\alpha^\beta + \Omega_\alpha^\gamma \wedge \Omega_\gamma^\beta. \quad (4.4)$$

AdS_5 -фоновая геометрия определена условием нулевой кривизны $R^\alpha_\beta = 0$. Фоновые поля репера и спиновой связности, являющиеся решением условия нулевой кривизны, будут обозначаться как h^α_β и $w_0^\alpha_\beta$.

В последующих разделах мы применим представленный спинорный подход для описания AdS_5 -фермионных полей высших спинов как $su(2, 2)$ -мультиспиноров. Будет показано, что фермионные безмассовые поля, соответствующие полностью симметричным γ -поперечным спин-тензорным представлениям малой группы Вигнера $SO(3)$, описываются как $su(2, 2)$ -бесследовые мультиспиноры $\Omega_{(\beta_1 \dots \beta_m)}^{(\alpha_1 \dots \alpha_m)} = dx^{\underline{n}} \Omega_{\underline{n} \beta(n)}^{\alpha(m)}$ с $|m - n| = 1$.

4.2. Фермионные поля. С учетом результатов работы [56] фермионные AdS_5 -безмассовые поля высших спинов, соответствующие полностью симметричным неприводимым спин-тензорным представлениям малой группы $SO(3)$, могут быть описаны как калибровочные поля 1-форм с определенной спин-тензорной структурой лоренцевских касательных индексов (см. также п. 2.6). В этом разделе мы переформулируем результаты работы [56] в терминах $su(2, 2)$ -ковариантных мультиспиноров. Будет использован тот факт, что все требуемые лоренц-ковариантные тензоры высших спинов возникают при размерной редукции некоторого специального представления группы $o(4, 2)$ [33] (см. п. 2.6).

Согласно [56] для описания $5d$ -безмассового поля спина $s' = s + 3/2$ должен быть введен набор 1-форм $dx^{\underline{n}} \omega_{\underline{n}}^{\alpha | a(s), b(t)}$ с фиксированным значением параметра s и произвольным параметром t , $0 \leq t \leq s$. Индекс $\alpha = 1 \div 4$ есть дираковский спинорный индекс, $a, b = 0 \div 4$ есть лоренцевские векторные индексы, подчеркнутые индексы $\underline{m}, \underline{n} = 0 \div 4$ используются для мировых индексов в 5-мерном пространстве-времени. Эти тензоры описываются $o(4, 1)$ -бесследовыми диаграммами Юнга по отношению к касательным векторным индексам и удовлетворяют условию γ -поперечности. Поле $\omega_{\underline{n}}^{\alpha | a(s), b(0)}$ является физическим полем спина s' . Все остальные поля, с $t > 0$, являются экстраполями, необходимыми для построения кривизн высших спинов. Будет продемонстрировано, что эти поля не дают вклада в свободное действие вследствие условия отщепления экстраполей.

Совокупность полей 1-форм высших спинов с $0 \leq t \leq s$ может быть проинтерпретирована как результат размерной редукции поля 1-формы с касательными индексами неприводимого спин-тензорного представления AdS_5 алгебры $o(4, 2)$, описываемого бесследовой двухстрочной диаграммой Юнга: $\Omega^{\hat{\alpha} | A(s), B(s)} \equiv dx^{\underline{n}} \Omega_{\underline{n}}^{\hat{\alpha} | A(s), B(s)}$, $A, B = 0 \div 5$, $\hat{\alpha} = 1 \div 8$, которая подчинена условию Γ -поперечности. Каждый спин появляется дважды, т. к. при размерной редукции $6d$ -дираковский спинор распадается на два $5d$ -спинора.

Рассмотрим соответствие между $o(4, 2)$ -прямоугольным представлением и его $su(2, 2)$ -мультиспинорным аналогом. Имеет место следующий изоморфизм:

$$\Omega_{\beta^{(s)}}^{\alpha^{(s+1)}} \oplus \bar{\Omega}_{\beta^{(s+1)}}^{\alpha^{(s)}} \sim \Omega^{\hat{\alpha}|A(s), B(s)}. \quad (4.5)$$

Взаимно сопряженные мультиспиноры считаются бесследовыми:

$$\Omega_{\beta^{(s-1)}\gamma}^{\alpha^{(s)}\gamma} = \bar{\Omega}_{\beta^{(s)}\delta}^{\alpha^{(s-1)}\delta} = 0. \quad (4.6)$$

Простейший способ установить этот изоморфизм состоит в сравнении размерностей представлений.

Для разложения мультиспинора $\Omega_{\beta^{(s)}}^{\alpha^{(s+1)}}$ на неприводимые лоренц-ковариантные тензоры используем компенсатор $V_{\alpha\beta}$:

$$\Omega_{\beta^{(s)}}^{\alpha^{(s+1)}} = \sum_{t=0}^s \omega^{\alpha^{(s+1)}\gamma^{(t)}, \gamma^{(s-t)}} V_{\beta^{(s)}, \gamma^{(s)}}, \quad (4.7)$$

где $V_{\alpha^{(m)}, \beta^{(m)}}$ обозначает $V_{\alpha_1\beta_1} V_{\alpha_2\beta_2} \cdots V_{\alpha_m\beta_m}$. Аналогичное разложение имеет место и для сопряженного спинора $\bar{\Omega}_{\beta^{(s+1)}}^{\alpha^{(s)}}$. Лоренц-ковариантные поля высших спинов $\omega^{\alpha^{(s+t+1)}, \beta^{(s-t)}}$, $0 \leq t \leq s$, описываются $su(2, 2)$ -диаграммами Юнга, все свертки с $V^{\alpha\beta}$ равны нулю:

$$\omega^{\alpha^{(s+t+1)}, \alpha\beta^{(s-t-1)}} = 0, \quad \omega^{\alpha^{(s+t+1)}, \beta^{(s-t)}} V_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.8)$$

Как было показано в работах [33, 76], бесследовые мультиспиноры с равным количеством верхних и нижних индексов $\Omega_{\beta^{(s)}}^{\alpha^{(s)}}$ соответствуют бозонным полям спина $s' = s + 1$. В разд. 5 будет продемонстрировано, что фермионные калибровочные поля высших спинов, обсуждаемые в этом разделе, вместе с бозонными калибровочными полями, рассмотренными в [33, 76], возникают при калибровании супералгебры высших спинов, связанной с некоторой специальной алгеброй Клиффорда–Гейзенберга [18, 75].

4.3. Линеаризованные кривизны высших спинов. В дальнейшем мы используем осцилляторный формализм (4.1), который удобен при работе с тензорами произвольного ранга и часто используется для описания полей высших спинов. Введем следующий объект:

$$\Omega(a, b|x) = \Omega_{\beta^{(s)}}^{\alpha^{(s+1)}}(x) a_{\alpha^{(s+1)}} b^{\beta^{(s)}}, \quad (4.9)$$

где $a_{\alpha^{(s+1)}} \equiv a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_{s+1}}$ и $b^{\beta^{(s)}} \equiv b^{\beta_1} \cdots b^{\beta_s}$. Ассоциированные с полями (4.9) $5d$ -линеаризованные кривизны высших спинов имеют вид

$$R = d\Omega + \Omega_0 \star \wedge \Omega + \Omega \star \wedge \Omega_0. \quad (4.10)$$

Фоновые гравитационные поля

$$\Omega_0(a, b|x) = \Omega_0^\alpha{}_\beta a_\alpha b^\beta, \quad \Omega_0^\alpha{}_\alpha = 0, \quad (4.11)$$

удовлетворяют условию нулевой кривизны $d\Omega_0 + \Omega_0 \wedge \star \Omega_0 = 0$. Эквивалентно, используя (4.1), получаем

$$R(a, b|x) = d\Omega(a, b|x) + \Omega_0^\alpha{}_\beta \left(b^\beta \frac{\partial}{\partial b^\alpha} - a_\alpha \frac{\partial}{\partial a_\beta} \right) \wedge \Omega(a, b|x). \quad (4.12)$$

Компонентная форма кривизн (4.12) имеет вид

$$R_{\beta(s)}^{\alpha(s+1)} = d\Omega_{\beta(s)}^{\alpha(s+1)} - (s+1)\Omega_0^\alpha{}_\gamma \wedge \Omega_{\beta(s)}^{\gamma\alpha(s)} - s\Omega_0^\gamma{}_\beta \wedge \Omega_{\beta(s-1)}^{\alpha(s+1)\gamma}. \quad (4.13)$$

Линеаризованные (абелевы) преобразования высших спинов задаются выражением

$$\delta\Omega(a, b|x) = D_0\epsilon(a, b|x), \quad (4.14)$$

в котором фоновая ковариантная производная имеет вид

$$D_0 = d + \Omega_0^\alpha{}_\beta \left(b^\beta \frac{\partial}{\partial b^\alpha} - a_\alpha \frac{\partial}{\partial a_\beta} \right). \quad (4.15)$$

Легко видеть, что $\delta R(a, b|x) = 0$.

В дальнейшем мы используем два набора операторов, введенных в [33]:

$$S^- = a_\alpha \frac{\partial}{\partial b^\beta} V^{\alpha\beta}, \quad S^+ = b^\alpha \frac{\partial}{\partial a_\beta} V_{\alpha\beta}, \quad S^0 = N_b - N_a \quad (4.16)$$

и

$$T^- = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial a_\alpha \partial b^\alpha}, \quad T^+ = a_\alpha b^\alpha, \quad T^0 = \frac{1}{4}(N_a + N_b + 4), \quad (4.17)$$

где

$$N_a = a_\alpha \frac{\partial}{\partial a_\alpha}, \quad N_b = b^\alpha \frac{\partial}{\partial b^\alpha}. \quad (4.18)$$

С помощью (4.16) и (4.17) легко сформулировать все условия неприводимости на поле $\Omega(a, b)$ в виде

$$T^- \Omega(a, b) = 0, \quad (1 + S^0) \Omega(a, b) = 0. \quad (4.19)$$

Как показано в п. 4.2, калибровочное поле высшего спина Ω допускает представление в терминах лоренц-ковариантных неприводимых полей высших спинов (4.7). Используя операторы (4.16), перепишем (4.7) следующим образом:

$$\Omega(a, b|x) = \sum_{t=0}^s (S^+)^t \omega^t(a, b|x), \quad (4.20)$$

где

$$\omega^t(a, b|x) = \omega^{\alpha(s+t+1), \beta(s-t)}(x) a_{\alpha(s+t+1)} b_{\beta(s-t)}. \quad (4.21)$$

Условия неприводимости на лоренц-ковариантные мультиспиноры $\omega^t(a, b)$, а именно: свойство симметрии Юнга и условие V -поперечности (4.8), могут быть переписаны в виде

$$S^- \omega^t(a, b) = 0, \quad T^- \omega^t(a, b) = 0. \quad (4.22)$$

Линеаризованные кривизны высших спинов (4.12) допускают разложение, аналогичное разложению (4.20):

$$R(a, b|x) = \sum_{t=0}^s (S^+)^t r^t(a, b|x), \quad (4.23)$$

в котором $r^t(a, b)$ удовлетворяют условиям неприводимости (4.22). Можно убедиться, что калибровочная инвариантность требует следующей структуры кривизн r^t [56]:

$$r^t = \mathcal{D}\omega^t + T^- \omega^{t+1} + T^0 \omega^t + T^+ \omega^{t-1}, \quad (4.24)$$

с соответствующими калибровочными преобразованиями, оставляющими лоренц-ковариантные кривизны высших спинов (4.24) инвариантными относительно преобразований

$$\delta\omega^t = \mathcal{D}\epsilon^t + T^- \epsilon^{t+1} + T^0 \epsilon^t + T^+ \epsilon^{t-1}. \quad (4.25)$$

Здесь 0-формы ϵ^t являются калибровочными параметрами. \mathcal{D} есть фоновая лоренц-ковариантная производная:

$$\mathcal{D} = d + w_0^\alpha{}_\beta \left(a_\alpha \frac{\partial}{\partial a_\beta} + b_\alpha \frac{\partial}{\partial b_\beta} \right), \quad (4.26)$$

и операторы T^- , T^+ , T^0 имеют вид

$$T^+ = -(1 + S^0) h^\alpha{}_\beta a_\alpha \frac{\partial}{\partial b_\beta}, \quad (4.27)$$

$$T^0 = -\frac{1}{S^0} h^\alpha{}_\beta \left(b_\alpha \frac{\partial}{\partial b_\beta} - a_\alpha \frac{\partial}{\partial a_\beta} + \frac{2}{S^0 - 2} \left(b_\gamma \frac{\partial}{\partial a_\gamma} \right) a_\alpha \frac{\partial}{\partial b_\beta} \right), \quad (4.28)$$

$$T^- = \frac{1}{(S^0)^2} h^\alpha{}_\beta \left((2 - S^0) b_\alpha \frac{\partial}{\partial a_\beta} + b_\gamma \frac{\partial}{\partial a_\gamma} \left(b_\alpha \frac{\partial}{\partial b_\beta} - a_\alpha \frac{\partial}{\partial a_\beta} \right) + \frac{1}{S^0 - 3} \left(b_\gamma \frac{\partial}{\partial a_\gamma} \right)^2 a_\alpha \frac{\partial}{\partial b_\beta} \right). \quad (4.29)$$

Эти операторы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \{T^0, T^-\} &= \{T^0, T^+\} = 0, \\ (T^-)^2 &= 0, \quad (T^+)^2 = 0, \\ \{T^-, T^+\} &+ (T^0)^2 + \mathcal{D}^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Отметим, что коэффициенты в (4.27)–(4.29) могут быть изменены путем переопределения полей вида $\tilde{\omega}^t = C(t, s)\omega^t$, где $C \neq 0$ есть некоторая произвольная функция. Оператор T^0 (4.28) может рассматриваться как обобщение на высшие спины оператора γ_μ , входящего в AdS -суперпреобразования для поля гравитино: $\delta\psi_\mu = \mathcal{D}_\mu\epsilon + i\gamma_\mu\epsilon$ [77].

4.4. Фермионное действие высших спинов. По аналогии с работами [33, 56] действие для безмассового фермионного поля спина $s' = s + 3/2$ ищется в виде

$$\mathcal{S}_2^{s+3/2} = \int_{\mathcal{M}^5} \hat{H} \wedge R^s(a_1, b_1) \wedge \bar{R}^s(a_2, b_2)|_{a_i=b_i=0}, \quad (4.31)$$

в котором R^s обозначает линейризованную кривизну (4.12) и 1-форма \hat{H} является следующим дифференциальным оператором:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \zeta(p, q)h_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial a_{2\alpha}\partial b_1^\beta} \hat{c}_{12}\hat{c}_{12} + \gamma(p, q)h_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha}\partial b_2^\beta} + \\ &+ \alpha(p, q)h_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha}\partial a_{2\beta}} \hat{b}_{12}\hat{c}_{12} + \beta(p, q)h^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial b_1^\alpha\partial b_2^\beta} \hat{a}_{12}\hat{c}_{12}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Здесь $h_{\alpha\beta}$ обозначает фоновое поле репера, коэффициенты α , β , γ и ζ отвечают за свертки различного типа между полями репера и кривизнами и зависят от операторов

$$p = \hat{a}_{12}\hat{b}_{12}, \quad q = \hat{c}_{12}\hat{c}_{21}, \quad (4.33)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{a}_{12} &= V_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha}\partial a_{2\beta}}, \quad \hat{b}_{12} = V^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial b_1^\alpha\partial b_2^\beta}, \\ \hat{c}_{12} &= \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha}\partial b_2^\alpha}, \quad \hat{c}_{21} = \frac{\partial^2}{\partial a_{2\alpha}\partial b_1^\alpha}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Действие является инвариантным относительно комплексного сопряжения $\bar{\mathcal{S}}_2 = \mathcal{S}_2$, вне зависимости от частного вида вещественных коэффициентов α , β , γ и ζ .

