

УРАВНЕНИЯ ФАДДЕЕВА И МЕТОД
ГИПЕРСФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК В ЗАДАЧЕ
ТРЕХНУКЛОННОГО КОНТИНУУМА

В. И. Ковальчук¹, И. В. Козловский²

¹Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Киев

²Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Киев

| | |
|---|-----|
| ВВЕДЕНИЕ | 573 |
| РЕДУКЦИЯ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА К СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ | 579 |
| Формализм | 579 |
| Непрерывный спектр: Nd -рассеяние | 582 |
| Система трех несвязанных взаимодействующих частиц | 589 |
| МОДИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА ПРИ НАЛИЧИИ КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ | 591 |
| Переформулировка уравнений движения | 593 |
| Разложение в быстросходящиеся ряды | 595 |
| Уравнения для радиальных функций в случае $\ell_1 = \ell_2 = 0$ | 596 |
| Выводы | 599 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 599 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ А | 600 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ Б | 601 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ | 603 |

УРАВНЕНИЯ ФАДДЕЕВА И МЕТОД ГИПЕРСФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК В ЗАДАЧЕ ТРЕХНУКЛОННОГО КОНТИНУУМА

В. И. Ковальчук¹, И. В. Козловский²

¹Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Киев

²Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Киев

Развит метод решения уравнений Фаддеева в конфигурационном пространстве для системы трех нуклонов в континууме с использованием разложений по гиперсферическому базису. Рассчитаны волновые функции Nd -системы, фазы и сечения Nd -рассеяния при допороговых энергиях. В рамках данного метода сформулированы также одномерные интегральные уравнения для задачи инфинитного движения всех трех сильно взаимодействующих частиц и осуществлена модификация уравнений Фаддеева для системы трех адронов с кулоновским взаимодействием в континууме. Представлен обзор аналогичных методов исследования трехчастичных систем.

The method of solving Faddeev's equations in configuration space for three-nucleon system in continuum using expansions in hyperspherical basis is developed. The wave functions of Nd -system, phases, and cross sections of Nd -scattering at subthreshold energies are calculated. Within the framework of this method, one-dimensional integral equations for the problem of infinite motion of all three strongly interacting particles are also formulated and the modification of Faddeev's equations for the system of three hadrons with Coulomb interaction in continuum is made. The review of similar methods of investigation of three-particle systems is presented.

PACS: 03.65.Nk; 21.45.-v; 31.15.xj

ВВЕДЕНИЕ

Исследование трехчастичных систем всегда привлекало повышенное внимание теоретиков в течение достаточно длительного времени и продолжает оставаться актуальным и в наши дни, поскольку, с одной стороны, трехчастичные системы представляют собой достаточно сложный объект (по сравнению с бинарными) и вместе с тем допускают точное решение задачи для конкретных физических систем. Особый всплеск интереса к проблеме трех тел имел место в 60-е гг. прошлого столетия в связи с появлением новых методов исследования — уравнений Фаддеева (УФ) [1] и метода гиперсферических гармоник (МГГ) [2, 3]. С тех пор УФ и МГГ утвердили себя как одни из наиболее эффективных и чаще всего используемых методов исследования трехчастичных (трехкластерных) систем [4–7]. Первый из них —

прежде всего благодаря изысканной математической корректности, второй — вследствие относительной простоты и прозрачности. МГГ оказался особенно эффективным для решения задач о связанных состояниях систем нескольких частиц (кстати, не только ядерных). Однако, если в системе присутствует непрерывный спектр, то оба подхода приводят к немалым затруднениям. Решение уравнений Фаддеева в этом случае оказывается сопряженным с более чем существенными вычислительными сложностями [8], а в МГГ в волновой функции возникают характерные сингулярности, вследствие чего сходимость разложения по гиперсферическим гармоникам катастрофически ухудшается [9]. В данной работе осуществлена попытка совместить оба подхода, а именно: использовать для нахождения решений УФ для непрерывного спектра метод разложения по гиперсферическим гармоникам.

В [10–15], где изучались, в частности, свойства ядер ${}^6\text{He}$ и ${}^{11}\text{Li}$ как трехчастичных систем с двухнейтронным гало, для нахождения волновых функций системы как в связанном состоянии, так и в континууме используются УФ в дифференциальной форме с привлечением МГГ. Каждая из трех компонент Ψ^i ($i = 1, 2, 3$) полной трехчастичной волновой функции Ψ , удовлетворяющей уравнениям Фаддеева, раскладывается в ряд по полному набору функций $\Phi_\lambda^i(\rho, \Omega)$, зависящих от коллективной переменной ρ , имеющей размерность длины в шестимерном пространстве, и пяти угловых переменных Ω :

$$\Psi^i(\rho, \Omega) = \sum_{\lambda} f_{\lambda}(\rho) \Phi_{\lambda}^i(\rho, \Omega). \quad (1)$$

Эта идея (гиперсферическое адиабатическое приближение) была использована также в [16] для описания связанного состояния ${}^3\text{H}$. Так называемые обобщенные угловые функции Φ_{λ}^i [12] являются собственными функциями оператора $\hat{\lambda} = -\Delta_{\Omega} + (2m\rho^2/\hbar^2) \sum V_{ij}$, являющегося суммой угловой части шестимерного оператора Лапласа Δ_{Ω} и слагаемых, содержащих парные потенциалы взаимодействия (m — нормировочная масса, возникающая из определения ρ [14]). Иногда в $\hat{\lambda}$ добавляют еще и потенциал трехчастичного взаимодействия. Если в определении $\hat{\lambda}$ положить $V_{ij} = 0$, то процедура разложения (1) будет тождественна классическому методу разложения по K -гармоникам, т. е. функции Φ_{λ}^i будут известными гиперсферическими функциями $u_{Kn}(\Omega)$ [5–7]. В случае короткодействующих ядерных взаимодействий добавление нуклон-нуклонных (NN) потенциалов к Δ_{Ω} обеспечивает, по мнению авторов [12], более быструю сходимость ряда (1), чем разложение $\Psi^i(\rho, \Omega)$ по K -гармоникам. Если система трех взаимодействующих частиц связана, то разложение функций $\Psi^i(\rho, \Omega)$ достаточно проводить лишь по гармоникам $u_{Kn}(\Omega)$. При этом соответствующий ряд будет достаточно быстро сходиться, и в нем можно ограничиться малым числом слагаемых [17]. Однако если энергия связи трехчастичной системы мала, то число таких слагаемых может быть достаточно большим и в пределе по-

что нулевой энергии связи ряд по K -гармоникам может даже расходиться. Если же система трех взаимодействующих частиц находится в состоянии непрерывного спектра, то ряд по гармоникам u_{Kn} для функций $\Psi^i(\rho, \Omega)$, как правило, не является быстросходящимся и в общем случае в нем необходимо учитывать очень большое или даже бесконечное число слагаемых. В таком случае пользуются разложениями по Φ_λ^i , зависящими также и от ρ . При этом радиальные функции $f_\lambda(\rho)$ в (1) путем соответствующего выбора оператора $\hat{\lambda}$ и его собственных функций можно определить таким образом, что функции $f_\lambda(\rho)$ при $\rho \rightarrow \infty$ будут пропорциональны функциям Ханкеля и будут выражаться через сходящиеся и расходящиеся волны. Коэффициенты при расходящихся волнах по смыслу представляют собой S -матрицу, которую затем можно диагонализировать и найти соответствующие фазы. Однако коротко описанная многоступенчатая процедура нахождения полной трехчастичной волновой функции Ψ для непрерывного спектра довольно сложна и громоздка. Кроме того, как уже говорилось, в разложении (1) необходимо учитывать большое количество членов ряда.

