

МНОЖЕСТВЕННОЕ РОЖДЕНИЕ АДРОНОВ  
В ПРОЦЕССЕ  $e^+e^-$ -АННИГИЛЯЦИИ,  
ИНДУЦИРОВАННОЕ ТЯЖЕЛЫМИ ПЕРВИЧНЫМИ  
КВАРКАМИ. НОВЫЙ АНАЛИЗ

*А. В. Киселев, В. А. Петров*

Государственный научный центр РФ Институт физики высоких энергий,  
Протвино, Россия

ВВЕДЕНИЕ	1542
МНОЖЕСТВЕННОСТИ АДРОНОВ В $e^+e^-$ -АННИГИЛЯЦИИ	1544
РАЗНОСТИ МНОЖЕСТВЕННОСТЕЙ В КХД	1549
РАЗНОСТЬ МНОЖЕСТВЕННОСТЕЙ: ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ	1551
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1555
ПРИЛОЖЕНИЕ А	1557
ПРИЛОЖЕНИЕ Б	1560
ПРИЛОЖЕНИЕ В	1561
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1563

# МНОЖЕСТВЕННОЕ РОЖДЕНИЕ АДРОНОВ В ПРОЦЕССЕ $e^+e^-$ -АННИГИЛЯЦИИ, ИНДУЦИРОВАННОЕ ТЯЖЕЛЫМИ ПЕРВИЧНЫМИ КВАРКАМИ. НОВЫЙ АНАЛИЗ

*А. В. Киселев, В. А. Петров*

Государственный научный центр РФ Институт физики высоких энергий,  
Протвино, Россия

Представлен анализ процесса множественного рождения адронов, индуцированного тяжелыми первичными кварками в  $e^+e^-$ -аннигиляции, с учетом наиболее полных и скорректированных экспериментальных данных. В рамках пертурбативной КХД даны новые теоретические оценки на асимптотически постоянные разности множественностей в процессах с легкими и тяжелыми кварками.

In this paper we present the analysis of the multiple hadron production induced by the primary heavy quarks in  $e^+e^-$  annihilation with the account of most complete and corrected experimental data. In the framework of perturbative QCD, the new theoretical bounds on the asymptotically constant differences of the multiplicities in processes with light and heavy quarks are given.

PACS: 13.66.Bc, 14.65.Dw, 14.65.Fy, 12.38.Bx

## ВВЕДЕНИЕ

Как известно уже в классической теории, излучение заряженными частицами тем меньше, чем больше их масса. В квантовой теории поля, в частности в КХД, это приводит к ряду ярких эффектов, обусловленных тяжелыми кварками, например, к эффекту лидирования мезонов, содержащих  $c$ - и  $b$ -кварки в  $e^+e^-$ -аннигиляции [1]. Если иметь в виду, что «излучение» в случае КХД есть излучение глюонов, впоследствии «материализующихся» в виде наблюдаемых адронов, то естественно ожидать, что в событиях, индуцированных тяжелыми кварками, множественность адронов (за вычетом продуктов распада лидирующих кварков) будет меньше, чем в аналогичных событиях, запущенных легкими кварками. Столь же естественным могло бы показаться ожидание, что при достаточно высоких энергиях разница между этими множественностями или соответствующими сечениями должна исчезать.

Однако это не всегда так. Например, даже в КЭД разность сечений рождения различающихся по массе фермионных пар двумя фотонами (умноженная

на квадрат энергии в с. ц. м. фотонов) не исчезает с ростом энергии, а стремится к некоторой постоянной, зависящей от масс конечных фермионов [2]. Измерения множественностей адронов в  $e^+e^-$ -аннигиляции, ассоциированных с первичными кварками определенных ароматов (на практике легкие  $u$ -,  $d$ - и  $s$ -кварки считаются безмассовыми), проводились на лептонных ускорителях с энергией 29 ГэВ и выше, в том числе на коллайдерах SLC, KEK, LEP I и LEP II.

Ввиду большого интереса, который вызвали эти эксперименты (см. ниже), и наличия конкурирующих теоретических предсказаний нет никакого сомнения, что подобные измерения будут проводиться и на будущих линейных коллайдерах типа CLIC или ILC [3]. Впервые проследить за такого рода эффектами зависимости от масс попытались в рамках так называемой наивной модели, суть которой состоит в том, что принимается универсальный механизм множественного рождения адронов из некоего глюонного конгломерата, не чувствующего кварковых ароматов, а вся разница между процессами, запускаемыми различными кварк-антикварковыми парами, возникает благодаря различию в эффективной энергии, доступной для рождения адронов. При не очень высоких энергиях эта модель согласуется с экспериментальными данными, но при более высоких энергиях «проваливается» существенно ниже данных по разностям множественностей.

Позже был принят другой подход, более непосредственно апеллирующий к вычислительному реквизиту пертурбативной КХД. Однако на этот раз полученные оценки шли существенно выше данных. При этом имелось явное указание на асимптотическое постоянство разностей множественностей от тяжелых и легких кварков. Некоторое время спустя та же величина — разность множественностей в событиях с легкими и тяжелыми кварками — была вычислена более точно. Результат оказался поразительно близким к экспериментальным данным.

Как уже было сказано, «наивная модель» [4, 5] была первой попыткой учесть адроны, рождающиеся в добавление к продуктам распада тяжелой кварк-антикварковой пары в  $e^+e^-$ -аннигиляции, а позже отмечалось [6], что разность между множественностями в событиях, инициированных тяжелыми ( $Q = c, b$ ) и легкими ( $l = u, d, s$ ) кварками,

$$\delta_{Ql} = N_{Q\bar{Q}}(Q^2) - N_{l\bar{l}}(Q^2), \quad (1)$$

с ростом энергии  $Q = \sqrt{q^2}$  стремится к ненулевой постоянной:

$$\delta_{Ql} \rightarrow \delta_{Ql}^{\text{MLLA}} = 2n_Q - N_{l\bar{l}}(m_Q^2 e). \quad (2)$$

Выше и в дальнейшем имеются в виду средние множественности заряженных частиц, а « $e$ » — основание натуральных логарифмов ( $\ln e = 1$ ).

Сравнение с данными показало, что «наивная модель» описывает данные по  $\delta_{bl}$  вплоть до  $Q = 58$  ГэВ [4, 7–9], но идет ниже данных с LEP и SLC [10–12]. Что же до формулы, полученной на основе так называемого модифицированного главного логарифмического приближения (МГЛП, по-английски MLLA) (2), то оно существенно превышало как низко-, так и высокоэнергетические данные по  $\delta_{bl}$ .

Детальные вычисления этой величины на базе КХД были проделаны в [13]. Выражение для  $\delta_{Ql}$  из [13] оказалось в хорошем согласии с экспериментальными измерениями ассоциированной множественности адронов в  $e^+e^-$ -аннигиляции (см., например, [14, 15]).

Как будет видно ниже, знание множественности только легких адронов по существу уже позволяет вычислить  $\delta_{Ql}$ . Недавно были обнаружены данные по средней множественности заряженных адронов в  $l\bar{l}$ -событиях при различных энергиях с поправками на влияние детектора и излучение из начального состояния [16]. В работе [16] можно также найти скорректированные разности множественностей, усредненные по всем опубликованным результатам:

$$\delta_{bl}^{\text{exp}} = 3,12 \pm 0,14, \quad (3)$$

$$\delta_{cl}^{\text{exp}} = 1,0 \pm 0,4. \quad (4)$$

Ввиду появления этих скорректированных экспериментальных данных возникла естественная необходимость пересмотреть и наши предсказания для  $\delta_{bl}$  с учетом данных по множественности  $N_{l\bar{l}}(Q^2)$  в событиях с легкими кварками.