Отметим, что существует произвол в определении коэффициентов $\alpha(p, q)$ и $\beta(p, q)$, обусловленный произволом в добавлении к действию слагаемых с полной производной:

$$\begin{aligned} \delta S_2 = & \int_{\mathcal{M}^5} d(\Phi(p, q) \hat{c}_{12} R(a_1, b_1) \wedge \bar{R}(a_2, b_2)|_{a_i=b_i=0}) \times \\ & \times \int_{\mathcal{M}^5} \frac{\partial \Phi(p, q)}{\partial p} \left(h_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha} \partial a_{2\beta}} \hat{b}_{12} \hat{c}_{12} - h^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial b_1^\alpha \partial b_2^\beta} \hat{a}_{12} \hat{c}_{12} \right) \wedge \\ & \wedge R(a_1, b_1) \wedge \bar{R}(a_2, b_2)|_{a_i=b_i=0}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

где, используя явную $su(2, 2)$ -ковариантность нашего формализма, мы заменили дифференциал d ковариантной фоновой производной и использовали тождества Бьянки $D_0(R) = 0$. В результате вариация коэффициентов вида

$$\delta\alpha(p, q) = \epsilon(p, q), \quad \delta\beta(p, q) = -\epsilon(p, q) \quad (4.36)$$

не меняет физического содержания действия, т. е. комбинация $\alpha(p, q) + \beta(p, q)$ имеет инвариантный смысл.

В силу того, что общая вариация линейризованных фермионных кривизн имеет вид $\delta R = D_0 \delta \Omega$, а также по той причине, что действие сформулировано $su(2, 2)$ -ковариантным образом, интегрирование по частям приводит к общему выражению для вариации S_2 :

$$\delta S_2 = \int_{\mathcal{M}^5} D_0 \hat{H} \wedge \delta \Omega(a_1, b_1) \wedge \bar{R}(a_2, b_2)|_{a_i=b_i=0} + \text{с. с.} \quad (4.37)$$

Производная D_0 дает поле репера каждый раз при действии на поле компенсатора. Учитывая, что $D_0 h^{\alpha\beta} = 0$, $h^\alpha{}_\beta = h^{\alpha\gamma} V_{\gamma\beta}$, и вводя обозначение $H^{\alpha\beta} = H^{\beta\alpha} = h^\alpha{}_\gamma \wedge h^{\beta\gamma}$, находим

$$\begin{aligned} D_0 \hat{H} = & \rho_1 H^\beta{}_\alpha \frac{\partial^2}{\partial a_{2\alpha} \partial b_1^\beta} \hat{c}_{12} \hat{c}_{12} + \rho_2 H^\beta{}_\alpha \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha} \partial b_2^\beta} + \\ & + \rho_3 H_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha} \partial a_{2\beta}} \hat{b}_{12} \hat{c}_{12} + \rho_3 H^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial b_1^\alpha \partial b_2^\beta} \hat{a}_{12} \hat{c}_{12}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \left(1 + p \frac{\partial}{\partial p} \right) (-2\zeta + (\alpha + \beta)), \\ \rho_2 &= \left(1 + p \frac{\partial}{\partial p} \right) (-2\gamma + q(\alpha + \beta)), \\ \rho_3 &= \frac{\partial}{\partial p} (\gamma - q\zeta). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Рассмотрим условие отщепления экстраполей (см. п. 1.2 и 2.5), которое требует, чтобы вариация квадратичного действия по отношению к экстраполям была тождественно равна нулю:

$$\frac{\delta \mathcal{S}_2^{s+3/2}}{\delta \omega^{s+3/2, t}} \equiv 0, \quad t > 0. \quad (4.40)$$

В соответствии с разложением (4.20) вариацию по отношению ко всем экстраполям можно представить в виде

$$\delta \Omega^{\text{ex}}(a, b) = S^+ \xi(a, b), \quad (4.41)$$

в котором $\xi(a, b)$ является произвольной функцией и удовлетворяет условию $(N_a - N_b - 3)\xi(a, b) = 0$. Подставляя (4.41) в вариацию действия и учитывая (4.38), (4.39), получим, что условие отщепления экстраполей (4.40) сводится к

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial p} - \frac{\partial \rho_2}{\partial q} + \rho_3 = 0, \quad \frac{\partial \rho_3}{\partial p} - \frac{\partial \rho_3}{\partial q} = 0, \quad \rho_1 + \rho_3 = 0. \quad (4.42)$$

Тривиальное решение $\rho_i = 0$ соответствует тому, что ковариантная производная от \hat{H} равна нулю, $D_0 \hat{H} = 0$, и соответствующее действие становится полной производной. Из (4.39) следует $\rho_i = 0$ при условии, что

$$(\alpha + \beta)^{\text{top}} = 2\zeta^{\text{top}}, \quad \gamma^{\text{top}} = q\zeta^{\text{top}}, \quad (4.43)$$

где функция ζ^{top} является произвольным полиномом степени $(s-1)$ от переменных q и p . Ясно, что, добавляя полные производные с коэффициентами, удовлетворяющими (4.43), мы всегда можем положить $\zeta = 0$ в (4.31), (4.32).

Так как коэффициенты α , β и γ имеют вид $\sum_{k=0}^m v^{(k, m)} p^k q^{m-k}$, где $v^{(k, m)}$ есть вещественные числа ($m = s-1$ для α, β и $m = s$ для γ), легко выписываем общее решение уравнений (4.42) (по модулю поверхностных членов):

$$\begin{aligned} \zeta = 0, \quad \gamma(p+q) &= \gamma^{(s)} (p+q)^s, \\ (\alpha + \beta)(p, q) &= -s\gamma^{(s)} \int_0^1 d\tau (p\tau + q)^{s-1}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

в котором вещественный коэффициент $\gamma^{(s)}$ является произвольным. Общий фактор $\gamma^{(s)}$ перед действием данного спина не может быть фиксирован на основе анализа свободного действия и задает остаточный произвол в определении коэффициентов (помимо тривиального произвола (4.36)).

5. $\mathcal{N} = 1$ ТЕОРИЯ AdS_5 -ПОЛЕЙ ВЫСШИХ СПИНОВ В КУБИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В этом разделе мы строим взаимодействия полностью симметричных безмассовых полей высших спинов в AdS_5 [88], расширяя тем самым анализ работы [33] путем включения фермионов. Такая теория реализует симметрии высших спинов, ассоциированные с простейшей AdS_5 -супералгеброй высших спинов, обозначаемой согласно классификации работы [18] как $cu(1, 1|8)$. Полностью симметричные калибровочные поля высших спинов, возникающие из процедуры калибрования супералгебры $cu(1, 1|8)$, образуют бесконечные последовательности супермультиплетов $\{s\}^{(k)}$, $0 \leq k < \infty$, со спинами $\left(s, s - \frac{1}{2}, s - 1\right)^{(k)}$, определяемыми целочисленными старшими значениями $s = 2, 3, \dots, \infty$.

Строго говоря, рассматриваемая теория не является полностью суперсимметричной, потому что мы отсекаем все поля низших спинов, $s \leq 1$ (в частности, поле спина 1 из супермультиплета гравитона). Такое усечение сделано в целях упрощения анализа, т.к. поля низших спинов требуют отдельного рассмотрения в рамках нашего формализма, в то время как нашей целью является проверка совместности взаимодействия высших спинов с гравитацией и между собой. Отметим, что усечение полей низших спинов возможно только в кубическом приближении, и эти поля (в частности, скалярные поля) с необходимостью должны быть введены при анализе поправок старшего порядка по взаимодействию. В кубическом приближении таким образом усеченная система остается формально непротиворечивой, т.к. можно «выключить» взаимодействия между любыми тремя полями без нарушения совместности в этом порядке. Это наблюдение является простым следствием интерпретации кубического взаимодействия в терминах процедуры Нетер: если часть полей положена равной нулю, токи по-прежнему сохраняются. Поэтому оправдано называть рассматриваемую теорию суперсимметричной калибровочной теорией.

Мы рассматриваем как нередуцированную модель, основанную на супералгебре $cu(1, 1|8)$ со всеми полями, появляющимися в бесконечном количестве копий, так и редуцированную модель, основанную на супералгебре $hu_0(1, 1|8)$, в которой каждый супермультиплет появляется только один раз. Для этих частных моделей мы строим действия высших спинов, правильно описывающие как свободную, так и нелинейную динамику. Отметим, что построенная теория не исчерпывает всех возможных взаимодействий в рассматриваемом порядке. Более того, полная структура кубического действия может быть определена только на основе анализа старших порядков.

Наш формализм использует вспомогательные и экстраполя, отождествляемые с полями связностей супералгебры высших спинов. Эти вспомогатель-

ные переменные, будучи выраженными через производные физических полей высших спинов (по модулю чисто калибровочных степеней свободы) с помощью подходящих связей [55, 56], значительно упрощают решение задачи. Мы не будем обсуждать точные выражения для вспомогательных полей, выраженных через физические, потому что, как становится понятно из рассмотрения аналогичного 4d-анализа работы [54], эти формулы не являются особенно показательными. Тем не менее путем прямого анализа можно получить вид кубических вершин физических полей, решая соответствующие уравнения связи, имеющие форму линейных алгебраических уравнений на вспомогательные переменные (см. п. 1.2).

5.1. 5d-супералгебра высших спинов. Рассмотрим ассоциативную алгебру Вейля–Клиффорда с (анти)коммутирующими образующими соотношениями:

$$\begin{aligned} [a_\alpha, b^\beta]_\star &= \delta_\alpha^\beta, \quad [a_\alpha, a_\beta]_\star = [b^\alpha, b^\beta]_\star = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 4, \\ \{\psi, \bar{\psi}\}_\star &= 1, \quad \{\psi, \psi\}_\star = \{\bar{\psi}, \bar{\psi}\}_\star = 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

взятыми по отношению к \star -произведению Вейля–Клиффорда:

$$(F \star G)(a, b, \psi, \bar{\psi}) = F(a, b, \psi, \bar{\psi}) (\exp \Delta) G(a, b, \psi, \bar{\psi}), \quad (5.2)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{2} \left(\overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} + \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} + \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} \right). \quad (5.3)$$

Генераторы

$$T_\alpha^\beta = a_\alpha b^\beta, \quad Q_\alpha = a_\alpha \bar{\psi}, \quad \bar{Q}^\beta = b^\beta \psi, \quad U = \psi \bar{\psi} \quad (5.4)$$

образуют супералгебру $gl(4|1; \mathbf{C})$ по отношению к градуированному суперкоммутатору

$$[F, G]_\star = F \star G - (-1)^{\pi(F)\pi(G)} G \star F, \quad (5.5)$$

где Z_2 -градуировка π определена правилом $F(-a, -b, \psi, \bar{\psi}) = (-1)^{\pi(F)} \times F(a, b, \psi, \bar{\psi})$. Набор генераторов (5.4) состоит из $gl(4; \mathbf{C})$ -генераторов T , генераторов суперсимметрии Q и \bar{Q} , а также $u(1)$ -генератора киральных вращений U . Центральным элементом в $gl(4|1; \mathbf{C})$ является

$$N = a_\alpha b^\alpha - \psi \bar{\psi}. \quad (5.6)$$

Генераторами $sl(4|1; \mathbf{C})$ являются

$$t_\alpha^\beta = a_\alpha b^\beta - \delta_\alpha^\beta \psi \bar{\psi}, \quad q_\alpha = a_\alpha \bar{\psi}, \quad \bar{q}^\beta = b^\beta \psi. \quad (5.7)$$

AdS_5 -супералгебра $su(2, 2|1)$ [81] является вещественной формой алгебры $sl(4|1; \mathbf{C})$, выделяемой условиями вещественности, обсуждаемыми ниже.

Естественное расширение на высшие спины алгебры $su(2, 2|1)$, введенное в работе [79] под названием $shsc^\infty(4|1)$ и названное $cu(1, 1|8)$ в работе [18], ассоциировано с \star -алгеброй всех полиномов $F(a, b, \psi, \bar{\psi})$, удовлетворяющих условию

$$[N, F]_\star = 0. \tag{5.8}$$

Другими словами, $5d$ -супералгебра высших спинов $cu(1, 1|8)$ образована \star -(анти)коммутаторами элементов централизатора N в \star -алгебре (5.1). В результате каждый полином F , удовлетворяющий (5.8), имеет вид

$$\begin{aligned} F(a, b, \psi, \bar{\psi}) \equiv & A(a, b) + B(a, b)\psi + D(a, b)\bar{\psi} + E(a, b)\psi\bar{\psi} = \\ & \sum_{k=0}^{\infty} A_{\beta(k)}^{\alpha(k)} a_{\alpha(k)} b^{\beta(k)} + \sum_{k=0}^{\infty} B_{\beta(k+1)}^{\alpha(k)} a_{\alpha(k)} b^{\beta(k+1)} \psi + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} D_{\beta(k)}^{\alpha(k+1)} a_{\alpha(k+1)} b^{\beta(k)} \bar{\psi} + \sum_{k=0}^{\infty} E_{\beta(k)}^{\alpha(k)} a_{\alpha(k)} b^{\beta(k)} \psi\bar{\psi}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

$A_{\beta(k)}^{\alpha(k)}$, $B_{\beta(k+1)}^{\alpha(k)}$, $D_{\beta(k)}^{\alpha(k+1)}$ и $E_{\beta(k)}^{\alpha(k)}$ есть произвольные мультиспиноры, полностью симметричные по верхним и нижним индексам. Отметим, что $F \in cu(1, 1|8)$ является четной функцией суперосцилляторов.

Для выделения требуемой вещественной формы комплексной алгебры высших спинов $cu(1, 1|8)$ мы накладываем условия вещественности следующим образом. Введем инволюцию \dagger , определенную соотношениями

$$(a_\alpha)^\dagger = ib^\beta C_{\beta\alpha}, \quad (b^\alpha)^\dagger = iC^{\alpha\beta} a_\beta, \tag{5.10}$$

$$(\psi)^\dagger = \bar{\psi}, \quad (\bar{\psi})^\dagger = \psi, \tag{5.11}$$

где вещественные антисимметричные матрицы $C_{\alpha\beta}$ и $C^{\alpha\beta}$ являются матрицами зарядового сопряжения п. 5.1. Требуется, чтобы инволюция переставляла порядок сомножителей:

$$(F \star G)^\dagger = G^\dagger \star F^\dagger, \tag{5.12}$$

и сопрягала комплексные числа:

$$(\mu F)^\dagger = \bar{\mu} F^\dagger, \quad \mu \in \mathbf{C}, \tag{5.13}$$

где черта означает комплексное сопряжение. Инволюция \dagger оставляет инвариантными определяющие соотношения (5.1) \star -алгебры и удовлетворяет условию $(\dagger)^2 = Id$. В силу правила перестановки (5.12) действие инволюции \dagger

(5.10), (5.11) распространяется на произвольный элемент F \star -алгебры. Так как используемое \star -произведение соответствует полностью (анти)симметризованному (т. е. вейлевскому) упорядочению сомножителей, результатом будет

$$(F(a_\alpha, b^\beta, \psi, \bar{\psi}))^\dagger = \bar{A}(ib^\gamma C_{\gamma\alpha}, iC^{\beta\gamma} a_\gamma) + \bar{D}(ib^\gamma C_{\gamma\alpha}, iC^{\beta\gamma} a_\gamma)\psi + \\ + \bar{B}(ib^\gamma C_{\gamma\alpha}, iC^{\beta\gamma} a_\gamma)\bar{\psi} + \bar{E}(ib^\gamma C_{\gamma\alpha}, iC^{\beta\gamma} a_\gamma)\psi\bar{\psi}. \quad (5.14)$$

Инволюция \dagger (5.14) позволяет определить вещественную форму супералгебры Ли, построенной с помощью градуированных коммутаторов элементов (5.9), путем наложения условия

$$F^\dagger = -i^{\pi(F)} F \quad (5.15)$$

(подробности см. в работе [82]). Это условие определяет вещественную супералгебру высших спинов $su(1, 1|8)$ [18]. Она содержит $\mathcal{N} = 1$ AdS_5 -супералгебру $su(2, 2|1)$ в виде конечномерной подалгебры. В частности, условия вещественности (5.15) гарантируют, что $su(1, 1|8)$ допускает безмассовые унитарные представления с энергией, ограниченной снизу [73].