Что касается гало-ядер, то за последние четверть века «гало-физика» стала очень актуальной как с теоретической, так и с экспериментальной точек зрения, и здесь трехкластерная модель оказалась весьма эффективной. Так, в [18–20] развит последовательный микроскопический подход к реакциям с Вогготеап-ядрами с двухнейтронным гало. В рамках трехчастичной кластерной модели для расчетов волновой функции основного состояния ядра ${}^6\text{He}$ и для описания трехчастичной динамики — низколежащих состояний континуума ${}^6\text{He}$, включая монопольные, дипольные и квадрупольные возбуждения, использован метод гиперсферических гармоник. Заметим, что в более ранних работах авторов [11], где исследовались свойства основного состояния ${}^6\text{He}$, использовались и УФ, и МГГ, и оказалось, что в данном случае оба метода дают очень близкие результаты, поэтому была выбрана более простая процедура. Механизмы реакции описаны в рамках микроскопической четырехкластерной модели искаженных волн (DWIA), которая успешно используется при описании различных реакций с участием ядер с двухнейтронным гало. Подчеркивается исключительная важность учета взаимодействия в конечном состоянии между всеми фрагментами. Подход был эффективно использован при анализе экспериментальных данных по фрагментации ${}^6\text{He}$ на ядрах ${}^{12}\text{C}$ и ${}^{208}\text{Pb}$ с детальным изучением неупругих гало-возбуждений, различных энергетических и угловых корреляций, продольных и поперечных импульсных распределений.

По вопросу об адиабатическом приближении необходимо отметить работы сотрудников ЛТФ ОИЯИ [21–24], где была предложена новая формулировка трехчастичной задачи рассеяния на основе адиабатического представления трехчастичной волновой функции, полученного через локальные

разложения для фаддеевских компонент в рамках дифференциальной формулировки модифицированных уравнений Фаддеева [4] и правильных граничных условий с учетом процессов полного развала и перераспределения фрагментов, а также определен адиабатический гиперсферический базис для кулоновской задачи трех тел ниже порога развала.

В фундаментальных работах [25, 26] предлагается новое представление УФ, использующее разложение по базису функций Вигнера, которые образуют инвариантные подпространства гамильтониана системы, отвечающие состояниям с фиксированным полным орбитальным моментом. В результате УФ сводятся к конечному набору трехмерных дифференциальных уравнений. Кроме того, на основе метода Фока рассмотрена проблема асимптотик фаддеевских компонент, которые обеспечивают важную информацию о структуре волновой функции вблизи так называемых точек тройного и парного ударов. Подход распространен на случай трех заряженных частиц и может служить математической базой новых вычислительных методов, основанных на соответствующих УФ. Здесь необходимо отметить обстоятельный обзор [27], где предложены методы построения и анализа разложений регулярных решений уравнений Фаддеева и Шредингера вблизи точек тройного и парного ударов, применимые для системы трех частиц с центральными парными взаимодействиями при любых значениях полного углового момента и пространственной четности.

Вообще, следует отметить, что объединение возможностей МГТ и УФ оказалось очень плодотворным с учетом и физического, и математического аспектов проблемы. В [28] с использованием гиперсферических гармоник получены асимптотики трехчастичных волновых функций в пределе малых значений гиперрадиуса, необходимые для аналитических и численных исследований системы трех тождественных частиц с S -волновыми потенциалами. Указан путь обобщения метода на случай нетождественных частиц с учетом спин-изоспиновой зависимости. В [29] предложены метод построения и доказательство существования точных решений задачи трех тождественных частиц, а в [30, 31] обсуждаются и доказываются условия, когда задача трех частиц, рассматриваемая в рамках дифференциальных уравнений Фаддеева и Шредингера с S -волновыми взаимодействиями центробежного типа, имеет точное решение, представимое в виде общего решения уравнения Бесселя и конечной линейной комбинации гипергармоник. На основе метода гипергармоник доказан [32] критерий существования особых ложных решений дифференциальных уравнений Фаддеева, которые, найденные аналитически, можно использовать как эталонные для тестирования алгоритмов численного решения соответствующих уравнений, а в [33] выведены уравнения Фаддеева в представлении полного углового момента и полной пространственной четности, показано, что в случае центрального взаимодействия такие уравнения всегда имеют ложные решения, и предложен способ построения таких решений.

Кроме УФ и МГГ, интенсивно использующихся в задачах нескольких тел, следует также отметить развитый мощный вариационный метод Кона–Хюльтена (МКХ) с использованием разложений по гиперсферическому скоррелированному базису [34–36]. Примером успешного применения подхода с использованием разложений по гиперсферическому скоррелированному базису могут служить также [37–39]. Для задач непрерывного спектра МГГ и МКХ используют одинаковый прием: волновая функция системы нуклонов представляется в виде суммы короткодействующей и асимптотической частей

$$\Psi = \Psi_{\text{int}} + \Psi_{\text{ext}}. \quad (2)$$

Впервые представление (2) было введено и обосновано в [40], где МГГ использовался в задачах непрерывного спектра. Тем самым снималась технически сложная проблема, связанная с необходимостью суммирования большого числа членов ряда по K -гармоникам в двухфрагментном канале $N + d$. Короткодействующая часть Ψ_{int} при этом выражалась через небольшое число низших K -гармоник, а асимптотическая — обычным образом через падающую и рассеянную волны и матрицу столкновений. В МКХ коэффициенты разложения компоненты Ψ_{int} по скоррелированному гиперсферическому базису и фазы рассеяния могут быть найдены после применения вариационной процедуры. Оба метода, МКХ и УФ, дают очень близкие результаты при описании экспериментов по Nd -рассеянию [41–43].

Заметим, что идея разложения по K -гармоникам лишь части полной волновой функции трехчастичной системы, которая соответствует малым расстояниям между всеми ее компонентами, была использована еще и при построении так называемой интерполяционной модели ядра (модель Базя–Жукова) [9]. Эта модель, подтвердившая свою эффективность в конкретных расчетах [44, 45], также берет начало от идеи разделения конфигурационного пространства на «внутреннюю» и «внешнюю» области.

Хотя решение системы связанных двумерных интегральных уравнений Фаддеева, несмотря на существенные сложности, и не представляет собой особой проблемы для современной вычислительной техники при описании трехнуклонных систем, задача может оказаться весьма ресурсоемкой особенно при переходе к рассмотрению систем с большим числом нуклонов. Заметим, что еще в работах Джибути [46–48] указывалось на возможность понижения кратности интегрирования в схеме Фаддеева путем объединения ее с методом гиперсферических функций. Эквивалентность УФ и МГГ была показана ранее, в [49]: использование гиперсферического базиса в разложении волновой функции приводило к одинаковой форме записи конечных уравнений как в УФ, так и при решении трехчастичного уравнения Шредингера. Предложенный в [46–48] «гибридный» метод был основан на использовании разложения фаддеевских компонент в импульсном простран-

стве по трехчастичным гиперсферическим функциям, связанным между собой унитарным преобразованием Рейнала–Реваи [50] (впоследствии в [51, 52] впервые был дан детальный анализ этого преобразования на операторном языке и предложены удобные для вычисления представления коэффициентов Рейнала–Реваи). Описывались связанные состояния тритона и гиперядра ${}_{\Sigma}^9\text{Be}$ [46], а также была рассмотрена задача о непрерывном спектре (реакция двойной перезарядки каонов на ядрах тритона и ${}^3\text{He}$) [47]. В [53] метод K -гармонических разложений был использован для решения интегральных уравнений Фаддеева–Якубовского в импульсном представлении, при описании трех- и четырехчастичных связанных состояний.

Следует отметить, что параллельно с развитием методов описания трехчастичных систем совершенствовались и сопутствующие им численные методы. Так, в [54] была впервые предложена эффективная схема решения уравнений Фаддеева–Нойса для связанного состояния системы трех частиц: алгоритм, основанный на использовании тензорных свойств матрицы, к которой было преобразовано исходное уравнение, позволял на два порядка снизить машинное время по сравнению со стандартными алгоритмами. В результате решение подобных задач стало доступно не только на вычислительных кластерах, но и на обычных персональных компьютерах. Расчетная схема [54] была успешно использована в [55–57] для описания свойств связанного состояния тримера ${}^4\text{He}$. Отметим также эффективные алгоритмы, основанные на модифицированной конечно-разностной аппроксимации типа [58]: так, с их использованием успешно решена задача о связанном состоянии и задача рассеяния в трехатомных системах на основе ${}^4\text{He}$ для потенциалов с твердым кором [59–62], а в [63, 64] для тримера ${}^4\text{He}$ исследован механизм исчезновения и формирования уровней Ефимова. обстоятельный обзор, посвященный использованию кубических сплайн-алгоритмов при решении уравнений Фаддеева в бисферическом базисе, представлен в [65].

