

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДЕФОРМАЦИИ  
МОЛЕКУЛ НА ДИНАМИКУ И СПЕКТРЫ  
КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ  
В НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ

*М. Ю. Ковалевский<sup>1,2</sup>, Л. В. Логвинова<sup>1</sup>, В. Т. Мацкевич<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Белгородский государственный университет, Белгород, Россия

<sup>2</sup> Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»,  
Харьков, Украина

ВВЕДЕНИЕ	704
ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД	708
ДИНАМИКА ОДНООСНЫХ НЕМАТИКОВ. СТЕРЖНЕПОДОБНЫЕ МОЛЕКУЛЫ	712
ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ОДНООСНЫХ НЕМАТИКАХ С ДИСКОПОДОБНЫМИ МОЛЕКУЛАМИ	721
ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ДВУХОСНЫХ НЕМАТИКАХ. ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ МОЛЕКУЛЫ	726
ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ДВУХОСНЫХ НЕМАТИКАХ. ДИСКОИДНЫЕ МОЛЕКУЛЫ	741
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	750

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДЕФОРМАЦИИ МОЛЕКУЛ НА ДИНАМИКУ И СПЕКТРЫ КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ

*М. Ю. Ковалевский<sup>1,2</sup>, Л. В. Логвинова<sup>1</sup>, В. Т. Мацкевич<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> Белгородский государственный университет, Белгород, Россия

<sup>2</sup> Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт»,  
Харьков, Украина

Получено обобщение динамических уравнений в одноосных и двухосных нематических жидких кристаллах, учитывающее деформацию структурных элементов таких сред. Рассчитаны спектры коллективных возбуждений, и установлена их угловая зависимость. Предсказана возможность распространения от одной до трех акустических волн в нематиках, и выяснены их экстремальные угловые характеристики. Результаты исследований сопоставлены с имеющимися данными экспериментов, и показано их удовлетворительное совпадение. Вычислены низкочастотные асимптотики двухвременных функций Грина одноосных нематиков. Выяснено, что их структура существенно зависит от характера пространственной анизотропии рассматриваемой конденсированной среды и формы молекул. Исследованы поляризационные особенности акустических волн одноосных нематиков. Показано, что первый и второй звуки являются суперпозицией продольной и поперечной компонент. Установлено отношение амплитуд этих компонент как функции угла между волновым вектором и осью анизотропии.

The generalization of the dynamic equations in uniaxial and biaxial nematic liquid crystals taking into account deformation of structural elements of such condensed matter is obtained. The spectra of collective excitations are calculated and their angular dependence is established. The possibility of distribution from one up to three acoustic waves in nematics is predicted and their extreme angular characteristics are clarified. The results of investigations are compared to the available experimental data and their satisfactory coincidence is shown. The low-frequency asymptotics of two-temporary Green functions of uniaxial nematics are calculated. It is found out that their structure depends essentially on the character of spatial anisotropy of considered condensed matter and on the molecules shape. The polarization features of acoustic waves in uniaxial nematics are investigated. It is shown that the first and second sounds are superposition of the longitudinal and transversal components. The ratio of the amplitudes of these components is established as the function of an angle between a wave vector and an axis of anisotropy.

PACS: 61.30.-v

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большой интерес вызывает изучение жидкокристаллических сред. Такие конденсированные состояния обладают свойством жидкости — текучестью и анизотропией — свойством, характерным для твердого

тела [1–10]. Общими их особенностями являются наличие внутренней структуры мезоскопических или наноскопических размеров, которые проявляются на макроуровне в виде определенных физических явлений и процессов.

Хорошо известно, что достаточно сложный состав элементов, образующих жидкие кристаллы, приводит к иерархии структурных уровней их организации. Обычно выделяют локальный (молекулярный), координационный (межмолекулярный) и макроскопический (дальний) порядки [8, 11, 12]. Каждому уровню упорядочения соответствует свой набор параметров, характеризующих симметрию и структуру жидких кристаллов. В работах [11–15] показано, что на масштабах порядка молекулярного размера необходимо введение параметров конформационного состояния. Относительная слабость сил притяжения в жидкокристаллических средах, наличие в них мезоскопических анизотропных структурных элементов проявляются в большом разнообразии их возможных состояний, в сильной роли тепловых флуктуаций и в легкости изменения внутреннего состояния под внешним воздействием. Равновесные свойства и фазовые переходы в таких конденсированных средах обычно описывают взаимосогласованным образом, используя представление о конформационных параметрах порядка и параметрах ориентационного порядка.

В исследовании физических свойств жидких кристаллов имеются две фундаментальные проблемы. Одна из них — изучение равновесных состояний таких сред. Основой такого описания является представление о спонтанном нарушении симметрии состояния равновесия [16–18]. Нормальное состояние равновесия изучаемых конденсированных сред представляет собой изотропную жидкость, несмотря на наличие анизотропных структурных элементов. При уменьшении температуры, увеличении концентрации или изменении других термодинамических параметров происходит фазовый переход в состояние с другой симметрией — возникает макроскопическая одноосная или двухосная анизотропия, характерная для жидких кристаллов. В этом случае имеет место спонтанное нарушение симметрии относительно поворотов в конфигурационном пространстве при сохранении трансляционной инвариантности. Возможно также одновременное нарушение вращательной и трансляционной симметрии, что приводит к одно-, двух- и трехмерным периодическим структурам. Типичными примерами таких жидких кристаллов являются смектики, дискотики, холестерики. Состояния со спонтанно нарушенной симметрией, возникающие в результате фазовых переходов, можно описать в рамках хорошо известной феноменологической теории Ландау [19]. В таком подходе исследован ряд жидкокристаллических сред [1, 3, 6, 9]. Статистический подход Гиббса, пригодный для нормальных состояний равновесия многочастичных состояний [20–22], не описывает правильно равновесные состояния конденсированных сред, для которых равновесный параметр порядка отличен от нуля. Теоретическим фундаментом статистической физики, описывающей равновесные состояния конденсиро-

ванных сред со спонтанно нарушенной симметрией, является концепция квазисредних [16, 23, 24].

Другая проблема в исследовании жидких кристаллов — изучение их динамического поведения и спектров коллективных возбуждений. Основным признаком жидких кристаллов является наличие макроскопического ориентационного упорядочения, обусловленного анизотропией молекул. Физическими величинами, которые отражают эту особенность для нематических жидких кристаллов, являются единичный вектор пространственной анизотропии (директор) в одноосном случае [25–31] и два вектора пространственной анизотропии для двухосных нематиков [32–34]. Эти величины становятся дополнительными макроскопическими параметрами, существенными при формулировке второго начала термодинамики и получении уравнений динамики. Помимо этих параметров рассматривались также более общие схемы динамического поведения жидких кристаллов, которые учитывают вид параметра порядка [35–37] и форму структурных элементов среды [38–41]. Отметим, что физическими примерами влияния геометрии молекул на макроскопические свойства жидких кристаллов являются разный знак реактивного коэффициента в уравнениях гидродинамики [42], различные возможности реализации ферроэлектрического состояния [43, 44], спектральные особенности поляризованного поглощения света [45].

Благодаря исследованиям по рэлеевскому и комбинационному рассеянию света [46, 47], распространению звука и течению сред с деформируемыми частицами [48] возникла потребность в развитии теории конденсированных сред с учетом внутренних степеней свободы, которая описывала бы коллективные движения в среде с учетом структуры молекул и искажения их формы. Исследования по созданию феноменологического или статистического подхода для решения этой задачи проводились ранее в работах [49–53].

Развитие и применение концепции квазисредних к описанию жидкокристаллических конденсированных сред с тензорным параметром порядка осуществлялось в работах [54–56]. Детальное изложение микроскопического подхода к описанию жидких кристаллов представлено в монографии [7]. Результаты исследований спектров коллективных возбуждений в нематиках приведены в [4].

Двухосные нематики экспериментально открыты в 1980 г. [57] для лиотропных жидких кристаллов. Сообщения об экспериментальном открытии биаксиальных нематиков в термотропных жидких кристаллах появились в 2004 г. в работах [58, 59]. Трудности в идентификации таких состояний и другие возможности в интерпретации экспериментальных данных таких жидких кристаллов обсуждены в работе [60]. В теоретических работах [61–64] рассмотрена термодинамика и гидродинамика этих конденсированных сред. Для этого класса жидких кристаллов является характерным полное спонтанное нарушение симметрии относительно поворотов в конфигурационном

пространстве. Однако в этих работах не выписаны в явном виде выражения для всех реактивных плотностей потоков аддитивных интегралов движения в терминах функционала энергии и не выявлен характер влияния формы молекул на динамические уравнения для этого класса жидких кристаллов. На примере одноосных и двухосных нематиков далее мы покажем, как это можно сделать. В двухосных нематических жидких кристаллах также имеет место связь формы молекул и структуры уравнений динамики [65, 66].

В настоящее время известны такие виды структурных элементов нематических жидких кристаллов: небольшие органические молекулы ( $l \approx 10^{-8}$  м); надмолекулярные структуры — синтетические полипептиды, вирусы ( $l \approx 10^{-6}$  м); жесткие полимеры ( $l \approx 10^{-4}$  м) [1]. Поэтому при изучении динамики нематиков форма структурного элемента конденсированной среды нами моделировалась в виде эллипсоида или дискоида со сторонами  $l, d, h$ . Детально изучены четыре случая.

1. Одноосная стержнеподобная молекула. В этом случае имеют место следующие соотношения характерных размеров молекул конденсированных сред:

$$l \gg d, h, \quad d = h.$$

2. Одноосная дископодобная молекула. Характерные размеры молекул

$$l \ll d, h, \quad d = h.$$

3. Двухосная эллипсоидальная молекула. Характерные размеры молекул

$$l > d > h, \quad d \approx h.$$

4. Двухосная дискоидная молекула. Характерные размеры молекул

$$l \ll d, h, \quad d \neq h.$$

Математической основой нашего исследования выбран гамильтонов подход, являющийся эффективным методом получения и исследования нелинейных динамических уравнений, описывающих явления переноса в различных конденсированных средах. Ключевым в таком подходе является установление явного вида скобок Пуассона для всего набора параметров сокращенного описания. Следует иметь в виду, что, в отличие от параметров сокращенного описания, связанных со свойствами симметрии гамильтониана, для которых скобки Пуассона хорошо известны (см. [4, 29, 39]), скобки Пуассона для дополнительных динамических параметров, отражающих особенности формы и размера молекул, имеют нетривиальную структуру и их нахождение представляет собой основную проблему. Для ее решения использована идея представления всех дополнительных параметров сокращенного описания в терминах тензора дисторсии [30, 39], которая была ранее реализована в этих работах для одноосных нематиков без учета деформации молекул.

## 1. ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Рассмотрим пространственно-неоднородные состояния конденсированных сред на гидродинамическом этапе эволюции, который характеризуется тем, что в каждой точке пространства быстро, за время хаотизации  $\tau_r$ , устанавливается локальное распределение с медленно изменяющимися от точки к точке термодинамическими параметрами  $A$ . Характерное время изменения этих параметров  $\tau_m \approx A/\dot{A}$  растет с увеличением характерных размеров неоднородностей  $L \approx A/|\nabla A|$  и при больших  $L$  значительно превосходит время хаотизации:  $L|\nabla A|/\dot{A} \approx \tau_m \gg \tau_r$ , которое не зависит от  $L$ . Характерные размеры пространственных неоднородностей на гидродинамическом этапе эволюции велики по сравнению с микроскопическими расстояниями, т. е. по сравнению с межатомными расстояниями для конденсированных сред  $L \gg l$ , где  $l$  — длина свободного пробега частиц или среднее расстояние между частицами.

В соответствии с общим подходом механики сплошных сред структура лагранжиана произвольной физической системы представима в виде [39]

$$L = L_k(\varphi, \dot{\varphi}) - H(\varphi) = \int d^3x F_\alpha(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}')) \dot{\varphi}_\alpha(\mathbf{x}) - H(\varphi),$$

где  $L_k(\varphi, \dot{\varphi})$  — кинематическая часть лагранжиана;  $H(\varphi) = \int d^3x \varepsilon(\mathbf{x}, \varphi)$  — гамильтониан системы. Плотность энергии среды  $\varepsilon(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}'))$  и величины  $F_\alpha(x, \varphi(x'))$  — некоторые определенные функционалы динамических переменных  $\varphi_\alpha(\mathbf{x})$ . Величины  $\varphi_\alpha(\mathbf{x})$  макроскопически полно задают термодинамику и описывают динамические процессы неравновесных состояний. Общее функциональное выражение плотности энергии  $\varepsilon(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}'))$  позволяет описывать динамику сплошных сред в случае произвольного характера пространственных неоднородностей. При этом возникают функциональные уравнения движения, которые весьма сложны для анализа. Исследование динамических уравнений значительно упрощается в длинноволновом пределе, когда характерные размеры пространственных неоднородностей динамических переменных  $L$  много больше среднего расстояния между частицами  $l$  (гидродинамическое приближение  $L \gg l$ ). В этом случае выражение для плотности энергии как функции набора параметров сокращенного описания становится локальным  $\varepsilon(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}')) \approx \varepsilon(\varphi(\mathbf{x}), \nabla\varphi(\mathbf{x}))$ , и функциональные уравнения динамики переходят в дифференциальные уравнения.

Из принципа стационарного действия следуют уравнения движения для величин  $\varphi_\alpha(\mathbf{x})$ :

$$\dot{\varphi}_\alpha(\mathbf{x}) = \int d^3x' J_{\alpha\beta}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \varphi) \frac{\delta H(\varphi)}{\delta \varphi_\beta(\mathbf{x}')} \equiv \{\varphi_\alpha(\mathbf{x}), H\}. \quad (1)$$

Матрица  $J_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \varphi)$  определяется равенством

$$J_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \varphi) \equiv \frac{\delta F_{\beta}(\mathbf{x}'; \varphi)}{\delta \varphi_{\alpha}(\mathbf{x})} - \frac{\delta F_{\alpha}(\mathbf{x}; \varphi)}{\delta \varphi_{\beta}(\mathbf{x}')} \quad (2)$$

и связана со скобкой Пуассона величин  $\varphi_{\alpha}(\mathbf{x})$  соотношением

$$\{\varphi_{\alpha}(\mathbf{x}), \varphi_{\beta}(\mathbf{x}')\} = J_{\alpha\beta}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \varphi).$$

С учетом определения (2) эти скобки антисимметричны относительно перестановки  $\alpha \leftrightarrow \beta$ ,  $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$  и удовлетворяют тождествам Лейбница и Якоби

$$\{\varphi_{\alpha}(\mathbf{x}), \varphi_{\beta}(\mathbf{x}')\} = -\{\varphi_{\beta}(\mathbf{x}'), \varphi_{\alpha}(\mathbf{x})\},$$

$$\begin{aligned} \{\varphi_{\alpha}(\mathbf{x})\varphi_{\beta}(\mathbf{x}'), \varphi_{\gamma}(\mathbf{x}'')\} &= \varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) \{\varphi_{\beta}(\mathbf{x}'), \varphi_{\gamma}(\mathbf{x}'')\} + \\ &+ \varphi_{\beta}(\mathbf{x}') \{\varphi_{\alpha}(\mathbf{x}), \varphi_{\gamma}(\mathbf{x}'')\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\varphi_{\alpha}(\mathbf{x}), \{\varphi_{\beta}(\mathbf{x}'), \varphi_{\gamma}(\mathbf{x}'')\}\} &+ \{\varphi_{\beta}(\mathbf{x}'), \{\varphi_{\gamma}(\mathbf{x}''), \varphi_{\alpha}(\mathbf{x})\}\} + \\ &+ \{\varphi_{\gamma}(\mathbf{x}''), \{\varphi_{\alpha}(\mathbf{x}), \varphi_{\beta}(\mathbf{x}')\}\} = 0. \end{aligned}$$

Определим скобки Пуассона произвольных функционалов  $A(\varphi), B(\varphi)$  равенством

$$\{A, B\} = \int d^3x \int d^3x' \frac{\delta A}{\delta \varphi_{\alpha}(\mathbf{x})} J_{\alpha\beta}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\delta B}{\delta \varphi_{\beta}(\mathbf{x}')}.$$

В набор параметров сокращенного описания для классических сплошных сред входят плотности импульса  $\pi_k(\mathbf{x})$ , энтропии  $\sigma(\mathbf{x})$  и вектор смещения  $u_i(\mathbf{x})$ :  $\varphi_{\alpha} \equiv \{\pi_k(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}), u_i(\mathbf{x})\}$ . Вектор смещения  $u_i(\mathbf{x})$  связывает лагранжеву координату  $\xi_k$  с эйлеровой координатой  $x_k$ :  $x_k \equiv \xi_k + u_k(\mathbf{x})$ . Тензор дисторсии определим равенством

$$b_{ki}(\mathbf{x}) = \nabla_i \xi_k(\mathbf{x}) \equiv \delta_{ik} - \nabla_i u_k(\mathbf{x}), \quad (3)$$

где  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера. Тензор дисторсии  $b_{ki}(\mathbf{x})$  играет фундаментальную роль при описании деформаций сплошных сред. Он задает ориентационные и трансляционные состояния равновесия, устанавливает основные геометрические характеристики и определяет группу движений неравновесного состояния для твердого тела, жидкостей и жидких кристаллов. Введем в рассмотрение плотность массы вещества сплошной среды  $\rho(\mathbf{x}) = mn(\mathbf{x})$ , где  $m$  — масса частицы и  $n(\mathbf{x})$  — плотность числа частиц. Плотность массы вещества  $\rho(\mathbf{x})$  связана с тензором дисторсии  $b_{ki}(\mathbf{x})$  равенством

$$\rho(\mathbf{x}) = \underline{\rho} \det |b_{ij}(\mathbf{x})|, \quad (4)$$

где  $\rho$  — плотность массы вещества в недеформированном состоянии. Известно, что нетривиальные скобки Пуассона для плотностей импульса, энтропии и вектора смещения имеют вид [4, 29, 39]

$$\begin{aligned}\{\pi_i(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}')\} &= -\sigma(\mathbf{x})\nabla_i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \{u_i(\mathbf{x}), \pi_k(\mathbf{x}')\} &= b_{ik}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \{\pi_i(\mathbf{x}), \pi_j(\mathbf{x}')\} &= \pi_j(\mathbf{x})\nabla'_i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \pi_i(\mathbf{x}')\nabla_j\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').\end{aligned}\quad (5)$$

Величина  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  представляет собой  $\delta$ -функцию Дирака. Следствием этих формул и определений (3), (4) являются скобки Пуассона для плотности импульса с тензором дисторсии и плотностью числа частиц

$$\begin{aligned}\{\pi_i(\mathbf{x}), b_{kj}(\mathbf{x}')\} &= -b_{ki}(\mathbf{x})\nabla_j\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \{\pi_i(\mathbf{x}), \rho(\mathbf{x}')\} &= \rho(\mathbf{x})\nabla'_i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').\end{aligned}\quad (6)$$

Выписанные скобки Пуассона (5), (6) служат основой построения нелинейных уравнений динамики классических сплошных сред. Различные особенности динамического описания жидких кристаллов в рамках гамильтонова подхода проявляются в разной зависимости плотности энергии от тензора дисторсии.