5.2. 5d-калибровочные поля высших спинов. Полностью симметричные калибровочные поля высших спинов в пространстве AdS_5 могут быть описаны [33, 55, 56, 76, 87] в терминах калибровочных полей 1-форм $\Omega(a, b, \psi, \bar{\psi}|x) = dx^\mu \Omega_\mu(a, b, \psi, \bar{\psi}|x)$ супералгебры $su(1, 1|8)$:

$$\Omega(a, b, \psi, \bar{\psi}|x) = \Omega_{E_1}(a, b|x) + \Omega_{O_1}(a, b|x)\psi + \\ + \Omega_{O_2}(a, b|x)\bar{\psi} + \Omega_{E_2}(a, b|x)\psi\bar{\psi}, \quad (5.16)$$

где

$$\Omega_{E_1}(a, b|x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\Omega_{E_1}(x))_{\beta(k)}^{\alpha(k)} a_{\alpha(k)} b^{\beta(k)}, \quad (5.17)$$

$$\Omega_{E_2}(a, b|x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\Omega_{E_2}(x))_{\beta(k)}^{\alpha(k)} a_{\alpha(k)} b^{\beta(k)} \quad (5.18)$$

с коммутирующими мультиспинорами $(\Omega_{E_{1,2}}(x))_{\beta(m)}^{\alpha(m)}$ (E означает «четный») и

$$\Omega_{O_1}(a, b|x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\Omega_{O_1}(x))_{\beta(k+1)}^{\alpha(k)} a_{\alpha(k)} b^{\beta(k+1)}, \quad (5.19)$$

$$\Omega_{O_2}(a, b|x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\Omega_{O_2}(x))_{\beta(k)}^{\alpha(k+1)} a_{\alpha(k+1)} b^{\beta(k)} \quad (5.20)$$

с антикоммутирующими мультиспинорами $(\Omega_{O_{1,2}}(x))_{\beta(n)}^{\alpha(m)}$, $|m - n| = 1$ (O означает «нечетный»). Требуется, чтобы компонентные калибровочные поля

$\Omega_{\beta(n)}^{\alpha(m)}(x) = dx^{\underline{n}} \Omega_{\beta(n)}^{\alpha(m)}(x)$, $|m - n| \leq 1$ коммутировали с базисными элементами алгебры $su(1,1|8)$ (т. е. с суперосцилляторами a_α, b^β, ψ и $\bar{\psi}$).

Напряженности полей высших спинов $R(a, b, \psi, \bar{\psi}|x) \equiv R$:

$$R = d\Omega + \Omega \wedge \star \Omega, \quad d = dx^{\underline{n}} \frac{\partial}{\partial x^{\underline{n}}}, \quad (5.21)$$

допускают разложение, аналогичное разложению (5.16)–(5.20). Инфинитезимальные калибровочные преобразования высших спинов имеют вид

$$\delta\Omega = D\epsilon, \quad \delta R = [R, \epsilon]_\star, \quad (5.22)$$

где 0-форма $\epsilon = \epsilon(a, b, \psi, \bar{\psi}|x)$ является произвольным инфинитезимальным калибровочным параметром и ковариантный дифференциал определен следующим образом:

$$DF = dF + [\Omega, F]_\star. \quad (5.23)$$

Для анализа взаимодействия полей теории мы будем использовать пертурбативное разложение, в котором динамическое поле Ω_1 трактуется как флуктуация на фоне Ω_0 :

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1, \quad (5.24)$$

где вакуумные калибровочные поля $\Omega_0 = \Omega_0^\alpha(x) a_\alpha b^\beta$ соответствуют фоновой геометрии AdS_5 , возникающей при наложении условия нулевой кривизны $R(\Omega_0) \equiv d\Omega_0 + \Omega_0 \wedge \star \Omega_0 = 0$ (см. [2, 33], а также п. 1.1 и 1.2). В силу условия нулевой кривизны $R(\Omega_0) = 0$ мы имеем выражение $R = R_1 + R_2$, в котором

$$R_1 = d\Omega_1 + \Omega_0 \star \wedge \Omega_1 + \Omega_1 \star \wedge \Omega_0, \quad R_2 = \Omega_1 \star \wedge \Omega_1. \quad (5.25)$$

Младший порядок разложения преобразований (5.22) имеет вид

$$\delta_0 \Omega_1 = D_0 \epsilon, \quad \delta_0 R_1 = 0, \quad (5.26)$$

где ковариантная производная D_0 (5.23) берется по отношению к фоновой связности Ω_0 . В этом приближении преобразования высших спинов становятся абелевыми.

Калибровочные поля высших спинов, возникающие при калибровании вещественной супералгебры высших спинов $su(1,1|8)$, выделенной соотношениями (5.15), удовлетворяют условиям вещественности [18, 82]:

$$\Omega^\dagger = -i^{\pi(\Omega)} \Omega. \quad (5.27)$$

В действительности это условие означает, что нечетные компонентные поля $(\Omega_{O1})_{\beta(s+1)}^{\alpha(s)}(x)$ и $(\Omega_{O2})_{\beta(s)}^{\alpha(s+1)}(x)$ сопряжены друг с другом, а четные компонентные поля $(\Omega_{E1,2})_{\beta(s)}^{\alpha(s)}(x)$ являются самосопряженными.

В соответствии с анализом, проведенным в предыдущем разделе для фермионов и в работах [33, 76] для бозонов, полностью симметричные поля $5d$ могут быть описаны как 1-формы $\Omega_{\beta(n)}^{\alpha(m)}(x) \equiv dx^n \Omega_{\beta(n)}^{\alpha(m)}(x)$, $|m - n| \leq 1$, являющиеся бесследовыми мультиспинорами, симметричными по нижним и верхним индексам. Случай $m = n = s$ соответствует бозонным полям спина $s' = s + 1$. Случай $n = s$, $m = s + 1$ и $n = s + 1$, $m = s$ соответствует фермионным полям спина $s' = s + 3/2$. Таким образом, четные и нечетные мультиспиноры в разложении (5.17)–(5.20) отождествляются, соответственно, с бозонными и фермионными полностью симметричными полями высших спинов. Как было показано в работе [56], число физических степеней свободы $\deg(m, n)$ поля $\Omega_{\beta(n)}^{\alpha(m)}(x)$, $|m - n| \leq 1$, которое задается формулой

$$\deg(m, n) = \begin{cases} 2s + 3, & n = m = s, \\ 4(s + 2), & m = s + 1, n = s, \\ 4(s + 2), & m = s, n = s + 1, \end{cases} \quad (5.28)$$

является в точности (вещественной) размерностью соответствующего (спин)-тензорного представления малой группы $SO(3)$. Тем самым супермультиплет $\left(s, s - \frac{1}{2}, s - 1\right)$ содержит равное число бозонных и фермионных степеней свободы.

Мультиспиноры в разложении (5.17)–(5.20) не являются бесследовыми и поэтому каждый из них разлагается на сумму неприводимых бесследовых компонент, а именно: при произвольных фиксированных значениях n и m тензор $\Omega_{\beta(n)}^{\alpha(m)}(x)$ разлагается на набор неприводимых бесследовых компонент $\Omega'_{\beta(l)}^{\alpha(k)}(x)$ ($\Omega'_{\beta(l-1)\gamma}^{\alpha(k-1)\gamma}(x) = 0$) с параметрами $k \geq 0$, $l \geq 0$, заданными соотношениями $k + l \leq n + m$, $k - l = n - m$. В итоге в разложении (5.16)–(5.20) поле каждого спина появляется в бесконечном числе копий:

$$\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=2}^{\infty} D^{(k)}(s) \oplus D^{(k)}\left(s - \frac{1}{2}\right) \oplus \bar{D}^{(k)}\left(s - \frac{1}{2}\right) \oplus D^{(k)}(s - 1), \quad (5.29)$$

где $D^{(k)}(s)$ обозначает k -ю копию неприводимого представления группы $su(2, 2)$ спина s , которое реализуется с помощью касательных индексов бесследовых мультиспиноров 1-форм $\Omega_{\beta(n)}^{\alpha(m)}$, $|m - n| \leq 1$.

Происхождение этого бесконечного вырождения может быть объяснено тем фактом, что супералгебра $cu(1, 1|8)$ не является простой и содержит бесконечно много идеалов $I_{P(N)}$, ассоциированных с различными центральными элементами $P(N)$, являющимися произвольными полиномами от N по отношению к \star -произведению, $\{x \in I_{P(N)} : x = P(N) \star F, F \in cu(1, 1|8)\}$ [79]. Можно рассматривать фактор-алгебры $cu(1, 1|8)/I_{P(N)}$. Одной из наиболее

интересных редукций является супералгебра $hu_0(1, 1|8) = cu(1, 1|8)/I_N$, где I_N есть идеал, состоящий из элементов вида $x = N \star F = F \star N$. Модель со спектром полей высших спинов, возникающих при калибровании $hu_0(1, 1|8)$, строится в п. 5.5.

Введем набор дифференциальных операторов по вспомогательным переменным:

$$P^+ = T^+ - \psi\bar{\psi}, \quad P^- = T^- + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial\bar{\psi}\partial\psi}, \quad P^0 = T^0 + \frac{1}{4}(N_\psi + N_{\bar{\psi}} - 1), \quad (5.30)$$

где T^+ , T^- , T^0 определены выражениями (4.17) и

$$N_\psi = \psi \frac{\partial}{\partial\psi}, \quad N_{\bar{\psi}} = \bar{\psi} \frac{\partial}{\partial\bar{\psi}}. \quad (5.31)$$

Эти операторы образуют sl_2 -алгебру:

$$[P^0, P^\pm] = \pm \frac{1}{2} P^\pm, \quad [P^-, P^+] = P^0. \quad (5.32)$$

Коэффициенты разложения элемента $\Omega(a, b, \psi, \bar{\psi}|x)$ являются супербесследовыми тогда и только тогда, когда $P^- \Omega(a, b, \psi, \bar{\psi}|x) = 0$. В результате операторы P^- и P^+ позволяют выписать разложение произвольного элемента $\Omega(a, b, \psi, \bar{\psi}|x)$ -супералгебры $cu(1, 1|8)$ на неприводимые $su(2, 2|1)$ суперкомпоненты в виде

$$\Omega(a, b, \psi, \bar{\psi}|x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \chi(k, s) (P^+)^k \Omega^{k, s+1}(a, b, \psi, \bar{\psi}|x), \quad (5.33)$$

где $\chi(k, s)$ есть некоторые ненулевые нормировочные коэффициенты, $(s+1)$ обозначает старшее целочисленное значение спина в супермультиплете и $\Omega^{k, s+1}$, определенное условием $P^0 \Omega^{k, s+1} = (2s+3)/4 \Omega^{k, s+1}$, является супербесследовым:

$$P^- \Omega^{k, s+1}(a, b, \psi, \bar{\psi}|x) = 0. \quad (5.34)$$

Условие супербесследовости (5.34) разрешается в виде

$$\begin{aligned} \Omega^{k, s+1}(a, b, \psi, \bar{\psi}|x) &= \tilde{\Omega}_{E_1}^{k, s+1}(a, b|x) - \frac{1}{(2s+2)} T^+ \tilde{\Omega}_{E_2}^{k, s}(a, b|x) + \\ &+ \tilde{\Omega}_{O_1}^{k, s+\frac{1}{2}}(a, b|x)\psi + \tilde{\Omega}_{O_2}^{k, s+\frac{1}{2}}(a, b|x)\bar{\psi} + \tilde{\Omega}_{E_2}^{k, s}(a, b|x)\psi\bar{\psi}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

где все $su(2, 2)$ -мультиспиноры являются бесследовыми:

$$T^- \tilde{\Omega}_{E_{1,2}}^{k, s'}(a, b|x) = T^- \tilde{\Omega}_{O_{1,2}}^{k, s'}(a, b|x) = 0, \quad s' = s, s + \frac{1}{2}, s + 1. \quad (5.36)$$

Таким образом, калибровочные поля, возникающие при калибровании супералгебры $su(1, 1|8)$, образуют бесконечную последовательность супермультиплетов $\{s'\}^{(k)}$, $0 \leq k < \infty$, со спинами $\left(s', s' - \frac{1}{2}, s' - 1\right)^{(k)}$, определяемыми старшими целочисленными значениями $s' = 2, 3, \dots, \infty$.

Разложение (5.33) может быть записано в $su(2, 2)$ -ковариантном базисе, в котором вместо супербесследовых используются бесследовые мультиспиноры. Эти два базиса связаны конечным переопределением полей. Результат имеет вид

$$\Omega_{E_{1,2}}(a, b|x) = \sum_{n, s=0}^{\infty} v_{E_{1,2},n}(T^0) (T^+)^n \Omega_{E_{1,2}}^{n,s+1}(a, b|x), \quad (5.37)$$

$$\Omega_{O_{1,2}}(a, b|x) = \sum_{n, s=0}^{\infty} v_{O_{1,2},n}(T^0) (T^+)^n \Omega_{O_{1,2}}^{n,s+3/2}(a, b|x), \quad (5.38)$$

где $v_{E_{1,2},n}$ и $v_{O_{1,2},n}$ есть некоторые ненулевые нормировочные коэффициенты, которые для дальнейшего удобства можно зафиксировать в виде

$$v_{E_{1,2},n}(s) = (2i)^n \sqrt{\frac{(2s+3)!}{n!(2s+3+n)!}}, \quad (5.39)$$

$$v_{O_{1,2},n}(s) = (2i)^n \sqrt{\frac{(2s+4)!}{n!(2s+4+n)!}}, \quad (5.40)$$

где в силу антиэрмитовости оператора T^+ появляется фактор i^n .

Следует отметить, что в отличие от разложения на супербесследовые компоненты (5.33) поля с совпадающими значениями параметра n в (5.37), (5.38) могут принадлежать различным супермультиплетам.

В дополнение к условиям бесследовости поля $\Omega(a, b|x)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} (1 + N_a - N_b)\Omega_{O_1}(a, b|x) = 0, \quad (1 + N_b - N_a)\Omega_{O_2}(a, b|x) = 0, \\ (N_b - N_a)\Omega_{E_{1,2}}(a, b|x) = 0, \end{aligned} \quad (5.41)$$

которые выражают требование (5.8).

Линеаризованные кривизны допускают разложение, аналогичное разложению (5.37), (5.38):

$$R_{1, E_{1,2}}(a, b|x) = \sum_{n, s=0}^{\infty} v_{E_{1,2},n}(T^0) (T^+)^n R_{1, E_{1,2}}^{n,s+1}(a, b|x), \quad (5.42)$$

$$R_{1, O_{1,2}}(a, b|x) = \sum_{n, s=0}^{\infty} v_{O_{1,2},n}(T^0) (T^+)^n R_{1, O_{1,2}}^{n,s+3/2}(a, b|x), \quad (5.43)$$

в котором кривизны в правой части удовлетворяют тем же условиям неприводимости, что и калибровочные поля.