В разд. 1 даны определения всех используемых величин, что, к сожалению, не всегда можно найти в ряде важных работ. Выведена аналитическая формула для адронной множественности в  $e^+e^-$ -аннигиляции. В разд. 2 на основе КХД получено выражение для разности множественностей. В разд. 3 вычислены верхняя и нижняя границы для  $\delta_{bl}$ . В приложении А дан детальный вывод эволюционного уравнения для множественности в глюонной струе. В приложении Б обсуждена связь между нашим подходом и схемой, в которой используются функции распада Альтарелли–Паризи. Проблемы, связанные с обеспечением калибровочной инвариантности, возникающие при приближенных вычислениях «легкой множественности» по теории возмущений, рассмотрены в приложении В.

## 1. МНОЖЕСТВЕННОСТИ АДРОНОВ В $e^+e^-$ -АННИГИЛЯЦИИ

Средняя множественность адронов в  $q\bar{q}$ -событии в процессе  $e^+e^-$ -аннигиляции имеет вид

$$N_{q\bar{q}}^h(Q^2) = 2n_q + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(q, k) d_{aa'}^{\mu\alpha}(k) d_{bb'}^{\nu\beta}(k) n_{\alpha\beta}^{a'b'}(k), \quad (5)$$

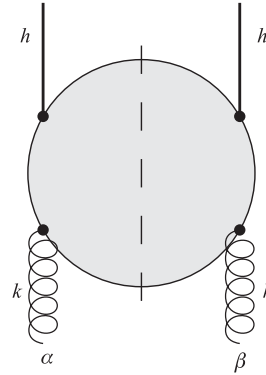


Рис. 1. Диаграмма, дающая инклюзивный спектр адронов с 4-импульсом  $h$  (сплошные линии) в глюонной струе с виртуальностью  $k^2$  (спиральные линии)

где  $d_{ab}^{\mu\nu}(k)$  — пропагатор глюона с импульсом  $k$ . Здесь и ниже  $a, b$  и  $a', b'$  — цветовые индексы.

Индекс  $q$  обозначает тип первичных кварков, и в дальнейшем  $q = Q$  (тяжелый кварк) относится к очарованному или бьюти-кваркам, тогда как  $q = l$  (легкий кварк) обозначает пары  $u$ -,  $d$ - или  $s$ -кварков, которые принято считать в данном контексте безмассовыми. В частности,  $N_{l\bar{l}}(Q^2)$  обозначает множественность адронов в событиях с легкими кварками, тогда как  $N_{Q\bar{Q}}(Q^2)$  — это множественность адронов в событиях, когда процесс запускается тяжелыми кварком и антикварком типа  $Q$ .

Первый член в правой части уравнения (5),  $2n_q$ , — это множественность от фрагментации лидирующего кварка (антикварка). Она извлекается из данных ( $2n_c = 5,2$ ,  $2n_b = 11,0$  [6] и  $2n_l = 2,4$  [14]). Величина  $n_{\alpha\beta}^{a'b'}(k)$  в подынтегральном выражении (5) дается диаграммой на рис. 1, причем предполагается интегрирование по импульсам детектируемого адрона и усреднение по его поляризациям. Эта диаграмма отвечает следующему выражению:

$$n_{\alpha\beta}^{a'b'}(k) = \int \frac{d^3h}{(2\pi)^3 2h_0} \iiint d^4x d^4y d^4z e^{ikx - ih(y-z)} \times \\ \times \langle 0 | (T I_{\alpha}^{a'}(x) J_h^+(y)) (T I_{\beta}^{b'}(0) J_h(z)) | 0 \rangle = -i \iiint d^4x d^4y d^4z e^{ikx} D_h^-(y-z) \times \\ \times \langle 0 | (T I_{\alpha}^{a'}(x) J_h^+(y)) (T I_{\beta}^{b'}(0) J_h(z)) | 0 \rangle. \quad (6)$$

Здесь  $J_h(x)$  — источник адронов  $h$  (спиновые индексы опущены), а  $I_{\alpha}^a(x)$  — глюонный (цветовой) ток [17],

$$I_{\mu}^a(x) = i \frac{\delta S}{\delta A_{\mu}^a(x)} S^*, \quad (7)$$

где  $A_a^\mu(x)$  обозначает глюонное поле.  $D_h^-(x)$  есть функция Паули–Йордана [17]:

$$D_h^-(x) = i \langle 0 | h(x) h(0) | 0 \rangle, \quad (8)$$

где  $h(x)$  — асимптотическое адронное поле\*.

Так как  $k^\alpha I_\alpha^a(x) = 0$ , а адроны в конечном состоянии бесцветны, получаем

$$n_{\alpha\beta}^{a'b'}(k) = (-g_{\alpha\beta} k^2 + k_\alpha k_\beta) \delta^{a'b'} n_g(k^2), \quad (9)$$

где  $n_g(k^2)$  описывает среднюю множественность адронов в глюонной струе с виртуальностью  $k^2$ . Она, конечно же, калибровочно-инвариантна и зависит только от  $k^2$ .

Полезно ввести множественность в глюонной струе, виртуальность которой  $p^2$  изменяется вплоть до  $k^2$ :

$$N_g(k^2, Q_0^2) = \int_{Q_0^2}^{k^2} \frac{dp^2}{p^2} n_g(p^2). \quad (10)$$

Весьма часто величину  $N_g(k^2)$  ошибочно называют множественностью в глюонной струе с фиксированной виртуальностью  $k^2$ . Последнее относится лишь к величине  $n_g(k^2)$ .

В (10) введено инфракрасное обрезание  $Q_0$ , которое отделяет пертурбативную область от непертурбативной. Мы используем «условно-стандартное» значение  $Q_0 = 1$  ГэВ для наших численных оценок (см. разд. 3).

Величина  $n_g(k^2)$  не может быть вычислена по теории возмущений. Обычно считается, что средняя множественность адронов пропорциональна  $n_g(k^2, Q_0^2)$ , т. е. средней множественности партонов (вне массовой оболочки) с «массой»  $Q_0$  (так называемая локальная партон-адронная дуальность):

$$n_g(k^2) = n_g(k^2, Q_0^2) K(Q_0^2), \quad (11)$$

где  $K(Q_0^2)$  — феноменологический, не зависящий от энергии, фактор. Эволюционные уравнения КХД как для  $n_g(k^2, Q_0^2)$ , так и для  $N_g(k^2, Q_0^2)$  выведены в приложении А. Подчеркнем, однако, что главные результаты данной работы (см. разд. 2, 3) не зависят от явного вида функции  $n_g(k^2)$ .

В уравнении (5) первый сомножитель подынтегрального уравнения есть

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(q, k) = (-g^{\rho\sigma}) \Pi_{\rho\sigma;\mu\nu}^{ab}(q, k), \quad (12)$$

\*Для адронов с полуцелым спином  $D_h^-(x)$  заменяется на  $S_h^-(x) = (i\hat{\partial} + m_h) D_h^-(x)$ .

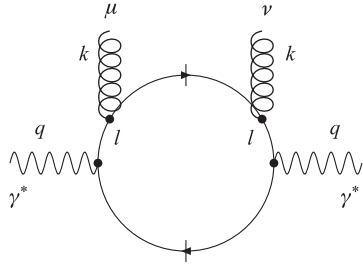


Рис. 2. Инклюзивное распределение массивной (с большой виртуальностью) глюонной струи (спиральная линия) с виртуальностью  $k^2$ . Волнистая линия — виртуальный фотон с 4-импульсом  $q$ . Прямые линии отвечают легким кваркам. Разрезанные линии отвечают кваркам на массовой оболочке

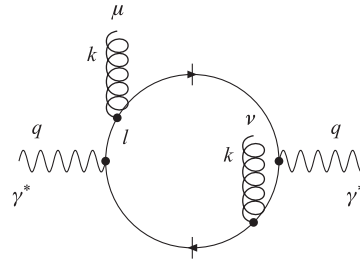


Рис. 3. Интерференционные диаграммы, которые также дают вклад в инклюзивное распределение глюонных струй

где  $\Pi_{\rho\sigma;\mu\nu}^{ab}(q, k)$  — двухглюонно-неприводимая часть соответствующего скачка корреляционной причинной функции четырех токов\*

$$\Pi_{\rho\sigma;\mu\nu}^{ab}(q, k) = \iiint d^4x d^4y d^4z e^{iqx - ik(y-z)} \times \langle 0 | \left( T J_\rho^{\text{em}}(x) I_\mu^a(y) \right) \left( T J_\sigma^{\text{em}}(0) I_\nu^b(z) \right) | 0 \rangle. \quad (13)$$

Здесь  $J_\rho^{\text{em}}(x)$  — электромагнитный ток. Цветовой ток  $I_\mu^a(x)$  был определен выше (7).

