ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2010. Т. 41. ВЫП. 7

ВКЛАД Н. Н. БОГОЛЮБОВА В НЕРАВНОВЕСНУЮ СТАТИСТИЧЕСКУЮ МЕХАНИКУ (1937–1945 ГГ.)

*Ю. Г. Рудой**

Российский университет дружбы народов, Москва

Показано, что многие важные и актуальные до настоящего времени результаты в области неравновесной статистической механики были получены Н. Н. Боголюбовым (совместно с Н. М. Крыловым) еще в предвоенные годы и полностью опубликованы в остающейся до сих пор малоизвестной монографии Н. Н. Боголюбова 1945 г. К числу этих результатов принадлежат понятие об иерархии времен стохастической эволюции, понятие о квазисредних, снимающих симметрию относительно обращения времени, а также о механизме динамической релаксации физического объекта в термостате.

PACS: 11.10.-z

1. Знакомясь с 12-томным Собранием научных трудов Н. Н. Боголюбова [1], изданных к его 100-летнему юбилею в академической серии «Классики науки», нетрудно заметить, что через все научное творчество Н. Н. Боголюбова «красной нитью» проходит ряд важнейших физических проблем. К их числу относится проблема взаимосвязи динамических и статистических аспектов описания объектов в заданном внешними условиями макроскопическом окружении (например, в термостате).

Существенно, что ряд основополагающих результатов в этой области был получен в цикле работ Н. Н. Боголюбова, написанных им совместно с Н. М. Крыловым в «киевский период» его жизни в конце 30-х годов (1937–1940 гг.). Эти работы (см. т. II, ч. VI; т. V, ч. I в [1]) первоначально были опубликованы на украинском языке в малотиражных и труднодоступных изданиях, и потому своевременно не привлекли должного внимания ни у нас в стране, ни тем более за рубежом.

К сожалению, не избежала определенного «забвения» и итоговая монография Н. Н. Боголюбова [2] этого цикла (см. т. IV, ч. I в [1]), изданная сразу после войны уже на русском языке. Цель данного сообщения состоит в том, чтобы показать, что ряд наиболее важных понятий и результатов в области

*E-mail: rudikar@mail.ru

неравновесной статистической механики фактически уже содержался в указанной монографии и был впоследствии успешно развит Н. Н. Боголюбовым и его последователями*.

2. Знакомство с тематикой и содержанием «киевского» цикла работ указывает на то, что научные интересы Н. Н. Боголюбова в период 1937–1940 гг. все более смещались из области чистой математики и нелинейной механики в область статистической механики как части физики, начало которой было положено в трудах Максвелла, Больцмана и особенно Гиббса.

Основная проблема состояла здесь в естественном совмещении, казалось бы, «несовместимых» концепций — динамической и статистической. Проблема построения подобной «стохастической динамики» тесно связана с проблемой необратимости, или, что то же, с проблемой «забывания» объектом начальных условий в процессе своей эволюции.

Одну из первых после Больцмана (1878) и Гиббса (1902) попыток построить стохастическую динамику предпринял Ланжевен (1908), дополнивший обычные уравнения лагранжевой динамики случайными «силами» $\tilde{f}(t)$. Эти силы вводятся чисто феноменологически и характеризуются двумя условиями: $\langle\tilde{f}(t)\rangle = 0$ и $\langle\tilde{f}(t)\tilde{f}(t+\tau)\rangle = K(\tau)$, где символ $\langle\ldots\rangle$ обозначает усреднение, а $K(\tau)$ — временну́ю корреляционную функцию.

Подход Боголюбова–Крылова, развитый ими в работах «киевского периода» и окончательно сформулированный Боголюбовым в монографии 1945 г. [2], имеет некоторое сходство по форме с подходом Ланжевена, но при этом не только уточняет его, но и дает ему полное физическое обоснование. В концептуальном смысле подход Боголюбова–Крылова ближе, однако, к подходу Гиббса, в котором исходным является явное выражение для функции Гамильтона H или оператора Лиувилля L.

По сравнению с Гиббсом Боголюбов и Крылов сделали важный шаг вперед, рассмотрев возможное наличие статистических параметров не только в начальных условиях, но и в самих динамических величинах H и L. Указанные параметры учитывают неконтролируемое воздействие на физический объект со стороны внешнего окружения, которое и приводит в итоге к необратимой эволюции объекта в фазовом пространстве.

В подходе Боголюбова–Крылова уравнения динамики могут быть записаны (и, следовательно, хотя бы в принципе решены) в явном виде с помощью систем дифференциальных уравнений гамильтоновой динамики — причем обыкновенных (а не стохастических, как в подходе Ланжевена), поскольку для сил имеются явные выражения.

Статистический характер внешнего воздействия учитывается последующим усреднением по явно входящим и имеющим при этом ясный физиче-

---

*Подробнее об этом см. п. 1.1 вступительной статьи [3] к т. V–VIII собрания трудов [1].