Рассмотрим разложение $su(2, 2)$ -неприводимого калибровочного поля высшего спина $\Omega^{n, s'}$ на совокупность лоренц-ковариантных полей, которые образуют неприводимые представления алгебры Лоренца $so(4, 1) \subset su(2, 2)$. Различные лоренц-ковариантные калибровочные поля имеют различную динамическую интерпретацию. Например, $su(2, 2)$ -неприводимое поле $\Omega_{\beta}^{\alpha}(x)$ в присоединенном представлении $su(2, 2)$, использованное для описания поля спина 2, содержит поле репера и спиновую связность как различные неприводимые лоренц-ковариантные компоненты. Для того чтобы разложить $su(2, 2)$ -представление на лоренц-ковариантные неприводимые представления, используется компенсаторный формализм. С помощью операторов (4.16) разложение на лоренц-ковариантные поля высших спинов задается соотношением

$$\Omega_{E_{1,2}}(a, b|x) = \sum_{t=0}^s (S^+)^t \omega_{e_{1,2}}^t(a, b|x), \quad (5.44)$$

где поля

$$\omega_{e_{1,2}}^t(a, b|x) = \omega_{e_{1,2}}^{\alpha(s+t), \beta(s-t)}(x) a_{\alpha(s+t)} b_{\beta(s-t)} \quad (5.45)$$

являются бозонами, и равенствами

$$\Omega_{O_1}(a, b|x) = \sum_{t=0}^s (S^-)^t \omega_{o_1}^t(a, b|x), \quad (5.46)$$

$$\Omega_{O_2}(a, b|x) = \sum_{t=0}^s (S^+)^t \omega_{o_2}^t(a, b|x), \quad (5.47)$$

где поля

$$\omega_{o_1}^t(a, b|x) = \omega_{o_1}^{\beta(s+t+1), \alpha(s-t)}(x) a_{\alpha(s-t)} b_{\beta(s+t+1)}, \quad (5.48)$$

$$\omega_{o_2}^t(a, b|x) = \omega_{o_2}^{\alpha(s+t+1), \beta(s-t)}(x) a_{\alpha(s+t+1)} b_{\beta(s-t)} \quad (5.49)$$

являются фермионами. По своим касательным индексам лоренц-ковариантные поля высших спинов $\omega_{e_{1,2}}$ (5.45) и $\omega_{o_{1,2}}$ (5.48), (5.49) описываются бесследовыми двухстрочными диаграммами Юнга, т. е. справедливы следующие условия неприводимости:

$$\begin{aligned} S^- \omega_{e_{1,2}}^t(a, b|x) = 0, \quad S^- \omega_{o_2}^t(a, b|x) = 0, \quad S^+ \omega_{o_1}^t(a, b|x) = 0, \\ T^- \omega_{e_{1,2}}^t(a, b|x) = 0, \quad T^- \omega_{o_{1,2}}^t(a, b|x) = 0. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Лоренц-ковариантные кривизны высших спинов $r^t(a, b|x)$, ассоциированные с полями $\omega^t(a, b|x)$, определяются аналогичной процедурой, примененной к

$R(a, b|x)$. Кривизны, выраженные в терминах лоренц-ковариантных полей, задаются следующим образом:

$$r_e^t = \mathcal{D}\omega_e^t + \tau^- \omega_e^{t+1} + \tau^+ \omega_e^{t-1}, \quad (5.51)$$

$$r_o^t = \mathcal{D}\omega_o^t + \mathcal{T}^- \omega_o^{t+1} + \mathcal{T}^0 \omega_o^t + \mathcal{T}^+ \omega_o^{t-1}, \quad (5.52)$$

где \mathcal{D} есть фоновая лоренц-ковариантная производная. Подробные выражения для операторов τ and \mathcal{T} приводятся в работе [33] и разд. 4 соответственно. Лоренц-ковариантные калибровочные преобразования (5.26) принимают вид, аналогичный выражениям (5.51), (5.52).

С точки зрения динамики модели бозонные поля ω_e и фермионные поля ω_o (5.45), (5.48), (5.49) с $t = 0$ являются обобщением на высшие спины полей метрики и гравитино и считаются динамическими полями ω^{bh} , а все остальные поля с $t > 0$ играют роль, аналогичную роли спиновой связности в гравитации. Эти поля являются либо вспомогательными ($t = 1$ для бозонов), либо экстраполями ($t \geq 2$ для бозонов и $t \geq 1$ для фермионов). Экстраполя не дают вклада в свободный функционал действия, так как требуется, чтобы вариация действия по отношению к экстраполям была тождественно равна нулю. (Это есть условие отщепления экстраполей, обсуждавшееся в разд. 2 и 4; см. также п. 5.3.) Тем не менее экстраполя дают вклад в действие на уровне взаимодействия, изменяя правильное число физических степеней свободы. Чтобы сделать теорию со взаимодействием физически корректной, следует выразить вспомогательные и экстраполя через физическое поле по модулю калибровочных степеней свободы. Это достигается наложением подходящим образом выбранных связей [55, 56], имеющих вид

$$\Upsilon_2^+ \wedge r_1^t = 0, \quad 0 \leq t < s, \quad (5.53)$$

где r_1^t есть лоренц-ковариантные линеаризованные кривизны (5.51), (5.52) и 2-форма

$$\Upsilon_2^+ = \begin{cases} \tau^0 \wedge \tau^+, & s = 3, 4, \dots, \\ \mathcal{T}^0 \wedge \mathcal{T}^+, & s = 5/2, 7/2, \dots \end{cases} \quad (5.54)$$

является таким оператором, что число независимых алгебраических соотношений, наложенных на компоненты кривизны r_1^t условиями связи (5.53), совпадает с числом компонент экстраполя ω^{t+1} минус число чисто калибровочных компонент этого поля.

Важным фактом является то, что на основании этих связей большая часть кривизн высших спинов $r^t(a, b|x)$ может быть положена равной нулю на массовой поверхности. Это утверждение составляет содержание первой теоремы

массовой поверхности [33, 55, 56, 63, 76]:

$$r^{\alpha(s+t), \beta(s-t)}(x) = X^{\alpha(s+t), \beta(s-t)} \left(\frac{\delta \mathcal{S}_2}{\delta \omega_e^{\text{ph}}} \right), \quad t < s, \quad (5.55)$$

$$r^{\alpha(2s)}(x) = h_{\alpha\gamma} \wedge h^\gamma{}_\alpha C_e^{\alpha(2s+2)}(x) + X^{\alpha(2s)} \left(\frac{\delta \mathcal{S}_2}{\delta \omega_e^{\text{ph}}} \right), \quad t = s,$$

для бозонов и

$$r^{\alpha(s+t+1), \beta(s-t)}(x) = Y^{\alpha(s+t+1), \beta(s-t)} \left(\frac{\delta \mathcal{S}_2}{\delta \omega_o^{\text{ph}}} \right), \quad t < s, \quad (5.56)$$

$$r^{\alpha(2s+1)}(x) = h_{\alpha\gamma} \wedge h^\gamma{}_\alpha C_o^{\alpha(2s+3)}(x) + Y^{\alpha(2s+1)} \left(\frac{\delta \mathcal{S}_2}{\delta \omega_o^{\text{ph}}} \right), \quad t = s$$

(плюс комплексно-сопряженные выражения), для фермионов. Здесь $h_{\alpha\beta}$ обозначает фоновое поле репера (см. разд. 4), X и Y являются некоторыми линейными функционалами от полевых уравнений движений. 0-формы C_e и C_o в правых частях выражений (5.55), (5.56) есть обобщенные тензоры Вейля, являющиеся полностью симметричными мультиспинорами. $su(2, 2)$ -ковариантная версия выражений (5.55), (5.56) имеет вид

$$\mathcal{R}_E(a, b|x) \Big|_{\text{m.s.}} = H_2 \alpha^\beta \frac{\partial^2}{\partial a_\alpha \partial b^\beta} \text{Re } s_\mu(C_E(\mu a + \mu^{-1} b|x)) \quad (5.57)$$

для бозонов и

$$\mathcal{R}_{O_1}(a, b|x) \Big|_{\text{m.s.}} = H_2 \alpha^\beta \frac{\partial^2}{\partial a_\alpha \partial b^\beta} \text{Re } s_\mu(\mu C_{O_1}(\mu a + \mu^{-1} b|x)), \quad (5.58)$$

$$\mathcal{R}_{O_2}(a, b|x) \Big|_{\text{m.s.}} = H_2 \alpha^\beta \frac{\partial^2}{\partial a_\alpha \partial b^\beta} \text{Re } s_\mu(\mu^{-1} C_{O_2}(\mu a + \mu^{-1} b|x)) \quad (5.59)$$

для фермионов. Здесь $H_{2\alpha\beta} = h_{\alpha\gamma} \wedge h^\gamma{}_\beta$, символ $\Big|_{\text{m.s.}}$ подразумевает рассмотрение на массовой поверхности $\frac{\delta \mathcal{S}_2}{\delta \omega^{\text{ph}}} = 0$ и $\text{Re } s_\mu$ выделяет μ -независимую часть ряда Лорана по переменной μ . Отметим, что функция одной спинорной переменной

$$C(\mu a + \mu^{-1} b) = \sum_{k,l} \frac{\mu^{k-l}}{k! l!} C^{\alpha_1 \dots \alpha_k \beta_1 \dots \beta_l} a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_k} b_{\beta_1} \dots b_{\beta_l} \quad (5.60)$$

имеет полностью симметричные коэффициенты $C^{\alpha_1 \dots \alpha_k \beta_1 \dots \beta_l}$, в то время как $\text{Re } s_\mu$ в (5.57)–(5.59) выделяет часть, принадлежащую супералгебре $su(1, 1|8)$ с числами осцилляторов a и b , различающимися не более чем на 1.

5.3. $\mathcal{N} = 1$ действие высших спинов

5.3.1. *Общие свойства.* Функционал действия, лежащий в основе $5d$ -нелинейной динамики высших спинов в кубическом приближении, имеет следующий вид [4, 33, 54]:

$$\mathcal{S} = \int U_{12} \wedge R(\Omega_1) \wedge R(\Omega_2). \quad (5.61)$$

Действия такого рода обсуждались в предыдущих разделах и являются обобщением на высшие спины действия Макдауэлла–Манзури в гравитации [72]. Величины U_{12} есть некоторые 1-формы, построенные из поля репера и поля компенсатора. $R(\Omega_{1,2})$ являются кривизнами высших спинов, ассоциированными с калибровочными полями высших спинов $\Omega_{1,2}$ (5.16). Наша цель состоит в том, чтобы найти такие коэффициенты U_{12} , которые приводят к правильному описанию свободной динамики полей высших спинов и ее непротиворечивой деформации взаимодействием. Отметим, что если бы U_{12} был инвариантным тензором супералгебры высших спинов, действие (5.61) являлось бы топологическим инвариантом, описывающим тривиальную динамику. Конечно, главный аргумент в пользу выбора (5.61) в качестве действия для полей высших спинов состоит в том, что, как будет показано ниже, такое действие на самом деле решает задачу построения кубических взаимодействий.

Обсудим структуру действия (5.61) более подробно. Подходящий анзац имеет вид

$$\mathcal{S}(R, R) = \frac{1}{2} \mathcal{A}(R, R), \quad (5.62)$$

в котором симметричная билинейная комбинация $\mathcal{A}(F, G) = \mathcal{A}(G, F)$ любых 2-форм F и G :

$$\begin{aligned} F &= F_{E_1} + F_{O_1} \psi + F_{O_2} \bar{\psi} + F_{E_2} \psi \bar{\psi}, \\ G &= G_{E_1} + G_{O_1} \psi + G_{O_2} \bar{\psi} + G_{E_2} \psi \bar{\psi}, \end{aligned} \quad (5.63)$$

определена как

$$\mathcal{A}(F, G) = \mathcal{B}(F_E, G_E) + \mathcal{F}(F_O, G_O), \quad (5.64)$$

где

$$\mathcal{B}(F_E, G_E) \equiv \mathcal{B}'(F_{E_1}, G_{E_1}) + \mathcal{B}''(F_{E_2}, G_{E_2}), \quad (5.65)$$

$$\mathcal{B}'(F_{E_1}, G_{E_1}) = \int_{\mathcal{M}^5} \hat{H}_{E_1} \wedge \text{tr} (F_{E_1}(a_1, b_1) \wedge G_{E_1}(a_2, b_2))|_{a_i=b_i=0}, \quad (5.66)$$

$$\mathcal{B}''(F_{E_2}, G_{E_2}) = \int_{\mathcal{M}^5} \hat{H}_{E_2} \wedge \text{tr} (F_{E_2}(a_1, b_1) \wedge G_{E_2}(a_2, b_2))|_{a_i=b_i=0},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(F_O, G_O) = & \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}^5} \hat{H}_O \wedge \text{tr} (G_{O_2}(a_1, b_1) \wedge F_{O_1}(a_2, b_2))|_{a_i=b_i=0+} \\ & + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}^5} \hat{H}_O \wedge \text{tr} (F_{O_2}(a_1, b_1) \wedge G_{O_1}(a_2, b_2))|_{a_i=b_i=0}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

1-формы $\hat{H}_{E_1}, \hat{H}_{E_2}, \hat{H}_O$ являются следующими дифференциальными операторами:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{E_i} = & \alpha_i(p, q, t) E_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha} \partial a_{2\beta}} \hat{b}_{12} + \beta_i(p, q, t) E^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial b_1^\alpha \partial b_2^\beta} \hat{a}_{12} + \\ & + \gamma_i(p, q, t) \left(E_\alpha^\beta \frac{\partial^2}{\partial a_{2\alpha} \partial b_1^\beta} \hat{c}_{21} - E^\alpha_\beta \frac{\partial^2}{\partial b_1^\alpha \partial a_{2\beta}} \hat{c}_{12} \right), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_O = & \alpha_3(p, q, t) E_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha} \partial a_{2\beta}} \hat{b}_{12} \hat{c}_{12} + \beta_3(p, q, t) E^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial b_1^\alpha \partial b_2^\beta} \hat{a}_{12} \hat{c}_{12} + \\ & + \gamma_3(p, q, t) E_\alpha^\beta \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha} \partial b_2^\beta}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Здесь $E^{\alpha\beta} = DV^{\alpha\beta}$ есть поле репера. Коэффициенты α, β, γ , параметризующие различные типы сверток индексов, зависят от операторов

$$p = \hat{a}_{12} \hat{b}_{12}, \quad q = \hat{c}_{12} \hat{c}_{21}, \quad t = \hat{c}_{11} \hat{c}_{22}, \quad (5.70)$$

где

$$\hat{a}_{12} = V_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha} \partial a_{2\beta}}, \quad \hat{b}_{12} = V^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial b_1^\alpha \partial b_2^\beta}, \quad \hat{c}_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial a_{i\alpha} \partial b_j^\alpha}. \quad (5.71)$$

В последующем изложении мы используем обозначение $\mathcal{A}_{\alpha,\beta,\gamma}(F, G)$ для (5.64) с коллективными коэффициентами

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3). \quad (5.72)$$

В нашем анализе калибровочные поля высших спинов также принимают значения в некоторой матричной алгебре $\Omega \rightarrow \Omega_I^J$. Получающийся произвол эквивалентен произволу при конкретном выборе калибровочной алгебры Янга–Миллса в секторе полей спина 1. Классификация калибровочных полей высших спинов, ассоциированных с различным выбором алгебр Янга–Миллса, приводится в [18]. Тем самым действия высших спинов (5.66) и (5.67) сформулированы в терминах следа tr в этой матричной алгебре (не

следует путать со следом в \star -алгебре). В итоге допустимы только циклические перестановки матричных сомножителей под знаком следа в действиях (5.66) и (5.67). Замечательно, что это свойство значительно упрощает весь анализ калибровочной инвариантности кубического действия. Отметим: требуется, чтобы гравитационные поля, пропорциональные единичной матрице, принимали значения в центре матричной алгебры. По этой причине множители, ассоциированные с гравитационными полями, пишутся за пределами следа.

Начнем анализ теории с рассмотрения квадратичной части исходного действия. Для того чтобы исключить степени свободы, ассоциированные с экстраполями, следует зафиксировать операторы \hat{H} (5.68) и (5.69) на основе условия отщепления экстраполей. Другое ограничение на вид действия (5.62) возникает из требования, чтобы его квадратичная часть могла быть представлена в виде бесконечной суммы квадратичных действий для различных копий полей одинакового спина, ассоциированных со спинорными следами. Такое условие факторизации [33] фиксирует удобный базис в пространстве полей, а не накладывает каких-либо динамических ограничений на вид действия. Оба этих условия на вид квадратичной части действия (5.64) анализируются в подпункте 5.3.2. Также мы вводим условие S -инвариантности [33], требующее цикличности билинейной формы действия (5.64) по отношению к центральным элементам супералгебры высших спинов. Будучи наложенным, это условие существенно упрощает анализ динамических систем высших спинов, вовлекающих бесконечные последовательности супермультиплетов одинакового спина. Мы показываем, что условие факторизации вместе с условием отщепления экстраполей и условием S -инвариантности фиксирует коэффициентные функции α, β, γ (5.72) с точностью до нормировочного фактора перед квадратичным действием каждого спина, по модулю тривиального произвола, связанного со вкладом поверхностных слагаемых.