Рассматриваемая конденсированная среда характеризуется пятью аддитивными интегралами движения  $\gamma_a \equiv H, P_k, N$ ,  $\{H, \gamma_a\} = 0$ . Здесь  $P_k = \int d^3x \pi_k(\mathbf{x})$  — импульс системы,  $N = \int d^3x n(\mathbf{x})$  — число частиц системы. Свойство инвариантности гамильтониана сплошной среды относительно поворотов в конфигурационном пространстве имеет вид

$$\{L_i, \varepsilon(\mathbf{x})\} = \varepsilon_{ikl} x_k \nabla_l \varepsilon(\mathbf{x}), \quad L_i = \int d^3x \varepsilon_{ikl} x_k \pi_l(\mathbf{x}). \quad (7)$$

Здесь  $L_i$  — орбитальный момент. Для плотности энергии также справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\{P_l, \varepsilon(\mathbf{x})\} &= \nabla_l \varepsilon(\mathbf{x}), & P_l &= \int d^3x \pi_l(\mathbf{x}), \\ \{M, \varepsilon(\mathbf{x})\} &= 0, & M &= \int d^3x \rho(\mathbf{x}),\end{aligned}\quad (8)$$

отражающие фазовую и трансляционную инвариантность гамильтониана рассматриваемой конденсированной среды.

Перейдем к формулировке уравнений динамики классической сплошной среды. Дифференциальные уравнения движения для плотностей аддитивных интегралов движения с учетом (7), (8) имеют вид

$$\dot{\zeta}_a(\mathbf{x}) = -\nabla_k \zeta_{ak}(\mathbf{x}), \quad (9)$$



где  $\zeta_a(\mathbf{x}) \equiv \varepsilon(\mathbf{x}), \pi_k(\mathbf{x}), n(\mathbf{x})$  — плотности аддитивных интегралов движения. В правые стороны уравнений (9) входят величины  $\zeta_{ak}(\mathbf{x}) \equiv q_k(\mathbf{x}), t_{ik}(\mathbf{x}), j_k(\mathbf{x})$ , являющиеся плотностями потоков аддитивных интегралов движения:  $\zeta_{0k}(\mathbf{x}) \equiv q_k(\mathbf{x})$  — плотность потока энергии,  $\zeta_{ik}(\mathbf{x}) \equiv t_{ik}(\mathbf{x})$  — плотность потока импульса,  $\zeta_{4k}(\mathbf{x}) \equiv j_k(\mathbf{x})$  — плотность потока числа частиц. В терминах скобок Пуассона от плотностей аддитивных интегралов движения в работе [39] получены выражения для этих плотностей потоков

$$j_k(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{x}'_k \int_0^1 d\lambda \{n(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}'), \varepsilon(\mathbf{x} - (1 - \lambda)\mathbf{x}')\},$$

$$t_{ik}(\mathbf{x}) = -\varepsilon(\mathbf{x})\delta_{ik} + \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{x}'_k \int_0^1 d\lambda \{\pi_i(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}'), \varepsilon(\mathbf{x} - (1 - \lambda)\mathbf{x}')\}, \quad (10)$$

$$q_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{x}'_k \int_0^1 d\lambda \{\varepsilon(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}'), \varepsilon(\mathbf{x} - (1 - \lambda)\mathbf{x}')\}.$$

Полагаем, что гамильтониан системы  $H = H_0 + V(\sigma(\mathbf{x}'), \rho(\mathbf{x}'), b_{ij}(\mathbf{x}'))$  обладает свойством галилеевской инвариантности

$$H_0 = \int d^3x \frac{\pi^2(\mathbf{x})}{2\rho(\mathbf{x})}, \quad V = \int d^3x' \Phi(\rho(\mathbf{x}'), \sigma(\mathbf{x}'), b_{ij}(\mathbf{x}')).$$

Для галилеево-инвариантных сред плотность потока массы совпадает с плотностью потока импульса  $m j_k(\mathbf{x}) = \pi_k(\mathbf{x})$ .

В бесструктурной конденсированной среде гамильтониан является функционалом набора гидродинамических параметров, к которым относятся плотность энтропии, плотность импульса и плотность массы  $H = H(\sigma(\mathbf{x}'), \pi_i(\mathbf{x}'), \rho(\mathbf{x}'))$ . Отсюда следует, что для дифференциала плотности энергии справедливо соотношение

$$d\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma} d\sigma + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_i} d\pi_i + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} d\rho \equiv T d\sigma + v_k d\pi_k + \mu d\rho.$$

Здесь  $T$  — температура;  $v_k$  — макроскопическая скорость;  $\mu$  — химический потенциал, которые связаны с термодинамическими силами  $Y_a$  равенствами

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma} = \frac{1}{Y_0} \equiv T, \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\pi_k} = -\frac{Y_k}{Y_0} \equiv v_k, \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} = -\frac{Y_4}{Y_0} \equiv \mu.$$

Введем в рассмотрение термодинамический потенциал  $\omega(Y_a) \equiv Y_a \zeta_a - \sigma$ . Термодинамические силы  $Y_a$  связаны с плотностями аддитивных интегралов движения соотношениями

$$\frac{\partial\omega}{\partial Y_a} = \zeta_a. \quad (11)$$

Используя представление плотностей потоков (10) и формулы (5), (6), найдем выражения плотностей потоков аддитивных интегралов движения в терминах термодинамического потенциала

$$\zeta_{ak} = -\frac{\partial}{\partial Y_a} \left( \frac{\omega Y_k}{Y_0} \right). \quad (12)$$

При этом мы использовали связь плотностей потоков аддитивных интегралов движения работы [24]  $Y_a (Y_k \zeta_a + Y_0 \zeta_{ak}) = 0$ . Соотношения (11) и (12) показывают, что плотности аддитивных интегралов движения и соответствующие им потоки представлены в терминах плотности термодинамического потенциала и тем самым замыкают уравнения (9), приводя к уравнениям идеальной гидродинамики нормальной жидкости Л. Эйлера. Линеаризация уравнений (9) ведет к акустическому спектру

$$\omega^2 = \mathbf{k}^2 c^2, \quad c = \sqrt{\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_s}. \quad (13)$$

Здесь  $\mathbf{k}$  — волновой вектор;  $c$  — скорость звука;  $P$  — давление и  $s \equiv \sigma/\rho$  — плотность энтропии единицы массы. Этот спектр линеен и изотропен.

## 2. ДИНАМИКА ОДНООСНЫХ НЕМАТИКОВ. СТЕРЖНЕПОДОБНЫЕ МОЛЕКУЛЫ

Значительная часть жидких кристаллов состоит из молекул стержнеобразной формы. В нематической фазе жидких кристаллов наряду с динамическими переменными, описывающими состояние изотропной жидкости, — плотностями массы, импульса и энтропии, вводят в рассмотрение дополнительный параметр — единичный вектор пространственной анизотропии (директор)  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ , связанный с нарушением вращательной симметрии. В работах [30, 39] показано, что этот вектор анизотропии может быть представлен в терминах тензора дисторсии  $b_{ij}(\mathbf{x})$ . При этом существуют две возможности. Одна из них соответствует нематике с молекулами стержнеобразной формы, другая — нематике с дискообразными молекулами. Рассмотрим частицы среды, состоящие из молекул стержнеобразной формы (нематики каламитного типа). В недеформированном состоянии можно задать некоторое семейство линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением стержней. Пусть  $\xi_i = \xi_i(\alpha)$  — параметрические уравнения одной из линий этого семейства. Направление стержней в каждой точке характеризуется вектором с координатами  $l_i \equiv d\xi_i/d\alpha$ . Этот вектор описывает ориентационный и конформационный порядок недеформированного жидкого кристалла и имеет смысл лагранжевой переменной. Модуль этого вектора  $l \equiv \sqrt{l_i^2}$  задает

длину стержнеподобной молекулы в недеформированном состоянии. Единичный вектор  $\underline{n}_i \equiv l_i/l$  определяет направление оси анизотропии молекулы в недеформированном состоянии. При деформации среды линии семейства также деформируются, происходит изменение направления оси анизотропии и длины стержня. Пусть  $x_i = x_i(\alpha)$  — новые параметрические уравнения уже рассмотренной линии семейства после деформации, которые характеризуются вектором  $l_i(\mathbf{x}) = dx_i/d\alpha$ . Легко видеть, что векторы  $l_i$  и  $l_i(\mathbf{x})$  связаны соотношением

$$l_i(\mathbf{x}) = b_{ij}^{-1}(\mathbf{x}) l_j. \quad (14)$$

Введем единичный вектор и модуль деформированного вектора  $l_i(\mathbf{x})$  для произвольного деформированного состояния

$$n_i(\mathbf{x}) = l_i(\mathbf{x})/l(\mathbf{x}), \quad l(\mathbf{x}) \equiv (l_i^2(\mathbf{x}))^{1/2}. \quad (15)$$

Используя скобку Пуассона (8), легко найти скобки Пуассона для величин  $\pi_i(\mathbf{x})$  и  $n_j(\mathbf{x}')$ :

$$\{\pi_\lambda(\mathbf{x}), n_j(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_\lambda n_j(\mathbf{x}) - \delta_{\lambda j}^\perp(\mathbf{n}(\mathbf{x}')) n_k(\mathbf{x}') \nabla'_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (16)$$

$$\delta_{ij}^\perp(\mathbf{n}(\mathbf{x})) \equiv \delta_{ij} - n_i(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}).$$

Заметим, что скобки Пуассона (16) совместны с условием  $n_i^2(\mathbf{x}) = 1$ .

Сделаем теперь пояснение, обосновывающее необходимость расширения набора параметров сокращенного описания для жидких кристаллов, которое обусловлено конформационной нежесткостью молекул. Новая возможность проявления группы произвольных деформаций реализуется в двухосном нематике, где параметром сокращенного описания является величина  $\approx b_{ik} e_{1k} b_{il} e_{2l}$ , имеющая физический смысл угла между осями [65, 66], где  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  — лагранжевы векторы, описывающие недеформированные оси (см. разд. 4, 5). Для одноосного нематика естественной величиной, имеющей физический смысл конформационного порядка, является свертка  $\approx b_{ik} e_k b_{il} e_l$ , где  $\mathbf{e}$  — лагранжев вектор, задающий недеформированную ось нематика. Учет конформационных степеней свободы при описании динамики одноосных нематиков мы проводим путем включения в набор параметров сокращенного описания дополнительной переменной — модуля вектора  $l(\mathbf{x}) = |\mathbf{l}(\mathbf{x})|$  (15), придавая ему физическую интерпретацию конформационного структурного элемента. В соответствии с этим определением и с учетом связи деформированного и недеформированного векторов (14) получим скобку Пуассона для величин  $\pi_i(\mathbf{x})$  и  $l(\mathbf{x}')$ :

$$\{\pi_i(\mathbf{x}), l(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_i l(\mathbf{x}) + l(\mathbf{x}') \delta_{i\lambda}^\perp(\mathbf{n}(\mathbf{x}')) \nabla'_\lambda \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (17)$$

Скобки Пуассона (5), (6) совместно с (16), (17) образуют замкнутую алгебру динамических переменных нематика со стержнеподобными молекулами при

наличии конформационной степени свободы и позволяют получить нелинейные уравнения динамики в адиабатическом приближении.

В соответствии с введенным набором гидродинамических параметров плотность энергии является функцией параметров  $\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon(\rho(\mathbf{x}), \pi_i(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}), n_i(\mathbf{x}), \nabla n_i(\mathbf{x}), l(\mathbf{x}))$ . В рассматриваемой конденсированной среде плотность термодинамического потенциала  $\omega = \omega(Y, \mathbf{n}, \nabla \mathbf{n}, l)$  зависит теперь также от оси анизотропии и конформационного параметра. Поэтому

$$d\omega = \zeta_a dY_a + \frac{\partial \omega}{\partial n_i} dn_i + \frac{\partial \omega}{\partial \nabla_j n_i} d\nabla_j n_i + \frac{\partial \omega}{\partial l} dl. \quad (18)$$

Обратимся теперь к нахождению плотностей потоков аддитивных интегралов движения. Можно показать, что плотности потоков аддитивных интегралов движения приобретут вид в терминах термодинамического потенциала [41]

$$\zeta_{ak} = -\frac{\partial}{\partial Y_a} \frac{\omega Y_k}{Y_0} + \left[ \frac{\partial \omega}{\partial \nabla_k n_j} \nabla_i n_j - n_k \delta_{i\lambda}^{\perp}(\mathbf{n}) \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\partial \omega}{\partial n_\lambda} - \nabla_j \frac{\partial \omega}{\partial \nabla_j n_\lambda} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial l} l \delta_{ik}^{\perp}(\mathbf{n}) \right] \frac{\partial}{\partial Y_a} \frac{Y_i}{Y_0}. \quad (19)$$

В этой формуле первое слагаемое в правой части представляет собой вклад в плотность потока аддитивных интегралов движения, который аналогичен плотности потока в изотропной фазе конденсированной среды. Второе слагаемое в правой части представляет собой вклад в плотность потока аддитивных интегралов движения, обусловленный деформацией оси анизотропии и длины молекулы. Формулы (18), (19) позволяют сформулировать замкнутые уравнения гидродинамического типа для рассматриваемой конденсированной среды.

Для различного рода приложений часто удобно использовать модельное выражение плотности энергии взаимодействия в виде

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_0(\rho(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}), l(\mathbf{x})) + \varepsilon_f(\rho(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}), n_i(\mathbf{x}), \nabla n_i(\mathbf{x}), l(\mathbf{x})),$$

где

$$\varepsilon_f(\rho(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}), n_i(\mathbf{x}), \nabla n_i(\mathbf{x}), l(\mathbf{x})) = \\ = \frac{1}{2} K_{ijkl}(\rho, \sigma) \nabla_j n_i \nabla_l n_k + \frac{1}{2} M(\rho, \sigma) (l(\mathbf{x}) - l)^2 \quad (20)$$

— энергия Франка и  $K_{ijkl}$  — тензор модулей упругости, который в силу свойств симметрии плотности энергии  $\varepsilon_f(\mathbf{n}) = \varepsilon_f(-\mathbf{n})$  упрощается и при-

обретает вид [31]

$$K_{ijkl}(\rho, \sigma) \equiv K_1(\rho, \sigma) \delta_{ij}^\perp(\mathbf{n}) \delta_{kl}^\perp(\mathbf{n}) + K_2(\rho, \sigma) \times \\ \times [\delta_{jl}^\perp(\mathbf{n}) \delta_{ik}^\perp(\mathbf{n}) - \delta_{jk}^\perp(\mathbf{n}) \delta_{il}^\perp(\mathbf{n})] + K_3(\rho, \sigma) n_j n_l \delta_{ik}^\perp(\mathbf{n}),$$

здесь  $K_1(\rho, \sigma)$ ,  $K_2(\rho, \sigma)$ ,  $K_3(\rho, \sigma)$  — модули упругости Франка, которые являются функциями плотности массы и энтропии. Величина  $M(\rho, \sigma)$  — это модуль упругости, связанный с деформацией длины стержнеподобной молекулы, и  $l$  — длина молекулы в состоянии равновесия. Для устойчивости однородного состояния равновесия требуется, чтобы  $\varepsilon_f > 0$ . Отсюда получим соотношения  $K_1 > 0$ ,  $K_2 > 0$ ,  $K_3 > 0$ ,  $M > 0$ .

Обращаясь к формулам (1), (16), найдем уравнение движения для единичного вектора  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$

$$\dot{n}_j(\mathbf{x}) = -v_s(\mathbf{x}) \nabla_s n_j(\mathbf{x}) + \delta_{ij}^\perp(\mathbf{n}(\mathbf{x})) n_\lambda(\mathbf{x}) \nabla_\lambda v_i(\mathbf{x}). \quad (21)$$

Аналогичным образом получим уравнение движения для конформационной степени свободы  $l(\mathbf{x})$

$$\dot{l}(\mathbf{x}) = -v_s(\mathbf{x}) \nabla_s l(\mathbf{x}) - l(\mathbf{x}) \delta_{ij}^\perp(\mathbf{n}(\mathbf{x})) \nabla_j v_i(\mathbf{x}). \quad (22)$$

Формулы (9), (19), (21), (22) представляют собой полный набор уравнений идеальной гидродинамики одноосного нематика, состоящего из стержнеподобных молекул, с учетом деформаций молекулы среды.

Исследуем спектры коллективных возбуждений на основе полученных уравнений одноосного нематика с молекулами стержнеподобной формы. Полагаем, что состояние равновесия такой среды однородно и среда как целое покоится:  $\pi_k = v_k = 0$ . Кроме того, учтем, что выражение для энергии является четной функцией вектора  $\mathbf{n}$ :  $\varepsilon(\mathbf{n}) = \varepsilon(-\mathbf{n})$  и в соответствии с видом энергии Франка (20) энергия в простейшем случае — квадратичная функция по градиентам этого вектора. Учтем также, что в недеформированном состоянии при  $l = l_0$  реализуется минимум плотности энергии  $\varepsilon$ :  $(\partial\varepsilon/\partial l)_{l=l_0} = 0$ ,  $(\partial^2\varepsilon/\partial l^2)_{l=l_0} > 0$ .

Кроме того, слагаемое  $\partial^2\varepsilon/\partial l \partial \mathbf{n}$  полагалось малым по сравнению с  $\partial^2\varepsilon/\partial l^2$ . В результате приходим к системе линейных и однородных уравнений

$$D_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \delta v_j(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (23)$$

$$D_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \omega^2 \delta_{ij} - k_i k_j \frac{\partial P}{\partial \rho} - T_i(\mathbf{k}) T_j(\mathbf{k}),$$

где величина  $T_i(\mathbf{k})$  определяется равенством  $T_i(\mathbf{k}) \equiv c\sqrt{\lambda} \delta_{ii}^\perp(\mathbf{n}) k_i$ , безразмерная величина  $\lambda \equiv \frac{l^2}{\rho c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial l^2} > 0$  представляет собой отношение плотности

упругой энергии деформации стержня к плотности кинетической энергии,  $c$  — скорость акустических волн в изотропной фазе (13). Уравнения (23) имеют нетривиальное решение при обращении в нуль детерминанта

$$\det |\omega^2 \delta_{ij} - k_i k_j c^2 - T_i(\mathbf{k}) T_j(\mathbf{k})| = \omega^6 + \omega^4 I_4 + \omega^2 I_2 = 0. \quad (24)$$

Здесь

$$I_4 = -\mathbf{k}^2 c^2 - c^2 \lambda (\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k}\mathbf{n})^2) < 0,$$

$$I_2 = c^4 \lambda (\mathbf{k}^2 - (\mathbf{k}\mathbf{n})^2) (\mathbf{k}\mathbf{n})^2 > 0.$$

Таким образом, видим, что в одноосном нематике каламитного типа в бездиссипативном приближении существует решение  $\omega = 0$  и возможно распространение двух акустических ветвей колебаний  $\omega_{\pm}^2(\mathbf{k}) = c_{\pm}^2(\mathbf{k}/k)\mathbf{k}^2$ , соответствующих первому и второму звуку. Решение со знаком «+» отвечает ветви, аналогичной первому звуку, который имеется и в изотропной жидкости. Решение со знаком «-» представляет собой новую ветвь возбуждений, обусловленную учетом конформационного фактора жидкого кристалла — длины стержнеподобной молекулы. Существование этой моды обусловлено деформациями молекул среды. В сферической системе координат  $\mathbf{k}\mathbf{n} = k \cos \theta$ , где  $\theta$  — полярный угол, задающий направление волнового вектора  $\mathbf{k}$ . В терминах этого угла скорости  $c_{\pm}$  имеют вид [41]

$$c_{\pm}(\theta) = \frac{c}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \lambda \sin^2 \theta \pm \left[ (1 + \lambda \sin^2 \theta)^2 - \lambda \sin^2 2\theta \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (25)$$

и существуют при произвольных значениях параметра  $\lambda \geq 0$  и полярного угла. Компьютерная графика раскрывает характер анизотропии спектров (25) (см. рис. 1, *a, б*), на которых фронт распространения волн приведен в виде среза вдоль оси пространственной анизотропии).

Увеличение параметра  $\lambda$  приводит к определенному уменьшению скорости  $c_+$  вблизи значений полярного угла  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ . Для звука  $c_-$  изменение термодинамического параметра  $\lambda$  не приводит к качественному изменению вида фронта распространения этого звука. Расчетные угловые значения точек экстремума ( $\theta = \pi/4$ ) для скорости звука  $c_-$  совпадают с данными выполненных экспериментов для этого звука [68, 69].