ский смысл статистическим параметрам — например, случайным начальным фазам фурье-разложения переменной внешней силы. Таким образом, подход Боголюбова–Крылова физически более предпочтителен по сравнению с подходом Ланжевена или эквивалентным ему подходом Фоккера–Планка (полезное описание этих подходов см., например, в [4]).

3. Ввиду ограниченного объема данной публикации дадим лишь краткое резюме содержания и результатов итоговой монографии [2], отметив влияние реализованных в ней идей на последующее развитие неравновесной статистической механики. В [2] дано решение двух физических проблем, первая из которых (гл. III) — чисто механическая проблема Рэлея о поведении осциллятора под действием переменной внешней силы, содержащей случайные факторы.

Вторая проблема (гл. IV) была впервые поставлена Боголюбовым и названа им «элементарным примером»*, в котором речь идет о релаксации осциллятора, находящегося в контакте с термостатом, к состоянию теплового равновесия; по сути дела, речь идет о физической реализации нулевого начала термодинамики. Существенно, что методы, использованные Боголюбовым при решении обеих названных проблем, в целом весьма схожи и основаны на математических методах, описанных им в [2] в гл. I и II.

Одной из наиболее важных идей, развитых Боголюбовым в [2], представляется идея о необходимости перехода от *глобальной* к *локальной* (во времени) характеризации стохастических процессов. Возможность подобного перехода Боголюбов убедительно демонстрирует на примере широкого класса стационарных гауссовых процессов (СГП) (см., например, [5]). Для этих процессов имеет место теорема Бохнера (1932) – Хинчина (1934), согласно которой временна́я корреляционная функция $K(\tau) = K(-\tau)$ и спектральная плотность $J(\upsilon) = J(-\upsilon)$ связаны между собой соотношением $K(\tau) = \int d\upsilon\, J(\upsilon)\cos \upsilon\tau$, где интеграл берется по всем вещественным значениям υ (от $-\infty$ до $+\infty$).

Важную часть класса СГП составляют марковские процессы, которыми исчерпываются возможности подхода Ланжевена (и эквивалентного ему подхода Фоккера–Планка) в качестве основы для получения асимптотических решений в пределе больших времен; в частности, подобным образом в подходе Фоккера–Планка могут быть получены стационарные статистические распределения Максвелла, Больцмана и Гиббса.

Глобальный (на всех временах) критерий «марковости» для СГП дается теоремой Дуба (1942), требующей, чтобы $J(\upsilon)$ имела вид распределения Коши–Лоренца, а $K(\tau)$, соответственно, экспоненциального затухания.

*Впоследствии этот «пример» лег в основу весьма обширной литературы (см. подробнее в [3], а также [8]).

Соответствующий «цветной» шум определяет в общем случае марковский процесс Орнштейна–Уленбека, тогда как в «вырожденном» случае дельтообразный «белый» шум определяет марковский процесс Винера, или обычное броуновское движение (см., например, Ван Кампен [4]).

Однако теорема Дуба предъявляет излишне жесткие требования к реальным физическим процессам стохастической природы. С физической точки зрения более важным оказывается не глобальный, а *локальный* критерий «марковости», впервые предложенный Боголюбовым* в [2], а спустя 10 лет независимо переоткрытый Ван Ховом [6] и ныне известный как «предел слабого взаимодействия», или «$\varepsilon^2 t$-предел».

В отличие от глобального критерия Дуба локальный критерий Боголюбова основан на малости интенсивности J в смысле εJ, $0 < \varepsilon \ll 1$, причем несущественной становится как раз форма $J(v)$ — достаточно лишь непрерывности $J(v)$ и простейшего приближения $J(v) \approx \mathrm{const}$. Согласно Боголюбову при этих условиях «марковость» и «забывание» начальных условий всегда наступает на достаточно больших временах $t \gg t_{\mathrm{M}}$, где $t_{\mathrm{M}} \sim 1/\varepsilon^2$, так что $\varepsilon^2 t \gg 1$; тем самым на шкале времени вводится «иерархия времен»**.

В гл. III Боголюбов доказывает принципиально важный вывод о том, что один и тот же СГП эволюции осциллятора может рассматриваться различным образом в трех различных интервалах времени:

1) как детерминированный гамильтонов динамический процесс на малых временах (при $t \ll t_{\mathrm{M}}$ или $\varepsilon^2 t \ll 1$);

2) как стохастический гауссов процесс с частичной «памятью» о начальных условиях на промежуточных временах (при $t \sim t_{\mathrm{M}}$ или $\varepsilon^2 t \sim 1$);

3) как стохастический марковский процесс с полной потерей «памяти» о начальных условиях на больших временах (при $t \gg t_{\mathrm{M}}$ или $\varepsilon^2 t \gg 1$).