В заключение введения еще раз сформулируем основную направленность нашей работы. Настоящая работа посвящена исследованию возможностей метода разложений в быстросходящиеся ряды при решении интегральных уравнений Фаддеева в конфигурационном пространстве. Мы не ставили своей целью охватить весь обширнейший спектр работ по применению уравнений Фаддеева и метода гиперсферических гармоник к задаче трех тел, что, естественно, просто невозможно в рамках одной статьи. Описать соответствующие эксперименты также не было самоцелью. Мы попытались объединить математическую корректность уравнений Фаддеева (пусть и модифицированных) с относительной простотой метода гипергармоник, используя при этом идею о разделении конфигурационного пространства на «внутреннюю» и «внешнюю» области, и именно в задаче с непрерывным спектром (так как для связанного состояния УФ и МГГ неплохо работают каждый в отдельности) опробовать этот подход при обработке экспериментальных данных

с помощью простых двухнуклонных потенциалов, которые давно применяются в качестве тестовых в подобных задачах.

1. РЕДУКЦИЯ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА К СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1. Формализм. Исходим из известных уравнений Фаддеева [1, 4], записанных для системы трех сильно взаимодействующих бесспиновых частиц с одинаковыми массами m , в которой частица 1 рассеивается на частицах 2 и 3, находящихся в связанном состоянии:

$$\begin{aligned}\Psi^{(1)} &= \Phi + G_0(Z)T_{23}(Z)(\Psi^{(2)} + \Psi^{(3)}), \\ \Psi^{(2)} &= G_0(Z)T_{31}(Z)(\Psi^{(3)} + \Psi^{(1)}), \\ \Psi^{(3)} &= G_0(Z)T_{12}(Z)(\Psi^{(1)} + \Psi^{(2)}),\end{aligned}\quad (3)$$

где $\Psi = \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)} + \Psi^{(3)}$ есть полная волновая функция системы; Φ — асимптотическая волновая функция, описывающая инфинитное движение 1-й частицы относительно связанной пары (23); $G_0(Z) = (Z - H_0)^{-1}$ — оператор Грина; $Z = E \pm i0$; E — полная энергия системы 1 + (23); H_0 — оператор кинетической энергии; T_{ij} — двухчастичные операторы перехода, связанные с парными потенциалами V_{ij} ($ij = 12, 23, 31$) при помощи уравнений

$$T_{ij}(Z) = V_{ij} + V_{ij}G_0(Z)T_{ij}(Z). \quad (4)$$

Используя (4) в (3), сложим получившиеся уравнения и получим

$$\Psi = (1 - G_0(Z)V_{23})\Phi + G_0(Z)U\Psi, \quad U = V_{12} + V_{23} + V_{31}. \quad (5)$$

Это уравнение эквивалентно уравнению Шредингера с граничным условием, описывающим асимптотически свободное движение частицы 1 относительно центра масс связанной пары (23). Действительно, если подействовать на уравнение (5) слева оператором G_0^{-1} и учесть, что для данной асимптотики $(H_0 + V_{23} - E)\Phi = 0$, приходим к уравнению Шредингера для Ψ . Таким образом, Ψ удовлетворяет уравнению Шредингера, и, следовательно, (5) не имеет нефизических решений. Кроме того, если выполнить подряд несколько итераций для уравнения (5), то можно убедиться, что на j -й итерации ряд для $\Psi^{(j)}$ не будет содержать слагаемых с некомпактным ядром, за исключением $(G_0V_{23})^{j+1}\Phi$, а это слагаемое, в свою очередь, исчезает на $(j + 1)$ -й итерации и т. д. Таким образом, весь бесконечный ряд для Ψ будет содержать только слагаемые с компактными ядрами. Следовательно, уравнение (5) имеет единственное решение (для него выполняется альтернатива Фредгольма–Фаддеева [4]).

Перепишем уравнение (5) следующим образом:

$$\Psi - \Phi = G_0(Z)U(\Psi - \Phi) + G_0(Z)(V_{12} + V_{31})\Phi, \quad (6)$$

и разложим разность $\Psi - \Phi$ в ряд по K -гармоникам (см. приложение А):

$$\Psi - \Phi = \sum_{K_n} \psi_{K_n}(\rho) u_{K_n}(\Omega). \quad (7)$$

В вышеупомянутых работах по интерполяционному подходу [9, 44, 45], а также в [40, 66] было показано, что интерполяционное выражение $\Psi = \Psi_{\text{int}} + \Psi_{\text{ext}}$ для волновой функции является очень хорошим приближением. При этом разложение Ψ_{int} (что в нашем подходе отвечает разности $\Psi - \Phi$) по гиперсферическим функциям обнаруживает быструю сходимость соответствующего ряда (в отличие от функции Ψ) — обстоятельному доказательству этого посвящен целый раздел в [40], где, в частности, показано, как найти скорость убывания Ψ_{int} с ростом K . Отметим, что для ускорения сходимости разложений по полному базису K -гармоник Эфрос и Смородинский [67–71], а затем Фабр [72, 73] предлагали использовать усеченные базисы K -гармоник, называя их, соответственно, наборами главных и потенциальных гипергармоник.

Подставив разложение (7) в (6) и используя условия ортонормировки и полноты для собственных функций радиальной части оператора H_0 , а также условие ортонормировки для K -гармоник, получим систему одномерных интегральных уравнений для коэффициентов разложения (см. приложение Б)

$$\psi_{K_n}(\rho) = f_{K_n}(\rho) + \lambda \sum_{K'n'} R_{KK'}^{nn'}(\rho, \bar{\rho}) \psi_{K'n'}(\bar{\rho}), \quad (8)$$

где

$$f_{K_n}(\rho) = \int d\bar{\rho} Q_K(\rho, \bar{\rho}) W_{K_n}(\bar{\rho}), \quad (9)$$

$$R_{KK'}^{nn'}(\rho, \bar{\rho}) = \int d\bar{\rho} Q_K(\rho, \bar{\rho}) U_{KK'}^{nn'}(\bar{\rho}) \quad (10)$$

— интегральный оператор. Константа λ в (8) содержит в себе числовые коэффициенты и нуклонную массу m . Функции Q , W и U , стоящие под знаком интеграла в (9), (10), имеют следующий вид:

$$Q_K(\rho, \bar{\rho}) = -(\bar{\rho}^3/\rho^2) \{ I_2(\rho \xi_K(\rho)) K_2(\bar{\rho} \xi_K(\rho)) \Theta(\bar{\rho} - \rho) + I_2(\bar{\rho} \xi_K(\rho)) K_2(\rho \xi_K(\rho)) \Theta(\rho - \bar{\rho}) \}, \quad (11)$$

где

$$\xi_K(\rho) = \sqrt{\frac{K(K+4)}{\rho^2} - \frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad E = E_i - \epsilon, \quad (12)$$

$$W_{Kn}(\bar{\rho}) = \int d\Omega u_{Kn}^*(\Omega)(V_{12}(\bar{\rho}, \Omega) + V_{31}(\bar{\rho}, \Omega)) \Phi(\bar{\rho}, \Omega), \quad (13)$$

$$U_{KK'}^{nn'}(\bar{\rho}) = \int d\Omega u_{Kn}^*(\Omega)U(\bar{\rho}, \Omega) u_{K'n'}(\Omega). \quad (14)$$

Величины I_2 , K_2 в (11) являются модифицированными функциями Бесселя, Θ — функция Хевисайда, а E_i и ϵ в (12) — энергия падающей частицы и энергия связанного состояния в системе трех частиц ($\epsilon > 0$) соответственно. Уравнения (8) имеют самый общий вид и могут быть решены обычными численными методами для произвольного набора K -гармоник. Следует отметить, что в полученных интегральных уравнениях уже заложены необходимые асимптотика и граничные условия, в то время как в случае использования УФ в дифференциальной форме [8] граничные условия необходимо накладывать дополнительно.