В первом порядке по константе сильного взаимодействия  $\Pi_{\mu\nu}^{ab}(q, k)$  дается двумя диаграммами на рис. 2 и 3, нормированными на полное сечение процесса  $e^+e^-$  в адроны. Эта величина калибровочно-инвариантна:

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu}^{ab}(q, k) = 0. \quad (14)$$

Определим

$$C_F \frac{\alpha_s(k^2)}{\pi k^2} E(Q^2, k^2) = \frac{1}{(2\pi)^3 Q^2} \left( -k^2 \frac{\partial}{\partial k^2} \right) \int d(qk) \sqrt{(qk)^2 - Q^2 k^2} \times \times (-g^{\mu\nu}) \delta_{ab} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(Q^2, k^2, qk), \quad (15)$$

\*Заметим, что  $\Pi_{\rho\sigma;\mu\nu}^{ab}$  пропорционально  $\delta^{ab}$ .

где  $C_F = (N_c^2 - 1)/2N_c$ , а  $N_c = 3$  — число цветов. Тогда средняя множественность в  $e^+e^-$ -аннигиляции (5) имеет вид

$$N_{q\bar{q}}^h(Q^2, Q_0^2) = 2n_q + C_F \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dk^2}{k^2} \frac{\alpha_s(k^2)}{\pi} E(Q^2, k^2) N_g(k^2). \quad (16)$$

Член  $E(Q^2, k^2)$  есть инклюзивный спектр глюонной струи с виртуальностью вплоть до  $k^2$ , испущенной первичным кварком\*.

Для случая легких кварков явный вид  $E(Q^2, k^2)$  был получен в работе [13]. В терминах переменной

$$\sigma = \frac{k^2}{Q^2} \quad (17)$$

имеем

$$E(\sigma) = (1 + 2\sigma + 2\sigma^2) \ln \frac{1}{\sigma} - \frac{3 + 7\sigma}{2} (1 - \sigma) - \sigma(1 + \sigma) \left( \ln \frac{1}{\sigma} \right)^2 + 4\sigma(1 + \sigma)I(\sigma), \quad (18)$$

где

$$I(\sigma) = \frac{\pi^2}{4} - \text{Li}_2(1 + \sigma), \quad (19)$$

и  $\text{Li}_2(z)$  есть дилогарифм Эйлера.

Введем новые переменные

$$\eta = \ln \frac{Q^2}{k^2} \quad (20)$$

и

$$Y = \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}, \quad (21)$$

а также обозначение

$$\hat{N}_g(k^2) = C_F \frac{\alpha_s(k^2)}{\pi} N_g(k^2). \quad (22)$$

---

\*В [13] подробно объяснено, что такой механизм не является лишь учетом одноединственного каскадирующего глюона, как кажется некоторым авторам [16]. То, что  $E$  есть на самом деле инклюзивный спектр глюонных струй, видно, в частности, из того, что  $\int (dk^2/k^2) E(Q^2, k^2) > 1$  и является по существу средним числом глюонных струй.



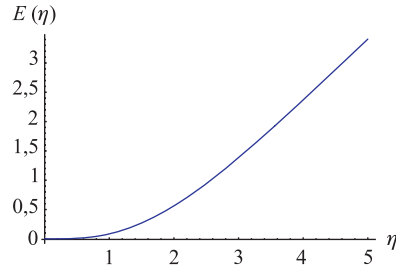
Тогда (16) может быть переписано как

$$N_{q\bar{q}}(Y) = 2n_q + \int_0^Y d\eta \hat{N}_g(Y - \eta) E(\eta) = 2n_q + N_q(Y). \quad (23)$$

Физический смысл функции

$$N_q(Y) = \int_0^Y d\eta \hat{N}_g(Y - \eta) E(\eta) \quad (24)$$

в (23) следующий. Она описывает среднее число адронов, рождаемых виртуальными глюонными струями, испущенными первичными (анти)кварками типа  $q$ . Иначе говоря, это множественность в  $q\bar{q}$ -событии за исключением множественности продуктов распада этих кварков на конечной стадии адронизации (первый член в (23)).



Функция  $E(\eta)$  изображена на рис. 4.

Она имеет асимптотику

Рис. 4. Функция  $E(\eta)$

$$E(\eta)|_{\eta \rightarrow \infty} = E^{\text{asym}}(\eta) = \eta - \frac{3}{2}. \quad (25)$$

Производная от  $E(\eta)$  положительна для всех  $\eta$ , как это видно на рис. 4.

Из соотношения  $\partial N_{q\bar{q}}(Y)/\partial Y = \int_0^Y d\eta \hat{N}_g(\eta) \partial E(Y - \eta)/\partial Y$  следует, что ассоциированная множественность  $N_{q\bar{q}}(Q)$  (23) есть монотонно возрастающая функция  $Q$  для любой положительной функции  $N_g(k^2)$ .

## 2. РАЗНОСТИ МНОЖЕСТВЕННОСТЕЙ В КХД

Рассмотрим теперь разность множественностей в событиях, индуцированных легкими и тяжелыми кварками,  $\delta_{Ql}$ , которая определяется (1). В работе [13] было получено следующее представление:

$$\delta_{Ql}^{\text{QCD}} = 2(n_Q - n_l) - \Delta N_Q(Y_m). \quad (26)$$

Здесь введены новое обозначение

$$\Delta N_Q(Y_m) = N_q - N_Q = \int_{-\infty}^{Y_m} dy \hat{N}_g(Y_m - y) \Delta E_Q(y) \quad (27)$$

и переменные

$$y = \ln \frac{m_Q^2}{k^2} \quad (28)$$

и

$$Y_m = \ln \frac{m_Q^2}{Q_0^2}. \quad (29)$$

Важный результат, полученный в [13], состоит в том, что функция

$$\Delta E_Q = E - E_Q \quad (30)$$

зависит только от переменной

$$\rho = \exp(-y), \quad (31)$$

но не от энергии  $Q$ . Явный вид  $\Delta E_Q$  следующий:

$$\Delta E_Q(\rho) = \left(1 - 3\rho + \frac{7}{2}\rho^2\right) \ln \frac{1}{\rho} + \rho(7\rho - 20)J(\rho) + \frac{20}{\rho - 4}[1 - J(\rho)] + 7\rho + \frac{9}{2}, \quad (32)$$

где

$$J(\rho) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\rho}{\rho - 4}} \ln \left( \frac{\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho - 4}}{2} \right), & \rho > 4, \\ 1, & \rho = 4, \\ \sqrt{\frac{\rho}{4 - \rho}} \arctan \left( \frac{\sqrt{4 - \rho}}{\rho} \right), & \rho < 4. \end{cases} \quad (33)$$

Поскольку  $\Delta E_Q(y)$  ведет себя асимптотически как

$$\Delta E_Q(y) \Big|_{y \rightarrow -\infty} \simeq \frac{11}{3} \exp(-|y|), \quad (34)$$

то интеграл в (27) быстро сходится при  $y \rightarrow -\infty$ . Функция  $\Delta E_Q(y)$  изображена на рис. 5. Находим, что

$$\Delta E_Q(y) \Big|_{y \rightarrow \infty} = \Delta E_Q^{\text{asym}}(y) = y - \frac{1}{2}. \quad (35)$$

Другое важное соотношение вытекает из (25) и (35):

$$\Delta E_Q(y - 1) - E(y) \Big|_{y \rightarrow \infty} \simeq \frac{5}{2} \sqrt{e} \ln 2 \exp(-y/2). \quad (36)$$

Другими словами,

$$\Delta E_Q(y) \simeq E(y + 1) \quad (37)$$

при больших значениях  $y$ .