Далее мы находим точный вид кубического действия (5.62), которое правильно описывает взаимодействие полей спина $s \geq 3/2$ между собой и гравитацией в первом нетривиальном порядке. Как разъясняется в работах [4, 33], анализ калибровочной инвариантности в кубическом приближении существенно упрощается при использовании первой теоремы массовой поверхности (см. п. 1.2). Условие, при выполнении которого действие высших спинов инвариантно по отношению к некоторой деформации калибровочных преобразований высших спинов, эквивалентно условию, при котором исходная (т. е. недеформированная) вариация действия равна нулю при замене линеаризованных кривизн R_1 тензорами Вейля C согласно выражениям (5.57)–(5.59). Заметим, что при проверке калибровочной инвариантности необходимо контролировать вклады, возникающие в результате калибровочных преобразований гравитационного поля и поля компенсатора $V^{\alpha\beta}$. Доказательство соответствующей инвариантности целиком основывается на явной $su(2, 2)$ -ковариантности и инвариантности всего формализма относительно

диффеоморфизмов и может быть легко проведено. Также надо принять во внимание, что калибровочные преобразования высших спинов гравитационных полей по крайней мере линейны по динамическим полям и поэтому должны быть отброшены при анализе рассматриваемых вкладов типа $\Omega^2\epsilon$.

Из вышесказанного следует, что проблема сводится к нахождению таких функций α, β и γ (5.72), что

$$\delta\mathcal{S}(R, R)\Big|_{E=h, R=h\wedge hC} \equiv \mathcal{A}_{\alpha, \beta, \gamma}^h(R, [R, \epsilon]_\star)\Big|_{R=h\wedge hC} = 0 \quad (5.73)$$

для произвольного калибровочного параметра $\epsilon(a, b, \psi, \bar{\psi}|x)$. Как будет показано в п. 5.4, это условие, дополненное условием факторизации совместно с условием отщепления экстраполей и условием С-инвариантности, фиксирует коэффициенты в виде

$$\begin{aligned} \alpha_1(p, q, t) + \beta_1(p, q, t) &= \\ &= \Phi_0 \sum_{m, n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{m+1}{2^{2(m+n+1)}(m+n+2)!m!(n+1)!} p^n q^m, \end{aligned} \quad (5.74)$$

$$\gamma_1(p, q, t) = \gamma_1(p+q), \quad \gamma_1(p) = \Phi_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{2^{2m+3}(m+2)!m!} p^m, \quad (5.75)$$

$$\alpha_2(p, q, t) + \beta_2(p, q, t) = \frac{1}{4}(\alpha_1(p, q, t) + \beta_1(p, q, t)), \quad \gamma_2(p, q, t) = \frac{1}{4}\gamma_1(p, q, t), \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} \alpha_3(p, q, t) + \beta_3(p, q, t) &= \\ &= \Phi_0 \sum_{m, n=0}^{\infty} (-1)^{m+n+1} \frac{1}{2^{2(m+n)+3}(m+1)!(m+n+2)!n!} p^m q^n, \end{aligned} \quad (5.77)$$

$$\gamma_3(p, q, t) = \gamma_3(p+q), \quad \gamma_3(p) = \Phi_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{2^{2m+1}m!(m+1)!} p^m, \quad (5.78)$$

где Φ_0 есть произвольный нормировочный фактор, который следует отождествить с гравитационной константой связи, подходящим образом нормированной в терминах космологической постоянной.

5.3.2. Квадратичное действие. Квадратичная часть \mathcal{S}_2 действия \mathcal{S} (5.62) получается подстановкой линеаризованных кривизн R_1 (5.25) вместо R и фонового поля репера h_α^β вместо E_α^β . Возникающее действие явно инвариантно относительно линеаризованных преобразований (5.26), потому что линеаризованные кривизны R_1 являются инвариантными, т. е. $\delta R_1 = 0$. Мы

требуем, чтобы квадратичное действие можно было представить в виде отдельных действий для каждого неприводимого поля высшего спина. Это требование отнюдь не тривиально, т. к. в теории присутствует бесконечная вырожденность по каждому спину.

Условие факторизации требует выполнения следующего соотношения:

$$\mathcal{S}_2 = \sum_{n, s=0}^{\infty} \mathcal{B}_2^{s,n}(\Omega_{E_{1,2}}^{n,s+2}) + \sum_{n, s=0}^{\infty} \mathcal{F}_2^{s+3/2,n}(\Omega_{O_{1,2}}^{n,s+3/2}), \quad (5.79)$$

т. е. слагаемые, содержащие произведения полей $\Omega^{n,s}$ и $\Omega^{m,s}$ с $n \neq m$ в следовом разложении (5.37), (5.38), должны быть равны нулю. Как следует из (5.37), (5.38), это справедливо тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\mathcal{A}_{\alpha, \beta, \gamma}(F, (T^+)^k G) = \mathcal{A}_{\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}, \gamma^{(k)}}((T^-)^k F, G), \quad \forall k, \quad (5.80)$$

для некоторых новых параметров $\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}, \gamma^{(k)}$ (5.72). Условие факторизации для бозонного действия \mathcal{B} (5.65) проанализировано в работе [33], где было показано, что справедливо соотношение

$$\mathcal{B}_{\alpha, \beta, \gamma}(F_E, T^+ G_E) = \mathcal{B}_{\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}, \gamma^{(1)}}(T^- F_E, G_E), \quad (5.81)$$

в котором новые параметры $\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}, \gamma^{(1)}$ однозначно выражаются в терминах параметров α, β, γ :

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2}^{(1)} = 4 \left(\left(2 + p \frac{\partial}{\partial p} \right) \frac{\partial}{\partial p} + \left(1 + q \frac{\partial}{\partial q} \right) \frac{\partial}{\partial q} + \right. \\ \left. + \left(2p \frac{\partial}{\partial p} + 2q \frac{\partial}{\partial q} + t \frac{\partial}{\partial t} + 6 \right) \frac{\partial}{\partial t} \right) \alpha_{1,2}, \quad (5.82) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{1,2}^{(1)} = 4 \left(\left(2 + p \frac{\partial}{\partial p} \right) \frac{\partial}{\partial p} + \left(1 + q \frac{\partial}{\partial q} \right) \frac{\partial}{\partial q} + \right. \\ \left. + \left(2p \frac{\partial}{\partial p} + 2q \frac{\partial}{\partial q} + t \frac{\partial}{\partial t} + 6 \right) \frac{\partial}{\partial t} \right) \beta_{1,2}, \quad (5.83) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2}^{(1)} = 4 \left(\left(1 + p \frac{\partial}{\partial p} \right) \frac{\partial}{\partial p} + \left(2 + q \frac{\partial}{\partial q} \right) \frac{\partial}{\partial q} + \right. \\ \left. + \left(2p \frac{\partial}{\partial p} + 2q \frac{\partial}{\partial q} + t \frac{\partial}{\partial t} + 6 \right) \frac{\partial}{\partial t} \right) \gamma_{1,2}, \quad (5.84) \end{aligned}$$

при условии, что выполнено следующее равенство:

$$\left(1 + p \frac{\partial}{\partial p}\right) (\alpha_{1,2} + \beta_{1,2}) + 2 \left(1 + q \frac{\partial}{\partial q}\right) \gamma_{1,2} = 0. \quad (5.85)$$

Условие (5.85) автоматически справедливо для $\alpha_{1,2}^{(1)}$, $\beta_{1,2}^{(1)}$ и $\gamma_{1,2}^{(1)}$, и поэтому (5.85) гарантирует выполнение (5.80) в бозонном секторе теории при любых k [33].

В фермионном секторе получаем соотношения вида

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3}(F_O, T^+ G_O) &= \mathcal{F}_{\alpha_3^{(1)}, \beta_3^{(1)}, \gamma_3^{(1)}}(T^- F_O, G_O) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}^5} Q_O(p, q, t) E_\alpha^\beta \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha} \partial b_1^\beta} \hat{c}_{12} \wedge \text{tr}(G_{O_2}(a_1, b_1) \wedge F_{O_1}(a_2, b_2))|_{a_i=b_i=0} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}^5} Q_O(p, q, t) E_\alpha^\beta \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha} \partial b_1^\beta} \hat{c}_{12} \wedge \text{tr}(F_{O_2}(a_1, b_1) \wedge G_{O_1}(a_2, b_2))|_{a_i=b_i=0}, \end{aligned} \quad (5.86)$$

в которых

$$Q_O = \left(1 + p \frac{\partial}{\partial p}\right) (\alpha_3 + \beta_3) + \frac{\partial}{\partial q} \gamma_3 \quad (5.87)$$

и

$$\begin{aligned} \alpha_3^{(1)} &= 4 \left(\left(2 + p \frac{\partial}{\partial p}\right) \frac{\partial}{\partial p} + \left(2 + q \frac{\partial}{\partial q}\right) \frac{\partial}{\partial q} + \right. \\ &\quad \left. + \left(2p \frac{\partial}{\partial p} + 2q \frac{\partial}{\partial q} + t \frac{\partial}{\partial t} + 7\right) \frac{\partial}{\partial t} \right) \alpha_3, \end{aligned} \quad (5.88)$$

$$\begin{aligned} \beta_3^{(1)} &= 4 \left(\left(2 + p \frac{\partial}{\partial p}\right) \frac{\partial}{\partial p} + \left(2 + q \frac{\partial}{\partial q}\right) \frac{\partial}{\partial q} + \right. \\ &\quad \left. + \left(2p \frac{\partial}{\partial p} + 2q \frac{\partial}{\partial q} + t \frac{\partial}{\partial t} + 7\right) \frac{\partial}{\partial t} \right) \beta_3, \end{aligned} \quad (5.89)$$

$$\begin{aligned} \gamma_3^{(1)} &= 4 \left(\left(1 + p \frac{\partial}{\partial p}\right) \frac{\partial}{\partial p} + \left(1 + q \frac{\partial}{\partial q}\right) \frac{\partial}{\partial q} + \right. \\ &\quad \left. + \left(2p \frac{\partial}{\partial p} + 2q \frac{\partial}{\partial q} + t \frac{\partial}{\partial t} + 5\right) \frac{\partial}{\partial t} \right) \gamma_3. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Тем самым условие факторизации требует, чтобы

$$Q_O = \left(1 + p \frac{\partial}{\partial p}\right) (\alpha_3 + \beta_3) + \frac{\partial}{\partial q} \gamma_3 = 0. \quad (5.91)$$

Из (5.91) следует, что такое же соотношение справедливо для коэффициентов $\alpha^{(1)}$, $\beta^{(1)}$ и $\gamma^{(1)}$ (5.88)–(5.90), и поэтому (5.85), (5.91) гарантируют выполнение (5.80) для любых k .

При анализе [33] важную роль играло условие С-инвариантности, требующее, чтобы выполнялось соотношение $\mathcal{B}(T^+ \star F_E, G_E) = \mathcal{B}(F_E, G_E \star T^+)$. В чисто бозонном случае оператор T^+ совпадает с центральным элементом N . Значение условия С-инвариантности заключается в том, что билинейная форма, используемая при построении действия, имеет циклическое свойство по отношению к центральным элементам алгебры. Как уже говорилось, оно существенно упрощает анализ взаимодействий и в итоге позволяет провести элементарную редукцию к фактор-алгебре, в которой отфакторизован идеал, порожденный центральным элементом N (см. п. 5.5).

Суперсимметричное условие С-инвариантности имеет аналогичную форму:

$$\mathcal{A}(N \star F, G) = \mathcal{A}(F, G \star N), \quad (5.92)$$

в которой 2-формы F и G являются элементами алгебры высших спинов, удовлетворяющими соотношению $F \star N = N \star F$, $G \star N = N \star G$. Используя формулу

$$N \star F = (P^+ - P^-)F = \quad (5.93)$$

$$= \left((T^+ - T^-)F_{E_1} - \frac{1}{4}F_{E_2} \right) + (T^+ - T^-)F_{O_1}\psi + \quad (5.94)$$

$$+ (T^+ - T^-)F_{O_2}\bar{\psi} + ((T^+ - T^-)F_{E_2} - F_{E_1})\psi\bar{\psi}$$

и принимая во внимание условие факторизации (5.80), можно переписать условие С-инвариантности (5.92) в виде

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}_{\alpha, \beta, \gamma}(F_E, T^- G_E) + \mathcal{B}_{\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}, \gamma^{(1)}}(F_E, T^- G_E) + \\ & + \mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma}(F_O, T^- G_O) + \mathcal{F}_{\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}, \gamma^{(1)}}(F_O, T^- G_O) = \\ & = \mathcal{B}_{\alpha, \beta, \gamma}(T^- F_E, G_E) + \mathcal{B}_{\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}, \gamma^{(1)}}(T^- F_E, G_E) + \\ & + \mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma}(T^- F_O, G_O) + \mathcal{F}_{\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}, \gamma^{(1)}}(T^- F_O, G_O) - \\ & - \frac{1}{4}\mathcal{B}'_{\alpha, \beta, \gamma}(F_{E_1}, G_{E_2}) + \mathcal{B}''_{\alpha, \beta, \gamma}(F_{E_1}, G_{E_2}) + \\ & + \frac{1}{4}\mathcal{B}'_{\alpha, \beta, \gamma}(F_{E_2}, G_{E_1}) - \mathcal{B}''_{\alpha, \beta, \gamma}(F_{E_2}, G_{E_1}). \quad (5.95) \end{aligned}$$

Это условие справедливо тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{B}_{\alpha, \beta, \gamma}(F_E, G_E) = -\mathcal{B}_{\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}, \gamma^{(1)}}(F_E, G_E), \quad (5.96)$$

$$\mathcal{F}_{\alpha, \beta, \gamma}(F_O, G_O) = -\mathcal{F}_{\alpha^{(1)}, \beta^{(1)}, \gamma^{(1)}}(F_O, G_O), \quad (5.97)$$

$$\frac{1}{4}\mathcal{B}'_{\alpha, \beta, \gamma}(F_E, G_E) = \mathcal{B}''_{\alpha, \beta, \gamma}(F_E, G_E), \quad (5.98)$$

т. е.

$$\begin{aligned} \alpha_i(p, q, t) &= -\alpha_i^{(1)}(p, q, t), & \beta_i(p, q, t) &= -\beta_i^{(1)}(p, q, t), & i &= 1, 2, 3, \\ \gamma_j(p, q, t) &= -\gamma_j^{(1)}(p, q, t), & \gamma_j(p, q, t) &= -\gamma_j^{(1)}(p, q, t), & j &= 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (5.99)$$

и

$$\alpha_2(p, q, t) = \frac{1}{4}\alpha_1(p, q, t), \quad \beta_2(p, q, t) = \frac{1}{4}\beta_1(p, q, t), \quad \gamma_2(p, q, t) = \frac{1}{4}\gamma_1(p, q, t). \quad (5.100)$$

Используя условие С-инвариантности, легко вычислить относительные коэффициенты для вклада различных копий полей в разложения (5.37), (5.38). Нормировочные коэффициенты (5.39), (5.40) выбраны таким образом, чтобы линейризованные действия имели один и тот же вид для различных копий полей одного спина, параметризованных параметром n :

$$\mathcal{S}_2 = \sum_{n, s=0}^{\infty} \mathcal{B}_2^s(\Omega_{E_{1,2}}^{n, s+2}) + \sum_{n, s=0}^{\infty} \mathcal{F}_2^{s+3/2}(\Omega_{O_{1,2}}^{n, s+3/2}). \quad (5.101)$$

Тем самым в квадратичном приближении достаточно провести анализ для произвольного фиксированного n . Мы ограничиваемся случаем, когда $\Omega^{s'} = \Omega^{0, s'}$, т. е. в оставшейся части раздела будем подразумевать, что выполняется условие $T^-\Omega^{s'} = 0$.