Принцип построения уравнений (8) легко обобщить также и на случай зависимости волновой функции Ψ от спина и изоспина нуклонов. В этом случае разность $\Psi - \Phi$ раскладывается по базисным антисимметричным состояниям

$$\Psi - \Phi = \sum_{Kn} \psi_{Kn}(\rho) \Gamma_{Kn}(\Omega; \sigma, \tau). \quad (15)$$

Состояния Γ_{Kn} строятся из гиперсферических функций $u_{Kn}^{[g]}(\Omega)$ с определенным типом перестановочной симметрии $[g]$: $[a]$, $[s]$, $[l]$, $[l']$ (соответственно антисимметричным, симметричным и смешанной симметрии) и спин-изоспиновых функций $\xi_n^{[\bar{g}]}(\sigma, \tau)$ с сопряженной симметрией $[\bar{g}]$: $[s]$, $[a]$, $[l'']$, $[l']$. Так, для системы трех нуклонов с $S = 1/2$, $T = 1/2$ Γ_{Kn} имеет вид [74]

$$\Gamma_{Kn} = u_{Kn}^{[a]} \xi^{[s]} - u_{Kn}^{[s]} \xi^{[a]} + u_{Kn}^{[l]} \xi^{[l'']} - u_{Kn}^{[l'']} \xi^{[l]}. \quad (16)$$

Если же, например, система находится в состоянии с $S = 3/2$, $T = 1/2$ (квартетное Nd -рассеяние), то

$$\Gamma_{Kn} = u_{Kn}^{[l]} \xi^{[l'']} - u_{Kn}^{[l'']} \xi^{[l]}. \quad (17)$$

Методика получения уравнений для радиальных компонент $\psi_{Kn}(\rho)$ аналогична изложенной выше, но с использованием дополнительного соотношения ортогональности для $\xi_n(\sigma, \tau)$:

$$\sum_{\sigma\tau} \xi^{[g]\dagger} \xi^{[g']} = \delta_{gg'}. \quad (18)$$

При этом, конечно, надо еще учесть, что парный потенциал будет содержать матрицы Паули и спин-изоспиновые проекционные операторы.

1.2. Непрерывный спектр: Nd -рассеяние. Не ограничивая общности, рассмотрим вначале случай nd -рассеяния [75–79]. Будем также считать, что нуклон рассеивается дейтроном преимущественно в квартетном состоянии. В разложении (7), (15) ограничимся слагаемыми с $K = 0, 1, 2$, так что система (8) будет содержать 27 K -гармоник $u_{Kn}(\Omega) \equiv u_K^{\ell_x \ell_y LM}(\Omega)$ (\mathbf{x} , \mathbf{y} — координаты Якоби, см. приложение А) [76], т. е. 27 связанных интегральных уравнений для неизвестных функций ψ_{Kn} (по числу наборов Kn [2]). Антисимметричные состояния Γ_{Kn} , соответствующие $S = 3/2$, $T = 1/2$, имеют вид (17).

Для задач рассеяния система (8) в целом будет неоднородной, так как $\Phi \neq 0$. Тем не менее некоторые уравнения, входящие в (8), окажутся однородными: $W_{Kn} = 0$ из-за свойств функций u_{Kn} . В силу основной теоремы Фредгольма [80, 81] эти уравнения имеют только тривиальные решения, поскольку для непрерывного спектра невозможно обеспечить вырожденность матриц соответствующих интегральных операторов (что подтверждается также и непосредственными расчетами). Оставшиеся неоднородные уравнения соответствуют функциям u_0^{0000} , u_1^{0110} , u_2^{0000} , u_2^{2020} и u_2^{0220} . Легко видеть, что наборы их квантовых чисел $\{\ell_x \ell_y LM\}$ представляют собой возможные состояния при рассеянии в системе трех частиц: $\ell_x = 0, 2$ соответствуют связанному состоянию подсистемы (23) — дейтрона, $\ell_y = 0, 1, 2$ — орбитальный момент частицы 1 относительно центра масс пары (23), $L = 0, 2$ — полный орбитальный момент с нулевой проекцией M (значения $M \neq 0$ приводят к $W_{Kn} = 0$ и делают соответствующие уравнения (8) однородными).

Раскладывая разность $\Psi - \Phi$ по базисным состояниям (17) и вычисля матричные элементы от гиперсферических и спин-изоспиновых функций, получим пять уравнений типа (8) для функций ψ_0^{0000} , ψ_1^{0110} , ψ_2^{0000} , ψ_2^{2020} и ψ_2^{0220} . Вид уравнений (9)–(14) при этом останется неизменным, но $V_{ij} = V^{(3,1)}(r_{i,j})$ в (13), (14).

Уравнения (8) были решены численно [78, 79], в качестве волновой функции дейтрона $\varphi_d(\mathbf{x})$, входящей в $\Phi \equiv \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi_d(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{y})$ (\mathbf{k} — импульс нейтрона), использовалась волновая функция Хьюльтена

$$\varphi_d(\mathbf{x}) \equiv \varphi_d(x) = \sqrt{\frac{\alpha\beta(\alpha + \beta)}{2\pi(\beta - \alpha)^2}} \frac{\exp(-\alpha x) - \exp(-\beta x)}{x}, \quad (19)$$

где $\alpha = \sqrt{m\epsilon_d}$, $\epsilon_d = 2,226$ МэВ, $\beta = 5,94\alpha$.

На рис. 1 приведены радиальные зависимости функций ψ_{Kn} , рассчитанные с использованием потенциалов Малфли–Тиона (МТ) [82]

$$\begin{aligned} V_{\text{MTI}}(r) &= (1438,72 e^{-3,11r} - 513,968 e^{-1,55r})/r, \\ V_{\text{MTIII}}(r) &= (1438,72 e^{-3,11r} - 626,885 e^{-1,55r})/r, \end{aligned} \quad (20)$$

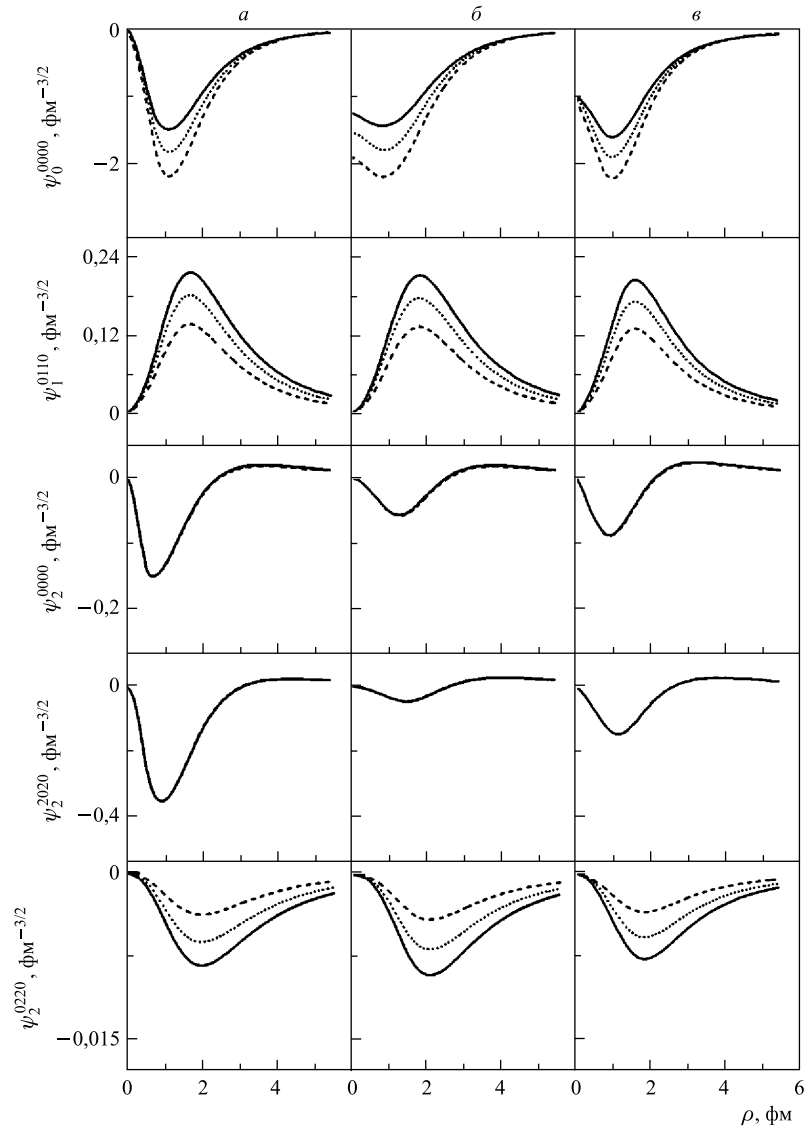


Рис. 1. Радиальные зависимости функций ψ_{Kn} , рассчитанные для потенциалов Малфли–Тиона (а), Волкова (б) и Айкемайера–Хакенбройха (ЕН) (в) при $E_n = 1,5$ МэВ (штриховые кривые), 2,45 МэВ (пунктирные) и 3,27 МэВ (сплошные)

Волкова [83, 84]

$$\begin{aligned} V_t(r) &= 144,86 e^{-(r/0,82)^2} - 83,34 e^{-(r/1,6)^2}, \\ V_s(r) &= 0,63V_t(r) \end{aligned} \quad (21)$$

и Айкемайера–Хакенбройха (ЕН) [85]

$$\begin{aligned} V_t(r) &= 600 e^{-5,5r^2} - 70 e^{-0,5r^2} - 27,6 e^{-0,38r^2}, \\ V_s(r) &= 880 e^{-5,4r^2} - 70 e^{-0,64r^2} - 21 e^{-0,48r^2}, \end{aligned} \quad (22)$$

для энергий падающих нейтронов $E_n = 1,5, 2,45$ и $3,27$ МэВ (в лабораторной системе).