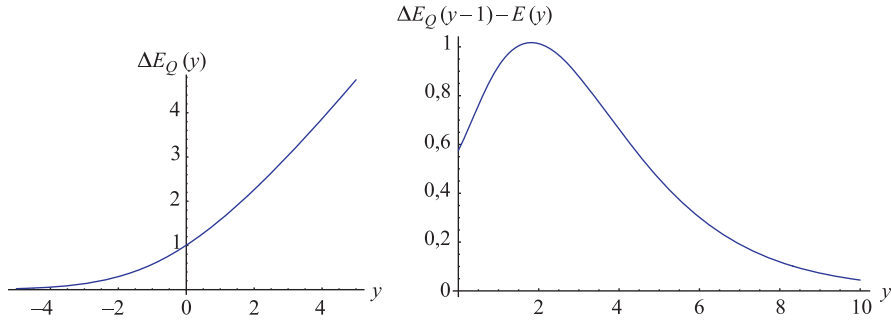


Рис. 5. Функция  $\Delta E_Q(y)$

Рис. 6. Разность  $\Delta E_Q(y-1) - E(y)$  как функция переменной  $y$

Если положить, что  $\Delta E_Q(y) = E(y + 1)$ , то тогда (в пренебрежении вкладом от области  $y < -1$ )

$$\Delta N_Q = N_{i\bar{i}}(m_Q^2 e) - 2n_l. \tag{38}$$

Соответственно, приближенное выражение для  $\delta_{Ql}$  имеет вид

$$\delta_{Ql}^{\text{appr}} = 2n_Q - N_{i\bar{i}}(m_Q^2 e) = \delta_{Ql}^{\text{MLLA}}, \tag{39}$$

где  $\delta_{Ql}^{\text{MLLA}}$  есть предсказание МГЛП для разности множественностей [6]. Напомним, что функция  $N_{i\bar{i}}(Q)$  описывает множественность адронов в событиях, индуцированных легкими кварками при энергии  $Q$ .

Однако выражение (37) слишком сильно отличается от точного в области  $y < Y_m^*$ , как это очевидно из рис. 6. Поэтому и получается большая разница между  $\delta_{Ql}^{\text{MLLA}}$  (39) и КХД-выражением  $\delta_{Ql}^{\text{QCD}}$  (26).

### 3. РАЗНОСТЬ МНОЖЕСТВЕННОСТЕЙ: ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

В этом разделе мы покажем, что разность между  $\delta_{Ql}^{\text{MLLA}}$  (39) и  $\delta_{Ql}^{\text{QCD}}$  действительно численно велика, а также получим как верхнее, так и нижнее ограничения на  $\delta_{bl}$ .

---

\*Для случая бьоти-кварка имеем  $Y_m \lesssim 3,2$ .

Удобно представить выражение для  $\Delta N_Q$  (27) в виде

$$\begin{aligned} \Delta N_Q(Y_m) &= \int_0^{Y_m+1} dy \hat{N}_g(Y_m+1-y)E(y) + \int_{-\infty}^{-1} dy \hat{N}_g(Y_m-y) \Delta E_Q(y) + \\ &+ \int_0^{Y_m+1} dy \hat{N}_g(Y_m+1-y)[\Delta E_Q(y-1) - E(y)] \equiv \\ &\equiv [N_{l\bar{l}}(m_Q^2 e) - 2n_l] + \delta N_Q^{(1)}(Y_m) + \delta N_Q^{(2)}(Y_m), \quad (40) \end{aligned}$$

что приводит к формуле (см. (26))

$$\begin{aligned} \delta_{Ql}^{\text{QCD}} &= 2n_Q - N_{l\bar{l}}(m_Q^2 e) - \delta N_Q^{(1)}(Y_m) - \delta N_Q^{(2)}(Y_m) = \\ &= \delta_{Ql}^{\text{appr}} - \delta N_Q^{(1)}(Y_m) - \delta N_Q^{(2)}(Y_m). \quad (41) \end{aligned}$$

Здесь мы ввели обозначения

$$\delta N_Q^{(1)}(Y_m) = \int_{-\infty}^{-1} dy \hat{N}_g(Y_m-y) \Delta E_Q(y) \quad (42)$$

и

$$\delta N_Q^{(2)}(Y_m) = \int_0^{Y_m+1} dy \hat{N}_g(Y_m+1-y)[\Delta E_Q(y-1) - E(y)]. \quad (43)$$

Заметим, что как  $\delta N_Q^{(2)}(Y_m)$ , так и  $\delta N_Q^{(1)}(Y_m)$  положительны, так как  $\Delta E_Q(y) > 0$  при всех значениях  $y$ , а  $\Delta E_Q(y-1) - E(y) > 0$  при  $y \geq 0$  (см. рис. 5 и 6).

Для того чтобы использовать скорректированные данные по  $N_{l\bar{l}}(Q^2)$  при  $Q = 8$  ГэВ,

$$N_{l\bar{l}}(8,0 \text{ ГэВ}) = 6,70 \pm 0,34, \quad (44)$$

мы принимаем, что  $m_b = 4,85$  ГэВ, что отвечает  $m_b \sqrt{e} = 8$  ГэВ.

Оценки показывают, что основная поправка к  $\delta_{Ql}^{\text{QCD}}$  — это  $\delta N_Q^{(2)}$ , а не  $\delta N_Q^{(1)}$ . Чтобы получить нижнее ограничение на  $\delta N_b^{(2)}$ , мы используем следующее неравенство в области  $y \geq 0$ :

$$\Delta E_Q(y) \geq E(y + \Delta y_Q). \quad (45)$$

Величина  $\Delta y_Q$  является решением уравнения

$$\Delta E_Q(Y_m) = E(Y_m + \Delta y_Q), \quad (46)$$

где  $Y_m$  определен выше (29). Тогда получаем из (43) и (45)

$$\delta N_Q^{(2)} \geq N_{l\bar{l}}(Y_m + \Delta y_Q) - N_{l\bar{l}}(Y_m + 1) - \int_0^{\Delta y_Q - 1} dy \hat{N}_g(Y_m + \Delta y_Q - y) E(y). \quad (47)$$

Для дальнейших оценок нам нужна множественность адронов в событиях с легкими кварками в интервале энергий  $2,5 \leq Q \leq 28$  ГэВ. Подгоняя данные по множественности адронов при низких  $Q$ , получаем выражение

$$N_{l\bar{l}}(Q^2) = 2,07 + 1,11 \ln Q + 0,54 \ln^2 Q. \quad (48)$$

Полагая  $Q_0 = 1$  ГэВ, находим  $\Delta y_b = 1,61$ . Принимая во внимание, что последний член в (47) пренебрежимо мал\*, получаем из (47), (48)

$$\delta N_b^{(2)} \geq 1,07. \quad (49)$$

Соответственно, наше предсказание, учитывающее пересмотренные данные по множественности в событиях, индуцированных легкими кварками,

$$\delta_{bl}^{\text{QCD}} \leq 2n_b - N_{l\bar{l}}(Y_m + \Delta y_b) = 3,33 \pm 0,38, \quad (50)$$

оказывается лежащим ниже (в смысле среднего значения), чем наш предыдущий результат  $\delta_{bl} = 3,68$  [13]. Мы использовали экспериментальное значение

$$2n_b = 11,10 \pm 0,18. \quad (51)$$

Ошибка в измерении  $N_{l\bar{l}}$  была взята  $\pm 0,34$ . Подчеркнем, что наше верхнее ограничение (50) очень близко к наблюдаемому значению  $\delta_{bl}^{\text{exp}}$  (3).