Пространственная анизотропия первого звука изучалась в работах [70] для нематических растворов полимеров. Показано большое (20 %) изменение величины скорости первого звука для такой среды. Используя формулу (25) для скорости звука  $c_+(\theta)$  при углах  $0, \pi/2$ , можно оценить величину  $\lambda$ :  $c_+(\pi/2)/c_+(0) = 1,2 = \sqrt{1 + \lambda}$ . Отсюда  $\lambda = 0,44$ . Этот результат согласуется с данными работы [4], в которой характерные масштабы изменения параметра  $\lambda$  таковы:  $10^{-2} < \lambda < 1$ .

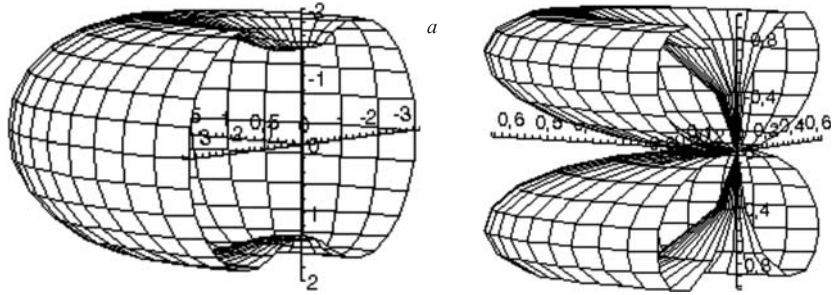


Рис. 1. Зависимость скоростей  $c_{\pm}$  от полярного угла при  $\lambda = 1$

Выпишем выражения скоростей звуков  $c_{\pm}$  в области малых значений параметра  $\lambda \ll 1$ :

$$c_{+} \approx c \left( 1 + \frac{\lambda}{2} \sin^4 \theta \right), \quad c_{-} \approx \frac{c}{2} \sqrt{\lambda} |\sin 2\theta|. \quad (26)$$

Малая добавка в скорости первого звука приводит к слабой его анизотропии. Скорость второго звука существенно анизотропная и при стремлении параметра  $\lambda \rightarrow 0$  исчезает:  $c_{-} \rightarrow 0$ . В этой области значений параметра легко проанализировать на экстремум выражения для скоростей первого и второго звуков (26). Для первого звука получим  $\min c_{+} = c$  при  $\theta_0 = 0, \pi$  и  $\max c_{+} = c(1 + \lambda/2)$  при  $\theta_0 = \pi/2$ . Аналогично для второго звука имеем  $\min c_{-} = 0$  при  $\theta_0 = 0; \pi/2; \pi$  и  $\max c_{-} = c\sqrt{\lambda}/2$  при  $\theta_0 = \pi/4; 3\pi/4$ .

Исследуем поляризационную структуру полученных акустических спектров. Рассмотрим решение для вектора  $\delta v_j^{(0)}(\mathbf{k})$ , соответствующее моде  $\omega = 0$ . Для этого разложим этот вектор по тройке ортогональных векторов

$$\delta v_j^{(0)}(\mathbf{k}) = k_j \delta v_{\parallel}^{(0)}(\mathbf{k}) + [\mathbf{k} \times \mathbf{n}]_j \delta v_{1\perp}^{(0)}(\mathbf{k}) + \frac{[[\mathbf{k} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{k}]_j}{k} \delta v_{2\perp}^{(0)}(\mathbf{k}). \quad (27)$$

Учитывая явный вид вектора  $T_i(\mathbf{k})$  и формулу (23), видим, что  $\delta v_{\parallel}^{(0)} = \delta v_{2\perp}^{(0)} = 0$ , и, следовательно, вектор  $\delta v_j^{(0)}(\mathbf{k}) = [\mathbf{k} \times \mathbf{n}]_j \delta v_{1\perp}^{(0)}(\mathbf{k})$  представляет собой поперечно-поляризованный звук с нечетной поляризацией по волновому вектору  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ .

Рассмотрим теперь решения уравнения (23), соответствующие модам  $\omega = kc_{\pm}$ . Выражение для  $\delta v_j^{(\pm)}(\mathbf{k})$  ищем в виде, аналогичном (27). Из (23) найдем,

что  $\delta v_{1\perp}^{(\pm)}(\mathbf{k}) = 0$ . Откуда

$$\delta v_j^{(\pm)}(\mathbf{k}) = k_j \delta v_{\parallel}^{(\pm)}(\mathbf{k}) + \frac{[[\mathbf{k} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{k}]_j}{k} \delta v_2^{\perp}(\mathbf{k}).$$

Эти два решения, соответствующие первому и второму звукам, являются суперпозицией продольной и поперечной компонент, причем связь этих амплитуд колебаний имеет вид

$$\frac{\delta v_{2\perp}^{(\pm)}(\mathbf{k})}{\delta v_{\parallel}^{(\pm)}(\mathbf{k})} = \frac{-k^5 (c_{\pm}^2 - c^2) + \lambda c^2 k k_{\perp}^4}{\lambda c^2 k_{\parallel} k_{\perp}^4}, \quad (28)$$

где  $k_{\parallel} \equiv \mathbf{k}\mathbf{n}$ ,  $k_{\perp} \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 - k_{\parallel}^2}$ .

Рассмотрим влияние внешнего переменного поля на динамику изучаемой среды. Гамильтониан системы в этом случае  $H = H + V$  состоит из гамильтониана среды  $H$  и взаимодействия с внешним полем

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \varepsilon \left( \zeta_a(\mathbf{x}), n_i(\mathbf{x}), \nabla n_i(\mathbf{x}), l(\mathbf{x}) \right), \\ V &= \int d^3x \xi(\mathbf{x}, t) b \left( \zeta_a(\mathbf{x}), n_i(\mathbf{x}), \nabla n_i(\mathbf{x}), l(\mathbf{x}) \right), \end{aligned} \quad (29)$$

здесь  $\xi(\mathbf{x}, t)$  — внешнее поле, достаточно медленно изменяющееся в пространстве и времени;  $b(\zeta_a, n_i, \nabla n_i, l)$  — произвольная локальная физическая величина, которая в области больших времен становится функцией параметров сокращенного описания. С использованием гамильтонова подхода нами получены уравнения динамики одноосного нематика с молекулами стержнеподобной формы во внешнем переменном поле [67]:

$$\dot{\rho} = -\nabla_i \pi_i + \eta_{\rho}, \quad \dot{\pi}_i = -\nabla_k t_{ik} + \eta_{\pi_i}, \quad \dot{\sigma} = -\nabla_k (\sigma v_k) + \eta_{\sigma}, \quad (30)$$

$$\dot{l} = -v_s \nabla_s l - l \delta_{ij}^{\perp}(\mathbf{n}) \nabla_j v_i + \eta_l, \quad \dot{n}_j = -v_s \nabla_s n_j + \delta_{ij}^{\perp}(\mathbf{n}) n_k \nabla_k v_i + \eta_{n_j},$$

где  $\eta$  — источники, обусловленные внешним полем. Используя явный вид скобок Пуассона (5), (6), (16), (17) и структуру гамильтониана (29), найдем явный вид этих источников

$$\begin{aligned} \eta_{\rho} &= -\rho \frac{\partial b}{\partial \pi_i} \nabla_i \xi, & \eta_{n_j} &= n_k \delta_{ij}^{\perp}(\mathbf{n}) \frac{\partial b}{\partial \pi_i} \nabla_k \xi, \\ \eta_l &= -l \delta_{ji}^{\perp}(\mathbf{n}) \frac{\partial b}{\partial \pi_i} \nabla_j \xi, & \eta_{\sigma} &= -\sigma \frac{\partial b}{\partial \pi_i} \nabla_i \xi, \\ \eta_{\pi_j} &= -\zeta_a \frac{\partial b}{\partial \zeta_a} \nabla_j \xi - l \delta_{jk}^{\perp}(\mathbf{n}) \frac{\partial b}{\partial l} \nabla_k \xi + \left( \frac{\partial b}{\partial n_i} - \nabla_{\lambda} \frac{\partial b}{\partial \nabla_{\lambda} n_i} \right) \delta_{ji}^{\perp}(\mathbf{n}) n_k \nabla_k \xi. \end{aligned}$$



Хорошо известно, что отклонение от состояния равновесия произвольной локальной динамической величины  $\delta a_\xi$ , линейное по полю  $\xi$ , имеет вид

$$\delta a_\xi(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \xi(\mathbf{x}', t') G_{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t').$$

Здесь  $G_{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')$  — двухвременная функция Грина. Переходя к фурье-компонентам по формулам

$$a(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-4} \int d^3k \int d\omega e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x})} a(\mathbf{k}, \omega),$$

получим равенство

$$\delta a_\xi(\mathbf{k}, \omega) = G_{ab}(\mathbf{k}, \omega) \delta \xi(\mathbf{k}, \omega). \quad (31)$$

С другой стороны, величину  $\delta a_\xi(\mathbf{x}, t)$  в области достаточно больших времен ( $t \gg \tau_r, \tau_r$  — время релаксации) можно представить в виде

$$\delta a_\xi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial a}{\partial \zeta_\alpha} \delta \zeta_\alpha(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial a}{\partial n_k} \delta n_k(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial a}{\partial l} \delta l(\mathbf{x}, t), \quad (32)$$

где  $\delta \zeta_\alpha \equiv \delta \sigma, \delta \pi_k, \delta \rho$  и  $\delta l, \delta n_k$  — отклонения величин  $\sigma, \pi_k, \rho, l, n_k$  от их равновесных значений. Отклонения  $\delta \zeta_\alpha, \delta l, \delta n_k$  могут быть найдены в результате решения линеаризованных уравнений (30). Далее, сравнивая формулу (31) с (32), найдем фурье-компоненты функций Грина  $G_{ab}(\mathbf{k}, \omega)$  в области малых волновых векторов и частот. Выполняя указанные действия, мы получили вид низкочастотных асимптотик функций Грина

$$G_{ab}(\mathbf{k}, \omega) = -L_i^a(\mathbf{k}, \omega) \frac{D_{ij}^{-1}(\mathbf{k}, \omega)}{\rho} L_j^b(-\mathbf{k}, -\omega) - \rho \frac{\partial a}{\partial \pi_i} \frac{\partial b}{\partial \pi_i}, \quad (33)$$

где введены следующие обозначения:

$$L_i^a(\mathbf{k}, \omega) = \zeta_a \frac{\partial a}{\partial \zeta_a} k_i + l \frac{\partial a}{\partial l} \delta_{ji}^\perp(\mathbf{n}) k_j + \omega \rho \frac{\partial a}{\partial \pi_i} + \left( \frac{\partial a}{\partial n_j} - ik_\lambda \frac{\partial a}{\partial \nabla_\lambda n_j} \right) \delta_{ij}^\perp(\mathbf{n}) n_k k_k. \quad (34)$$

Выпишем в явном виде некоторые асимптотики функций Грина

$$\begin{aligned}
G_{\rho\rho} &= \rho \frac{\omega^2 (k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2) - \lambda c^2 k_{\parallel}^2 k_{\perp}^2}{\omega^4 - c^2 \omega^2 \left( (k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2) + \lambda k_{\perp}^2 \right) + \lambda c^4 k_{\parallel}^2 k_{\perp}^2}, \\
G_{ll} &= \frac{l^2}{\rho} \frac{k_{\perp}^2 (\omega^2 - c^2 k_{\parallel}^2)}{\omega^4 - c^2 \omega^2 \left( (k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2) + \lambda k_{\perp}^2 \right) + \lambda c^4 k_{\parallel}^2 k_{\perp}^2}, \\
G_{n_i n_j} &= \frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2 \left( \omega^4 - c^2 \omega^2 \left( (k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2) + \lambda k_{\perp}^2 \right) + \lambda c^4 k_{\parallel}^2 k_{\perp}^2 \right)} \times \\
&\quad \times \left\{ \delta_{ij}^{\perp} \omega^2 (\omega^2 - c^2 (k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2) - \lambda c^2 k_{\perp}^2) + \right. \\
&\quad \left. + \omega^2 c^2 (1 + \lambda) (k_i - n_i k_{\parallel}) (k_j - n_j k_{\parallel}) + \lambda c^4 k_{\parallel}^2 (\mathbf{k} \times \mathbf{n})_i (\mathbf{k} \times \mathbf{n})_j \right\}.
\end{aligned} \tag{35}$$

При предельном переходе к изотропной жидкости для функции Грина «плотность–плотность» получим известные выражения, приведенные в [21].

Для функций Грина можно получить асимптотические выражения в случаях предельных переходов с малыми волновыми векторами и частотами  $k_{\parallel}, k_{\perp}, \omega$ . Отметим, что ввиду сильной пространственной анизотропии рассматриваемой конденсированной среды вид асимптотик функций Грина будет зависеть от порядка предельных переходов. Проиллюстрируем это утверждение на примере некоторых функций Грина

$$\begin{aligned}
\lim_{k_{\parallel} \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{k_{\perp} \rightarrow 0} G_{\rho\rho} (k_{\parallel}, k_{\perp}, \omega) &= -\frac{\rho}{c^2}, \\
\lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{k_{\parallel} \rightarrow 0} \lim_{k_{\perp} \rightarrow 0} G_{\rho\rho} (k_{\parallel}, k_{\perp}, \omega) &= 0, \\
\lim_{k_{\perp} \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{k_{\parallel} \rightarrow 0} G_{\rho\rho} &= -\frac{\rho}{c^2 (1 + \lambda)}, \\
\lim_{k_{\parallel} \rightarrow 0} \lim_{k_{\perp} \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow 0} G_{ll} (k_{\parallel}, k_{\perp}, \omega) &= -\frac{l^2}{\rho c^2 \lambda}, \\
\lim_{k_{\perp} \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{k_{\parallel} \rightarrow 0} G_{ll} &= -\frac{l^2}{\rho c^2 (1 + \lambda)}, \\
\lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{k_{\perp} \rightarrow 0} \lim_{k_{\parallel} \rightarrow 0} G_{ll} &= 0.
\end{aligned} \tag{36}$$

Приведенные низкочастотные асимптотики (36) не содержат расходимости типа  $1/k^2, 1/k$ . Причина этого связана с тем, что в отличие от рассмотренных случаев сверхтекучих и магнитных систем (см., например, ра-

боты [23, 24]) в набор параметров сокращенного описания не входит плотность генератора нарушенной симметрии. В данном случае этой величиной является орбитальный момент, являющийся сопряженным по отношению к оси анизотропии. В указанных работах набор гидродинамических параметров содержал как плотность генератора нарушенной симметрии (плотности массы или спина), так и соответствующую сопряженную величину, что и приводило в конечном итоге к вышеуказанным расхождением.

### 3. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ОДНООСНЫХ НЕМАТИКАХ С ДИСКООДОБНЫМИ МОЛЕКУЛАМИ

Хорошо известны жидкие кристаллы, состоящие из молекул дископодобной формы и также обладающие одноосной симметрией. Направление ориентации таких жидких кристаллов определяется единичным вектором нормали к плоскости таких молекул. Изучение динамического поведения конденсированной среды с дископодобной формой молекул мы проведем аналогично ранее рассмотренному случаю среды со стержнеподобными молекулами. Для этого введем семейство поверхностей, касательные поверхности к которым в каждой точке совпадают с плоскостями дисков. Два неколлинеарных вектора  $l_i(\mathbf{x})$ ,  $f_i(\mathbf{x})$ , определяющих деформированное положение плоскости, могут быть представлены в виде

$$l_i(\mathbf{x}) = b_{ij}^{-1}(\mathbf{x})l_j, \quad f_i(\mathbf{x}) = b_{ij}^{-1}(\mathbf{x})f_j, \quad (37)$$

где  $l_i, f_i$  — постоянные неколлинеарные векторы, определяющие положение плоскости недеформированного состояния. Тогда вектор нормали к плоскости, натянутой на векторы  $l_i(\mathbf{x}), f_i(\mathbf{x})$ , равен

$$d_i(\mathbf{x}) = d_k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \equiv d_k b_{ki}(\mathbf{x}). \quad (38)$$

Здесь  $\mathbf{d} = \mathbf{l} \times \mathbf{f}$  — вектор, определяющий направление пространственной анизотропии  $n_i = d_i/d$  и диаметр дископодобной молекулы  $d = \sqrt{d_i^2}$  в недеформированном состоянии. Единичный вектор нормали к плоскости дископодобной молекулы и модуль вектора  $d_i(\mathbf{x})$ , имеющий физический смысл диаметра дископодобной молекулы в деформированном состоянии, определим формулой

$$n_i(\mathbf{x}) = \frac{d_i(\mathbf{x})}{d(\mathbf{x})}, \quad d(\mathbf{x}) = (d_i^2(\mathbf{x}))^{1/2}. \quad (39)$$

Используя определение вектора анизотропии  $n_i(\mathbf{x})$  (39) и формулы (6), (37), (38) для величин  $\pi_i(\mathbf{x}), n_i(\mathbf{x}), d(\mathbf{x}) \equiv |\mathbf{d}(\mathbf{x})|$ , получим скобки Пуассона

$$\{\pi_i(\mathbf{x}), n_j(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_i n_j(\mathbf{x}) + \delta_{jk}^{\perp}(\mathbf{n}(\mathbf{x}')) n_i(\mathbf{x}') \nabla'_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (40)$$

$$\{\pi_i(\mathbf{x}), d(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_i d(\mathbf{x}) + d(\mathbf{x}') n_i(\mathbf{x}') n_j(\mathbf{x}') \nabla'_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Видим, что скобки Пуассона (16), (17), найденные для одноосного нематика с молекулами стержнеподобной формы, отличаются от скобок Пуассона (40), полученных для одноосного нематика с молекулами дископодобной формы.