Далее Боголюбов убедительно демонстрирует, сколь «зыбкой» является сама граница между понятиями «случайных» и «динамических» физических величин, используя для этого координаты и импульсы, определяющие «траекторию» объекта в фазовом пространстве. Действительно, как видно из утверждения 1), случайные флуктуации на достаточно малых временах $0 < t \ll t_{\mathrm{M}}$ также могут стать сколь угодно малыми, причем при $\varepsilon \to 0$, когда $t_{\mathrm{M}} \to \infty$, интервал «малых» времен может стать и сколь угодно большим, так что вся эволюция не будет отличаться от детерминированной.

---

*Этот результат заслуживает, на наш взгляд, включения в учебники по статистической механике под названием «теорема Боголюбова о $\varepsilon^2 t$» подобно, например, «теореме Боголюбова о $1/q^2$».

**В задаче об осцилляторе имеется всего одно подобное время, тогда как в знаменитой «цепочке ББГКИ» (см. монографию Н. Н. Боголюбова 1946 г. в ч. II, т. V в [1]) их становится уже три.

В своих работах Боголюбов неизменно подчеркивал, что справедливость утверждений 1)–3) зависит от двух существенных обстоятельств. Прежде всего необходима *непрерывность* спектральной плотности внешнего возмущения $J(v)$, поскольку именно это требование позволяет в принципе обойти «запрет Пуанкаре». Это означает, что избежать «возврата» фазовой траектории в заданную окрестность начального условия (хотя бы и через очень большое, но конечное время) можно лишь в «термодинамическом» пределе бесконечного числа степеней свободы.

Второе, не менее существенное, обстоятельство, согласно Боголюбову, состоит в том, чтобы соблюдать правильный порядок предельных переходов по ε и по t: для выхода на марковский режим следует при $\varepsilon > 0$ сначала устремить $t \to \infty$ и «превзойти» значение t_{M} (конечное при конечном ε) и лишь затем устремить $\varepsilon \to 0$ так, чтобы при этом $\varepsilon^2 t \to \infty$. Иной порядок предельных переходов не имеет физического смысла, поскольку, устремив сначала $\varepsilon \to 0$, мы фактически снимаем внешнее стохастическое возмущение, после чего процесс на всех временах t становится чисто динамическим. Формально это означает, что характерное время $t_{\mathrm{M}} \sim 1/\varepsilon^2$ с самого начала становится бесконечным и, следовательно, недостижимым, после чего теряет смысл обсуждение необратимости процесса.

Описанная ситуация означает наличие неаналитической зависимости от ε, вообще характерной для концепции «квазисредних», которую в дальнейшем столь успешно развил и эффективно применил Боголюбов в 1960 г. (см. ч. II, т. VI в [1]). И хотя в работах «киевского» периода этот термин еще явно не упоминается, фактически речь идет именно о нем, причем в еще более общей постановке.

Действительно, роль внешнего возмущения стохастической природы состоит как раз в том, чтобы нарушить присущую данному динамическому объекту обратимую эволюцию, или, что то же, симметрию по отношению к замене знака времени $t \to -t$. Это означает, что благодаря сколь угодно малому, но конечному $\varepsilon > 0$ происходит нарушение указанной симметрии, которое естественно назвать *спонтанной стохастизацией*. По прошествии соответствующего (сколь угодно большого, но также конечного) времени $t_{\mathrm{M}} \sim 1/\varepsilon^2$ реализуется марковская, или существенно необратимая, эволюция.

Именно эта плодотворная идея Н. Н. Боголюбова, фактически высказанная им уже в 1945 г., позволила его сотруднику Д. Н. Зубареву в 1961–1965 гг. построить метод неравновесного статистического оператора [7]. В этом методе бесконечно малый «источник» в правой части уравнения Лиувилля приводит к отбору только запаздывающих решений этого уравнения, реализуя тем самым принцип причинности.

Описание развития другого цикла идей Боголюбова, связанных с возникновением стохастического процесса в динамической системе (в том числе квантовой), находящейся под слабым влиянием термостата, можно найти в монографии [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. тр.: в 12 т. М.: Наука, 2005–2009.
2. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. Львов: Изд-во АН УССР, 1945.
3. *Плакида Н. М. и др.* Николай Николаевич Боголюбов и статистическая механика // *Боголюбов Н. Н.* Собр. науч. тр. Т. V. М.: Наука, 2006. С. 9–57.
4. *Ван Кампен Н. Г.* Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высш. шк., 1990.
5. *Яглом А. М.* Корреляционная теория стационарных случайных функций. Л., 1981.
6. *Van Hove L.* // Physica. 1955. V. 21. P. 901; 1956. V. 22. P. 343 (Вопросы квантовой теории необратимых процессов. М.: Изд-во иностр. лит., 1961).
7. *Зубарев Д. Н.* Неравновесная статистическая механика. М.: Наука, 1971.
8. *Шелест А. В.* Метод Боголюбова в динамической теории кинетических уравнений. М.: Наука, Физматлит, 1991.