Теперь выведем нижнее ограничение на  $\delta_{bl}^{\text{QCD}}$ . Для этого возьмем выражение (27). Удобно представить интеграл в (27) как сумму двух членов\*\*:

$$\begin{aligned} \Delta N_b &= \int_{-4}^{-1} dy \hat{N}_g(Y_b - y) \Delta E_b(y) + \int_{-1}^{Y_b} dy \hat{N}_g(Y_m - y) \Delta E_b(y) = \\ &= \Delta N_b^{(1)} + \Delta N_b^{(2)}, \end{aligned} \quad (52)$$

где  $Y_b = \ln(m_b^2/Q_0^2) \simeq 3,16$ . Рассмотрим первый член в (52). Можно проверить, что

$$\Delta E(y) < 0,18 E(y + 5,8) \quad (53)$$

\*Поскольку  $E(y) < 0,02$  в области  $0 \leq y \leq \Delta y_b - 1 = 0,61$ .

\*\*Мы учитываем, что область  $-\infty < y < -4$  дает пренебрежимо малый вклад в  $\Delta N_b$ .

в области  $-4 < y < -1$ , что ведет к неравенству

$$\Delta N_b^{(1)} < 0,18 \int_{1,8}^{4,8} dy \hat{N}_g(Y_b + 5,8 - y) \Delta E_b(y). \quad (54)$$

Оценки показывают, что  $\hat{N}_g(Y_b + 5,8 - y) < 2 \hat{N}_g(4,8 - y)$ , когда  $y$  изменяется от 1,8 до 4,8. Таким образом, получаем

$$\Delta N_b^{(1)} < 0,36 [N_{ll}(Q = 11 \text{ ГэВ}) - N_{ll}(Q = 2,5 \text{ ГэВ})] = 1,54 \pm 0,17. \quad (55)$$

Второй член в (52) можно оценить, если использовать неравенство

$$\Delta E(y) < 0,62 E(y + 3,5), \quad (56)$$

справедливое в области  $-1 < y < Y_b$ . Тогда

$$\Delta N_b^{(2)} < 0,62 [N_{ll}(Q = 28 \text{ ГэВ}) - N_{ll}(Q = 3,5 \text{ ГэВ})] = 4,61 \pm 0,30. \quad (57)$$

В результате мы получаем из (26), (27) и (55), (57) нижнее ограничение на  $\delta_{bl}^{\text{QCD}}$ :

$$\delta_{bl}^{\text{QCD}} > 2,55 \pm 0,39. \quad (58)$$

На рис. 7 демонстрируется, что наши предсказания очень близки к среднему измеренному значению  $\delta_{bl}^{\text{exp}} = 3,12$ .

Можно сравнить наши результаты и с недавно опубликованными новыми результатами МГЛП [16]:

$$\delta_{bl}^{\text{MLLA}} = 4,4 \pm 0,4. \quad (59)$$

Результаты с добавлением поправок к МГЛП имеют вид

$$\delta_{bl}^{\text{NMLLA}} = 2,6 \pm 0,4, \quad (60)$$

$$\delta_{cl}^{\text{NMLLA}} = -0,1 \pm 0,4. \quad (61)$$

Таким образом, выражения в подходе МГЛП (2) неустойчивы к поправкам высшего порядка. Как было указано выше, формула, использованная в подходе МГЛП (39), составляет лишь *часть* точной КХД-формулы (1), (27) в приближении  $E(y) = \Delta E_Q(y - 1)$ . Это приближение слишком грубо (см. рис. 6), и отклонениями функции  $\Delta E_Q(y)$  от  $\Delta E_Q^{\text{asym}}(y) = y - 3/2$ , так же как и отклонениями  $E(y)$  от  $E^{\text{asym}}(y) = y - 1/2$ , пренебрегать никак нельзя.

Отметим, что предел  $y \rightarrow \infty$  означает, что инвариантная «масса» глюонной струи  $k^2$  стремится к нулю, так как  $k^2 = Q^2 \exp(-y)$  (см. (28)). Мы также считаем, что использование в схеме МГЛП аргумента  $k_{\perp}^2$  в  $N_g$  вместо

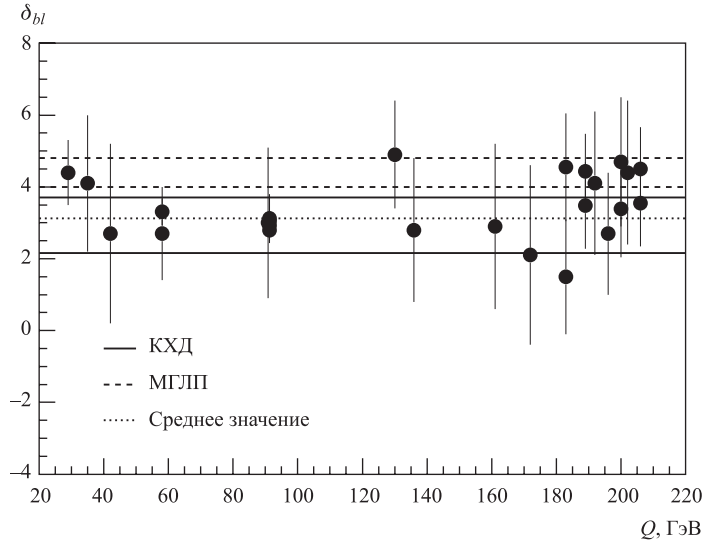


Рис. 7. Наш результат для  $\delta_{bl}$  («коридор» между двумя сплошными линиями) и предсказания МГЛП [16] («коридор» между двумя штриховыми линиями) в сравнении с экспериментальными данными

$k^2$  (см. [16] и другие приведенные там ссылки) не обосновано. Действительно,  $k$  — времениподобный вектор ( $k^2 = k_0^2 - k_\perp^2 > 0$ ), а глюонная струя с большим поперечным импульсом  $k_\perp$  имеет малую инвариантную массу  $k^2$ . В такой струе и множественность мала, так как фазовый объем для вторичных частиц определяется именно инвариантной массой.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выведена формула для разности между множественностями адронов в событиях  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны, индуцированных легкими и тяжелыми первичными кварками ( $Q$  — тип тяжелого кварка):

$$\begin{aligned} \delta_{Ql}^{\text{QCD}} = & 2n_Q - N_{l\bar{l}}(m_Q^2 e) - \\ & - \int_{Q_0^2}^{m_Q^2 e} \frac{dk^2}{k^2} \hat{N}_g(k^2) \left[ \Delta E_Q \left( \frac{m_Q^2}{k^2} \right) - E \left( \frac{m_Q^2 e}{k^2} \right) \right] - \\ & - \int_{m_Q^2 e}^{\infty} \frac{dk^2}{k^2} \hat{N}_g(k^2) \Delta E_Q \left( \frac{m_Q^2}{k^2} \right). \quad (62) \end{aligned}$$

Здесь  $\hat{N}_g(k^2)$  описывает среднее число адронов в глюонной струе с виртуальностью вплоть до  $k^2$ , а  $E, \Delta E_Q$  — известные функции.

Используя данные по множественности в событиях с легкими кварками  $N_{i\bar{i}}$ , скорректированными на эффекты детектора и излучения из начального состояния [16], из (62) получили ограничения

$$2,2 < \delta_{bi}^{\text{QCD}} < 3,7. \quad (63)$$

Отметим, что наш результат не зависит от выбора функции  $N_g(k^2)$  и находится в хорошем согласии со средним наблюдаемым значением  $\delta_{bi}^{\text{exp}} = 3,12 \pm 0,14$ .

Последние два члена в (62), которые вычитаются из первого, положительны и численно велики. В частности, в случае бьюти-кварка ( $m_Q = m_b, n_Q = n_b$ ) второй член в (62) (доминирующий над третьим) равен 1,1.