Условие отщепления экстраполей требует выполнения условий

$$\frac{\delta \mathcal{B}_2}{\delta \omega_{e_{1,2}}^t} \equiv 0, \quad t \geq 2; \quad \frac{\delta \mathcal{F}_2}{\delta \omega_{o_{1,2}}^t} \equiv 0, \quad t \geq 1. \quad (5.102)$$

В бозонном секторе теории оно было подробно проанализировано в работе [33], а в фермионном секторе — в разд. 4, оно приводит к следующим коэффициентным функциям:

$$\begin{aligned} \alpha_i(p, q, 0) + \beta_i(p, q, 0) &= -2 \int_0^1 du \left(1 + q \frac{\partial}{\partial q} \right) \rho_i(pu + q, 0), & i &= 1, 2, \\ \alpha_3(p, q, 0) + \beta_3(p, q, 0) &= - \int_0^1 du \frac{\partial}{\partial p} \rho_3(pu + q, 0), \\ \gamma_i(p, q, 0) &= \rho_i(p + q, 0), & i &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5.103)$$

Здесь функции одной переменной $\rho_i(p+q)$, $i = 1, 2, 3$, параметризуют остаточный произвол в выборе нормировочных факторов перед квадратичными действиями полей различного спина.

Как было замечено в работах [33, 87], на уровне свободной полевой динамики существует произвол в определении коэффициентов $\alpha_i(p, q, t)$ и $\beta_i(p, q, t)$, $i = 1, 2, 3$, как следствие возможности добавления в действие слагаемых, являющихся полными производными, а именно: вариация коэффициентов

$$\delta\alpha_i(p, q, t) = \epsilon_i(p, q, t), \quad \delta\beta_i(p, q, t) = -\epsilon_i(p, q, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.104)$$

не влияет на физическую динамику, описываемую квадратичным действием, т. е. в соответствии с (5.103) лишь комбинация $\alpha_i(p, q, t) + \beta_i(p, q, t)$ имеет инвариантный смысл.

Таким образом, условие факторизации (5.80) вместе с условием отщепления экстраполей (5.102) фиксирует функции α, β, γ (по модулю тривиального произвола (5.104)) с точностью до произвольных функций $\rho(p)$, параметризующих произвол в выборе нормировочных констант перед функционалами действий свободных бозонных и фермионных полей. Замечательно, что анализ калибровочной инвариантности в кубическом приближении определяет функции $\rho(p)$ единственным образом.

5.4. Кубические взаимодействия. Теперь имеется весь необходимый материал для анализа условия (5.73) с целью доказательства существования непротиворечивой деформации калибровочных преобразований высших спинов, оставляющих кубическую часть действия (5.62) инвариантной с точностью до поправок старшего порядка по взаимодействию. Недеформированные калибровочные преобразования кривизн высших спинов $\delta R = [R, \epsilon]_\star$ с

$$R(a, b, \psi, \bar{\psi}|x) = R_{E_1}(a, b|x) + R_{O_1}(a, b|x)\psi + R_{O_2}(a, b|x)\bar{\psi} + R_{E_2}(a, b|x)\psi\bar{\psi}, \quad (5.105)$$

$$\epsilon(a, b, \psi, \bar{\psi}|x) = \epsilon_{E_1}(a, b|x) + \epsilon_{O_1}(a, b|x)\psi + \epsilon_{O_2}(a, b|x)\bar{\psi} + \epsilon_{E_2}(a, b|x)\psi\bar{\psi} \quad (5.106)$$

дают

$$\delta R_{E_1} = [R_{E_1}, \epsilon_{E_1}]_\star + \frac{1}{4}[R_{E_2}, \epsilon_{E_2}]_\star + \frac{1}{2}[R_{O_1}, \epsilon_{O_2}]_\star + \frac{1}{2}[R_{O_2}, \epsilon_{O_1}]_\star, \quad (5.107)$$

$$\delta R_{O_1} = [R_{E_1}, \epsilon_{O_1}]_\star + [R_{O_1}, \epsilon_{E_1}]_\star - \frac{1}{2}\{R_{O_1}, \epsilon_{E_2}\}_\star + \frac{1}{2}\{R_{E_2}, \epsilon_{O_1}\}_\star, \quad (5.108)$$

$$\delta R_{O_2} = [R_{E_1}, \epsilon_{O_2}]_\star + [R_{O_2}, \epsilon_{E_1}]_\star + \frac{1}{2}\{R_{O_2}, \epsilon_{E_2}\}_\star - \frac{1}{2}\{R_{E_2}, \epsilon_{O_2}\}_\star, \quad (5.109)$$

$$\delta R_{E_2} = [R_{E_1}, \epsilon_{E_2}]_\star + [R_{E_2}, \epsilon_{E_1}]_\star + \{R_{O_1}, \epsilon_{O_2}\}_\star - \{R_{O_2}, \epsilon_{O_1}\}_\star, \quad (5.110)$$

где $[f, g]_\star = f \star g - g \star f$ и $\{f, g\}_\star = f \star g + g \star f$ для $f = f(a, b)$ и $g = g(a, b)$.
Деформированные калибровочные преобразования имеют вид

$$\delta\Omega = \delta^g\Omega + \Delta(R, \epsilon), \tag{5.111}$$

где $\Delta(R, \epsilon)$ обозначает некоторые R -зависимые члены, такие, что $\Delta(0, \epsilon) = 0$, и δ^g обозначает калибровочное преобразование (5.22). Преобразования (5.111) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} \delta\Omega_E &= (\delta^g\Omega)_E + \tilde{\Delta}_E(R_E, \epsilon_E) + \tilde{\tilde{\Delta}}_E(R_O, \epsilon_O), \\ \delta\Omega_O &= (\delta^g\Omega)_O + \tilde{\Delta}_O(R_O, \epsilon_E) + \tilde{\tilde{\Delta}}_O(R_E, \epsilon_O). \end{aligned} \tag{5.112}$$

Нашей целью является нахождение такого действия \mathcal{S} , которое допускает непротиворечивую деформацию калибровочного преобразования, гарантирующего, что

$$\delta^g\mathcal{S} + \frac{\delta\mathcal{S}_2}{\delta\omega^{\text{ph}}}\Delta\omega^{\text{ph}} = O(\Omega^3\epsilon), \tag{5.113}$$

где Δ есть некоторая деформация закона преобразования физических полей. Принимая во внимание (5.112), второй член приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathcal{S}_2}{\delta\omega^{\text{ph}}}\Delta\omega^{\text{ph}} &= \frac{\delta\mathcal{B}_2}{\delta\omega_e^{\text{ph}}}\tilde{\Delta}_E(R_E, \epsilon_E) + \frac{\delta\mathcal{B}_2}{\delta\omega_e^{\text{ph}}}\tilde{\tilde{\Delta}}_E(R_O, \epsilon_O) + \\ &+ \frac{\delta\mathcal{F}_2}{\delta\omega_o^{\text{ph}}}\tilde{\Delta}_O(R_O, \epsilon_E) + \frac{\delta\mathcal{F}_2}{\delta\omega_o^{\text{ph}}}\tilde{\tilde{\Delta}}_O(R_E, \epsilon_O). \end{aligned} \tag{5.114}$$

Отметим, что деформация вариации экстремалей не дает вклада в вариацию действия в рассматриваемом порядке по взаимодействию в силу условия (5.102). Первый член в левой части (5.113) имеет структуру $R_E R_E \epsilon_E + R_E R_O \epsilon_O + R_O R_O \epsilon_E$, где все кривизны линеаризованы. Наложение связей на экстремали, предложенных в работах [55, 56], означает выполнение первой теоремы массовой поверхности. Это позволяет использовать представление (5.55), (5.56) для линеаризованных кривизн и схематически переписать первый член в (5.113) в виде

$$\begin{aligned} &C_E C_E \epsilon_E + C_E C_O \epsilon_O + C_O C_O \epsilon_E + \\ &+ \tilde{\mathcal{H}}_E \left(R_E, \frac{\delta\mathcal{B}_2}{\delta\omega_e^{\text{ph}}}, \epsilon_E \right) + \tilde{\tilde{\mathcal{H}}}_E \left(R_O, \frac{\delta\mathcal{B}_2}{\delta\omega_e^{\text{ph}}}, \epsilon_O \right) + \\ &+ \tilde{\mathcal{H}}_O \left(R_O, \frac{\delta\mathcal{F}_2}{\delta\omega_o^{\text{ph}}}, \epsilon_E \right) + \tilde{\tilde{\mathcal{H}}}_O \left(R_E, \frac{\delta\mathcal{F}_2}{\delta\omega_o^{\text{ph}}}, \epsilon_O \right), \end{aligned} \tag{5.115}$$

в котором \mathcal{H}_E и \mathcal{H}_O есть некоторые трilinearные функционалы. Очевидно, что все члены в \mathcal{H}_E и \mathcal{H}_O могут быть скомпенсированы подходящими деформациями $\tilde{\Delta}$ и $\tilde{\tilde{\Delta}}$. Члены, билинейные по тензорам Вейля C , не могут быть

устранены таким способом. Тем самым условие, согласно которому действие высших спинов инвариантно относительно некоторой деформации калибровочных преобразований высших спинов, эквивалентно требованию сокращения вкладов вида C^2 , что выражается формулой (5.73).

Основываясь на этом утверждении, продолжим наш анализ, начав с вариации действия по отношению к произвольному бозонному преобразованию высших спинов с параметром $\epsilon_{E_1}(a, b|x) = \epsilon_{\beta(s)}^{\alpha(s)}(x)a_{\alpha(s)}b^{\beta(s)}$. Согласно (5.73) наша цель состоит в доказательстве существования таких коэффициентных функций α, β и γ (5.72), удовлетворяющих условию С-инвариантности, условию факторизации и условию отщепления экстраполей, что справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & 2\mathcal{B}^h(R_{1, E_{1,2}}, [\epsilon_{E_1}, R_{1, E_{1,2}}]_{\star}) \Big|_{R=h\wedge hC} + \\ & + \mathcal{F}^h(R_{1, O_2}, [\epsilon_{E_1}, R_{1, O_1}]_{\star}) \Big|_{R=h\wedge hC} + \\ & + \mathcal{F}^h([\epsilon_{E_1}, R_{1, O_2}]_{\star}, R_{1, O_1}) \Big|_{R=h\wedge hC} = 0 \quad (5.116) \end{aligned}$$

для произвольного калибровочного параметра $\epsilon_{E_1} = \epsilon_{E_1}(a, b|x)$ и произвольных тензоров Вейля $C(a)$. Учитывая разложения (5.42), (5.43), условие (5.116) принимает вид

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{mn} \mathcal{B}^h \left((T^+)^m v_{E_{1,2},m}(T^0) R_{1,E_{1,2}}^m(a, b), \right. \\ & \left. [\epsilon_{E_1}, (T^+)^n v_{E_{1,2},n}(T^0) R_{1,E_{1,2}}^n(a, b)]_{\star} \right) \Big|_{R=h\wedge hC} + \\ & + \sum_{mn} \mathcal{F}^h \left((T^+)^m v_{O_2,m}(T^0) R_{1,O_2}^m(a, b), \right. \\ & \left. [\epsilon_{E_1}, (T^+)^n v_{O_1,n}(T^0) R_{1,O_1}^n(a, b)]_{\star} \right) \Big|_{R=h\wedge hC} + \\ & + \sum_{mn} \mathcal{F}^h \left([\epsilon_{E_1}, (T^+)^m v_{O_2,m}(T^0) R_{1,O_2}^m(a, b)]_{\star}, \right. \\ & \left. (T^+)^n v_{O_1,n}(T^0) R_{1,O_1}^n(a, b) \right) \Big|_{R=h\wedge hC} = 0 \quad (5.117) \end{aligned}$$

с произвольным калибровочным параметром $\epsilon_{E_1}(a, b|x)$ и произвольными тензорами Вейля $C_{E_{1,2}}^n(a|x)$ и $C_{O_{1,2}}^m(a|x)$ в разложении (5.57)–(5.59) линеаризованных кривизн высших спинов $R_{1, E_{1,2}}^n(a, b|x)$ и $R_{1, O_{1,2}}^m(a, b|x)$.

Можно показать [33, 88], что достаточно найти коэффициенты, удовлетворяющие условию С-инвариантности и условию факторизации для бесследовых кривизн $R = \mathcal{R} \equiv R^0$, т. е. для кривизн, подчиненных условию

$T^-(\mathcal{R}) = 0$. Другими словами, следует доказать, что

$$\mathcal{S}^h(\mathcal{R}, [\epsilon_{E_1}, \mathcal{R}]_\star) = 0, \quad (5.118)$$

где

$$\mathcal{R}_{E_{1,2}}(a, b) = H_2 \alpha^\beta \frac{\partial^2}{\partial a_\alpha \partial b^\beta} \operatorname{Re} s_\mu (C_{E_{1,2}}(\mu a + \mu^{-1} b)) \quad (5.119)$$

для бозонов и

$$\mathcal{R}_{O_1}(a, b) = H_2 \alpha^\beta \frac{\partial^2}{\partial a_\alpha \partial b^\beta} \operatorname{Re} s_\mu (\mu C_{O_1}(\mu a + \mu^{-1} b)), \quad (5.120)$$

$$\mathcal{R}_{O_2}(a, b) = H_2 \alpha^\beta \frac{\partial^2}{\partial a_\alpha \partial b^\beta} \operatorname{Re} s_\mu (\mu^{-1} C_{O_2}(\mu a + \mu^{-1} b)) \quad (5.121)$$

для фермионов. Отметим, что в силу $T^-(\mathcal{R}) = 0$ слагаемые, содержащие \hat{c}_{11} (5.71) и, тем самым, t (5.70), не дают вклада в условие (5.118).