Из анализа поведения кривых, представленных на этом рисунке, следует, что, во-первых, величины ψ_{Kn} слабо зависят от энергии нейтрона в рассмотренном диапазоне ее значений. Во-вторых, максимальные значения ψ_{Kn} для основной K -гармоники ($K = 0$) на порядок и более превышают по абсолютной величине максимальные значения функций ψ_{Kn} для $K = 1$ и $K = 2$.

Фазы nd -рассеяния могут быть определены следующим образом. Представим волновую функцию задачи в виде (2), где

$$\Psi_{\text{int}} = \sum_{Kn} \psi_{Kn}(\rho) u_{Kn}(\Omega) \quad (23)$$

есть решение уравнений Фаддеева (3) в области взаимодействия, Ψ_{ext} — решение уравнения Шредингера в асимптотической области для двухчастичной задачи рассеяния нейтрона на точечном дейтроне с потенциалом $V_{12} + V_{31}$. Разложим теперь Ψ_{ext} в ряд по сферическим функциям [86]:

$$\Psi_{\text{ext}}(\mathbf{y}) = \sum_{\ell m} \psi_{\ell,k}(y) Y_{\ell m}^*(\mathbf{k}/k) Y_{\ell m}(\mathbf{y}/y), \quad (24)$$

где $\psi_{\ell,k}$ — парциальная компонента, описывающая состояние с орбитальным моментом ℓ :

$$\psi_{\ell,k}(y) \simeq j_{\ell}(ky) + (-1)^{\ell+1} \text{tg } \delta_{\ell} n_{\ell}(ky). \quad (25)$$

Здесь $j_{\ell}(kr)$, $n_{\ell}(kr)$ — сферические функции Бесселя и Неймана; δ_{ℓ} — фаза рассеяния, которая может быть определена из условий сшивания решений в асимптотической области $\psi_{\ell,k}$ с соответствующими решениями в области взаимодействия ψ_{Kn} (табл.1). В последней колонке табл.1 приведены также

Таблица 1. Квартетные фазы nd -рассеяния (в градусах)

| E_n , МэВ | ℓ | δ_{ℓ} | | | Данные других авторов |
|-------------|--------|-----------------|--------|-------|-----------------------|
| | | МТ | Волков | ЕН | |
| 2,45 | 0 | -67,4 | -68,1 | -65,9 | -66,7 [87, 88] |
| | 1 | 23,4 | 21,8 | 22,9 | 22,2 [89] |
| | 2 | -3,27 | -3,19 | -3,73 | -3,41 [35] |
| 3,27 | 0 | -74,2 | -74,8 | -72,8 | -73,6 [34, 88] |
| | 1 | 28,1 | 26,7 | 27,8 | 27,3 [90] |
| | 2 | -4,31 | -4,19 | -4,76 | -4,66 [90] |

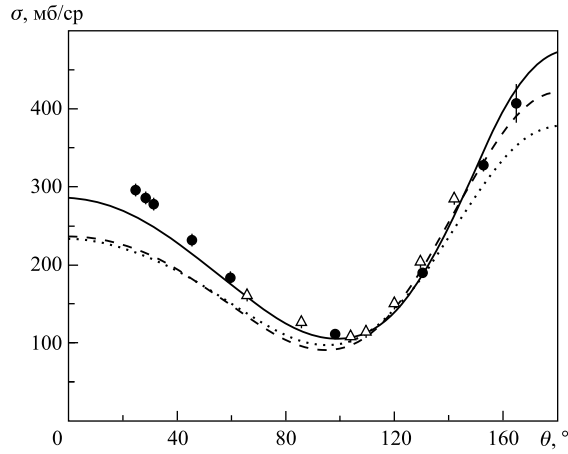


Рис. 2. Дифференциальные сечения nd -рассеяния, рассчитанные для потенциалов Малфли–Тиона (сплошная кривая), Волкова (штриховая) и Айкемайера–Хакенбройха (пунктирная) при $E_n = 2,45$ МэВ. Экспериментальные данные взяты из [91] (●) и [92] (△)

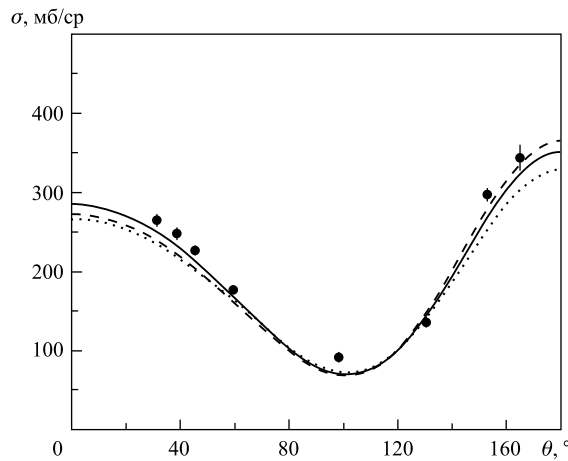


Рис. 3. То же, что и на рис. 2, но для $E_n = 3,27$ МэВ

величины фазовых сдвигов, полученных другими методами для аналогичной задачи.

На рис. 2, 3 представлены угловые зависимости сечений nd -рассеяния, рассчитанные по формуле [86]

$$\sigma(\theta) = \frac{2}{3} |A^{(4)}(\theta)|^2, \quad A^{(4)}(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^2 (2\ell + 1) \exp i\delta_\ell \sin \delta_\ell P_\ell(\cos \theta). \quad (26)$$

Из анализа поведения кривых, представленных на рис. 2, 3, следует, что наилучшее согласие с экспериментальными данными достигается для потенциала Малфли–Тиона (20).

Для того чтобы рассчитать функции ψ_{Kn} с учетом кулоновского взаимодействия (КВ) между протонами, введем экранированный кулоновский потенциал

$$V_C^e(r) = \frac{\alpha e^{-r/R}}{r}, \quad (27)$$

где α — постоянная тонкой структуры; R — радиус экранирования. Эта процедура является стандартной и достаточно широко применяется в подобных задачах. Обозначим заряженные частицы индексами 1, 2 и введем потенциал (27) в выражения (13), (14): $V_{12} \rightarrow V_{12} + V_C^e$. Вычисляя далее функции ψ_{Kn} с разными R , можно таким образом исследовать сходимость соответствующих решений (8).

На рис. 4 в качестве примера представлено семейство рассчитанных зависимостей $\psi_0^{0000}(\rho)$ с радиусами экранирования $R = 1, 2, 10, 20, 100$ фм для потенциала (20) и энергии протонов $E_p = 1,5$ МэВ (в лабораторной системе).