В результате отклонение предсказания МГЛП,

$$\delta_{bi}^{\text{MLLA}} = 2n_b - N_{i\bar{i}}(m_b^2 e), \quad (64)$$

от точного выражения\*

$$\delta_{bi}^{\text{QCD}} = 2(n_b - n_i) - \int_{Q_0^2}^{m_b^2} \frac{dk^2}{k^2} \hat{N}_g(k^2) \Delta E_Q \left( \frac{m_b^2}{k^2} \right) \quad (65)$$

оказывается весьма существенным.

Отметим также, что наши численные предсказания для случая очарованного кварка

$$\delta_{ci}^{\text{QCD}}(Q = 91 \text{ ГэВ}) = 1,01, \quad \delta_{ci}^{\text{QCD}}(Q = 170 \text{ ГэВ}) = 0,99 \quad (66)$$

были получены в [13] *еще до того, как были сделаны измерения*  $\delta_{cl}$  [11] \*\*. Как видно, наша оценка (66) находится в прекрасном согласии со средним наблюдаемым значением (4) (см. также рис. 7).

Часть результатов данной работы была опубликована в [18]. Мы благодарны В. Оксу (W. Ochs), переписка с которым по поводу нашей статьи [18] отчасти стимулировала появление настоящей работы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-02-16031).

\*Эта формула — эквивалентная компактная запись выражения (62) для случая  $Q = b$ .

\*\*При низких энергиях [4, 8] полная ошибка  $\delta_{cl}$  составляла примерно  $\pm 1,5$ .



**ПРИЛОЖЕНИЕ А**

Рассмотрим среднюю множественность партонов вне массовой оболочки с «массой»  $Q_0$  в глюонной струе, инвариантная масса которой  $p^2$ . Она подчиняется следующему интегральному уравнению [19,20]:

$$n_g(p^2, Q_0^2) = p^2 \delta(p^2 - Q_0^2) + \int_{Q_0^2}^{p^2} \frac{dl^2}{l^2} \int_0^1 dz \theta(zp^2 - l^2) \theta(zk^2 - p^2) \times \\ \times \frac{\alpha_s(p^2 z)}{2\pi} \hat{P}_{gg}(z) n_g(l^2, Q_0^2). \quad (\text{A.1})$$

Здесь  $k^2$  — виртуальность родительского кварка, который испускает эту глюонную струю, а  $\hat{P}_{gg}(z)$  — времениподобная функция распада Альтарелли-Паризи.

Неравенство

$$z \geq \frac{l^2}{p^2} \quad (\text{A.2})$$

в (A.1) — это кинематическая граница, тогда как ограничение

$$z \geq \frac{p^2}{k^2} \quad (\text{A.3})$$

есть динамическое условие. Последнее — не что иное, как угловое упорядочение, переписанное в терминах долей импульса и виртуальностей (см. работы [19,20]) \*.

Предполагая, что партонный ливень развивается в основном посредством *мягких* глюонов, можно положить в (A.1)

$$\hat{P}_{gg}(z) \Big|_{z \ll 1} \simeq 2C_A \frac{1}{z}. \quad (\text{A.4})$$

Тогда последовательность равенств [21]

$$N_g(k^2, Q_0^2) - 1 = \\ = C_A \int_{Q_0^2}^{k^2} \frac{dp^2}{p^2} \int_{Q_0^2}^{p^2} \frac{dl^2}{l^2} \int_0^1 \frac{dz}{z} \theta(zp^2 - l^2) \theta(zk^2 - p^2) \frac{\alpha_s(zp^2)}{\pi} n_g(l^2, Q_0^2) =$$

---

\*Именно, угол излучения вторичного глюона с виртуальностью  $l^2$  меньше, чем угол, под которым испускается первичный глюон из родительского кварка.

$$\begin{aligned}
&= C_A \int_{Q_0^2}^{k^2} \frac{dp^2}{p^2} \theta \left( \sqrt{k^2 Q_0^2} - p^2 \right) \int_{Q_0^2}^{p^2} \frac{dl^2}{l^2} \int_0^1 \frac{dz}{z} \theta(zp^2 - l^2) \frac{\alpha_s(zp^2)}{\pi} n_g(l^2, Q_0^2) + \\
&+ C_A \int_{Q_0^2}^{k^2} \frac{dp^2}{p^2} \theta(p^2 - \sqrt{k^2 Q_0^2}) \left[ \int_{Q_0^2}^{p^2} \frac{dl^2}{l^2} \theta(p^4 - k^2 l^2) \int_0^1 \frac{dz}{z} \theta(zk^2 - p^2) + \right. \\
&\quad \left. + \int_{Q_0^2}^{p^2} \frac{dl^2}{l^2} \theta(k^2 l^2 - p^4) \int_0^1 \frac{dz}{z} \theta(zp^2 - l^2) \right] \frac{\alpha_s(zp^2)}{\pi} n_g(l^2, Q_0^2) = \\
&= C_A \int_{Q_0^2}^{k^2} \frac{dp^2}{p^2} \theta \left( \sqrt{k^2 Q_0^2} - p^2 \right) \int_{Q_0^2}^{p^2} \frac{dr^2}{r^2} \frac{\alpha_s(r^2)}{\pi} N_g(r^2, Q_0^2) + \\
&+ C_A \int_{Q_0^2}^{k^2} \frac{dp^2}{p^2} \theta \left( p^2 - \sqrt{k^2 Q_0^2} \right) \left[ \int_{Q_0^2}^{p^2} \frac{dr^2}{r^2} \theta(r^2 k^2 - p^4) \int_{Q_0^2}^{r^2} \frac{dl^2}{l^2} \theta(p^4 - k^2 l^2) + \right. \\
&\quad \left. + \int_{Q_0^2}^{p^2} \frac{dr^2}{r^2} \theta(r^2 k^2 - p^4) \int_{Q_0^2}^{r^2} \frac{dl^2}{l^2} \theta(k^2 l^2 - p^4) \right] \frac{\alpha_s(r^2)}{\pi} n_g(l^2, Q_0^2) = \\
&= C_A \int_{Q_0^2}^{k^2} \frac{dp^2}{p^2} \theta \left( \sqrt{k^2 Q_0^2} - p^2 \right) \int_{Q_0^2}^{p^2} \frac{dr^2}{r^2} \frac{\alpha_s(r^2)}{\pi} N_g(r^2, Q_0^2) + \\
&+ C_A \int_{Q_0^2}^{k^2} \frac{dp^2}{p^2} \theta \left( p^2 - \sqrt{k^2 Q_0^2} \right) \int_{Q_0^2}^{p^2} \frac{dr^2}{r^2} \theta(k^2 r^2 - p^4) \frac{\alpha_s(r^2)}{\pi} N_g(r^2, Q_0^2) = \\
&= C_A \int_{Q_0^2}^{k^2} \frac{dp^2}{p^2} \int_{Q_0^2}^{p^2} \frac{dr^2}{r^2} \frac{\alpha_s(r^2)}{\pi} N_g(r^2, Q_0^2) - \\
&- C_A \int_{Q_0^2}^{k^2} \frac{dp^2}{p^2} \theta \left( p^2 - \sqrt{k^2 Q_0^2} \right) \int_{Q_0^2}^{p^2} \frac{dr^2}{r^2} \theta(p^4 - k^2 r^2) \frac{\alpha_s(r^2)}{\pi} N_g(r^2, Q_0^2) = \\
&= C_A \int_{Q_0^2}^{k^2} \frac{dp^2}{p^2} \int_{Q_0^2}^{p^2} \frac{dr^2}{r^2} \frac{\alpha_s(r^2)}{2\pi} N_g(r^2, Q_0^2) \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

приводит к следующей формуле для  $N_g(k^2, Q_0^2)$ :

$$N_g(k^2, Q_0^2) = 1 + C_A \int_{Q_0^2}^{k^2} \frac{dp^2}{p^2} \int_{Q_0^2}^{p^2} \frac{dr^2}{r^2} \frac{\alpha_s(r^2)}{2\pi} N_g(r^2, Q_0^2). \quad (\text{A.6})$$