Плотность энергии взаимодействия в рассматриваемом случае является функцией плотностей аддитивных интегралов движения, ориентационного и конформационного параметров  $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\rho(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}), n_i(\mathbf{x}), \nabla n_i(\mathbf{x}), d(\mathbf{x}))$ . Плотности потоков аддитивных интегралов движения вычисляются аналогично предыдущему разделу. Приведем результат [41]:

$$\zeta_{ak} = -\frac{\partial}{\partial Y_a} \frac{\omega Y_k}{Y_0} + \left[ \frac{\partial \omega}{\partial \nabla_k n_j} \nabla_i n_j + n_i \delta_{k\lambda}^\perp(\mathbf{n}) \times \left( \frac{\partial \omega}{\partial n_\lambda} - \nabla_j \frac{\partial \omega}{\partial \nabla_j n_\lambda} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial d} dn_i n_k \right] \frac{\partial}{\partial Y_a} \frac{Y_i}{Y_0}. \quad (41)$$

Уравнения, отражающие законы сохранения числа частиц, импульса и энергии в дифференциальной форме для изучаемой среды, имеют вид (9), (41). Получим уравнение движения для единичного вектора  $n_j(\mathbf{x})$ . Обращаясь к уравнению (1), имеем

$$\dot{n}_j(\mathbf{x}) = -v_s(\mathbf{x}) \nabla_s n_j(\mathbf{x}) - n_i(\mathbf{x}) \delta_{j\lambda}^\perp(\mathbf{n}(\mathbf{x})) \nabla_\lambda v_i(\mathbf{x}).$$

Аналогичным образом получим уравнение движения для конформационной степени свободы  $d(\mathbf{x})$

$$\dot{d}(\mathbf{x}) = -v_s(\mathbf{x}) \nabla_s d(\mathbf{x}) - d(\mathbf{x}) n_k(\mathbf{x}) n_l(\mathbf{x}) \nabla_k v_l(\mathbf{x}).$$

Исследуем спектры коллективных возбуждений на основе полученных уравнений одноосного нематика с молекулами дископодобной формы. Легко видеть, что дисперсионное уравнение имеет вид (24), в котором

$$I_4 = -\mathbf{k}^2 c^2 - c^2 \lambda (\mathbf{kn})^2 \leq 0, \quad I_2 = c^4 \lambda \left( \mathbf{k}^2 - (\mathbf{kn})^2 \right) (\mathbf{kn})^2 \geq 0, \\ T_i(\mathbf{k}) \equiv c \sqrt{\lambda} (\mathbf{kn}) n_i, \quad \lambda = \frac{d^2}{\rho c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial d^2} > 0.$$

Отсюда приходим к акустическим спектрам  $\omega_\pm(\mathbf{k}) = c_\pm(\mathbf{k}/k)k$ . В этом случае также получаются две анизотропные скорости акустических волн [41]

$$c_\pm(\theta) = \frac{c}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \lambda \cos^2 \theta \pm \left[ (1 + \lambda \cos^2 \theta)^2 - \lambda \sin^2 2\theta \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (42)$$

Видим, что аналитическое выражение (42) для скоростей двух акустических волн в случае дископодобных молекул отличается от соответствующего выражения (25), справедливого для стержнеподобных молекул. Характер анизотропии спектров (42) представлен на рис. 2, где, как и в предыдущем случае

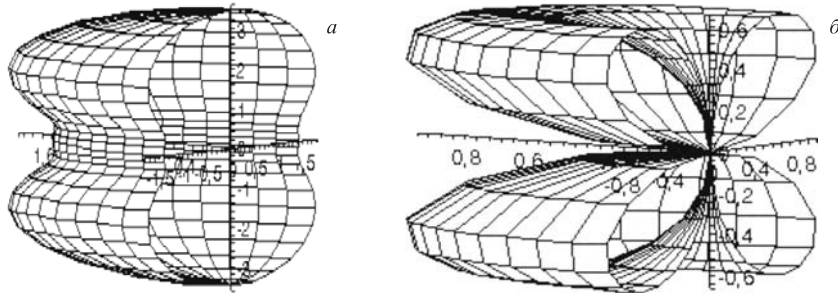


Рис. 2. Зависимость скоростей  $c_{\pm}$  от полярного угла при  $\lambda = 1$

одноосных стержнеподобных нематиков, фронт распространения волн приведен в виде среза вдоль оси пространственной анизотропии. Дополнительная мода обусловлена деформацией площадки дископодобного жидкого кристалла. Сравнивая формулы (25), (42) с результатами работы [4], отметим, что в последних дополнительные моды в одноосных нематических жидких кристаллах, связанные с нарушенной симметрией относительно поворотов в конфигурационном пространстве, имели чисто диссипативный характер. Учет конформационной степени свободы, как мы увидели, приводит к возможности распространения второго звука у обоих типов одноосных нематиков уже в адиабатическом приближении. При этом анизотропия второго звука имеет гораздо более резкий характер по сравнению с первым звуком. Ситуация в некоторой степени аналогична той, которая имеет место в смектических жидких кристаллах, где возникновение второго звука связано с появлением в наборе гидродинамических параметров дополнительной смектической переменной.

Как видно из приведенных рисунков, вблизи углов  $\theta = \pi/2$  скорость  $c_+$  уменьшается с ростом безразмерного термодинамического параметра  $\lambda$ . Для скорости  $c_-$  рисунки качественно подобны аналогичным рисункам для стержнеподобных нематических жидких кристаллов, приведенным в разд. 2.

Рассмотрим поведение скоростей звука при малых значениях термодинамического параметра  $\lambda \ll 1$ . В соответствии с формулой (42) имеем

$$c_+ \approx c \left( 1 + \frac{\lambda}{2} \cos^4 \theta \right), \quad c_- \approx \frac{c}{2} \sqrt{\lambda} |\sin 2\theta|. \quad (43)$$

Видим, что малая добавка приводит к слабой анизотропии скорости первого звука  $c_+$ . Скорость второго звука  $c_-$  анизотропная. Как следует из формул (26) и (43), при малых значениях параметра  $\lambda \ll 1$  вид скорости второго звука  $c_-$  в изучаемых одноосных нематиках не зависит от формы молекул.

Обратим внимание, что угловая зависимость скоростей  $c_+$  и  $c_-$  от полярного угла совпадает с аналогичными выражениями для угловой зависимости скоростей звука одноосного нематика вблизи точки фазового перехода в смектическую фазу [71] при малых значениях безразмерного термодинамического параметра  $\lambda \ll 1$ . В этой работе дано иное объяснение экспериментальных данных по спектрам коллективных возбуждений работы [72]. При этом не уточнена форма молекулы, и возникновение второго звука связывалось с близостью состояния конденсированной среды с ее смектическим упорядочением.

Проанализируем на экстремум выражения для скоростей первого и второго звуков в области значений параметра  $\lambda \ll 1$ . Согласно (43) для первого звука получим  $\min c_+ = c$  при  $\theta_0 = \pi/2$ ;  $\max c_+ = c(1 + \lambda/2)$  при  $\theta_0 = 0$ ;  $\pi$ . Для второго звука имеем  $\min c_- = 0$  при  $\theta_0 = 0$ ;  $\pi/2$ ;  $\pi$ ;  $\max c_- = c\sqrt{\lambda}/2$  при  $\theta_0 = \pi/4$ ;  $3\pi/4$ , совпадающие с аналогичными формулами для одноосных стержнеподобных нематиков.

Так же, как и в ранее рассмотренном случае, поляризационная структура полученных спектров коллективных возбуждений имеет вид

$$\begin{aligned}\delta v_j^{(0)}(\mathbf{k}) &= [\mathbf{k} \times \mathbf{n}]_j \delta v_{1\perp}^{(0)}(\mathbf{k}), \\ \delta v_j^{(\pm)}(\mathbf{k}) &= k_j \delta v_{\parallel}^{(\pm)} + \frac{[[\mathbf{k} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{k}]_j}{k} \delta v_{2\perp}^{(\pm)},\end{aligned}$$

причем связь амплитуд колебаний выглядит следующим образом:

$$\frac{\delta v_{2\perp}^{(\pm)}}{\delta v_{\parallel}^{(\pm)}} = \frac{-k^5 (c_{\pm}^2 - c^2) + \lambda c^2 k k_{\parallel}^4}{\lambda c^2 k_{\parallel}^3 k_{\perp}^2}. \quad (44)$$

Сравнивая формулы (28) и (44), видим, что выражения для соотношения амплитуд продольной и поперечной компонент различны для нематиков с молекулами стержне- и дископодобной формы.

Динамическое поведение нематика с дископодобной формой молекул во внешнем переменном поле изучено аналогично ранее рассмотренному случаю. Уравнения динамики такой среды в этом поле имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= -\nabla_i \pi_i + \eta_{\rho}, \quad \dot{\pi}_i = -\nabla_k t_{ik} + \eta_{\pi_i}, \quad \dot{\sigma} = -\nabla_k (\sigma v_k) + \eta_{\sigma}, \\ \dot{d} &= -v_s \nabla_s d - dn_k n_l \nabla_k v_l + \eta_d, \quad \dot{n}_j = -v_s \nabla_s n_j - n_i \delta_{j\lambda}^{\perp}(\mathbf{n}) \nabla_{\lambda} v_i + \eta_{n_j},\end{aligned} \quad (45)$$

где  $d$  — диаметр диска, а источники выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta_\rho &= -\rho \frac{\partial b}{\partial \pi_i} \nabla_i \xi, \quad \eta_{n_j} = -n_k \delta_{ij}^\perp(\mathbf{n}) \frac{\partial b}{\partial \pi_i} \nabla_k \xi, \\ \eta_d &= -dn_i n_j \frac{\partial b}{\partial \pi_i} \nabla_j \xi, \quad \eta_\sigma = -\sigma \frac{\partial b}{\partial \pi_i} \nabla_i \xi, \\ \eta_{\pi_j} &= -\zeta_a \frac{\partial b}{\partial \zeta_a} \nabla_j \xi - dn_i n_j \frac{\partial b}{\partial d} \nabla_i \xi - \left( \frac{\partial b}{\partial n_i} - \nabla_\lambda \frac{\partial b}{\partial \nabla_\lambda n_i} \right) \delta_{ji}^\perp(\mathbf{n}) n_k \nabla_k \xi. \end{aligned} \quad (46)$$

С помощью системы уравнений (45), (46) получен общий вид низкочастотных асимптотик функций Грина

$$G_{ab}(\mathbf{k}, \omega) = -L_i^a(\mathbf{k}, \omega) \frac{D_{ij}^{-1}(\mathbf{k}, \omega)}{\rho} L_j^b(-\mathbf{k}, -\omega) - \rho \frac{\partial a}{\partial \pi_i} \frac{\partial b}{\partial \pi_i}, \quad (47)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} L_i^a(\mathbf{k}, \omega) &= \zeta_a \frac{\partial a}{\partial \zeta_a} k_i + d \frac{\partial a}{\partial d} n_i n_j k_j + \omega \rho \frac{\partial a}{\partial \pi_i} + \\ &+ \left( \frac{\partial a}{\partial n_j} - ik_\lambda \frac{\partial a}{\partial \nabla_\lambda n_j} \right) \delta_{ij}^\perp(\mathbf{n}) n_k k_k, \end{aligned}$$

$$D_{ij} = \omega^2 \delta_{ij} - c^2 k_i k_j - c^2 \lambda (\mathbf{k}\mathbf{n})^2 n_i n_j,$$

которые отличаются от соответствующих выражений (34) для стержнеподобных молекул. Поступая аналогично предыдущему случаю, приведем в явном виде некоторые функции Грина динамических переменных

$$\begin{aligned} G_{\rho\rho} &= \rho \frac{\omega^2 (k_\parallel^2 + k_\perp^2) - \lambda c^2 k_\parallel^2 k_\perp^2}{\omega^4 - \omega^2 (c^2 (k_\parallel^2 + k_\perp^2) + \lambda c^2 k_\parallel^2) + \lambda c^4 k_\parallel^2 k_\perp^2}, \\ G_{dd} &= \frac{d^2}{\rho} \frac{k_\perp^2 (\omega^2 - k_\parallel^2 c^2 (1 + \lambda))}{\omega^4 - \omega^2 (c^2 (k_\parallel^2 + k_\perp^2) + \lambda c^2 k_\parallel^2) + \lambda c^4 k_\parallel^2 k_\perp^2}, \\ G_{n_i n_j} &= \frac{k_\parallel^2}{\omega^2 (\omega^4 - c^2 \omega^2 ((k_\parallel^2 + k_\perp^2) + \lambda k_\parallel^2) + \lambda c^4 k_\parallel^2 k_\perp^2)} \times \\ &\times \{ \delta_{ij}^\perp \omega^2 (\omega^2 - c^2 (k_\parallel^2 + k_\perp^2) - \lambda c^2 k_\parallel^2) + \\ &+ \omega^2 c^2 (k_i - n_i k_\parallel) (k_j - n_j k_\parallel) + \lambda c^4 k_\parallel^2 (\mathbf{k} \times \mathbf{n})_i (\mathbf{k} \times \mathbf{n})_j \}. \end{aligned} \quad (48)$$

В рассматриваемом случае также имеет место зависимость асимптотик некоторых функций Грина (48) от порядка предельных переходов

$$\begin{aligned}
\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{\rho\rho} &= -\frac{\rho}{c^2}, & \lim_{k_{\perp} \rightarrow 0} G_{\rho\rho} &= \rho \frac{k_{\perp}^2}{\omega^2 - c^2 k_{\perp}^2}, \\
\lim_{k_{\perp} \rightarrow 0} G_{\rho\rho} &= \rho \frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2 - k_{\parallel}^2 c^2 (1 + \lambda)}, & \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{k_{\parallel} \rightarrow 0} G_{\rho\rho} &= -\frac{\rho}{c^2}, \\
\lim_{k_{\perp} \rightarrow 0} \lim_{k_{\parallel} \rightarrow 0} G_{\rho\rho} &= 0, & \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{k_{\perp} \rightarrow 0} G_{\rho\rho} &= -\frac{\rho}{c^2 (1 + \lambda)}, \\
\lim_{k_{\parallel} \rightarrow 0} \lim_{k_{\perp} \rightarrow 0} G_{\rho\rho} &= 0, & \lim_{\omega \rightarrow 0} G_{dd} &= -\frac{d^2}{\rho} \frac{1 + \lambda}{\lambda c^2}, \quad (49) \\
\lim_{k_{\parallel} \rightarrow 0} G_{dd} &= \frac{d^2}{\rho} \frac{k_{\perp}^2}{\omega^2 - k_{\perp}^2 c^2}, & \lim_{k_{\perp} \rightarrow 0} G_{dd} &= 0, \\
\lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{k_{\parallel} \rightarrow 0} G_{dd} &= -\frac{d^2}{\rho c^2}, & \lim_{k_{\perp} \rightarrow 0} \lim_{k_{\parallel} \rightarrow 0} G_{dd} &= 0.
\end{aligned}$$

Сравнивая формулы (35) и (48), видим, что низкочастотные асимптотики функций Грина имеют различный вид в случае одноосных нематиков с молекулами стержнеподобной и дископодобной формы. Также легко видеть, что и в данном случае не выполняется теорема Боголюбова об особенностях типа  $1/k^2$ , поскольку в набор параметров сокращенного описания не входит орбитальный момент.

#### 4. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ДВУХОСНЫХ НЕМАТИКАХ. ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫЕ МОЛЕКУЛЫ

Для двухосных молекул в состоянии равновесия возможно пространственное упорядочение длинных осей молекул. При этом направления коротких осей неупорядочены. Такое состояние соответствует одноосному нематику. Мы будем рассматривать теперь другой случай, в состоянии равновесия которого одновременно упорядочены длинные и короткие оси молекул (двухосный нематик). В случае эллипсоидальных молекул единичные и ортогональные оси анизотропии  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ , характеризующие нарушение вращательной инвариантности, определим равенствами

$$\begin{aligned}
n_i(x) &= \frac{A(\mathbf{x}) B_i(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x}) A_i(\mathbf{x})}{|A(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x})|}, \\
m_i(\mathbf{x}) &= \frac{A(\mathbf{x}) B_i(\mathbf{x}) - B(\mathbf{x}) A_i(\mathbf{x})}{|A(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) - B(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x})|}.
\end{aligned} \quad (50)$$



Здесь векторы  $A_k(\mathbf{x})$  и  $B_k(\mathbf{x})$  и их модули определены равенствами

$$\begin{aligned} A_k(\mathbf{x}) &= b_{kj}^{-1}(\mathbf{x}) e_{1j}, & B_k(\mathbf{x}) &= b_{kj}^{-1}(\mathbf{x}) e_{2j}, \\ A(\mathbf{x}) &= |\mathbf{A}(\mathbf{x})|, & B(\mathbf{x}) &= |\mathbf{B}(\mathbf{x})|. \end{aligned} \quad (51)$$

Эти величины, как и в случае одноосных нематиков, заданы в терминах тензора дисторсии. Постоянные и ортогональные векторы  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  задают размеры и ориентацию двухосной молекулы в недеформированном состоянии. Учитывая (6), найдем скобки Пуассона двух осей анизотропии с плотностью импульса

$$\begin{aligned} \{\pi_i(\mathbf{x}), n_j(\mathbf{x}')\} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_i n_j(\mathbf{x}) + F_{i\lambda j}(\mathbf{x}') \nabla'_\lambda \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \{\pi_i(\mathbf{x}), m_j(\mathbf{x}')\} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_i m_j(\mathbf{x}) + G_{i\lambda j}(\mathbf{x}') \nabla'_\lambda \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (52)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} F_{i\lambda j}(\mathbf{x}) &= -n_\lambda(\mathbf{x}) \delta_{ij}^\perp(\mathbf{n}(\mathbf{x})) + \\ &\quad + p(\mathbf{x}) m_j(\mathbf{x}) [n_i(\mathbf{x}) m_\lambda(\mathbf{x}) + n_\lambda(\mathbf{x}) m_i(\mathbf{x})], \\ G_{i\lambda j}(\mathbf{x}) &= -m_\lambda(\mathbf{x}) \delta_{ij}^\perp(\mathbf{m}(\mathbf{x})) + \\ &\quad + (1 - p(\mathbf{x})) n_j(\mathbf{x}) [n_i(\mathbf{x}) m_\lambda(\mathbf{x}) + n_\lambda(\mathbf{x}) m_i(\mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (53)$$

Обратим внимание, что в силу явного вида формул (50)–(53) скобки Пуассона для двух осей анизотропии с плотностью импульса не замыкаются. В правую сторону скобок Пуассона (52) входит величина  $p(\mathbf{x})$ , которую мы будем называть фактором формы или конформационным параметром:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x})}{A(\mathbf{x}) B(\mathbf{x})} \right). \quad (54)$$

В силу определения (54) величина  $p(\mathbf{x})$  ограничена:  $0 \leq p(\mathbf{x}) \leq 1$ . В недеформированном состоянии  $p = 1/2$ . Из соотношений (6), (50), (51), (54) найдем

$$\{\pi_i(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_i p(\mathbf{x}) + H_{ij}(\mathbf{x}') \nabla'_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (55)$$

где

$$H_{ij}(\mathbf{x}) = 2p(\mathbf{x}) (1 - p(\mathbf{x})) [n_i(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) - m_i(\mathbf{x}) m_j(\mathbf{x})]. \quad (56)$$

Видим, что включение в набор параметров сокращенного описания (помимо осей анизотропии  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ ) конформационной величины  $p(\mathbf{x})$  приводит к замыканию алгебры скобок Пуассона. Необходимость расширения набора

параметров сокращенного описания путем включения конформационной степени свободы впервые отмечена в работе [70]. Наряду со скалярной величиной  $p(\mathbf{x})$  в набор макроскопических переменных по аналогии с рассмотренным ранее случаем одноосных нематиков введем еще две скалярные величины  $u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x})$ , которые учитывают размеры длинной и короткой осей молекул. Конформационные параметры  $u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x})$  определим в терминах векторов  $A_i(\mathbf{x}), B_i(\mathbf{x})$  или, учитывая (51), (54), в терминах тензора дисторсии

$$u(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})\sqrt{\frac{1-p(\mathbf{x})}{2}}, \quad v(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x})\sqrt{\frac{p(\mathbf{x})}{2}}. \quad (57)$$

В недеформированном состоянии  $b_{ki}(\mathbf{x}) \equiv \delta_{ki}$  и поэтому, согласно (51), (54), (57)  $u = A = |\mathbf{e}_1|$ ,  $v = B = |\mathbf{e}_2|$ , т.е. эти конформационные параметры представляют собой длину большой и малой осей молекулы. В силу определений (51), (54) и формул (57) получим

$$\begin{aligned} \{\pi_i(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}')\} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_i u(\mathbf{x}) + F_{ij}(\mathbf{x}') \nabla'_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \{\pi_i(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}')\} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_i v(\mathbf{x}) + G_{ij}(\mathbf{x}') \nabla'_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (58)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} F_{ik}(\mathbf{x}) &= u(\mathbf{x}) \left[ \delta_{ik}^\perp(\mathbf{n}(\mathbf{x})) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{p(\mathbf{x})(1-p(\mathbf{x}))} (n_i(\mathbf{x}) m_k(\mathbf{x}) + n_k(\mathbf{x}) m_i(\mathbf{x})) \right], \\ G_{ik}(\mathbf{x}) &= v(\mathbf{x}) \left[ \delta_{ik}^\perp(\mathbf{m}(\mathbf{x})) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{p(\mathbf{x})(1-p(\mathbf{x}))} (n_i(\mathbf{x}) m_k(\mathbf{x}) + n_k(\mathbf{x}) m_i(\mathbf{x})) \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

Заметим, что скобки Пуассона (52) совместны с условиями  $n_i^2(\mathbf{x}) = 1$ ,  $m_i^2(\mathbf{x}) = 1$ ,  $\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathbf{m}(\mathbf{x}) = 0$ . Полученные выражения скобок Пуассона (52), (55), (58) наряду с (5), (6) позволяют найти плотности потоков аддитивных интегралов движения.