Характер сходимости остальных функций (ψ_1^{0110} , ψ_2^{0000} , ψ_2^{2020} , ψ_2^{0220}) подобен приведенному на рис. 4: решения соответствующих уравнений (8)

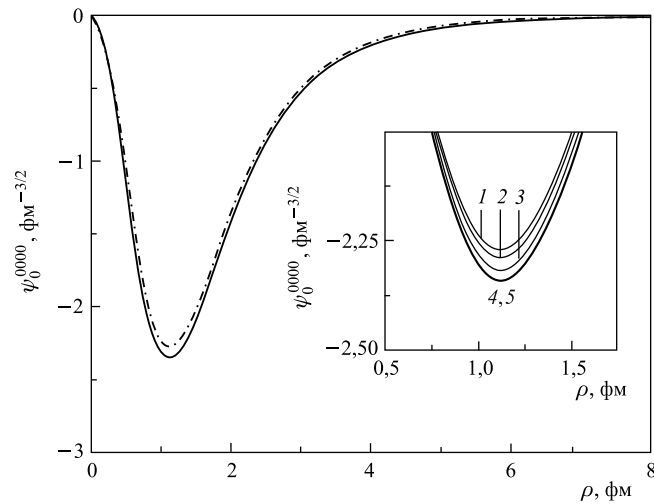


Рис. 4. Рассчитанные с использованием потенциала Малфли–Тиона зависимости $\psi_0^{0000}(\rho)$ для энергии падающих протонов $E_p = 1,5$ МэВ: без учета КВ (штрихпунктирная кривая) и с его учетом (сплошная кривая, радиус экранирования $R = 100$ фм). На вставке в увеличенном масштабе показана окрестность минимума рассчитанных функций с разными R : 1 — 1 фм; 2 — 2 фм; 3 — 10 фм; 4 — 20 фм; 5 — 100 фм

сходятся к решению с $R = 100$ фм (на рисунке видно, что решения с $R = 20$ фм и $R = 100$ фм почти совпадают, — такое поведение характерно также и для решений с использованием потенциалов (21) и (22)).

Таким образом, можно считать, что использование в расчетах потенциала (27) с $R = 100$ фм соответствует учету КВ для данной задачи рассеяния. Из исследования сходимости решений ψ_{Kn} для энергий протонов $E_p = 2,45$ и $3,27$ МэВ также следует, что решения сходятся к ψ_{Kn} с $R = 100$ фм. Заметим, что в [93], где решались уравнения Фаддеева в импульсном представлении для аналогичной задачи pd -рассеяния, было установлено, что при изменении радиуса экранирования в пределах от 100 до 2000 фм рассчитанные величины фаз рассеяния отличаются не более чем на 1%. В [94] при вычислении сечений pd -рассеяния ($E_p = 10$ МэВ) с использованием уравнения Липпмана–Швингера и сепарабельного парижского потенциала PEST 1–6 радиус экранирования также составлял 100 фм, увеличиваясь до 300 фм при расчете поляризационных характеристик.

Для вычисления фаз pd -рассеяния применим процедуру, описанную выше. Представим волновую функцию задачи в виде (2) и разложим Ψ_{ext} в ряд по сферическим функциям (24), причем

$$\psi_{\ell,k}(y) \simeq F_{\ell}(ky) + (-1)^{\ell+1} \text{tg } \delta_{\ell} G_{\ell}(ky), \quad (28)$$

где F_{ℓ} , G_{ℓ} — регулярная и нерегулярная кулоновские функции [86] соответственно. В табл. 2 приведены квартетные фазы pd -рассеяния, найденные из условия сшивания решений Ψ_{ext} с Ψ_{int} , представленного в виде ряда (23).

Таблица 2. Квартетные фазы pd -рассеяния (в градусах)

| E_p , МэВ | ℓ | δ_{ℓ} | | | Данные из [35] |
|-------------|--------|-----------------|--------|-------|----------------|
| | | МТ | Волков | ЕН | |
| 1,5 | 0 | -47,8 | -48,6 | -45,7 | -46,0 |
| | 1 | 16,1 | 14,8 | 15,5 | 15,2 |
| | 2 | -1,28 | -1,21 | -1,67 | -1,59 |
| 2 | 0 | -53,5 | -54,1 | -51,6 | -52,8 |
| | 1 | 19,8 | 18,7 | 19,7 | 19,1 |
| | 2 | -2,22 | -2,11 | -2,45 | -2,37 |

На рис. 5, 6 представлены дифференциальные сечения рассеяния протонов дейтронами, рассчитанные по формуле [86]

$$\sigma(\theta) = \frac{2}{3} |A_R(\theta) + A(\theta)|^2, \quad (29)$$

где θ — угол рассеяния; A_R — резерфордская амплитуда:

$$A_R(\theta) = -\frac{\eta \Gamma(1 + i\eta) \exp(-2i \ln(\sin(\theta/2)))}{2k \Gamma(1 - i\eta) \sin^2(\theta/2)}, \quad (30)$$

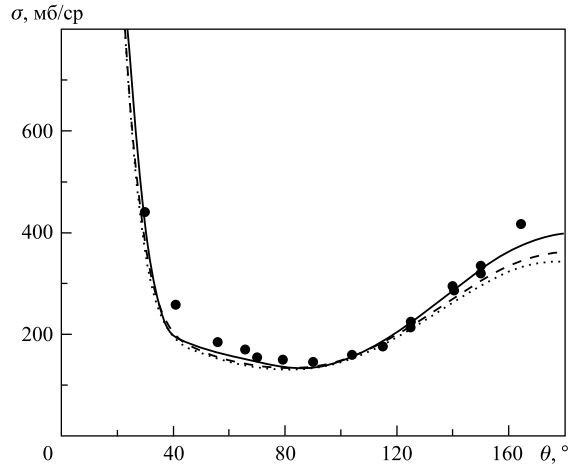


Рис. 5. Дифференциальные сечения pd -рассеяния, рассчитанные для потенциалов Малфли–Тиона (сплошная кривая), Волкова (штриховая) и Айкемайера–Хакенбройха (пунктирная) при $E_p = 1,5$ МэВ. Экспериментальные данные (точки) взяты из [95]

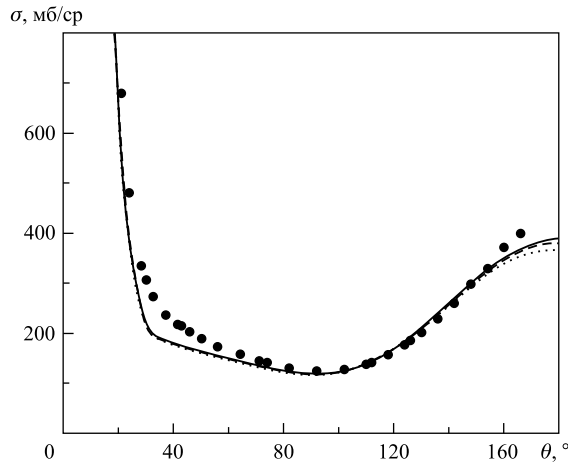


Рис. 6. То же, что и на рис. 5, но для $E_p = 2$ МэВ. Экспериментальные данные (точки) взяты из [96]

$\eta = 2\alpha m / (3k)$ — параметр Зоммерфельда,

$$A(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \exp(i(2\omega_{\ell} + \delta_{\ell})) \sin \delta_{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), \quad (31)$$

$\omega_{\ell} = \arg(\Gamma(\ell + 1 + i\eta))$ — кулоновская фаза.

Характер поведения кривых, представленных на рис. 5, 6, позволяет сделать вывод, что наилучшее согласие с экспериментами, так же как и для nd -рассеяния, достигается для потенциала Малфли–Тиона. Небольшая поправка рассчитанных кривых в окрестности $\theta \simeq 30\text{--}40^\circ$ — результат использования приближения (29): если мы вычисляем сечения по этой формуле, то пренебрегаем некоторой небольшой областью углов, в которой, строго говоря, полная амплитуда не равна просто сумме A_R и A .

Согласие с экспериментами по Nd -рассеянию можно было бы, на наш взгляд, улучшить, если дополнительно учесть дублетную компоненту амплитуды $A^{(2)}$. Как показано в [90], учет $A^{(2)}$ приводит к некоторому увеличению значений $\sigma(\theta)$ в области малых и больших величин углов рассеяния.