Рассмотрим сначала вариацию фермионного действия:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F}^h = & \int_{\mathcal{M}^5} \hat{H}_O \wedge \operatorname{tr} (\delta \mathcal{R}_{O_2}(a_1, b_1) \wedge \mathcal{R}_{O_1}(a_2, b_2))|_{a_i=b_i=0} + \\ & + \int_{\mathcal{M}^5} \hat{H}_O \wedge \operatorname{tr} (\mathcal{R}_{O_2}(a_1, b_1) \wedge \delta \mathcal{R}_{O_1}(a_2, b_2))|_{a_i=b_i=0}. \end{aligned} \quad (5.122)$$

Подставляя $\delta \mathcal{R}_{O_1} = [\mathcal{R}_{O_1}, \epsilon_{E_1}]_\star$ и $\delta \mathcal{R}_{O_2} = [\mathcal{R}_{O_2}, \epsilon_{E_1}]_\star$, используя \star -произведение (5.1) и переписывая (5.120), (5.121) в виде

$$\mathcal{R}_{O_1}(a, b) = \operatorname{Re} s_\mu \mu^{-1} \exp \left(\mu^{-1} a_\gamma \frac{\partial}{\partial c_\gamma} + \mu b^\gamma \frac{\partial}{\partial c^\gamma} \right) H_2^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial c^\alpha \partial c^\beta} C_{O_1}(c) \Big|_{c=0}, \quad (5.123)$$

$$\mathcal{R}_{O_2}(a, b) = \operatorname{Re} s_\mu \mu^{-1} \exp \left(\mu a_\gamma \frac{\partial}{\partial c_\gamma} + \mu^{-1} b^\gamma \frac{\partial}{\partial c^\gamma} \right) H_2^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial c^\alpha \partial c^\beta} C_{O_2}(c) \Big|_{c=0}, \quad (5.124)$$

находим

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F}^h = & -\frac{1}{15} \int_{\mathcal{M}^5} H_5 \bar{k}^2 \operatorname{Re} s_\mu \left(\mu^{-1} \exp \left(\frac{1}{2} (\mu^{-1} \bar{u}_2 - \mu \bar{v}_2) \right) (\mu \bar{k} - \bar{u}_1) \Phi(Y) \right) \times \\ & \times \operatorname{tr} (C_{O_2}(c_2) C_{O_1}(c_1) \epsilon_{E_1}(a_3, b_3))|_{a=b=c=0} + \\ & + \frac{1}{15} \int_{\mathcal{M}^5} H_5 \bar{k}^2 \operatorname{Re} s_\mu \left(\mu^{-1} \exp \left(\frac{1}{2} (\mu^{-1} \bar{v}_1 - \mu \bar{u}_1) \right) (\mu \bar{k} - \bar{v}_2) \Phi(Z) \right) \times \\ & \times \operatorname{tr} (C_{O_2}(c_2) C_{O_1}(c_1) \epsilon_{E_1}(a_3, b_3))|_{a=b=c=0}, \end{aligned} \quad (5.125)$$

где $H_5 = h^\alpha_\beta \wedge h^\beta_\gamma \wedge h^\gamma_\delta \wedge h^\delta_\rho \wedge h^\rho_\alpha$ и

$$\bar{k} = \frac{\partial^2}{\partial c_{1\alpha} \partial c_2^\alpha}, \quad \bar{u}_i = \frac{\partial^2}{\partial c_i^\alpha \partial a_{3\alpha}}, \quad \bar{v}_i = \frac{\partial^2}{\partial c_{i\alpha} \partial b_3^\alpha}, \quad (5.126)$$

$$Y = (\mu^{-1} \bar{k} + \bar{v}_1)(\mu \bar{k} - \bar{u}_1), \quad Z = (\mu \bar{k} - \bar{v}_2)(\mu^{-1} \bar{k} + \bar{u}_2), \quad (5.127)$$

$$\Phi(Y) = Y(\alpha_3(Y, -Y) + \beta_3(Y, -Y)) + \gamma_3(Y, -Y). \quad (5.128)$$

Введем следующие обозначения:

$$A = (\mu \bar{k} - \bar{u}_1), \quad B = (\mu^{-1} \bar{k} + \bar{v}_1), \quad F = (\mu \bar{k} - \bar{v}_2), \quad D = (\mu^{-1} \bar{k} + \bar{u}_2). \quad (5.129)$$

Тогда проблема сводится к поиску такой функции $\Phi(Y)$, что

$$\begin{aligned} & \bar{k}^2 \operatorname{Re} s_\mu \left(\mu^{-1} A \exp \left(\frac{1}{2} (\mu^{-1} \bar{u}_2 - \mu \bar{v}_2) \right) \Phi(AB) - \right. \\ & \quad \left. - \mu^{-1} F \exp \left(\frac{1}{2} (\mu^{-1} \bar{v}_1 - \mu \bar{u}_1) \right) \Phi(FD) \right) \times \\ & \quad \times \operatorname{tr} (C_{O_2}(c_2) C_{O_1}(c_1) \epsilon_{E_1}(a_3, b_3))|_{a=b=c=0} = 0. \end{aligned} \quad (5.130)$$

Вводя определение $\tilde{\Phi}(A, B) = A\Phi(AB)$, перепишем (5.130) в виде

$$\begin{aligned} & \bar{k}^2 \operatorname{Re} s_\mu \left(\mu^{-1} \exp \left(\frac{1}{2} (\mu^{-1} \bar{u}_2 - \mu \bar{v}_2) \right) \tilde{\Phi}(A, B) - \right. \\ & \quad \left. - \mu^{-1} \exp \left(\frac{1}{2} (\mu^{-1} \bar{v}_1 - \mu \bar{u}_1) \right) \tilde{\Phi}(F, D) \right) \times \\ & \quad \times \operatorname{tr} (C_{O_2}(c_2) C_{O_1}(c_1) \epsilon_{E_1}(a_3, b_3))|_{a=b=c=0} = 0. \end{aligned} \quad (5.131)$$

Заметим, что функция $\tilde{\Phi}(A, B) = \Phi_0 \operatorname{Re} s_\nu \left(\nu^{-1} \exp \left(\frac{1}{2} (\nu A + \nu^{-1} B) \right) \right)$, в которой Φ_0 есть некоторый нормировочный фактор, является решением уравнения (5.131).

В итоге условие (5.118) сводится к соотношению

$$\begin{aligned} & A(\alpha_3(A, -A) + \beta_3(A, -A)) + \gamma_3(A, -A) = \\ & = \Phi_0 A^{-1} \operatorname{Re} s_\nu \left(\nu^{-1} \exp \left(\frac{1}{2} (\nu A + \nu^{-1}) \right) \right) = \\ & = \frac{\Phi_0}{2} \int_0^1 du \operatorname{Re} s_\nu \exp \left(\frac{1}{2} (\nu^{-1} + \nu u A) \right). \end{aligned} \quad (5.132)$$

Учитывая (5.103), оно решается в виде

$$\gamma_3(p) = \frac{\Phi_0}{2} \int_0^1 du \operatorname{Re} s_\nu \exp\left(\frac{1}{2}(-\nu^{-1} + \nu pu)\right) \quad (5.133)$$

и

$$(\alpha_3 + \beta_3)(p, q) = \frac{\gamma_3(p+q)}{q} - \frac{\Phi_0}{2q} \int_0^1 du \operatorname{Re} s_\nu \exp\left(\frac{1}{2}(-\nu^{-1} + \nu(pu+q))\right). \quad (5.134)$$

С помощью этих выражений можно проверить справедливость следующих тождеств:

$$\left(p \frac{\partial^2}{\partial p^2} + 2 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{4}\right) \gamma_3(p) = 0, \quad (5.135)$$

$$\left(\left(2 + p \frac{\partial}{\partial p}\right) \frac{\partial}{\partial p} + \left(2 + q \frac{\partial}{\partial q}\right) \frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{4}\right) (\alpha_3(p, q, 0) + \beta_3(p, q, 0)) = 0. \quad (5.136)$$

Из этих тождеств и соотношений (5.88)–(5.90) следует, что условие С-инвариантности (5.92) выполнено при коэффициентах

$$\alpha_3(p, q, t) + \beta_3(p, q, t) = \alpha_3(p, q, 0) + \beta_3(p, q, 0), \quad \gamma_3(p, q, t) = \gamma_3(p, q, 0). \quad (5.137)$$

Разложение по степеням в выражениях (5.133), (5.134) для $\gamma_3(p)$ и $\alpha_3(p, q, 0) + \beta_3(p, q, 0)$ дает (5.77) и (5.78).

Таким образом, показано, что в фермионном секторе теории коэффициентные функции (5.133) и (5.134) удовлетворяют условию факторизации, условию С-инвариантности, условию отщепления экстраполей и условию (5.73). Остаточный произвол в выборе коэффициентов $\alpha_3(p, q, t) + \beta_3(p, q, t)$ и $\gamma_3(p, q, t)$ сводится к общему фактору Φ_0 перед фермионным действием \mathcal{F} .

Точный вид коэффициентов бозонного действия был найден в работе [33] исходя из требования инвариантности теории относительно (деформированных) калибровочных преобразований высших спинов с параметрами $\epsilon(a, b|x) = \epsilon_{\beta(s)}^{\alpha(s)}(x) a_{\alpha(s)} b^{\beta(s)}$. В нашей суперсимметричной модели результаты чисто бозонной теории работы [33] остаются справедливыми. Соответствующие коэффициентные функции имеют вид

$$\gamma_i(p) = \frac{\Phi_i}{4} \int_0^1 dv v \operatorname{Re} s_\nu \left(\nu \exp\left(\frac{1}{2}(-\nu^{-1} + \nu vp)\right) \right), \quad i = 1, 2, \quad (5.138)$$

и

$$\alpha_i(p, q, 0) + \beta_i(p, q, 0) = 2\gamma_i(p + q) - \frac{1}{2}\Phi_i \int_0^1 du \operatorname{Re} s_\nu \left(\nu \exp \left(\frac{1}{2}(-\nu^{-1} + \nu(up + q)) \right) \right), \quad i = 1, 2, \quad (5.139)$$

где Φ_1 и Φ_2 есть произвольные вещественные константы.

Вариация по отношению к бозонным параметрам $\epsilon_{E_2}(a, b, \psi, \bar{\psi}|x) = \epsilon_{\beta(s)}^{\alpha(s)}(x) a_{\alpha(s)} b^{\beta(s)} \psi \bar{\psi}$ связывает коэффициенты Φ_1, Φ_2 следующим образом:

$$\Phi_2 = \frac{1}{4}\Phi_1, \quad (5.140)$$

и дает уравнения для фермионных коэффициентов, эквивалентные тем, что следуют из вариации по отношению к $\epsilon_{E_1}(a, b|x)$. Отметим, что условие (5.140), выведенное из требования калибровочной инвариантности, дает то же соотношение между бозонными коэффициентами (5.98), фиксированными наложением условия С-инвариантности (5.92).

Требование равенства нулю вариации полного действия по отношению к фермионным преобразованиям с произвольным калибровочным параметром $\epsilon_O(a, b, \psi, \bar{\psi}|x) = \epsilon_{O_1}(a, b|x)\psi + \epsilon_{O_2}(a, b|x)\bar{\psi}$ приводит к соотношению

$$\Phi_0 = -\Phi_1, \quad (5.141)$$

и остаточный произвол в коэффициентах (5.74)–(5.78) сводится к общему фактору Φ_0 .

Итак, показано, что действие (5.62) корректно описывает $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричную динамику полей высших спинов как на свободном уровне, так и на уровне кубических взаимодействий при условии, что коэффициенты билинейной формы в (5.62) фиксированы согласно (5.74)–(5.78).

5.5. Редуцированная модель. До сих пор мы обсуждали $5d$ -супералгебру высших спинов $cu(1, 1|8)$, являющуюся централизатором N в \star -алгебре. Эта супералгебра не является простой, т. к. содержит бесконечно много идеалов $I_{P(N)}$, образованных элементами вида $P(N) \star F$ для любого $F \in cu(1, 1|8)$ и произвольного \star -полинома $P(N)$ [79]. В этом пункте мы сосредоточимся на супералгебре $hu_0(1, 1|8)$, которая получается [18] при факторизации максимального идеала, соответствующего выбору $P(N) = N$. Как будет показано, элементы этой супералгебры соответствуют супербесследовым мультиспинарам. Таким образом, $hu_0(1, 1|8)$ описывает систему полей высших спинов, в которой каждый супермультиплет появляется один раз. Отметим, что данная редукция не является максимально возможной. Алгебры высших спинов, приводящие к теориям с максимально редуцированными спектрами полей, обсуждались в работах [18, 76].

При рассмотрении редуцированной системы высших спинов, соответствующей $hu_0(1, 1|8)$, мы применяем подход, разработанный для чисто бозонной системы высших спинов [33], сводящийся к вставке в исходное действие (5.64) оператора \mathcal{M} , проецирующего на фактор-алгебру, а именно: пусть \mathcal{M} удовлетворяет

$$N \star \mathcal{M} = \mathcal{M} \star N = 0. \quad (5.142)$$

Определив вид оператора \mathcal{M} , действие редуцированной системы, ассоциированной с $hu_0(1, 1|8)$, получаем путем замены билинейной формы в действии на

$$\mathcal{A}(F, G) \rightarrow \mathcal{A}_0(F, G) = \mathcal{A}(F, \mathcal{M} \star G), \quad (5.143)$$

где $\mathcal{A}(F, G)$ соответствует действию, описывающему исходную (нередуцированную) динамику полей высших спинов. Для выполнения калибровочной инвариантности требуем, чтобы \mathcal{M} коммутировал с элементами супералгебры $cu(1, 1|8)$:

$$F \star \mathcal{M} = \mathcal{M} \star F, \quad F \in cu(1, 1|8). \quad (5.144)$$

На самом деле это означает, что \mathcal{M} должен быть некоторой \star -функцией от N . Тогда из условия S -инвариантности следует, что

$$\mathcal{A}(F, \mathcal{M} \star G) = \mathcal{A}(F \star \mathcal{M}, G), \quad (5.145)$$

т. е. билинейная форма в действии со вставкой \mathcal{M} остается симметричной.

В результате все слагаемые, пропорциональные N , не дают вклада в действие (5.143), которое, тем самым, определено на фактор-алгебре. Представители фактор-алгебры $hu_0(1, 1|8)$ отождествляются с элементами F , удовлетворяющими условию супербесследовости $P^- F = 0$. Это позволяет потребовать, чтобы все поля в разложении (5.16)–(5.20) были супербесследовыми. Действительно, на основании (5.93) любой полином $\tilde{F}(a, b, \psi, \bar{\psi}|x) \in cu(1, 1|8)$ эквивалентен некоторому F , удовлетворяющему условию супербесследовости по модулю слагаемых, содержащих \star -произведения с N , тривиализующихся при действии \mathcal{M} . \star -произведение $F \star G$ любых двух элементов F и G , удовлетворяющих условию супербесследовости, может и не быть супербесследовым, т. е. $P^-(F \star G) \neq 0$ (иначе супербесследовые элементы образовывали бы алгебру, а не фактор-алгебру). Однако этим различием можно пренебречь, т. к. возникающие ненулевые слагаемые пропорциональны N и выпадают из действия, построенного с помощью билинейной формы \mathcal{A}_0 .

Чтобы найти точный вид \mathcal{M} , заметим, что любая \star -функция от N является некоторой (возможно, другой) обычной функцией от N , т. е.

$$\mathcal{M}(N) \equiv M(N) = M(a_\gamma b^\gamma) - M'(a_\gamma b^\gamma) \psi \bar{\psi}, \quad (5.146)$$

где M' обозначает производную от M . Это есть простое следствие того факта, что любая такая функция должна коммутировать с генераторами $su(2, 2|1)$.

Данное условие накладывают некоторые дифференциальные уравнения первого порядка, которые могут быть разрешены в терминах произвольной функции от N .

Подстановка (5.146) в (5.142) приводит к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$xM''(x) + 3M'(x) - 4xM(x) = 0, \quad x \equiv a_\gamma b^\gamma, \quad (5.147)$$

которое имеет единственное аналитическое решение (с точностью до мультипликативного фактора):

$$M(x) = \int_0^1 d\tau \operatorname{Re} s_\nu \exp\left(-\frac{1}{2}(\nu^{-1} + 4\nu x^2 \tau)\right). \quad (5.148)$$

Построив оператор \mathcal{M} , мы определяем действие для редуцированной системы, ассоциированной с супералгеброй высших спинов $hu_0(1, 1|8)$, в виде (5.143). Отметим, что $\mathcal{A}(F, G)$ со вставкой \mathcal{M} согласно (5.143) является хорошо определенным функционалом от полиномиальных функций F и G , т. к. для полиномов F и G только конечное число слагаемых в разложении $\mathcal{M}(a_\alpha b^\alpha, \psi \bar{\psi})$ дает вклад в (5.143).

Модификация действия согласно (5.143) не противоречит анализу п. 5.4, в котором утверждалось, что действие (5.62) фиксировано однозначно, т. к. в анализе п. 5.3 было наложено условие факторизации в частном базисе полей высших спинов, не позволяющее, тем самым, переход к инвариантному действию (5.143). Здесь условие факторизации опущено. Все остальные условия, а именно: условие S -инвариантности, условие отщепления экстралелей и условие (5.73) остаются справедливыми.

Как мы видим, непротиворечивое взаимодействие полей высших спинов существует как для модели, основанной на супералгебре $su(1, 1|8)$ (каждый супермультиплет $(s, s - 1/2, s - 1)$, $s = 2, 3, \dots, \infty$, входит в бесконечное число копий), так и для редуцированной модели, основанной на суперсимметриях $hu_0(1, 1|8)$ (супермультиплет каждого спина входит ровно один раз). В этом отношении построенная нами теория отличается от модели работы [84], в которой аргументировалось, что только нередуцированная алгебра $su(1, 1|8)$ допускает совместную динамику в рамках $4d$ -конформной теории высших спинов. Следует отметить, что две сравниваемые модели различны, т. к. модель работы [84], являясь расширением $4d$ C^2 -гравитации в область высших спинов, содержит старшие производные и духи, в то время как наша AdS_5 -модель является унитарной в физическом секторе теории, по крайней мере на свободном уровне.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суммируем полученные результаты.