Рассмотрим термодинамику двухосных нематиков с молекулами эллипсоидальной формы. Набор параметров сокращенного описания состоит из плотностей аддитивных интегралов движения, двух осей пространственной анизотропии и трех конформационных параметров  $\varphi_\alpha(\mathbf{x}) \equiv \{\varsigma_\alpha(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{m}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x})\}$ . В соответствии с введенным набором гидродинамических параметров плотность энергии взаимодействия является функцией этих параметров

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\rho(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}), n_i(\mathbf{x}), \nabla n_i(\mathbf{x}), m_i(\mathbf{x}), \nabla m_i(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x})).$$

Обратимся теперь к нахождению плотностей потоков аддитивных интегралов движения. Вычисление плотности потоков аддитивных интегралов движения осуществляется аналогично ранее рассмотренным случаям. В результате получаем [67, 73]

$$\begin{aligned} \zeta_{ak} = & -\frac{\partial}{\partial Y_a} \frac{\omega Y_k}{Y_0} + \left[ \frac{\partial \omega}{\partial \nabla_k n_j} \nabla_i n_j + F_{ik\lambda} \left( \frac{\partial \omega}{\partial n_\lambda} - \nabla_j \frac{\partial \omega}{\partial \nabla_j n_\lambda} \right) \right] \frac{\partial}{\partial Y_a} \frac{Y_i}{Y_0} + \\ & + \left[ \frac{\partial \omega}{\partial \nabla_k m_j} \nabla_i m_j + G_{ik\lambda} \left( \frac{\partial \omega}{\partial m_\lambda} - \nabla_j \frac{\partial \omega}{\partial \nabla_j m_\lambda} \right) \right] \frac{\partial}{\partial Y_a} \frac{Y_i}{Y_0} + \\ & + \left[ \frac{\partial \omega}{\partial p} H_{ik} + \frac{\partial \omega}{\partial u} F_{ik} + \frac{\partial \omega}{\partial v} G_{ik} \right] \frac{\partial}{\partial Y_a} \frac{Y_i}{Y_0}. \quad (60) \end{aligned}$$

В формуле (60) первое слагаемое в правой части представляет собой вклад в плотность потока аддитивных интегралов движения, который аналогичен плотности потока в изотропной фазе конденсированной среды. Второе и следующие слагаемые правой части формулы (60) представляют собой вклад в плотность потока аддитивных интегралов движения, обусловленный наличием осей анизотропии и конформационных параметров.

Модельное выражение плотности энергии взаимодействия для рассматриваемого типа двухосных нематических жидких кристаллов с молекулами эллипсоидальной формы имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) = & \Phi(\rho(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}), n_i(\mathbf{x}), \nabla n_i(\mathbf{x}), m_i(\mathbf{x}), \nabla m_i(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x})) = \\ & = \Phi_0(\rho(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x})) + \\ & + \varepsilon_f(\rho(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}), n_i(\mathbf{x}), \nabla n_i(\mathbf{x}), m_i(\mathbf{x}), \nabla m_i(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x})), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_f(\rho(\mathbf{x}), \sigma(\mathbf{x}), n_i(\mathbf{x}), \nabla n_i(\mathbf{x}), m_i(\mathbf{x}), \nabla m_i(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x})) = \\ = \frac{1}{2} K_{ijkl}(\rho, \sigma) \nabla_j n_i \nabla_l m_k + \frac{1}{2} L_{ijkl}(\rho, \sigma) \nabla_j m_i \nabla_l m_k + \\ + \frac{1}{2} T_{ijkl}(\rho, \sigma) \nabla_j n_i \nabla_l m_k + \frac{1}{2} M_p(\rho, \sigma) (p(\mathbf{x}) - p)^2 + \\ + \frac{1}{2} M_u(\rho, \sigma) (u(\mathbf{x}) - u)^2 + \frac{1}{2} M_v(\rho, \sigma) (v(\mathbf{x}) - v)^2 \end{aligned}$$

— энергия Франка и  $K_{ijkl}$ ,  $L_{ijkl}$ ,  $T_{ijkl}$  — тензоры модулей упругости, которые в силу свойств симметрии плотности энергии  $\varepsilon(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \varepsilon(-\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \varepsilon(\mathbf{n}, -\mathbf{m})$  упрощаются и приобретают вид

$$\begin{aligned} K_{ijkl} &\equiv A_1 \delta_{ij}^\perp \delta_{kl}^\perp + A_2 m_i m_j m_k m_l + A_3 \delta_{ij}^\perp m_k m_l + A_4 \delta_{jl}^\perp m_i m_k + \\ &\quad + A_5 \delta_{ik}^\perp m_j m_l + A_6 \delta_{il}^\perp m_j m_k + A_7 \delta_{ik}^\perp n_j n_l + A_8 n_j n_l m_i m_k, \\ L_{ijkl}(\rho, \sigma) &\equiv A_9 \delta_{ik}^\perp \delta_{jl}^\perp + A_{10} \delta_{ik}^\perp n_j n_l + A_{11} \delta_{ik}^\perp m_j m_l, \\ T_{ijkl} &\equiv A_{12} \delta_{ij}^\perp n_k m_l + A_{13} \delta_{kj}^\perp n_l m_i + A_{14} \delta_{ik}^\perp n_l m_j + A_{15} \delta_{ik}^\perp n_j m_l, \\ \delta_{ik}^\perp &\equiv \delta_{ik}^\perp(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \delta_{ik} - n_i n_k - m_i m_k. \end{aligned}$$

Здесь  $A_n(\rho, \sigma)$  и  $M_p > 0, M_u > 0, M_v > 0$  — модули упругости Франка, связанные с деформацией конформационных степеней свободы и являющиеся функциями плотности массы и энтропии. Конформационные величины характеризуют равновесные значения параметров, задающие форму двухосной молекулы в недеформированном состоянии.

Выражение (60), полученное для плотностей потоков аддитивных интегралов движения, устанавливает связь этих величин с термодинамическими параметрами. Поэтому формулы (52), (55), (58) позволяют сформулировать замкнутые уравнения гидродинамического типа для рассматриваемой конденсированной среды. Уравнения для плотностей массы, импульса и энергии имеют вид (9), где плотности потоков определяются формулами (60). Для двух осей анизотропии согласно формулам (1), (52) получим уравнения динамики

$$\begin{aligned} \dot{n}_j(\mathbf{x}) &= -v_s(\mathbf{x}) \nabla_s n_j(\mathbf{x}) - F_{i\lambda j}(\mathbf{x}) \nabla_\lambda v_i(\mathbf{x}), \\ \dot{m}_j(\mathbf{x}) &= -v_s(\mathbf{x}) \nabla_s m_j(\mathbf{x}) - G_{i\lambda j}(\mathbf{x}) \nabla_\lambda v_i(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (61)$$

Принимая во внимание скобки Пуассона (6), (55), (58), приходим к уравнениям динамики для трех конформационных степеней свободы

$$\begin{aligned} \dot{u}(\mathbf{x}) &= -v_i(\mathbf{x}) \nabla_i u(\mathbf{x}) - F_{ij}(\mathbf{x}) \nabla_j v_i(\mathbf{x}), \\ \dot{v}(\mathbf{x}) &= -v_i(\mathbf{x}) \nabla_i v(\mathbf{x}) - G_{ij}(\mathbf{x}) \nabla_j v_i(\mathbf{x}), \\ \dot{p}(\mathbf{x}) &= -v_s(\mathbf{x}) \nabla_s p(\mathbf{x}) - H_{ij}(\mathbf{x}) \nabla_i v_j(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (62)$$

Для нахождения спектров коллективных возбуждений линеаризуем уравнения (9), (61), (62) около состояния равновесия. В результате получим линеаризованные уравнения

$$\delta v_j(\mathbf{k}, \omega) A_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (63)$$

$$A_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \equiv (\omega^2 \delta_{ij} - k_i k_j c^2 - F_i(\mathbf{k}) F_j(\mathbf{k}) - G_i(\mathbf{k}) G_j(\mathbf{k}) - H_i(\mathbf{k}) H_j(\mathbf{k})).$$

Здесь введены векторы  $F_i(\mathbf{k}), G_i(\mathbf{k}), H_i(\mathbf{k})$

$$\begin{aligned} F_i(\mathbf{k}) &= c\sqrt{\lambda_1} \left[ k_i - n_i \mathbf{n}\mathbf{k} + \frac{1}{2} (n_i \mathbf{m}\mathbf{k} + m_i \mathbf{n}\mathbf{k}) \right], \\ G_i(\mathbf{k}) &= c\sqrt{\lambda_2} \left[ k_i - m_i \mathbf{m}\mathbf{k} - \frac{1}{2} (n_i \mathbf{m}\mathbf{k} + m_i \mathbf{n}\mathbf{k}) \right], \\ H_i(\mathbf{k}) &= c\sqrt{\lambda_3} [n_i \mathbf{n}\mathbf{k} - m_i \mathbf{m}\mathbf{k}]. \end{aligned} \quad (64)$$

Безразмерные величины  $\lambda_\alpha$  представляют собой отношение плотности упругой энергии деформации длин молекулы и угла между ними к плотности кинетической энергии

$$\lambda_1 \equiv \frac{u^2}{\rho c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u^2} > 0, \quad \lambda_2 \equiv \frac{v^2}{\rho c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial v^2} > 0, \quad \lambda_3 \equiv \frac{p^2}{\rho c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial p^2} > 0.$$

Условием существования нетривиального решения системы уравнений (63) является обращение в нуль детерминанта матрицы  $\det \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}, \omega) = 0$ . Раскрывая выражение для этого детерминанта матрицы, получим  $\det \hat{\mathbf{A}} = \omega^6 + \omega^4 I_4 + \omega^2 I_2 + I_0 = 0$ , где

$$\begin{aligned} I_4 &= -\mathbf{k}^2 c^2 - F_i^2(\mathbf{k}) - G_i^2(\mathbf{k}) - H_i^2(\mathbf{k}) \leq 0, \\ I_2 &= c^2 \left\{ [\mathbf{k} \times \mathbf{F}]^2 + [\mathbf{k} \times \mathbf{G}]^2 + [\mathbf{k} \times \mathbf{H}]^2 \right\} + [\mathbf{F} \times \mathbf{H}]^2 + [\mathbf{F} \times \mathbf{G}]^2 + [\mathbf{H} \times \mathbf{G}]^2, \\ I_0 &= -c^2 \left\{ [\mathbf{k}(\mathbf{F} \times \mathbf{G})]^2 + [\mathbf{k}(\mathbf{F} \times \mathbf{H})]^2 + [\mathbf{k}(\mathbf{G} \times \mathbf{H})]^2 \right\} + [\mathbf{F}(\mathbf{G} \times \mathbf{H})]^2. \end{aligned}$$

В сферической системе координат определим полярный и азимутальный углы равенствами  $\mathbf{e}\mathbf{m} = \sin \theta \cos \varphi$ ,  $\mathbf{e}\mathbf{n} = \sin \theta \sin \varphi$ ,  $\mathbf{e}\mathbf{l} = \cos \theta$ , где  $\theta, \varphi$  — соответственно полярный и азимутальный углы, задающие направление волнового вектора  $\mathbf{e} \equiv \mathbf{k}/k$  относительно осей анизотропии. Векторы  $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{l}$  образуют прямоугольную декартову систему координат, где две оси анизотропии  $\mathbf{m}, \mathbf{n}$  совпадают с направлением осей рассматриваемых нематических жидких кристаллов в недеформированном состоянии. Принимая во внимание далее фор-

мулы (64), получим выражения коэффициентов  $I_a$  в терминах этих углов:

$$\begin{aligned}
 I_4(\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{n}) &\equiv \bar{T}_4(\theta, \varphi) \mathbf{k}^2 = -\mathbf{k}^2 c^2 \{1 + \lambda_\alpha \Phi_\alpha(\theta, \varphi)\}, \\
 I_2(\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{n}) &\equiv \bar{T}_2^0(\theta, \varphi) \mathbf{k}^4 + \bar{T}_2^1(\theta, \varphi) \mathbf{k}^4 = \\
 &= \mathbf{k}^4 c^4 \left\{ \lambda_\alpha \Psi_\alpha(\theta, \varphi) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \Psi_{\alpha\beta}(\theta, \varphi) \right\}, \quad (65) \\
 I_0(\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{n}) &\equiv \bar{T}_0^0(\theta, \varphi) \mathbf{k}^6 + \bar{T}_0^1(\theta, \varphi) \mathbf{k}^6 = \\
 &= -\mathbf{k}^6 c^6 \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \Phi_{\alpha\beta} + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cos^2 \theta \sin^4 \theta \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь также введены обозначения

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(\theta, \varphi) &= 1 - \sin^2 \theta \left( \sin^2 \varphi - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right), \\
 \Phi_2(\theta, \varphi) &= 1 - \sin^2 \theta \left( \cos^2 \varphi - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right), \quad \Phi_3(\theta) = \sin^2 \theta, \\
 \Psi_1(\theta, \varphi) &= \left[ \frac{1}{4} + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right] \sin^2 \theta, \\
 \Psi_2(\theta, \varphi) &= \left[ \frac{1}{4} + \cos^2 \varphi \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right] \sin^2 \theta, \\
 \Psi_3(\theta, \varphi) &= [1 - \sin^2 \theta \cos^2 2\varphi] \sin^2 \theta, \\
 \Psi_{12}(\theta, \varphi) &= \sin^2 \theta \left( 2 - \frac{1}{4} \sin^2 \theta (7 + \sin 4\varphi - \sin 2\varphi) \right), \\
 \Psi_{13}(\theta, \varphi) &= \sin^2 \theta \left( 1 + \sin^2 \theta \left( \frac{1}{4} + \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi - \cos^4 \varphi \right) \right), \\
 \Psi_{23}(\theta, \varphi) &= \sin^2 \theta \left( 1 + \sin^2 \theta \left( \frac{1}{4} - \sin \varphi \cos \varphi - \cos^2 \varphi - \sin^4 \varphi \right) \right), \\
 \Phi_{12}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2} \sin^4 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - 2\varphi \right), \\
 \Phi_{13}(\theta, \varphi) &= \sin^4 \theta \cos^2 \theta \sin^4 \left( \frac{\pi}{4} - \varphi \right), \\
 \Phi_{23}(\theta, \varphi) &= \sin^4 \theta \cos^2 \theta \cos^4 \left( \frac{\pi}{4} - \varphi \right).
 \end{aligned}$$

В результате приходим к бикубическому дисперсионному уравнению

$$\omega^6 + I_4(\mathbf{k}, \theta, \varphi) \omega^4 + I_2(\mathbf{k}, \theta, \varphi) \omega^2 + I_0(\mathbf{k}, \theta, \varphi) = 0. \quad (66)$$

Совершая замену переменной  $y = \omega^2 + I_4/3$ , получаем приведенное кубическое уравнение  $y^3 + wy + z = 0$ . Здесь

$$w = I_2 - \frac{I_4^2}{3}, \quad z = \frac{2I_4^3}{27} - \frac{I_4 I_2}{3 + I_0}. \quad (67)$$

Три действительных решения, соответствующие трем значениям скоростей колебаний, существуют, если выполняется неравенство для дискриминанта  $D$ :

$$D = \left(\frac{w}{3}\right)^3 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 \leq 0. \quad (68)$$

Действительные решения кубического уравнения имеют согласно [74] вид

$$y_n = 2\sqrt[3]{\rho} \cos \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{3},$$

где число  $n = 1, 2, 3$  нумерует три решения дисперсионного уравнения и введены обозначения  $\cos \varphi \equiv -z/2\rho$ ,  $\rho \equiv \sqrt{-w^3/27}$ . Решения исходного уравнения (66) соответственно примут вид  $\omega_n^2 \equiv c_n^2(\theta, \varphi) \mathbf{k}^2$ . Здесь  $c_n(\theta, \varphi)$  — три скорости распространения коллективных возбуждений в данной конденсированной среде. В соответствии с формулами (65) приведем для них окончательное выражение

$$c_n(\theta, \varphi) = \sqrt{\bar{y}_n(\theta, \varphi) - \frac{\bar{I}_4(\theta, \varphi)}{3}}, \quad (69)$$

где  $y_n(\mathbf{k}, \theta, \varphi) \equiv \bar{y}_n(\theta, \varphi) \mathbf{k}^2$ . Видим, что угловая зависимость для скоростей  $c_n(\theta, \varphi)$  достаточно сложная. Проанализируем спектры (69) в приближении  $c_1 \gg c_2 \gg c_3$ . В этом случае  $\omega^6 - \omega^4 \mathbf{k}^2 c_1^2 + \omega^2 \mathbf{k}^4 c_1^2 c_2^2 - \mathbf{k}^6 c_1^2 c_2^2 c_3^2 = 0$  и коэффициенты  $I_a$  следующим образом связаны с тремя скоростями акустических волн:

$$I_4 = -\mathbf{k}^2 c_1^2, \quad I_2 = \mathbf{k}^4 c_1^2 c_2^2, \quad I_0 = -\mathbf{k}^6 c_1^2 c_2^2 c_3^2.$$

Откуда следуют соотношения

$$\begin{aligned} c_1^2(\theta, \varphi) &= c^2 (1 + \lambda_\alpha \Phi_\alpha(\theta, \varphi)), \\ c_2^2(\theta, \varphi) &= c^2 \frac{\lambda_\alpha \Psi_\alpha(\theta, \varphi) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \Psi_{\alpha\beta}(\theta, \varphi)}{1 + \lambda_\beta \Psi_\beta(\theta, \varphi)}, \\ c_3^2(\theta, \varphi) &= c^2 \frac{\frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \Phi_{\alpha\beta}(\theta, \varphi) + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cos^2 \theta \sin^4 \theta}{\lambda_\beta \Psi_\beta(\theta, \varphi) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \Psi_{\alpha\beta}(\theta, \varphi)}. \end{aligned} \quad (70)$$

Сравнивая полученные изображения угловой зависимости скорости  $c_1$ , видим, что в определенной степени они повторяют вид спектра для  $c_+$  случая одноосных стержнеподобных нематиков — происходит уменьшение скорости звука в полюсных областях при возрастании безразмерного термодинамического параметра  $\lambda_3$ , т. е. вблизи значений полярного угла  $\theta = 0, \pi$  при фиксированных значениях параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (см. рис. 3). Обратим внимание, что при  $\lambda_1 = \lambda_2$  нет зависимости скорости  $c_1$  от азимутального угла. При  $\lambda_1 > \lambda_2$  или  $\lambda_2 > \lambda_1$  происходит сплющивание звука по азимутальному углу во взаимно перпендикулярных направлениях (см. рис. 4).

Варьирование параметра  $\lambda_3$  при фиксированных значениях параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , как видим, не приводит к существенным изменениям формы фронта распространения второго звука (см. рис. 5). Отметим наблюдающуюся модуляцию скорости  $c_2$  с периодом  $\pi/2$  по азимутальному углу. При существенном различии значений параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  происходит уменьшение пары коллинеарных лепестков спектра (см. рис. 6).

Увеличение параметра  $\lambda_3$  при фиксированных значениях параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  приводит к вытягиванию фронта распространения звука  $c_3$  с периодом  $\pi/2$  (см. рис. 7); при  $\lambda_1 > \lambda_2$  и фиксированном  $\lambda_3$  образуются два лепестка, повернутых относительно друг друга на угол  $\pi$  в верхней и нижней плоскостях относительно начала координат (см. рис. 8, а); при  $\lambda_2 > \lambda_1$  и фиксированном  $\lambda_3$  образуются четыре лепестка, повернутых относительно друг друга на угол  $\pi/2$  в верхней и нижней плоскостях (см. рис. 8, б).