Таким образом, предложенный нами метод расчета сечений нуклон-дейтронного рассеяния с простыми моделями NN -взаимодействия позволяет достичь удовлетворительного согласия с соответствующими экспериментальными сечениями при допороговых значениях энергии падающей частицы. Представив полную волновую функцию системы Ψ как сумму ее асимптотической части Φ и части, которая описывает трехнуклонную систему в области взаимодействия, мы свели задачу о нахождении Ψ к системе одномерных интегральных уравнений, решение которой не требует значительных затрат машинного времени. Поэтому к несомненным достоинствам метода следует отнести его относительную простоту и быстроедействие по сравнению с традиционными методами, основанными на непосредственном численном решении двумерных интегральных уравнений в импульсном представлении. С другой стороны, метод является приближенным, так как для практических целей машинного счета ряд (7) необходимо оборвать: количество интегральных уравнений в нем нарастает лавинообразно — если для $K_{\max} = 2$ система (8) содержит 27 уравнений, то для $K_{\max} = 4$ уже 182. И, несмотря на то, что большинство этих уравнений имеет тривиальное решение, необходимость отсеять их ведет к чрезмерному увеличению объема выкладок «вручную» (и, разумеется, программного кода). И все же предложенный метод представляется нам перспективным, поскольку позволяет изучать состояния непрерывного спектра в любых трехчастичных системах (например, $\Lambda + d$, $\alpha + d$ и т. п.), если известны их парные потенциалы взаимодействия. Его можно также обобщить и на системы с числом частиц, большим трех [48].

1.3. Система трех несвязанных взаимодействующих частиц. Кратко остановимся на вопросе инфинитного движения всех трех частиц. Соответствующие уравнения Фаддеева имеют вид [1, 97]

$$\begin{aligned}\Psi_{123}^{(1)} &= \Phi_{1(23)} - \Phi_{123} + G_0(Z)T_{23}(Z)(\Psi_{123}^{(2)} + \Psi_{123}^{(3)}), \\ \Psi_{123}^{(2)} &= \Phi_{2(31)} - \Phi_{123} + G_0(Z)T_{31}(Z)(\Psi_{123}^{(3)} + \Psi_{123}^{(1)}), \\ \Psi_{123}^{(3)} &= \Phi_{3(12)} - \Phi_{123} + G_0(Z)T_{12}(Z)(\Psi_{123}^{(1)} + \Psi_{123}^{(2)}),\end{aligned}\tag{32}$$

где $\Psi_{123} = \Phi_{123} + \Psi_{123}^{(1)} + \Psi_{123}^{(2)} + \Psi_{123}^{(3)}$ — полная волновая функция системы. Здесь $\Phi_{123} = \exp(i\mathbf{p}_1\boldsymbol{\rho}_1 + i\mathbf{k}_{23}\mathbf{r}_{23})$ — асимптотическая волновая функция инфинитного движения трех частиц, она является инвариантной относительно замены координат Якоби, а $\Phi_{i(jk)}$ отличаются от Φ_{123} учетом взаимодействия между частицами j и k , т. е. $\Phi_{i(jk)} = \exp(i\mathbf{p}_i\boldsymbol{\rho}_i)\varphi_{\mathbf{k}_{jk}}(\mathbf{r}_{jk})$, где $\varphi_{\mathbf{k}_{jk}}(\mathbf{r}_{jk})$ — решение уравнения $(-\Delta_{jk}/(2\mu_{jk}) + V_{jk} - E_{jk})\varphi_{\mathbf{k}_{jk}}(\mathbf{r}_{jk}) = 0$ для положительных значений энергии относительного движения $E_{jk} = k_{jk}^2/(2\mu_{jk}) > 0$, которое на бесконечности имеет вид суммы плоской волны и расходящейся (или сходящейся) сферической волны. При этом разность $\Phi_{i(jk)} - \Phi_{123}$, как нетрудно убедиться, является расходящейся (сходящейся) волной для больших значений относительной координаты r_{jk} .

Используя процедуру, изложенную в п. 1.1, в первом приближении разложения по гиперсферическим гармоникам получим одномерное интегральное уравнение относительно $\psi_{123}(\rho)$ [98]:

$$\begin{aligned} \psi_{123}(\rho) = \pi m \rho^{-2} \int_0^\infty d\rho' \rho'^3 \left\{ \psi_{123}(\rho') \bar{U} + \pi^{3/2} \left[\overline{(\Phi_{2(31)} + \Phi_{3(12)})V_{23}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \overline{(\Phi_{3(12)} + \Phi_{1(23)})V_{31}} + \overline{(\Phi_{1(23)} + \Phi_{2(31)})V_{12}} - 2\overline{\Phi_{123}U} \right] \right\} P_\pm(k_0, \rho, \rho'), \end{aligned} \quad (33)$$

где $\psi_{123}(\rho)$ — коэффициенты разложения по K -гармоникам (радиальные функции), U определяется уравнением (5) и введено обозначение

$$\bar{A} \equiv \int \frac{d\Omega}{\pi^3} A. \quad (34)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} P_\pm(k_0, \rho, \rho') = \\ = \mp i [J_2(k_0\rho)H_2^{(1,2)}(k_0\rho')\Theta(\rho' - \rho) + J_2(k_0\rho')H_2^{(1,2)}(k_0\rho)\Theta(\rho - \rho')], \end{aligned} \quad (35)$$

где $k_0 = \sqrt{2Em}$, $H_2^{(1,2)}$ — функции Ханкеля. Присутствующее в (33) интегрирование по углам (34) можно частично выполнить аналитически:

$$\bar{V}_{ij} = \frac{16}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta \cos^2 \theta V_{ij}(\alpha_{ij} \rho' \cos \theta), \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \overline{\Phi_{123}V_{ij}} = \frac{16}{\pi \alpha_{ij} \beta_k p_k \rho'^2} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos \theta V_{ij}(\alpha_{ij} \rho' \cos \theta) \times \\ \times \sin(\alpha_{ij} k_{ij} \rho' \cos \theta) \sin(\beta_k p_k \rho' \sin \theta), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\overline{\Phi_{i(jk)} V_{ij, ki}} = \frac{1}{\pi^3} \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2 \theta \cos^2 \theta \int_0^\pi d\theta_x \sin \theta_x \varphi_{\mathbf{k}_{jk}}(\mathbf{r}_{jk}) \times \\ \times \int_0^\pi d\theta_y \sin \theta_y \int_0^{2\pi} d\phi_x \int_0^{2\pi} d\phi_y \exp(i\beta_i p_i \rho' \sin \theta \cos \theta_{py}) V_{ij, ki}(|\mathbf{r}_{ij, ki}|), \quad (38)$$

где

$$|\mathbf{r}_{ij, ki}| = \\ = \rho' \sqrt{\frac{m}{m_j + m_k} \left(\frac{m_{k,j}}{m_{j,k}} \cos^2 \theta + \frac{M}{m_i} \sin^2 \theta \mp 2 \sqrt{\frac{m_{k,j} M}{m_i m_{j,k}}} \sin \theta \cos \theta \cos \theta_{xy} \right)}, \\ \cos \theta_{xy} = \cos \theta_x \cos \theta_y + \sin \theta_x \sin \theta_y \cos(\phi_x - \phi_y), \\ \cos \theta_{py} = \cos \theta_p \cos \theta_y + \sin \theta_p \sin \theta_y \cos \phi_y, \\ \alpha_{ij} = \sqrt{\frac{m(m_i + m_j)}{m_i m_j}}, \quad \beta_i = \sqrt{\frac{mM}{m_i(m_j + m_k)}},$$

m_i — масса i -й частицы, $M = m_1 + m_2 + m_3$.

2. МОДИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА ПРИ НАЛИЧИИ КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В п. 1.2 мы рассмотрели вариант приближенного учета КВ: введение экранированного потенциала (27) в полученные ранее уравнения (8)–(14) дало нам возможность решить задачу о рассеянии протонов дейтронами. Заметим, что если потенциал Кулона вводить непосредственно в исходную систему (3), то УФ оказываются неразрешимыми ввиду возникающих сингулярностей в ядрах интегральных уравнений. Попытки модифицировать УФ с целью учета КВ осуществлялись в ряде работ (см., например, [99–104]). Один из алгоритмов учета КВ выглядел следующим образом. Из уравнений типа Фаддеева, содержащих КВ, выделялась главная кулоновская особенность, и возникающий при этом как остаток эффективный ядерно-кулоновский потенциал хотя и не был таким же короткодействующим, как исходный потенциал чисто ядерного взаимодействия, но убывал с увеличением расстояния между нуклонами гораздо быстрее потенциала Кулона.