1. Предложена конструктивная схема теоретико-полевого описания свободной динамики калибровочных полей произвольного типа симметрии, распространяющихся в пространстве анти-де Ситтера произвольной размерности, которая основана на реализации полей высших спинов в виде калибровочных полей p -форм, наделенных касательными индексами, преобразующимися согласно заданному неприводимому представлению группы анти-де Ситтера [89].

2. В рамках предложенного формализма описания безмассовых полей смешанного типа симметрии подробно рассмотрены нетривиальные классы бозонных полей в пространстве анти-де Ситтера, соответствующие произвольным двухстолбцовым диаграммам Юнга и произвольным прямоугольным диаграммам Юнга с двумя строками, для которых построены функционалы действия, найдены уравнения движения и проанализированы симметрии теории. В спинорном формализме построено действие полностью симметричных полей произвольного полуцелого спина $s \geq 3/2$ в пятимерном пространстве анти-де Ситтера [87, 89, 90].

3. Построено действие, описывающее суперсимметричную динамику бесконечного набора симметричных бозонных и фермионных калибровочных полей высших спинов, распространяющихся на фоне пятимерного пространства анти-де Ситтера, в первом нетривиальном порядке по взаимодействию (кубическое приближение). Проанализированы два варианта теории, соответствующие супералгебрам высших спинов $su(1, 1|8)$ и $hu_0(1, 1|8)$ [88].

В качестве возможных перспектив применения реперного подхода, в первую очередь, следует отметить построение калибровочных (супер)алгебр высших спинов, процедура калибрования которых приводит к возникновению полей p -форм произвольного типа симметрии (т. е. спектр таких алгебр содержит безмассовые поля произвольного спина). В настоящее время прогресс в этом направлении исчерпывается $D = 5$ (супер)алгебрами высших спинов [18], в спектре которых возникают поля произвольного типа симметрии, а также (супер)алгебрами высших спинов в произвольной размерности D [85], в спектре которых возможны поля очень ограниченного типа симметрии (с одной горизонтальной строкой и одним вертикальным столбцом). Знание структуры алгебр высших спинов в произвольной размерности позволит строить нелинейные теории безмассовых полей произвольного типа симметрии. Наиболее действенным инструментом здесь оказывается так называемая развернутая формулировка динамических систем [86], поэтому ее разработка для полей смешанного типа симметрии также является важным шагом на пути построения нелинейных теорий безмассовых полей всех спинов в произвольной размерности.

Благодарности. Часть результатов, представленных в этом обзоре, получена в соавторстве с М. А. Васильевым и О. В. Шейнкманом. Я искренне благодарен М. А. Васильеву, Р. Р. Мецаеву, А. Ю. Сегалу и О. В. Шейнкману за многочисленные полезные обсуждения.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 05-02-17654, НШ 1578-2003-2, ИНТАС 03-51-6346.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aragone C., Deser S.* // Phys. Lett. B. 1979. V. 86. P. 161.
2. *Vasiliev M.A.* Higher Spin Gauge Theories: Star-Product and *AdS* Space. Contributed article to Golfand's Memorial Volume «Many Faces of the Superworld» / Ed. by M. Shifman. Singapore, 2000; hep-th/9910096; Intern. J. Mod. Phys. D. 1996. V. 5. P. 763; hep-th/9611024.
3. *Fradkin E.S., Vasiliev M.A.* // Ann. Phys. 1987. V. 177. P. 63.
4. *Fradkin E.S., Vasiliev M.A.* // Phys. Lett. B. 1987. V. 189. P. 89; Nucl. Phys. B. 1987. V. 291. P. 141.
5. *Bengtsson A.K., Bengtsson I., Brink L.* // Nucl. Phys. B. 1983. V. 227. P. 31; 41.
6. *Berends F.A., Burgers G.J., van Dam H.* // Z. Physik C. 1984. Bd. 24. S. 247; Nucl. Phys. B. 1985. V. 260. P. 295.
7. *Bengtsson A.K.H., Bengtsson I.* // Class. Quant. Grav. 1986. V. 3. P. 927.
8. *Bengtsson A.K.H.* // Class. Quant. Grav. 1988. V. 5. P. 437.
9. *Fradkin E.S., Metsaev R.R.* // Class. Quant. Grav. 1991. V. 8. P. L89; *Metsaev R.R.* // Mod. Phys. Lett. A. 1991. V. 6. P. 359; 2411; 1993. V. 8. P. 2413; Class. Quant. Grav. 1993. V. 10. P. L39; Phys. Lett. B. 1993. V. 309. P. 39.
10. *Gross D.J.* // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. P. 1229.
11. *Maldacena J.M.* // Adv. Theor. Math. Phys. 1998. V. 2. P. 231; Intern. J. Theor. Phys. 1999. V. 38. P. 1113; hep-th/9711200.
12. *Gubser S.S., Klebanov I.R., Polyakov A.M.* // Phys. Lett. B. 1998. V. 428. P. 105; hep-th/9802109.
13. *Witten E.* // Adv. Theor. Math. Phys. 1998. V. 2. P. 253; hep-th/9802150.
14. *Tseytlin A.A.* // Theor. Math. Phys. 2002. V. 133. P. 1376 (Teor. Mat. Fiz. 2002. V. 133. P. 69); hep-th/0201112.
15. *Sundborg B.* // Nucl. Phys. Proc. Suppl. 2001. V. 102. P. 113; hep-th/0103247.
16. *Witten E.* Talk at J.H. Schwarz 60th Birthday Conf., CalTech, Nov. 2–3, 2001. <http://theory.caltech.edu/jhs60/witten/1.html>
17. *Konstein S.E., Vasiliev M.A., Zaikin V.N.* // JHEP. 0012. 2000. 018; hep-th/0010239.
18. *Vasiliev M.A.* // Phys. Rev. D. 2002. V. 66. P. 066006; hep-th/0106149.
19. *Shaynkman O.V., Vasiliev M.A.* // Theor. Math. Phys. 2001. V. 128. P. 1155 (Teor. Mat. Fiz. 2001. V. 128. P. 378); hep-th/0103208.
20. *Sezgin E., Sundell P.* // Nucl. Phys. B. 2002. V. 644. P. 303; Erratum // Ibid. 2003. V. 660. P. 403; hep-th/0205131.
21. *Klebanov I.R., Polyakov A.M.* // Phys. Lett. B. 2002. V. 550. P. 213; hep-th/0210114.

22. Leonhardt T., Meziane A., Ruhl W. // Phys. Lett. B. 2003. V. 555. P. 271; hep-th/0211092; Leonhardt T., Ruhl W. The Minimal Conformal $O(N)$ Vector Sigma Model at $d = 3$. hep-th/0308111.
23. Petkou A. C. // JHEP. 0303. 2003. 049; hep-th/0302063; Leigh R. G., Petkou A. C. // JHEP. 0306. 2003. 011; hep-th/0304217.
24. Dhar A., Mandal G., Wadia S. R. String Bits in Small Radius AdS and Weakly Coupled $N = 4$ Super Yang–Mills Theory. I. hep-th/0304062.
25. Clark A. et al. // Phys. Rev. D. 2003. V. 68. P. 066011; hep-th/0304107.
26. Das S. R., Jevicki A. // Ibid. P. 044011; hep-th/0304093.
27. Bianchi M., Morales J. F., Samtleben H. // JHEP. 0307. 2003. 062; hep-th/0305052.
28. Lindstrom U., Zabzine M. Tensionless Strings, WZW Models at Critical Level and Massless Higher Spin Fields. hep-th/0305098.
29. Gopakumar R. From Free Fields to AdS . hep-th/0308184.
30. Leigh R. G., Petkou A. C. $SL(2, Z)$ Action on Three-Dimensional CFTs and Holography. hep-th/0309177.
31. Bonelli G. // JHEP. 0311. 2003. 028; hep-th/0309222.
32. Schnitzer H. J. Gauged Vector Models and Higher-Spin Representations in $AdS(5)$. hep-th/0310210.
33. Vasiliev M. A. // Nucl. Phys. B. 2001. V. 616. P. 106; Erratum // Ibid. 2003. V. 652. P. 407; hep-th/0106200.
34. Vasiliev M. A. // Phys. Lett. B. 1990. V. 243. P. 378; 1990. V. 285. P. 225.
35. Vasiliev M. A. // Phys. Lett. B. 2003. V. 567. P. 139; hep-th/0304049.
36. Fierz M., Pauli W. // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1939. V. 173. P. 211.
37. Singh L., Hagen C. // Phys. Rev. D. 1974. V. 9. P. 898; 910.
38. Fronsdal C. // Phys. Rev. D. 1978. V. 18. P. 3624; Fang J., Fronsdal C. // Ibid. P. 3630.
39. Curtright T. // Phys. Lett. B. 1979. V. 85. P. 219.
40. de Wit B., Freedman D. Z. // Phys. Rev. D. 1980. V. 21. P. 358.
41. Vasiliev M. A. // Yad. Fiz. 1980. V. 32. P. 855.
42. Curtright T. // Phys. Lett. B. 1985. V. 165. P. 304.
43. Aulakh C. S., Koh I. G., Ouvry S. // Phys. Lett. B. 1986. V. 173. P. 284.
44. Siegel W., Zwiebach B. // Nucl. Phys. B. 1987. V. 282. P. 125.
45. Labastida J. M. F., Morris T. R. // Phys. Lett. B. 1986. V. 180. P. 101.
46. Labastida J. M. F. // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 531.
47. Labastida J. M. F. // Nucl. Phys. B. 1989. V. 322. P. 185.
48. Pashnev A., Tsulaia M. M. // Mod. Phys. Lett. A. 1997. V. 12. P. 861; hep-th/9703010; Mod. Phys. Lett. A. 1998. V. 13. P. 1853; hep-th/9803207; Burdik C., Pashnev A., Tsulaia M. // Mod. Phys. Lett. A. 2001. V. 16. P. 731; hep-th/0101201; Nucl. Phys. Proc. Suppl. 2001. V. 102. P. 285; hep-th/0103143.
49. Francia D., Sagnotti A. // Phys. Lett. B. 2002. V. 543. P. 303; hep-th/0207002.
50. Bekaert X., Boulanger N. Tensor Gauge Fields in Arbitrary Representations of $GL(D, R)$: Duality and Poincare Lemma. hep-th/0208058.

51. *Bekaert X., Boulanger N.* // Phys. Lett. B. 2003. V. 561. P. 183; hep-th/0301243.
52. *de Medeiros P., Hull C.* // JHEP. 0305. 2003. 019; hep-th/0303036.
53. *Fronsdal C.* // Phys. Rev. D. 1979. V. 20. P. 848;
Fang J., Fronsdal C. // Phys. Rev. D. 1980. V. 22. P. 1361.
54. *Vasiliev M.A.* // Fortsch. Phys. 1987. Bd. 35. S. 741.
55. *Lopatin V.E., Vasiliev M.A.* // Mod. Phys. Lett. A. 1988. V. 3. P. 257.
56. *Vasiliev M.A.* // Nucl. Phys. B. 1988. V. 301. P. 26.
57. *Metsaev R.R.* // Phys. Lett. B. 1995. V. 354. P. 78; 1998. V. 419. P. 49; hep-th/9802097; Talk given at the Intern. Seminar on Supersymmetries and Quantum Symmetries (Dedicated to the Memory of V. I. Ogievetsky), Dubna, July 22–26, 1997; hep-th/9810231.
58. *Brink L., Metsaev R.R., Vasiliev M.A.* // Nucl. Phys. B. 2000. V. 586. P. 183; hep-th/0005136.
59. *Deser S., Waldron A.* // Nucl. Phys. B. 2001. V. 607. P. 577; hep-th/0103198.
60. *Buchbinder I.L., Pashnev A., Tsulaia M.* // Phys. Lett. B. 2001. V. 523. P. 338; hep-th/0109067.
61. *Metsaev R.R.* // Phys. Lett. B. 2002. V. 531. P. 152; hep-th/0201226.
62. *Biswas T., Siegel W.* // JHEP. 0207. 2002. 005; hep-th/0203115.
63. *Sezgin E., Sundell P.* // JHEP. 0109. 2001. 025; hep-th/0107186.
64. *Zinoviev Y.M.* On Massive Mixed Symmetry Tensor Fields in Minkowski Space and $(A)dS$. hep-th/0211233.
65. *Zinoviev Y.M.* First Order Formalism for Mixed Symmetry Tensor Fields. hep-th/0304067.
66. *Shaynkman O.V., Vasiliev M.A.* // Theor. Math. Phys. 2000. V. 123. P. 683 (Teor. Mat. Fiz. 2000. V. 123. P. 323); hep-th/0003123.
67. *Hull C.* // JHEP. 0109. 2001. 027; hep-th/0107149.
68. *de Medeiros P., Hull C.* // Commun. Math. Phys. 2003. V. 235. P. 255; hep-th/0208155.
69. *Casini H., Montemayor R., Urrutia L.F.* // Phys. Rev. D. 2003. V. 68. P. 065011; hep-th/0304228.
70. *Boulanger N., Cnockaert S., Henneaux M.* // JHEP. 0306. 2003. 060; hep-th/0306023.
71. *Stelle K., West P.* // Phys. Rev. D. 1980. V. 21. P. 1466;
Preitschopf C.R., Vasiliev M.A. The Superalgebraic Approach to Supergravity // Proc. of the 31st Intern. Ahrenshoop Symp. on the Theory of Elementary Particles, Berlin, 1998. 496 p.; hep-th/9805127.
72. *MacDowell S.W., Mansouri F.* // Phys. Rev. Lett. 1977. V. 38. P. 739; Erratum // Ibid. 1977. V. 38. P. 1376;
Mansouri F. // Phys. Rev. D. 1977. V. 16. P. 2456.
73. *Konstein S.E., Vasiliev M.A.* // Nucl. Phys. B. 1989. V. 312. P. 402.
74. *de Medeiros P.* Massive Gauge-Invariant Field Theories on Spaces of Constant Curvature. hep-th/0311254.
75. *Fradkin E.S., Linetsky V.Ya.* // Ann. Phys. 1990. V. 198. P. 252.
76. *Sezgin E., Sundell P.* // JHEP. 0109. 2001. 036; hep-th/0105001.
77. *Townsend P.K.* // Phys. Rev. D. 1977. V. 15. P. 2804.
78. *Metsaev R.R.* IIB Supergravity and Various Aspects of Light-Cone Formalism in AdS Space-Time. hep-th/0002008.
79. *Fradkin E.S., Linetsky V.Ya.* // Mod. Phys. Lett. A. 1989. V. 4. P. 2363.

80. *Gunaydin M., Minic D.* // Nucl. Phys. B. 1998. V. 523. P. 145; hep-th/9802047.
81. *Nahm W.* // Nucl. Phys. B. 1978. V. 135. P. 149.
82. *Vasiliev M.A.* // Fortsch. Phys. 1988. Bd. 36. S. 33.
83. *Berends F.A. et al.* // J. Phys. A. 1980. V. 13. P. 1643.
84. *Fradkin E.S., Linetsky V.Ya.* // Nucl. Phys. B. 1991. V. 350. P. 274.
85. *Vasiliev M.A.* // ЖЭФ. 0412. 2004. 046.
86. *Vasiliev M.A.* Actions, Charges and Off-Shell Fields in the Unfolded Dynamics Approach. hep-th/0504090.
87. *Alkalaev K.B.* // Phys. Lett. B. 2001. V. 519. P. 121.
88. *Alkalaev K.B., Vasiliev M.A.* // Nucl. Phys. B. 2003. V. 655. P. 57.
89. *Alkalaev K.B., Shaynkman O.V., Vasiliev M.A.* // Nucl. Phys. B. 2004. V. 692. P. 363.
90. *Алкалаев К. Б.* // ТМФ. 2004. Т. 140. С. 424.
91. *Alkalaev K.B.* Mixed-Symmetry Massless Gauge Fields in AdS_5 . hep-th/0501105.
92. *Alkalaev K.B., Shaynkman O.V., Vasiliev M.A.* Lagrangian Formulation for Free Mixed-Symmetry Bosonic Gauge Fields in $(A)dS_d$. hep-th/0501108.