В области изменения термодинамических параметров, где справедливы неравенства  $\lambda_3 \gg \lambda_1, \lambda_2$ , формулы (70) упрощаются и приобретают вид

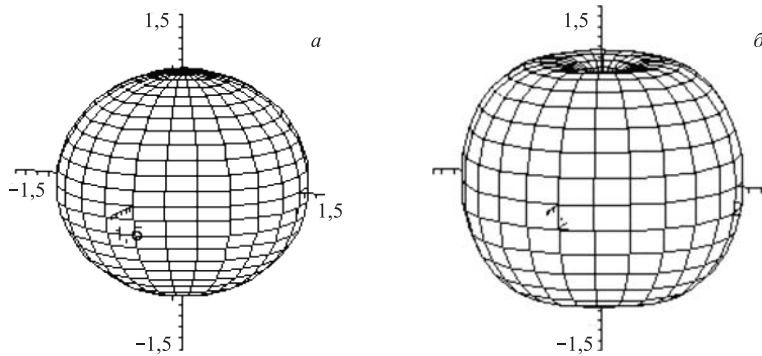


Рис. 3. Угловая зависимость скорости  $c_1$  при  $\lambda_1 = 0,001$ ,  $\lambda_2 = 0,001$ : а)  $\lambda_3 = 0,1$ ; б)  $\lambda_3 = 1$



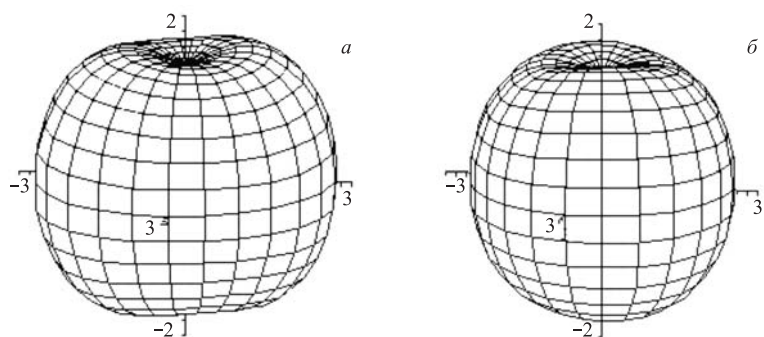


Рис. 4. Угловая зависимость скорости  $c_1$  при  $\lambda_1 = 0,01$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 1$  (a);  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 0,01$ ,  $\lambda_3 = 1$  (б)

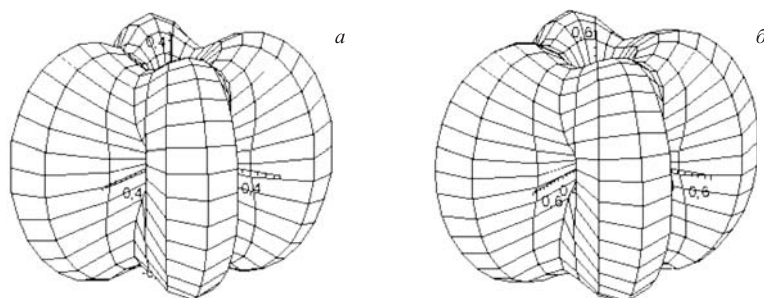


Рис. 5. Угловая зависимость скорости звука  $c_2$  при  $\lambda_1 = 0,001$ ,  $\lambda_2 = 0,001$ : a)  $\lambda_3 = 0,1$ ; б)  $\lambda_3 = 1$

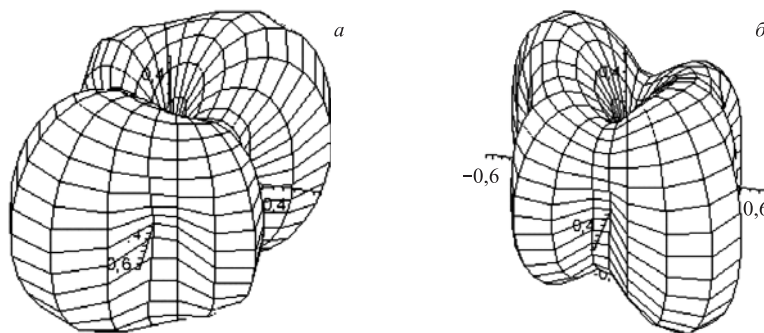


Рис. 6. Угловая зависимость скорости звука  $c_2$  при  $\lambda_1 = 0,0001$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 1$  (a);  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 0,0001$ ,  $\lambda_3 = 1$  (б)

$$\begin{aligned}
 c_1^2(\theta, \varphi) &= c^2(1 + \lambda_3 \Phi_3(\theta)), \\
 c_2^2(\theta, \varphi) &= c^2 \frac{\lambda_3 \Psi_3(\theta, \varphi)}{1 + \lambda_3 \Psi_3(\theta)}, \\
 c_3^2(\theta, \varphi) &= c^2 \frac{\lambda_1 \lambda_3 \Phi_{31}(\theta, \varphi) + \lambda_2 \lambda_3 \Phi_{32}(\theta, \varphi)}{\lambda_1 \Psi_1(\theta, \varphi) + \lambda_2 \Psi_2(\theta, \varphi) + \lambda_3 \Psi_3(\theta, \varphi)}.
 \end{aligned} \tag{71}$$

В формуле (71) для третьего звука мы оставили в знаменателе слагаемые, пропорциональные  $\lambda_1, \lambda_2$ , так как третье слагаемое  $\Psi_3(\theta, \varphi) = [1 - \sin^2 \theta \cos^2 2\varphi] \sin^2 \theta$  обращается в нуль в окрестности точек  $\theta = \pi/2$ ;

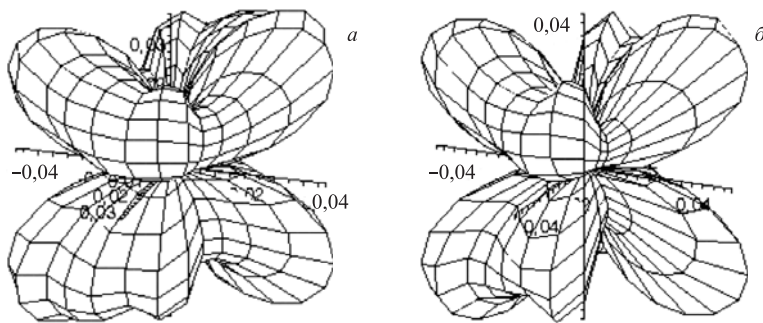


Рис. 7. Угловая зависимость скорости звука  $c_3$  при  $\lambda_1 = 0,01, \lambda_2 = 0,01$ : а)  $\lambda_3 = 0,01$ ; б)  $\lambda_3 = 0,03$

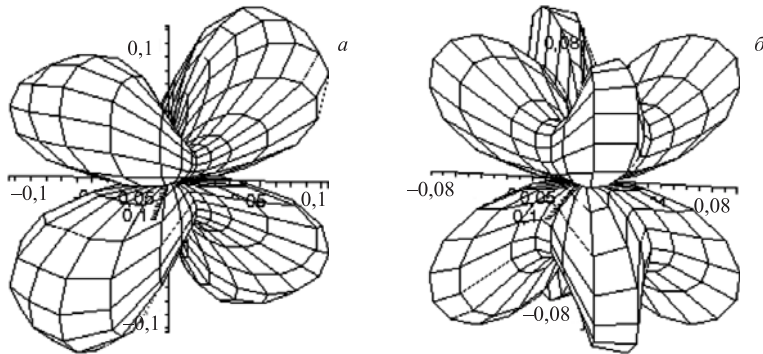


Рис. 8. Угловая зависимость скорости звука  $c_3$  при  $\lambda_1 = 0,1, \lambda_2 = 0,02, \lambda_3 = 0,05$  (а);  $\lambda_1 = 0,02, \lambda_2 = 0,1, \lambda_3 = 0,05$  (б)

$\varphi = n\pi/2$ . Приведем изображения фронтов распространения выписанных спектров коллективных возбуждений (рис. 9–11).

Фронты распространения, изображенные на рис. 9–11, качественно совпадают с рис. 3, 5, 7.

Рассмотрим теперь случай, когда двухосный нематик характеризуется только одной конформационной степенью свободы. Согласно соотношениям (54) эта величина — конформационная степень свободы  $p$ , которая является функцией угла между большой и малой осями молекулы. Набор параметров сокращенного описания состоит из плотностей аддитивных интегралов движения, двух осей анизотропии и одного конформационного параметра  $\varphi_a(\mathbf{x}) \equiv \{\zeta_a(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{m}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x})\}$ . Для анализа спектров коллективных воз-

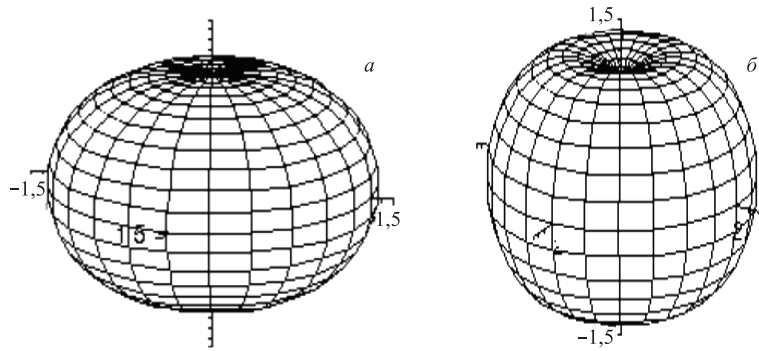


Рис. 9. Угловая зависимость скорости звука  $c_1$  при  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ : а)  $\lambda_3 = 0,1$ ; б)  $\lambda_3 = 1$

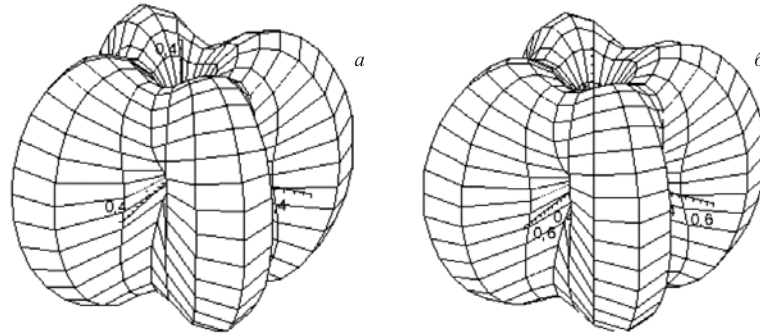


Рис. 10. Угловая зависимость скорости звука  $c_2$  при  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ : а)  $\lambda_3 = 0,1$ ; б)  $\lambda_3 = 1$

буждений заметим, что искомые уравнения динамики получаются формально из уравнений (61), (62), в которых положены равными нулю длины большой и малой осей анизотропии  $u = v = 0$ . Спектральные характеристики получим из (66), где  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . При этом коэффициенты бикубического уравнения упрощаются и приобретают вид

$$I_0(\theta, \varphi) = 0, \quad I_4(\mathbf{k}, \theta, \varphi) \equiv \bar{I}_4(\theta, \varphi) \mathbf{k}^2 = -\mathbf{k}^2 c^2 \{1 + \lambda_3 \sin^2 \theta\}, \quad (72)$$

$$I_2(\mathbf{k}, \theta, \varphi) = \bar{I}_2(\theta, \varphi) \mathbf{k}^4 = \mathbf{k}^4 c^4 \lambda_3 [1 - \sin^2 \theta \cos^2 2\varphi] \sin^2 \theta,$$

в результате чего получаем дисперсионное уравнение

$$\omega^2 (\omega^4 + I_4(\mathbf{k}, \theta, \varphi) \omega^2 + I_2(\mathbf{k}, \theta, \varphi)) = 0.$$

Таким образом, видим, что в двухосном нематике с молекулами стержнеподобной формы в случае одной конформационной степени свободы возможно распространение двух акустических ветвей колебаний

$$\omega_{\pm}^2(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \left( -I_4(\mathbf{k}) \pm \sqrt{I_4^2(\mathbf{k}) - 4I_2(\mathbf{k})} \right) \equiv c_{\pm}^2 \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \right) \mathbf{k}^2, \quad (73)$$

соответствующих первому и второму звуку. Сравним угловые характеристики этих спектров с угловыми характеристиками спектров одноосного нематика с молекулами стержнеподобной формы. Для этого приведем выражения (73) для скоростей  $c_{\pm}^2$  в терминах полярного и азимутального углов. Согласно

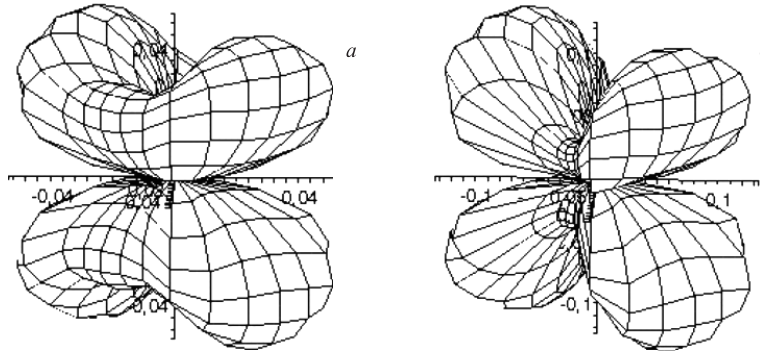


Рис. 11. Угловая зависимость скорости звука  $c_3$  при  $\lambda_1 = 0,01$ ,  $\lambda_2 = 0,02$ ,  $\lambda_3 = 0,05$  (а);  $\lambda_1 = 0,01$ ,  $\lambda_2 = 0,1$ ,  $\lambda_3 = 0,5$  (б)

явному виду выражений  $I_2$  и  $I_4$  (72) имеем

$$c_{\pm}(\theta, \varphi) = \frac{c}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \lambda_3 \sin^2 \theta \pm \left[ (1 - \lambda_3 \sin^2 \theta)^2 + 4\lambda_3 \sin^4 \theta \cos^2 2\varphi \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (74)$$

Легко видеть, что подкоренное выражение неотрицательно, и поэтому скорости  $c_{\pm}^2$  существуют при произвольных полярном и азимутальном углах. Обратим внимание, что в отличие от одноосных нематиков, для которых угловая зависимость спектров определялась только полярным углом, в рассматриваемом случае возникает новое физическое явление — появляется зависимость скорости распространения возбуждений от азимутального угла с периодом  $\pi/2$ . Представим компьютерную графику этих спектров (рис. 12, 13).

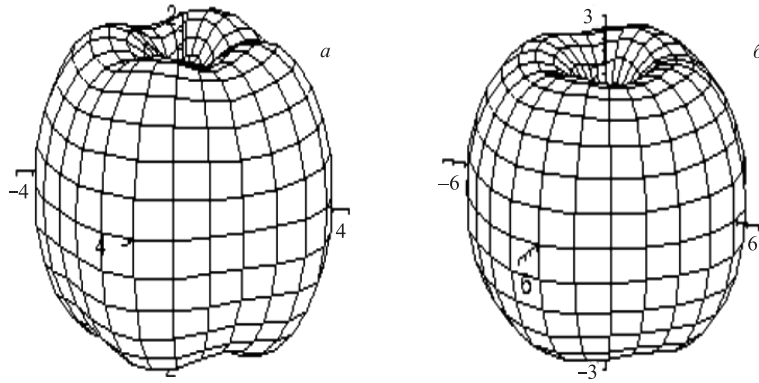


Рис. 12. Угловая зависимость скорости звука  $c_+$  при  $\lambda_3 = 0,1$  (а);  $\lambda_3 = 1$  (б)

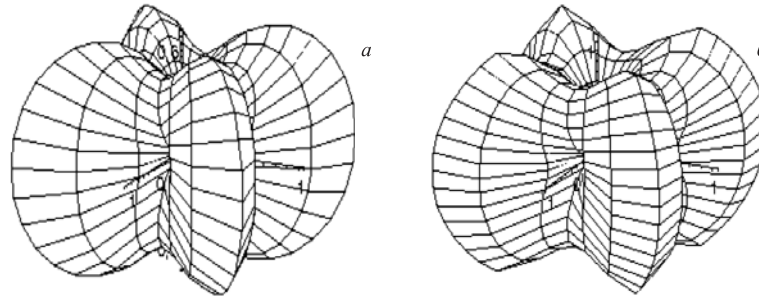


Рис. 13. Угловая зависимость скорости звука  $c_-$  при  $\lambda_3 = 0,1$  (а);  $\lambda_3 = 1$  (б)

Рис. 13 для скорости  $c_-$  аналогичен рис. 5 для скорости  $c_2$ .

Рассмотрим выражение для скоростей звуков (74) при  $\lambda_3 \ll 1$ . С точностью до линейных слагаемых для скорости  $c_+$  имеем

$$c_+ \approx c \left( 1 + \frac{\lambda_3}{2} \sin^4 \theta \cos^2 2\varphi \right).$$

Аналогично для скорости  $c_-$  получим приближенное равенство

$$c_- \approx c\sqrt{\lambda_3} |\sin \theta| \sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 2\varphi}.$$

Из приведенных выражений найдем для скорости  $c_+$ :  $\min c_+ = c$  при  $\theta = 0, \pi$ ,  $\varphi$  — любое; при  $\varphi = n\pi/2$ ,  $\theta$  — любое;  $\max c_+ = c(1 + \lambda_3/2)$  при  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = n\pi/2$ . Для скорости  $c_-$  получим:  $\min c_- = 0$  при  $\theta = 0, \pi$ ,  $\varphi$  — любое; при  $\varphi = \pi/4 + n\pi/2$ ;  $\theta = \pi/2$ ;  $\max c_- = c\sqrt{\lambda_3}$  при  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = n\pi/2$ .

Рассмотрим, наконец, случай, когда  $D > 0$ . Кубическое уравнение имеет одно действительное решение и два комплексно-сопряженных. Нематик характеризуется одной ветвью коллективных возбуждений. Действительное решение имеет вид

$$y_1(\mathbf{k}, \theta, \varphi) = \sqrt[3]{-\frac{z}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{z}{2} - \sqrt{D}}. \quad (75)$$

Входящие сюда величины определяются формулами (67), (68). Компьютерное моделирование спектра (75) представлено на рис. 14.

Приведенный рисунок аналогичен виду фронта распространения звука  $c_+$  (см. рис. 12). Наблюдается модуляция скорости по азимутальному углу.

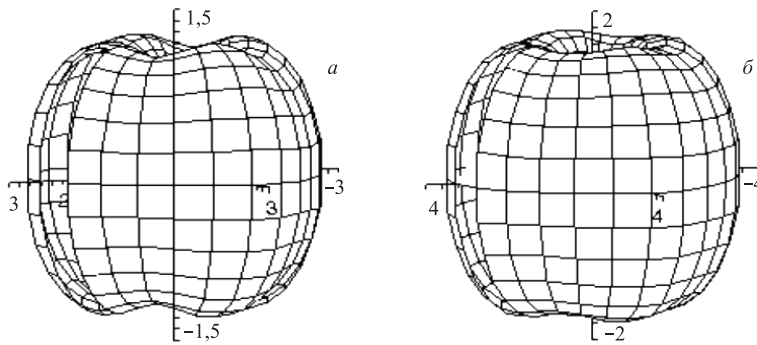


Рис. 14. Угловая зависимость скорости звука  $c_1$  при  $\lambda_1 = 0,001$ ,  $\lambda_2 = 0,001$ : а)  $\lambda_3 = 0,1$ ; б)  $\lambda_3 = 1$

Таким образом, можем заключить, что в нематике с молекулами эллипсоидальной формы при наличии трех конформационных степеней свободы возможно распространение от одной до трех ветвей спектров коллективных возбуждений  $\omega_n^2$ , определяющих, соответственно, первый, второй и третий звуки.