Из (A.6) получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\left(k^2 \frac{d}{dk^2}\right)^2 N_g(k^2, Q_0^2) = C_A \frac{\alpha_s(k^2)}{2\pi} N_g(k^2, Q_0^2) \quad (\text{A.7})$$

с граничными условиями

$$N_g(k^2, Q_0^2) \Big|_{k^2=Q_0^2} = 1, \quad k^2 \frac{d}{dk^2} N_g(k^2, Q_0^2) \Big|_{k^2=Q_0^2} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Это уравнение имеет решение

$$N_g(k^2, Q_0^2) = \sqrt{\frac{2C_A}{\pi b} \ln \frac{k^2}{\Lambda^2}} \left[ K_1 \left( \sqrt{\frac{2C_A}{\pi b} \ln \frac{k^2}{\Lambda^2}} \right) I_0 \left( \sqrt{\frac{2C_A}{\pi b} \ln \frac{Q_0^2}{\Lambda^2}} \right) + \right. \\ \left. + I_1 \left( \sqrt{\frac{2C_A}{\pi b} \ln \frac{k^2}{\Lambda^2}} \right) K_0 \left( \sqrt{\frac{2C_A}{\pi b} \ln \frac{Q_0^2}{\Lambda^2}} \right) \right] \quad (\text{A.9})$$

с асимптотикой

$$N_g(k^2, Q_0^2) \Big|_{k^2 \gg Q_0^2} \simeq \exp \left( \sqrt{\frac{2C_A}{\pi b} \ln \frac{k^2}{\Lambda^2}} \right). \quad (\text{A.10})$$

Здесь  $b = (33 - 2N_f)/12\pi$ , где  $N_f$  — число ароматов.

Подчеркнем, что уравнение для *изолированной* глюонной струи (без учета родительского партона с виртуальностью  $k^2$ ) имело бы вид

$$n_g^{\text{isol}}(p^2, Q_0^2) = p^2 \delta(p^2 - Q_0^2) + \int_{Q_0^2}^{p^2} \frac{dl^2}{l^2} \int_0^1 dz \theta(zp^2 - l^2) \times \\ \times \frac{\alpha_s(p^2 z)}{2\pi} \hat{P}_{gg}(z) n_g^{\text{isol}}(l^2, Q_0^2), \quad (\text{A.11})$$

что приводит к формуле

$$N_g^{\text{isol}}(k^2, Q_0^2) = 1 + 2C_A \int_{Q_0^2}^{k^2} \frac{dp^2}{p^2} \int_{Q_0^2}^{p^2} \frac{dr^2}{r^2} \frac{\alpha_s(r^2)}{2\pi} N_g^{\text{isol}}(r^2, Q_0^2). \quad (\text{A.12})$$

Это уравнение дает неправильное выражение, которое не учитывает важных в данном случае интерференционных эффектов:

$$N_g^{\text{isol}}(k^2, Q_0^2)|_{k^2 \gg Q_0^2} \simeq \exp\left(2\sqrt{\frac{C_A}{\pi b}} \ln \frac{k^2}{\Lambda^2}\right). \quad (\text{A.13})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Теперь, используя функции распада Альтарелли–Паризи, воспроизведем асимптотическую связь между средней множественностью в событиях с легкими кварками и множественностью в глюонной струе. Пусть  $l$  — 4-импульс первичного кварка, который испускает «массивную» глюонную струю. Лестничная диаграмма на рис. 2 приводит к уравнению

$$N_{i\bar{i}}(Q^2, Q_0^2)|_{Q^2 \gg Q_0^2} = \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dl^2}{l^2} \int_{Q_0^2/l^2}^1 dz \frac{\alpha_s(zl^2)}{2\pi} \int_{Q_0^2}^{zl^2} \frac{dk^2}{k^2} \times \\ \times \hat{P}_{qg}\left(z, \frac{k^2}{l^2}\right) n_g(k^2, Q_0^2) \quad (\text{Б.1})$$

(для простоты здесь и ниже опускаем вклад от лидирующего адрона,  $2n_q$ ).

В главном логарифмическом приближении

$$\hat{P}_{qg}\left(z, \frac{k^2}{l^2}\right) \simeq 2C_F \frac{1}{z} \quad (\text{Б.2})$$

получается выражение ( $r^2 = zl^2$ )

$$N_{i\bar{i}}(Q^2, Q_0^2) = C_F \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dl^2}{l^2} \int_{Q_0^2}^{l^2} \frac{dr^2}{r^2} \frac{\alpha_s(r^2)}{\pi} N_g(r^2, Q_0^2) = \\ = C_F \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dr^2}{r^2} \frac{\alpha_s(r^2)}{\pi} N_g(r^2, Q_0^2) \int_{r^2}^{Q^2} \frac{dl^2}{l^2} = \\ = C_F \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dr^2}{r^2} \frac{\alpha_s(r^2)}{\pi} \ln \frac{Q^2}{r^2} N_g(r^2, Q_0^2), \quad (\text{Б.3})$$

где использована связь

$$N_g(r^2, Q_0^2) = \int_{Q_0^2}^{r^2} \frac{dk^2}{p^2} n_g(k^2, Q_0^2). \quad (\text{Б.4})$$

Интегральное уравнение для  $N_g(r^2, Q_0^2)$  было получено в приложении А (см. (А.6)).

Формула (Б.3) может быть переписана как\*

$$N_{i\bar{i}}(Q^2, Q_0^2) = C_F \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dk^2}{k^2} \frac{\alpha_s(k^2)}{\pi} E^{\text{asym}}(Q^2, k^2) N_g(k^2, Q_0^2) \quad (\text{Б.5})$$

с функцией  $E^{\text{asym}}(Q^2, k^2)$ , определенной выше (25). Следует сравнить это приближенное выражение с точной формулой (16).

При больших  $Q^2$  получаем из (Б.3) и (А.10) хорошо известное *асимптотическое* соотношение

$$N_{i\bar{i}}(Q^2, Q_0^2) \Big|_{Q^2 \gg Q_0^2} \simeq \frac{2C_F}{C_A} N_g(Q^2, Q_0^2). \quad (\text{Б.6})$$

Напоминаем, что  $N_g(Q^2, Q_0^2)$  описывает среднее число виртуальных партонов в глюонной струе, инвариантная масса которой *меняется от  $Q_0$  вплоть до  $Q$* .

Формула (16) должна воспроизводиться из начального уравнения (Б.1) при условии, что:

1. При выводе выражения для  $N_{i\bar{i}}(Q^2, Q_0^2)$  учитываются вклады как от лестничных (рис. 2), так и от *интерференционных* диаграмм (рис. 3).
2. В  $\hat{P}_{qg}(z, k^2/l^2)$  учитываются как несингулярные члены по переменной  $z$ , так и степенные поправки  $O(k^2/l^2)$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

Среднее число адронов в  $e^+e^-$ -аннигиляции является, конечно, калибровочно-инвариантной величиной. Однако в пертурбативной КХД мы вычисляем множественность *виртуальных, цветных партонов*. Априори нельзя быть уверенным, что она не зависит от калибровки.

К сожалению, этой важной проблеме обычно не уделяют должного внимания. Из немногих исключений отметим работы [22] и [23]. В первой

---

\*Мы добавили член  $-1/2 \kappa \ln(Q^2/r^2)$  при выводе (Б.5) из (Б.3).

из них калибровочная инвариантность множественности в  $e^+e^-$ -аннигиляции была проверена в одной петле. Во второй калибровочная инвариантность рассматривалась при фиксированной константе связи и без учета интерференционных эффектов.

Ниже анализируем возможную калибровочную зависимость партонной множественности в случае легкого первичного кварка и в классе аксиальных калибровок. Она дается выражением (Б.1) в калибровке  $n_\mu A^\mu = 0$  с калибровочным вектором

$$n_\mu = (1, 0, -1) \quad (\text{Б.1})$$

(ось  $z$  взята вдоль 3-импульса первичного кварка в с.ц.м. сталкивающихся лептонов). Аргумент функции распада  $\hat{P}_{qg}(z)$  в (Б.1) есть отношение

$$z = \frac{kn}{ln}. \quad (\text{Б.2})$$

Испускание глюонных струй из первичного антикварка подавлено в данной калибровке (Б.1).