Формулы (70)–(75) решают задачу установления угловых характеристик спектров коллективных возбуждений.

## 5. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ДВУХОСНЫХ НЕМАТИКАХ. ДИСКОИДНЫЕ МОЛЕКУЛЫ

Определим единичные и ортогональные оси анизотропии  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$ , характеризующие нарушение вращательной инвариантности изучаемой конденсированной среды, равенствами

$$\begin{aligned} n_i(\mathbf{x}) &= \frac{a(\mathbf{x})b_i(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})a_i(\mathbf{x})}{|a(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x})|}, \\ m_i(\mathbf{x}) &= \frac{a(\mathbf{x})b_i(\mathbf{x}) - b(\mathbf{x})a_i(\mathbf{x})}{|a(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x}) - b(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x})|}. \end{aligned} \quad (76)$$

Здесь векторы  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  и их модули представлены в терминах тензора дисторсии

$$a_j(\mathbf{x}) \equiv e_{1k}b_{kj}(\mathbf{x}), \quad b_j(\mathbf{x}) \equiv e_{2k}b_{kj}(\mathbf{x}), \quad (77)$$

и  $a(\mathbf{x}) = |\mathbf{a}(\mathbf{x})|$ ,  $b(\mathbf{x}) = |\mathbf{b}(\mathbf{x})|$ . Постоянные и ортогональные векторы  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  задают направления осей анизотропии и размеры дискоидных молекул недеформированного жидкого кристалла. При деформации среды происходит изменение направлений осей анизотропии и длин молекул, описываемое тензором деформации. При этом в силу определения (76) для произвольного деформированного состояния выполняются соотношения  $n_k^2(\mathbf{x}) = 1$ ,  $m_k^2(\mathbf{x}) = 1$ ,  $\mathbf{n}(\mathbf{x})\mathbf{m}(\mathbf{x}) = 0$ . Согласно формулам (6), (76), (77) получим скобки Пуассона для плотности импульса  $\pi_k(\mathbf{x})$  и осей анизотропии  $n_k(\mathbf{x})$ ,  $m_k(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned} \{\pi_i(\mathbf{x}), n_j(\mathbf{x}')\} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_i n_j(\mathbf{x}) + f_{i\lambda j}(\mathbf{x}') \nabla'_\lambda \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \{\pi_i(\mathbf{x}), m_j(\mathbf{x}')\} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_i m_j(\mathbf{x}) + g_{i\lambda j}(\mathbf{x}') \nabla'_\lambda \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (78)$$

где функции  $f_{i\lambda j}$ ,  $g_{i\lambda j}$  в правой стороне скобок Пуассона (78) имеют вид

$$\begin{aligned} f_{i\lambda j}(\mathbf{x}) &= n_\lambda(\mathbf{x}) \delta_{ij}^\perp(\mathbf{n}(\mathbf{x})) - p(\mathbf{x}) m_j(\mathbf{x}) [n_i(\mathbf{x}) m_\lambda(\mathbf{x}) + n_\lambda(\mathbf{x}) m_i(\mathbf{x})], \\ g_{i\lambda j}(\mathbf{x}) &= m_\lambda(\mathbf{x}) \delta_{ij}^\perp(\mathbf{m}(\mathbf{x})) - (1 - p(\mathbf{x})) n_j(\mathbf{x}) [n_i(\mathbf{x}) m_\lambda(\mathbf{x}) + n_\lambda(\mathbf{x}) m_i(\mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (79)$$

Вид скобок Пуассона (78) для случая двухосных нематиков дискоидной формы отличается от соответствующих скобок Пуассона (52), выписанных для случая двухосных молекул эллипсоидальной формы. Величина

$$p(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\mathbf{a}(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x})}{a(\mathbf{x})b(\mathbf{x})} \right), \quad (80)$$

возникающая в правой стороне скобок Пуассона (78) посредством функций  $f_{i\lambda j}(\mathbf{x})$ ,  $g_{i\lambda j}(\mathbf{x})$ , определяет угол между осями анизотропии в деформированном состоянии. В состоянии равновесия в силу ортогональности векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  величина  $p = 1/2$ . Видим, что для замыкания алгебры скобок Пуассона всего набора гидродинамических параметров рассматриваемых жидких кристаллов недостаточно введения только осей анизотропии. Необходимо расширение набора параметров сокращенного описания путем включения в этот набор величины  $p(\mathbf{x})$ . Эта величина представляет собой конформационную степень свободы или конформационный параметр, который задает угол между осями в деформированном состоянии для дискоидных молекул. В силу определения (80) скобка Пуассона для этой величины с импульсом имеет вид

$$\{\pi_i(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_i p(\mathbf{x}) + h_{ij}(\mathbf{x}') \nabla'_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (81)$$

где

$$h_{ij}(\mathbf{x}) = 2p(\mathbf{x})(1 - p(\mathbf{x})) [m_i(\mathbf{x})m_j(\mathbf{x}) - n_i(\mathbf{x})n_j(\mathbf{x})]. \quad (82)$$

Набор параметров сокращенного описания  $\sigma(\mathbf{x}), \pi_k(\mathbf{x}), \rho(\mathbf{x}), \mathbf{m}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x})$  согласно (5), (6), (78), (81) образует замкнутую алгебру скобок Пуассона. Для двухосных жидких кристаллов помимо величины  $p(\mathbf{x})$  возможно введение еще двух конформационных степеней свободы, представимых в терминах тензора дисторсии:

$$q(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x})\sqrt{(1 - p(\mathbf{x}))/2}, \quad t(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})\sqrt{p(\mathbf{x})/2}. \quad (83)$$

Эти величины связаны с изменением обеих длин осей анизотропии молекулы жидкого кристалла в деформированном состоянии. Из определений (83) с учетом (6), (77), (81) следуют скобки Пуассона для конформационных степеней свободы  $q(\mathbf{x})$  и  $t(\mathbf{x})$  с плотностью импульса

$$\begin{aligned} \{\pi_i(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}')\} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_i q(\mathbf{x}) + f_{ij}(\mathbf{x}') \nabla'_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ \{\pi_i(\mathbf{x}), t(\mathbf{x}')\} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_i t(\mathbf{x}) + g_{ij}(\mathbf{x}') \nabla'_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (84)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} f_{ik}(\mathbf{x}) &= q(\mathbf{x}) \left[ n_i(\mathbf{x})n_k(\mathbf{x}) - \sqrt{p(\mathbf{x})(1 - p(\mathbf{x}))} (n_i(\mathbf{x})m_k(\mathbf{x}) + n_k(\mathbf{x})m_i(\mathbf{x})) \right], \\ g_{ik}(\mathbf{x}) &= t(\mathbf{x}) \left[ m_i(\mathbf{x})m_k(\mathbf{x}) + \sqrt{p(\mathbf{x})(1 - p(\mathbf{x}))} (n_i(\mathbf{x})m_k(\mathbf{x}) + n_k(\mathbf{x})m_i(\mathbf{x})) \right]. \end{aligned}$$



Ориентационные  $\mathbf{m}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x})$  и конформационные  $q(\mathbf{x}), t(\mathbf{x}), p(\mathbf{x})$  степени свободы являются локальными функциями тензора дисторсии и рассматриваются как независимые переменные. Набор макроскопических параметров для нематического жидкого кристалла с дискоидными молекулами состоит из плотностей аддитивных интегралов движения, двух осей анизотропии и трех конформационных параметров  $\varphi_a(\mathbf{x}) \equiv \{\zeta_a(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{m}(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}), t(\mathbf{x}), p(\mathbf{x})\}$ . Скобки Пуассона (5), (6), (78), (81), (84) образуют замкнутую алгебру гидродинамических переменных двухосного нематика с дискоидными молекулами. Плотность энергии изучаемой конденсированной среды является функционалом этих величин

$$\varepsilon(\mathbf{x}) \equiv \varepsilon(\sigma(\mathbf{x}), \pi_i(\mathbf{x}), \rho(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}), \nabla \mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{m}(\mathbf{x}), \nabla \mathbf{m}(\mathbf{x}), q(\mathbf{x}), t(\mathbf{x}), p(\mathbf{x})). \quad (85)$$

Для плотностей потоков аддитивных интегралов движения получены выражения

$$\begin{aligned} \zeta_{ak} = & -\frac{\partial}{\partial Y_a} \frac{\omega Y_k}{Y_0} + \left[ \frac{\partial \omega}{\partial \nabla_k n_j} \nabla_i n_j + f_{ik\lambda} \left( \frac{\partial \omega}{\partial n_\lambda} - \nabla_j \frac{\partial \omega}{\partial \nabla_j n_\lambda} \right) \right] \frac{\partial}{\partial Y_a} \frac{Y_i}{Y_0} + \\ & + \left[ \frac{\partial \omega}{\partial \nabla_k m_j} \nabla_i m_j + g_{ik\lambda} \left( \frac{\partial \omega}{\partial m_\lambda} - \nabla_j \frac{\partial \omega}{\partial \nabla_j m_\lambda} \right) \right] \frac{\partial}{\partial Y_a} \frac{Y_i}{Y_0} + \\ & + \left[ \frac{\partial \omega}{\partial p} h_{ik} + \frac{\partial \omega}{\partial u} f_{ik} + \frac{\partial \omega}{\partial v} g_{ik} \right] \frac{\partial}{\partial Y_a} \frac{Y_i}{Y_0}. \quad (86) \end{aligned}$$

С учетом вида скобок Пуассона (5), (6) и формулы (86) из уравнения движения в гамильтоновой форме (1) получим уравнения движения двухосной фазы нематика с дискоидными молекулами в форме (9), где плотность потока импульса представлена выражением (86). Далее, согласно (6), (78) найдем уравнения динамики для двух осей анизотропии

$$\begin{aligned} \dot{n}_j(\mathbf{x}) &= -v_s(\mathbf{x}) \nabla_s n_j(\mathbf{x}) - f_{i\lambda j}(\mathbf{x}) \nabla_\lambda v_i(\mathbf{x}), \\ \dot{m}_j(\mathbf{x}) &= -v_s(\mathbf{x}) \nabla_s m_j(\mathbf{x}) - g_{i\lambda j}(\mathbf{x}) \nabla_\lambda v_i(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (87)$$

Наконец, принимая во внимание (81), (84), получим уравнения движения для трех конформационных степеней свободы

$$\begin{aligned} \dot{p}(\mathbf{x}) &= -v_i(\mathbf{x}) \nabla_i p(\mathbf{x}) - h_{ij}(\mathbf{x}) \nabla_j v_i(\mathbf{x}), \\ \dot{q}(\mathbf{x}) &= -v_i(\mathbf{x}) \nabla_i q(\mathbf{x}) - f_{ij}(\mathbf{x}) \nabla_j v_i(\mathbf{x}), \\ \dot{t}(\mathbf{x}) &= -v_s(\mathbf{x}) \nabla_s t(\mathbf{x}) - g_{ij}(\mathbf{x}) \nabla_i v_j(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (88)$$

Формулы (86)–(88) совместно с соотношениями, определяющими функции  $f_{i\lambda j}(\mathbf{x})$ ,  $g_{i\lambda j}(\mathbf{x})$  и  $f_{ij}(\mathbf{x})$ ,  $g_{ij}(\mathbf{x})$ ,  $h_{ij}(\mathbf{x})$ , представляют собой полный набор уравнений идеальной гидродинамики двухосного нематика, состоящего из дискоидных молекул с тремя конформационными степенями свободы.

Линеаризация уравнений двухосного нематика приводит к дисперсионному уравнению

$$|\omega^2 \delta_{ij} - k_i k_j c^2 - D_i^\alpha(\mathbf{k}) D_j^\alpha(\mathbf{k})| = \omega^6 + \omega^4 I_4 + \omega^2 I_2 + I_0 = 0, \quad (89)$$

где  $D_i^\alpha(\mathbf{k}) \equiv (f_i(\mathbf{k}), g_i(\mathbf{k}), h_i(\mathbf{k}))$ . Здесь векторами  $f_i(\mathbf{k}), g_i(\mathbf{k}), h_i(\mathbf{k})$  обозначены величины

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{k}) &= c\sqrt{\lambda_1} \left[ n_i \mathbf{n}\mathbf{k} - \frac{1}{2} (n_i \mathbf{m}\mathbf{k} + m_i \mathbf{n}\mathbf{k}) \right], \\ g_i(\mathbf{k}) &= c\sqrt{\lambda_2} \left[ m_i \mathbf{m}\mathbf{k} + \frac{1}{2} (n_i \mathbf{m}\mathbf{k} + m_i \mathbf{n}\mathbf{k}) \right], \\ h_i(\mathbf{k}) &= c\sqrt{\lambda_3} [m_i \mathbf{m}\mathbf{k} - n_i \mathbf{n}\mathbf{k}]. \end{aligned}$$

Безразмерные величины  $\lambda_\alpha$  представляют собой отношение плотности упругой энергии деформации длин молекулы и угла между ними к плотности кинетической энергии

$$\lambda_1 \equiv \frac{q^2}{\rho c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial q^2} > 0, \quad \lambda_2 \equiv \frac{t^2}{\rho c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} > 0, \quad \lambda_3 \equiv \frac{p^2}{\rho c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial p^2} > 0.$$

Выражения для коэффициентов  $I_\alpha$  уравнения (89) получены в терминах азимутального и полярного углов:

$$\begin{aligned} I_4(\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{n}) &\equiv \bar{I}_4(\theta, \varphi) \mathbf{k}^2 = -\mathbf{k}^2 c^2 \{1 + \lambda_\alpha \bar{\Phi}_\alpha(\theta, \varphi)\}, \\ I_2(\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{n}) &\equiv \bar{I}_2^0(\theta, \varphi) \mathbf{k}^4 + \bar{I}_2^1(\theta, \varphi) \mathbf{k}^4 = \\ &= \mathbf{k}^4 c^4 \left\{ \lambda_\alpha \Psi_\alpha(\theta, \varphi) + \frac{1}{8} \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \Psi_{\alpha\beta}(\theta, \varphi) \right\}, \quad (90) \\ I_0(\mathbf{k}, \mathbf{m}, \mathbf{n}) &\equiv \bar{I}_0^0(\theta, \varphi) \mathbf{k}^6 = -\frac{1}{2} \mathbf{k}^6 c^6 \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \Phi_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Здесь также введены обозначения

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}_1(\theta, \varphi) &= \sin^2 \theta \left[ \frac{1}{4} + \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right], \\
 \bar{\Phi}_2(\theta, \varphi) &= \sin^2 \theta \left[ \frac{1}{4} + \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right], \quad \bar{\Phi}_3(\theta) = \sin^2 \theta, \\
 \Psi_{12}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sin^4 \theta (1 - \sin 4\varphi), \\
 \Psi_{13}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sin^4 \theta (1 - \sin 2\varphi)^2, \\
 \Psi_{23}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sin^4 \theta (1 + \sin 2\varphi)^2, \\
 \Psi_1(\theta, \varphi) &= \sin^2 \theta \left[ \frac{1}{4} + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right], \\
 \Psi_2(\theta, \varphi) &= \sin^2 \theta \left[ \frac{1}{4} + \cos^2 \varphi \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right], \\
 \Psi_3(\theta, \varphi) &= \sin^2 \theta [1 - \cos^2 2\varphi \sin^2 \theta], \\
 \Phi_{12}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2} \sin^4 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - 2\varphi \right), \\
 \Phi_{13}(\theta, \varphi) &= \sin^4 \theta \cos^2 \theta \sin^4 \left( \frac{\pi}{4} - \varphi \right), \\
 \Phi_{23}(\theta, \varphi) &= \sin^4 \theta \cos^2 \theta \cos^4 \left( \frac{\pi}{4} - \varphi \right).
 \end{aligned}$$

Как и в случае двухосных нематиков с молекулами эллипсоидальной формы, в формуле (90) в выражении для коэффициента  $I_2$  пренебрегаем слагаемыми, квадратичными по малым параметрам  $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ . Тогда, сравнивая коэффициенты  $I_a$ , входящие в дисперсионное уравнение (89), с аналогичными коэффициентами уравнения (66), видим, что аналитический вид коэффициентов  $I_0, I_2$  как функций полярного и азимутального углов различен для двух вышеуказанных типов молекул. Подстановка  $y = \omega^2 + I_4/3$  упрощает уравнение (89) и приводит к кубическому уравнению  $y^3 + qy + t = 0$ , где

$$q = I_2 - I_4^2/3, \quad t = \frac{2}{27}I_4^3 - \frac{I_4 I_2}{3} + I_0. \quad (91)$$

Действительные решения приведенного кубического уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
 y_k &= 2\sqrt[3]{\rho} \cos \frac{\psi + 2(k-1)\pi}{3}, \quad k = 1, 2, 3, \\
 \cos \psi &= -\frac{t}{2\rho}, \quad \rho = \sqrt{-q^3/27},
 \end{aligned}$$

а решения исходного уравнения (89) будут, соответственно, выглядеть следующим образом:

$$\omega_k^2 = y_k - \frac{I_4}{3} = c_k^2(\theta, \varphi) \mathbf{k}^2, \quad k = 1, 2, 3. \quad (92)$$

Видим, что в нематике с молекулами дискоидной формы возможно распространение трех ветвей спектров коллективных возбуждений  $\omega_k^2$  ( $k = 1, 2, 3$ ), определяющих, соответственно, первый, второй и третий звуки, если выполняется неравенство для дискриминанта

$$D = \left(\frac{q}{3}\right)^3 + \left(\frac{t}{2}\right)^2 \leq 0. \quad (93)$$

Заметим, что для всех трех решений существенна значительная анизотропия скоростей звуков. Видим, что угловая зависимость для скоростей  $c_k(\theta, \varphi)$  достаточно сложная. Поэтому далее мы упростим аналитические формулы спектров коллективных возбуждений и представим компьютерную графику этих спектров. Для этого мы изучим спектры (92) в приближении  $c_1 \gg c_2 \gg c_3$ . В соответствии с (90) коэффициенты уравнения  $I_a$  следующим образом связаны с тремя скоростями акустических волн:

$$I_4 = -\mathbf{k}^2 c_1^2, \quad I_2 = \mathbf{k}^4 c_1^2 c_2^2, \quad I_0 = -\mathbf{k}^6 c_1^2 c_2^2 c_3^2.$$

Отсюда следуют соотношения

$$\begin{aligned} c_1^2(\theta, \varphi) &= c^2 (1 + \lambda_\alpha \bar{\Phi}_\alpha(\theta, \varphi)), \\ c_2^2(\theta, \varphi) &= c^2 \frac{\lambda_\alpha \Psi_\alpha(\theta, \varphi) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \Psi_{\alpha\beta}(\theta, \varphi)}{1 + \lambda_\beta \bar{\Phi}_\beta(\theta, \varphi)}, \\ c_3^2(\theta, \varphi) &= c^2 \frac{\frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \Phi_{\alpha\beta}(\theta, \varphi)}{\lambda_\beta \Psi_\beta(\theta, \varphi) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \Psi_{\alpha\beta}(\theta, \varphi)}. \end{aligned} \quad (94)$$

Сравнивая выражения для скорости звука  $c_3$  (71) и (94), видим, что они совпадают. Поэтому соответствующие этому случаю рисунки мы не приводим.

Из проведенного компьютерного анализа спектров можно сделать вывод, что параметр  $\lambda_3$  отвечает за изменение фронта распространения волн в полюсных областях, а изменение параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  приводит к деформации фронта распространения волн в азимутальном направлении с периодом  $\pi/2$  либо  $\pi$ .

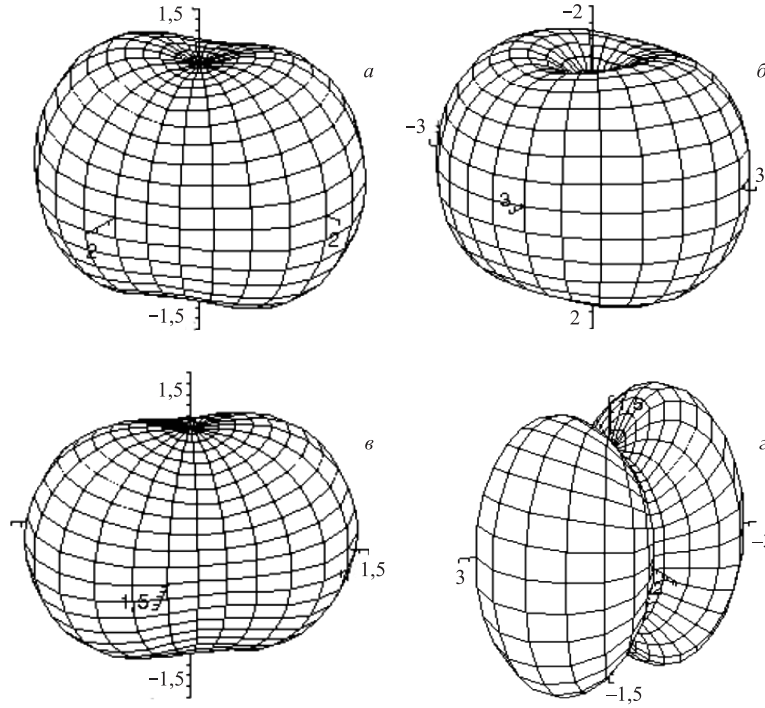


Рис. 15. Угловая зависимость скорости  $c_1$  при  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,01, \lambda_3 = 1$  (а);  $\lambda_1 = 0,01, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$  (б);  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$  (в);  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$  (г)

В области изменения термодинамических параметров, где справедливы неравенства  $\lambda_3 \gg \lambda_1, \lambda_2$ , формулы (94) упрощаются и приобретают вид

$$\begin{aligned}
 c_1^2(\theta, \varphi) &= c^2 (1 + \lambda_3 \bar{\Phi}_3(\theta, \varphi)), \\
 c_2^2(\theta, \varphi) &= c^2 \frac{\lambda_3 \Psi_3(\theta, \varphi)}{1 + \lambda_3 \bar{\Phi}_3(\theta, \varphi)}, \\
 c_3^2(\theta, \varphi) &= c^2 \frac{\lambda_1 \Phi_{31}(\theta, \varphi) + \lambda_2 \Phi_{32}(\theta, \varphi)}{\Psi_3(\theta, \varphi)}.
 \end{aligned}
 \tag{95}$$

Рассмотрим теперь случай, когда двухосный нематик характеризуется только одной конформационной степенью свободы. Согласно соотношениям (80), (83) этой величиной является конформационная степень свободы  $p(\mathbf{x})$ , которая является функцией угла между большой и малой осями молекулы. Набор параметров сокращенного описания состоит из плотностей аддитивных интегралов движения, двух осей анизотропии и одного конфор-

мационного параметра  $\varphi_a(\mathbf{x}) = \{\zeta_a(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{m}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x})\}$ . Для анализа спектров коллективных возбуждений заметим, что искомые уравнения динамики получаются формально из уравнения (89), в котором положены равными нулю длины большой и малой осей анизотропии  $u = v = 0$ . Спектральные характеристики получим из (90), где  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . При этом коэффициенты бикубического уравнения упрощаются и приобретают вид

$$\begin{aligned} I_0(\theta, \varphi) &= 0, \\ I_4(\mathbf{k}, \theta, \varphi) &\equiv \bar{I}_4(\theta, \varphi) \mathbf{k}^2 = -\mathbf{k}^2 c^2 \{1 + \lambda_3 \sin^2 \theta\}, \\ I_2(\mathbf{k}, \theta, \varphi) &\equiv \bar{I}_2(\theta, \varphi) \mathbf{k}^4 = \mathbf{k}^4 c^4 \lambda_3 [1 - \sin^2 \theta \cos^2 2\varphi] \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (96)$$

в результате чего получаем дисперсионное уравнение

$$\omega^2 (\omega^4 + I_4(\mathbf{k}, \theta, \varphi) \omega^2 + I_2(\mathbf{k}, \theta, \varphi)) = 0.$$

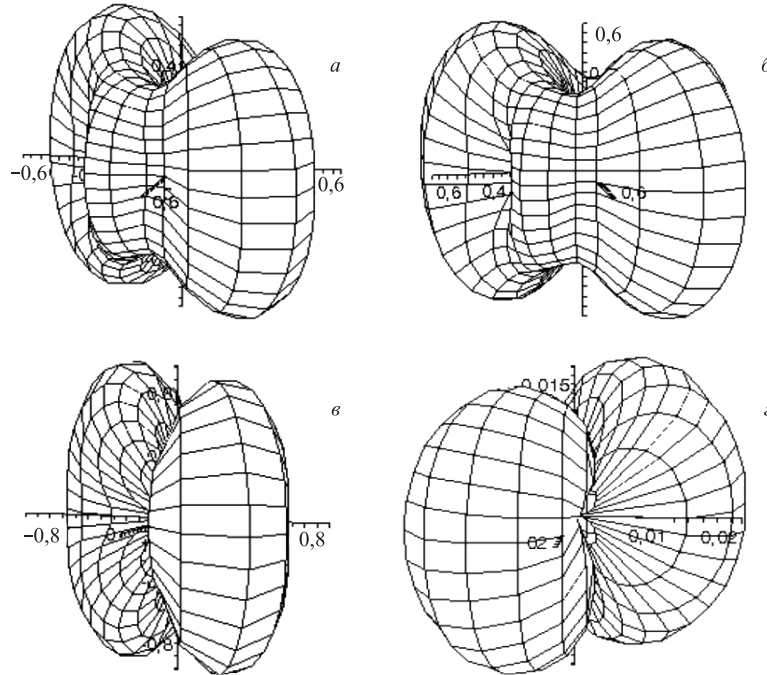


Рис. 16. Угловая зависимость скорости звука  $c_2$  при  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,01, \lambda_3 = 1$  (а);  $\lambda_1 = 0,01, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$  (б);  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$  (в);  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0,001, \lambda_3 = 0$  (г)

Таким образом, видим, что в двухосном нематике с молекулами дископодобной формы в случае одной конформационной степени свободы возможно распространение двух акустических ветвей колебаний

$$\omega_{\pm}^2(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \left( -I_4(\mathbf{k}) \pm \sqrt{I_4^2(\mathbf{k}) - 4I_2(\mathbf{k})} \right) \equiv c_{\pm}^2 \left( \frac{\mathbf{k}}{k} \right) k^2, \quad (97)$$

соответствующих первому и второму звуку. Сравним угловые характеристики этих спектров с угловыми характеристиками спектров одноосного нематика с молекулами стержнеподобной формы. Для этого приведем выражения (97) для скоростей  $c_{\pm}^2$  в терминах полярного и азимутального углов. Согласно явному виду выражений  $I_2$  и  $I_4$  (96), имеем

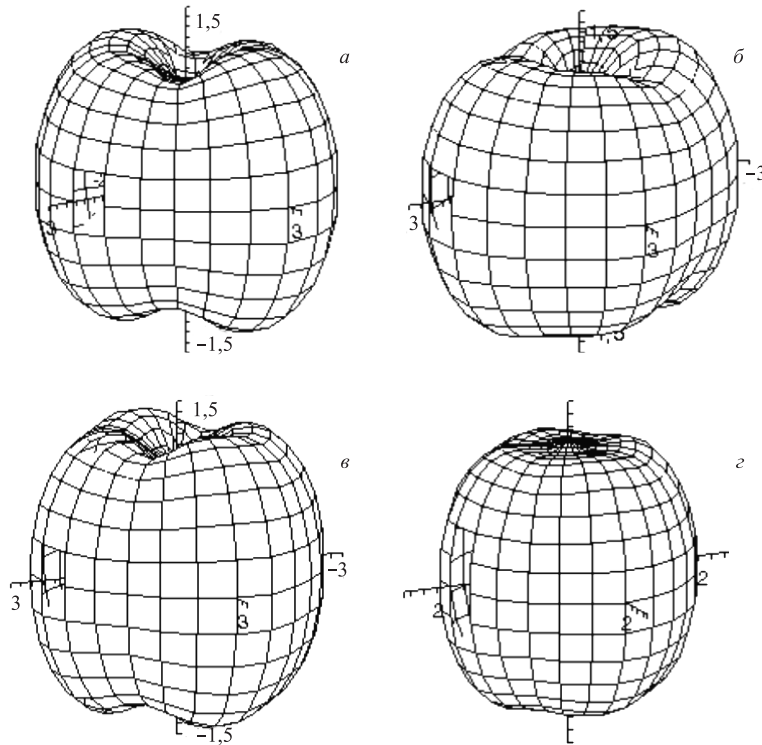


Рис. 17. Угловая зависимость скорости звука  $c_1$  при  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,001, \lambda_3 = 1$  (а);  $\lambda_1 = 0,001, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$  (б);  $\lambda_1 = 0,5, \lambda_2 = 0,01, \lambda_3 = 1$  (в);  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$  (г)

$$c_{\pm}(\theta, \varphi) = \frac{c}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \lambda_3 \sin^2 \theta \pm \left[ (1 - \lambda_3 \sin^2 \theta)^2 + 4\lambda_3 \sin^4 \theta \cos^2 2\varphi \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (98)$$

Подкоренное выражение неотрицательно, и поэтому скорости  $c_{\pm}^2$  существуют при произвольных полярном и азимутальном углах. В отличие от одноосных нематиков в рассматриваемом случае появляется зависимость скорости распространения возбуждений и от азимутального угла (см. рис. 15, 16). В нашем приближении формулы (74) и (98) совпадают, что означает отсутствие зависимости спектров коллективных возбуждений от формы двухосной молекулы изучаемых нематиков.

При  $D > 0$  приведенное кубическое уравнение имеет одно действительное решение и два комплексно-сопряженных. В этом случае нематик характеризуется одной ветвью коллективных возбуждений. Действительное решение имеет вид

$$y_1(\mathbf{k}, \theta, \varphi) = \sqrt[3]{-\frac{t}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{t}{2} - \sqrt{D}}, \quad (99)$$

и входящие сюда величины определяются формулами (91) и (93). Компьютерное моделирование спектра (99) представлено на рис. 17.

Рассмотрим в заключение случай, когда  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$  и  $\lambda_3 \neq 0$ . При этом, очевидно,  $I_0(\theta, \varphi) = 0$  и коэффициенты  $I_2(\theta, \varphi)$ ,  $I_4(\theta, \varphi)$  совпадают с аналогичными в случае эллипсоидальных молекул (см. формулы (73)). В этом случае возможно распространение двух акустических спектров со скоростями  $c_{\pm}^2$ , явный вид которых совпадает с выражением (74).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *de Gennes P. G. J., Prost J.* The Physics of Liquid Crystals. Oxford: Oxford Univ. Press, 1995. 400 p.
2. *Чандрасекар С.* Жидкие кристаллы. М.: Мир, 1980. 344 с.
3. *Пикин С. А.* Структурные превращения в жидких кристаллах. М.: Наука, 1981. 336 с.
4. *Лебедев В. В., Кац Е. М.* Динамика жидких кристаллов. М.: Наука, 1988. 144 с.
5. *Гребенкин М. Ф., Иващенко А. В.* Жидкокристаллические материалы. М.: Химия, 1989. 288 с.
6. *Chaikin P. M., Lubensky T. C.* Principles of Condensed Matter Physics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. 699 p.
7. *Немцов В. Б.* Неравновесная статистическая механика систем с ориентационным порядком. Минск: Технология, 1997. 265 с.



8. *Аверьянов Е. М.* Эффекты локального поля в оптике жидких кристаллов. Новосибирск: Наука, 1999. 552 с.
9. *Клеман М., Лаврентович О. Д.* Основы физики частично упорядоченных сред. М.: Физматлит, 2007. 679 с.
10. *Warner M., Terentjev E. M.* Liquid Crystals Elastomers. Oxford: Clarendon Press, 2003. 424 p.
11. Nuclear Magnetic Resonance of Liquid Crystals // NATO Sci. Ser. C / Ed. Emsley J. W. 1985. P. 592.
12. *Zannoni C.* // Proc. of NATO Adv. Study Inst. 1988. P. 57–83.
13. *Tarroni R., Zannoni C.* // J. Chem. Phys. 1991. V. 95, No. 6. P. 4550–4564.
14. *Ferrarini A., Moro G. J., Nordio P. L.* // Liquid Crystals. 1990. V. 8, No. 5. P. 593–621.
15. *Аверьянов Е. М.* // Физика твердого тела. 1982. Т. 24, № 9. С. 2839–2841.
16. *Vogolubov N. N.* // Physica. 1960. V. S26. P. 1–16.
17. *Goldstone J., Salam A., Weinberg S.* // Phys. Rev. 1962. V. 127. P. 965–970.
18. *Умедзава Х., Мацумото Х., Татики М.* Термополевая динамика и конденсированные состояния. М.: Мир, 1985. 504 с.
19. *Ландау Л. Д.* // ЖЭТФ. 1937. Т. 7. С. 19–32; 627–632.
20. *Зубарев Д. Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971. 415 с.
21. *Ахиезер А. И., Пелетминский С. В.* Методы статистической физики. М.: Наука, 1977. 377 с.
22. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Ермилов А. Н., Курбатов А. М.* Введение в аналитический аппарат статистической механики. Киев: Наук. думка, 1988. 175 с.
23. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Садовников Б. И., Шумовский А. С.* Математические методы механики модельных систем. М.: Физматлит, 1989. 296 с.
24. *Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В.* Статистическая механика квантовых жидкостей и кристаллов. М.: Физматлит, 2006. 368 с.
25. *Ericksen J. L.* // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1960. V. 4. P. 231.
26. *Leslie F. M.* // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1966. V. 19. P. 357–370.
27. *Leslie F. M.* // Advances in Liquid Crystals. 1979. V. 4. P. 1–81.
28. *Martin P. C., Parodi O., Pershan P. J.* // Phys. Rev. A. 1972. V. 6. P. 2401–2420.
29. *Dzyaloshinsky I. E., Volovick G. E.* // Ann. Phys. 1980. V. 125. P. 67–97.
30. *Isayev A., Kovalevsky M., Peletminsky S.* // Mod. Phys. Lett. B. 1994. V. 8. P. 677.
31. *Pleiner H., Brand H. R.* // Pattern Formation in Liquid Crystals / Eds. A. Buka and L. Kramer. N. Y., 1996. Ch. 2. P. 15–69.
32. *Brand H., Pleiner H.* // Phys. Rev. A. 1981. V. 24, No. 5. P. 2777–2788.
33. *Liu M.* // Ibid. P. 2720–2726.

34. *Saslow W. M.* // Phys. Rev. A. 1982. V. 25. P. 3350–3359.
35. *Olmsted P. D., David Lu C. Y.* // Phys. Rev. E. 1999. V. 60. P. 4397.
36. *Stark H., Lubensky T. C.* // Phys. Rev. E. 2003. V. 67. P. 061709.
37. *Qian T., Sheng P.* // Phys. Rev. E. 1998. V. 58, No. 6. P. 7475–7485.
38. *Воловик Г. Е.* // Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 31. С. 297–300.
39. *Исаев А. А., Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В.* // ЭЧАЯ. 1996. Т. 27, вып. 2. С. 431–492.
40. *Ковалевский М. Ю., Кузнецов В. В.* // Докл. АН Украины. 1999. № 12. С. 90–95.
41. *Kovalevsky M. Y., Shishkin A. L.* // J. of Mol. Liquids. 2003. V. 105, No. 2–3. P. 197–200.
42. *Carlsson T.* // J. de Phys. (Fr.). 1983. V. 44, No. 8. P. 909–911.
43. *Palfy-Muhoray P., Lee V. A., Petschek R. G.* // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60, No. 22. P. 2303–2306.
44. *Ayton C., Patey G. N.* // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 60, No. 22. P. 239–242.
45. *Аверьянов Е. М.* // Письма в ЖЭТФ. 1997. Т. 66, № 12. С. 805–810.
46. *Keyes T., Kivelson D.* // J. of Chem. Phys. 1972. V. 56, No. 3. P. 1057–1065.
47. *Суцинский М. М.* Спектры комбинационного рассеяния молекул и кристаллов. М.: Наука, 1969. 576 с.
48. *Покровский В. Н.* // УФН. 1971. Т. 105, вып. 4. С. 625–643.
49. *Daller J. S., Scriven L. E.* // Proc. Roy. Soc. A. 1963. V. 275. P. 504–527.
50. *Leonov A. I.* // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1992. V. 42. P. 323–350.
51. *Beris A. N., Edwards B. J.* Thermodynamics of Flowing Systems with Internal Microstructure. Oxford: Oxford Univ. Press, 1994. 704 p.
52. *Nemtsov V. B., Kamluk A. N.* // J. Nonlin. Phenomena in Complex Systems. 2001. V. 4. P. 58–63.
53. *Pasquali M., Scriven L. E.* // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2004. V. 120. P. 101–135.
54. *Немцов В. Б.* // ТМФ. 1975. Т. 25, № 1. С. 118–131.
55. *Базаров И. П., Геворкян Э. В.* Статистическая теория твердых и жидких кристаллов. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1983. 261 с.
56. *Kovalevsky M. Y., Kuznetsov V. V.* // ЭЧАЯ. 2000. Т. 31, вып. 76. С. 221–226.
57. *Yu L. J., Saure A.* // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 1000–1003.
58. *Madsen L. A. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. P. 145505.
59. *Acharya B. R., Primak A., Kumar S.* // Ibid. P. 145506.
60. *Aprutesei D., Mehl G. H.* // Chem. Commun. 2006. P. 609–611.
61. *Macmillan E. H.* On Hydrodynamics of Biaxial Nematic Liquid Crystals // Arch. Rational Mech. Anal. 1992. V. 117. P. 193–239; 241–294.

62. *Zapotocky M., Goldbard P. M., Goldenfeld N.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. P. 1216.
63. *Priezjev N. V., Pelcovits R.* cond-mat/0202218. 2002. V. 2.
64. *Papenfub C., Verhas J., Muschik W.* // Z. Naturforsch. 1995. V. 50. P. 795–804.
65. *Ивашин А. П., Ковалевский М. Ю., Логвинова Л. В.* // ТМФ. 2004. Т. 140, № 3. С. 500–512.
66. *Ivashin A. P., Kovalevsky M. Y., Logvinova L. V.* // J. Quant. Chem. 2004. V. 100, Iss. 4. P. 636–644.
67. *Ковалевский М. Ю., Логвинова Л. В., Мацкевич В. Т.* // Вопр. атомной науки и техн. 2007. № 3. С. 380–384.
68. *Selinger J. V. et al.* // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. P. 051708/1-7.
69. *Greanya V. A. et al.* // Liquid Crystals. 2005. V. 32, No. 7. P. 933–941.
70. *Hu Z. et al.* // J. Chem. Phys. 1992. V. 97. P. 568–571.
71. *Liu M.* // Phys. Rev. A. 1979. V. 19. P. 2090–2094.
72. *Bhattacharya S., Sarma B. K., Ketterson J. B.* // Phys. Rev. Lett. 1978. V. 40, No. 40. P. 1582–1585.
73. *Ивашин А. П., Ковалевский М. Ю., Логвинова Л. В.* // Укр. физ. журн. 2004. Т. 49, № 1. С. 38–45.
74. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.