Аналогично, в калибровке

$$n_\mu = (1, 0, 1) \quad (\text{Б.3})$$

массивная глюонная струя излучается антикварком, а излучение из кварка подавлено.

Выберем теперь калибровку, в которой и кварк, и антикварк дают в излучение сравнимые вклады:

$$n_\mu = (1, 0, 0). \quad (\text{Б.4})$$

Тогда (Б.1) изменяется следующим образом:

$$\begin{aligned} N_{ii}(Q^2, Q_0^2) = & \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dl^2}{l^2} \int_{Q_0^2/l^2}^1 dz \frac{\alpha_s(zl^2)}{2\pi} \int_{Q_0^2}^{zl^2} \frac{dk^2}{k^2} \hat{P}_{qg}(z) n_g(k^2, Q_0^2) + \\ & + \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dl^2}{l^2} \int_{Q_0^2/l^2}^1 dz \frac{\alpha_s(zl^2)}{2\pi} \int_{Q_0^2}^{zl^2} \frac{dk^2}{k^2} \hat{P}_{\bar{q}g}(z) n_g(k^2, Q_0^2), \quad (\text{Б.5}) \end{aligned}$$

где

$$\hat{P}_{qg}(z) = \hat{P}_{\bar{q}g}(z) \simeq 2C_A \frac{1}{z + \frac{Q^2}{Q_0^2}} \quad (\text{Б.6})$$

при малых  $z$ . Эти соотношения означают, что в калибровке (Б.4) массивные глюонные струи испускаются кварком и антикварком с равной вероятностью.

Опуская нелидирующие члены, получаем из (В.5), (В.6) выражение

$$\begin{aligned} N_{l\bar{l}}(Q^2, Q_0^2) &= 2C_F \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dl^2}{l^2} \int_{Q_0^2}^{l^2} \frac{dr^2}{r^2 + \frac{Q^2}{l^4}} \frac{\alpha_s(r^2)}{\pi} N_g(r^2, Q_0^2) = \\ &= 2C_F \int_{Q_0^2}^{Q^2} dr^2 \frac{\alpha_s(r^2)}{\pi} N_g(r^2, Q_0^2) \int_{r^2}^{Q^2} \frac{dl^2}{l^2} \frac{1}{r^2 + \frac{Q^2}{l^4}} = \\ &= C_F \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dr^2}{r^2} \frac{\alpha_s(r^2)}{\pi} \ln \frac{Q^2}{r^2} N_g(r^2, Q_0^2), \quad (\text{В.7}) \end{aligned}$$

которое совпадает с формулой (Б.3).

Отметим, что в калибровке (В.4) функция распада в эволюционном уравнении (А.1) имеет вид

$$\hat{P}_{gg}(z) \simeq 2C_A \frac{1}{z + \frac{p^2}{Q^2}}. \quad (\text{В.8})$$

Отсюда следует эффективное обрезание переменной интегрирования  $z$  снизу:

$$z \geq \frac{p^2}{Q^2}. \quad (\text{В.9})$$

Как можно видеть из (А.3) и (В.9), именно динамическое ограничение (А.3), а не ограничение (В.9), возникающее из калибровочного вектора, сглаживает сингулярность в  $\hat{P}_{gg}(z)$  при  $z = 0$ . Второе из ограничений можно вполне опустить в уравнении (А.1).

Таким образом заключаем, что как связь множественности от легких кварков  $N_{l\bar{l}}(k^2, Q_0^2)$  с глюонной множественностью  $N_g(Q^2, Q_0^2)$ , так и эволюционное уравнение для  $N_g(k^2, Q_0^2)$  не зависят от калибровочного вектора  $n_\mu$ . Это заключение справедливо и в общем случае,  $n_\mu = (n_0, 0, n_\parallel)$ , когда  $n_0 \neq \pm n_\parallel$  [19, 20]. Отметим, что доказательство калибровочной инвариантности требует учета деструктивной интерференции в излучении глюонных струй, приводящей к условию (А.3).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kartvelishvili V. G., Likhoded A. R., Petrov V. A. // Phys. Lett. B. 1978. V. 78. P. 615.
2. Ахизер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1969.

3. Proc. of the Intern. Linear Collider Workshop (LCWS 05), Stanford, California, USA, March 18–22, 2005.
4. Rowson P. C. *et al.* (MARK II Collab.) // Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 2580.
5. Kisselev A. V., Petrov V. A., Yuschenko O. P. // Z. Phys. C. 1988. V. 41. P. 521.
6. Schumm B. A. *et al.* // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69. P. 3025.
7. Sakuda M. *et al.* (DELCO Collab.) // Phys. Lett. B. 1985. V. 161. P. 412.
8. Aihara H. *et al.* (TPC Collab.) // Phys. Lett. B. 1987. V. 184. P. 299;  
Brauschweig W. *et al.* (TASSO Collab.) // Z. Phys. C. 1989. V. 42. P. 17;  
Althoff M. *et al.* (TASSO Collab.) // Phys. Lett. B. 1984. V. 42. P. 243.
9. Nagai K. *et al.* (TOPAZ Collab.) // Phys. Lett. B. 1992. V. 278. P. 506;  
Okabe K. *et al.* (VENUS Collab.) // Phys. Lett. B. 1998. V. 423. P. 407.
10. Schumm B. A. *et al.* (MARK II Collab.) // Phys. Rev. D. 1992. V. 46. P. 453;  
Abreu P. *et al.* (DELPHI Collab.) // Phys. Lett. B. 1995. V. 347. P. 447.
11. Akers R. *et al.* (OPAL Collab.) // Phys. Lett. B. 1995. V. 352. P. 176;  
Abe K. *et al.* (SLD Collab.) // Phys. Lett. B. 1996. V. 386. P. 475;  
Abe K. *et al.* (SLD Collab.) // Phys. Rev. D. 2004. V. 69. P. 072003.
12. Abreu P. *et al.* (DELPHI Collab.) // Phys. Lett. B. 2000. V. 479. P. 118; Erratum //  
Ibid. V. 492. P. 398;  
Abbiendi G. *et al.* (OPAL Collab.) // Phys. Lett. B. 2002. V. 550. P. 33.
13. Petrov V. A., Kisselev A. V. CERN-TH Preprint 7318/94. Geneva, 1994; Z. Phys. C.  
1995. V. 66. P. 453; Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) B. 1995. V. 39. P. 364.
14. Chrin J. *et al.* (DELPHI Collab.) // Proc. of the 27th Intern. Conf. on High Energy  
Physics, Glasgow, UK, July 20–27, 1994. P. 893.
15. Metzger W. // Proc. of the Intern. Europhys. Conf. on High Energy Physics, Brussel,  
July 27 – Aug. 2, 1995. P. 323.
16. Dokshitzer Yu. L. *et al.* // Eur. Phys. J. C. 2006. V. 45. P. 387.
17. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Гос-  
техтеориздат, 1957;  
Коноплева Н. П., Попов В. Н. Калибровочные поля. М.: Атомиздат, 1972.
18. Kisselev A. V., Petrov V. A. // Eur. Phys. J. C. 2006. V. 50. P. 21.
19. Киселев А. В. // Письма в ЖЭТФ. 1982. Т. 35. С. 174;  
Kisselev A. V. ИИЯП Preprint 82-164. Serpukhov, 1982.
20. Киселев А. В., Петров В. А. // ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. С. 51.
21. Киселев А. В. Докт. дис. Протвино, 1995.
22. Furmanski W., Petronzio R., Pokorski S. // Nucl. Phys. B. 1979. V. 135. P. 253.
23. Bassetto A., Ciafaloni M., Marchesini G. // Nucl. Phys. B. 1982. V. 163. P. 477.