В настоящем разделе мы также выделим сначала из УФ главную кулоновскую часть и, разложив сложный ядерно-кулоновский остаток волновой

функции в ряд по произведениям сферических функций, сформулируем уравнения для неизвестных коэффициентов разложения (радиальных функций) двух (из шести) относительных переменных, имеющих размерность длины. Кроме развитой общей теории мы также подробно остановимся на главном приближении для нулевых значений двух относительных орбитальных моментов ℓ_1 и ℓ_2 . Конечно, для более точного результата необходимо было бы оставить в разложениях большее число слагаемых. Так что результат в приближении $\ell_1 = \ell_2 = 0$ при учете КВ будет в основном лишь оценочным, качественным. Точность расчетов все же можно повысить, но тогда задача становится более громоздкой.

Полученная в [102] переформулированная система уравнений с учетом КВ содержит эффективные (ядерно-кулоновские) потенциалы уже с конечным радиусом взаимодействия, поэтому будем исходить из результатов этих работ и пользоваться в основном их обозначениями.

Полную волновую функцию Ψ системы трех частиц для случая рассеяния заряженной частицы 1 на связанной системе двух других частиц, заряженной 2 и нейтральной 3, можно записать в виде [102]

$$\Psi = (1 + G_0 T_{12}^C)(\Psi^{(12)} + \Psi^{(23)} + \Psi^{(31)}), \quad (39)$$

где три компоненты $\Psi^{(ij)}$ (здесь и далее: $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$) удовлетворяют системе связанных уравнений

$$\begin{aligned} \Psi^{(23)} &= \Phi^{(23)} + G_0 \tilde{T}_{23}^N (1 + G_0 T_{12}^C)(\Psi^{(12)} + \Psi^{(31)}), \\ \Psi^{(31)} &= G_0 \tilde{T}_{31}^N (1 + G_0 T_{12}^C)(\Psi^{(12)} + \Psi^{(23)}), \\ \Psi^{(12)} &= G_0 \tilde{T}_{12}^N (1 + G_0 T_{12}^C)(\Psi^{(23)} + \Psi^{(31)}), \end{aligned} \quad (40)$$

где «свободный» член $\Phi^{(23)}$ определяется независимым интегральным уравнением для системы тех же трех частиц с «урезанным» потенциалом взаимодействия, являющимся суммой ядерного потенциала $V_{23}^N \equiv V_{23}$ между частицами 2 и 3 и кулоновского потенциала V_{12}^C между частицами 1 и 2:

$$\Phi^{(23)} = \Phi_{23} + G_0 T_{23}^N G_0 T_{12}^C \Phi^{(23)}. \quad (41)$$

Здесь Φ_{23} — «начальная» волновая функция, представляемая в виде произведения волновой функции $\varphi(1, 23)$ относительного движения частицы 1 и системы (23) (плоская волна) и $\psi_{\epsilon_{23}}(23)$ — внутренней волновой функции системы частиц 2 и 3 в связанном состоянии (ϵ_{23} — соответствующая энергия связи системы двух частиц):

$$\Phi_{23} = \varphi(1, 23) \psi_{\epsilon_{23}}(23). \quad (42)$$

Напомним определения операторов [102], входящих в уравнения (40), (41): $T_{12}^C \equiv T_{12}^C(Z)$ — двухчастичный кулоновский оператор перехода, удовлетворяющий операторному уравнению $T_{12}^C = V_{12}^C(1 + G_0 T_{12}^C)$; $\tilde{T}_{ij}^N \equiv$

$\tilde{T}_{ij}^N(Z)$ — двухчастичные ядерно-кулоновские операторы, удовлетворяющие уравнению $\tilde{T}_{ij}^N = V_{ij}(1 + G_{12}^C \tilde{T}_{ij}^N)$; $G_{12}^C \equiv G_{12}^C(Z) = G_0(1 + T_{12}^C G_0) \equiv (1 + G_0 T_{12}^C)G_0$ — кулоновская функция (оператор Грина) для системы трех частиц, две из которых, 1 и 2, заряжены. Для дальнейших преобразований и общего исследования нам еще понадобятся более простые, чем \tilde{T}_{ij}^N , двухчастичные операторы перехода $T_{ij}^N \equiv T_{ij}^N(Z)$, удовлетворяющие уравнениям $T_{ij}^N = V_{ij}(1 + G_0 T_{ij}^N)$ и связанные только с ядерными потенциалами взаимодействия V_{ij} . С этими операторами уравнения для операторов \tilde{T}_{ij}^N можно записать еще и в виде $\tilde{T}_{ij}^N = T_{ij}^N [1 + (G_{12}^C - G_0) \tilde{T}_{ij}^N]$. При $V_{12}^C \rightarrow 0$ будем, очевидно, иметь $T_{12}^C \rightarrow 0$, $G_{12}^C \rightarrow G_0$, $\tilde{T}_{ij}^N \rightarrow T_{ij}^N$, $\Phi^{(23)} \rightarrow \Phi_{23}$.

2.1. Переформулировка уравнений движения. Система уравнений (39), (40) для полной волновой функции Ψ трехчастичной системы с двумя заряженными частицами является весьма сложной и для общего исследования, и для численных расчетов (равно как и уравнение (41), решение которого необходимо для нахождения функции Ψ и представляет собой отдельную задачу). Поэтому вначале мы эти уравнения преобразуем к более удобному для численного решения виду, упрощая, прежде всего, входящие в них сложные операторы и избавляясь от части таких операторов [105].

Подставив, например, во второе уравнение (40) вместо оператора \tilde{T}_{31}^N сумму $V_{31} + V_{31} G_{12}^C \tilde{T}_{31}^N$ и воспользовавшись определением G_{12}^C , получим

$$\begin{aligned}
 \Psi^{(31)} = & G_0 V_{31} (1 + G_0 T_{12}^C) (\Psi^{(12)} + \Psi^{(23)}) + \\
 & + G_0 V_{31} (1 + G_0 T_{12}^C) [G_0 \tilde{T}_{31}^N (1 + G_0 T_{12}^C) (\Psi^{(12)} + \Psi^{(23)})]. \quad (43)
 \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках есть не что иное, как компонента $\Psi^{(31)}$, поэтому с учетом (39) уравнение (43) значительно упростится:

$$\Psi^{(31)} = G_0 V_{31} \Psi, \quad (44)$$

где в правой части уже имеем искомую волновую функцию Ψ . Аналогичным образом избавимся от операторов \tilde{T}_{12}^N и \tilde{T}_{23}^N в остальных уравнениях системы (40):

$$\Psi^{(12)} = G_0 V_{12} \Psi, \quad (45)$$

$$\Psi^{(23)} - \Phi^{(23)} = G_0 V_{23} [\Psi - (1 + G_0 T_{12}^C) \Phi^{(23)}]. \quad (46)$$

Подействуем теперь на левые и правые части уравнений (44)–(46) кулоновским оператором $(1 + G_0 T_{12}^C)$. Сложив получившиеся уравнения, с учетом (39) и определения G_{12}^C получим одно уравнение для полной волновой функции Ψ :

$$\begin{aligned}
 \Psi - (1 + G_0 T_{12}^C) \Phi^{(23)} = & G_{12}^C U [\Psi - (1 + G_0 T_{12}^C) \Phi^{(23)}] + \\
 & + G_{12}^C (V_{31} + V_{12}) (1 + G_0 T_{12}^C) \Phi^{(23)}. \quad (47)
 \end{aligned}$$

Функция $\Phi^{(23)}$, входящая в (47), является, как и Ψ , неизвестной, и далее мы покажем, как ее можно найти, исследуя уравнение (41). Но сначала предложим метод нахождения Ψ из уравнения (47), считая $\Phi^{(23)}$ известной, т. е. уже найденной из (41).

Очевидно, в (47) вместо $\Phi^{(23)}$ удобнее ввести функцию

$$\chi^{(23)} = (1 + G_0 T_{12}^C) \Phi^{(23)}. \quad (48)$$

Эта новая функция имеет простой физический смысл. Если переписать уравнение (47) как

$$\Psi - \chi^{(23)} = G_{12}^C U (\Psi - \chi^{(23)}) + G_{12}^C (V_{31} + V_{12}) \chi^{(23)}, \quad (49)$$

то видно, что при «отключении» ядерных взаимодействий частицы 1 с двумя остальными (т. е. при $V_{12} = V_{31} = 0$) решением получающегося уравнения

$$\Psi - \chi^{(23)} = G_{12}^C V_{23} (\Psi - \chi^{(23)}) \quad (50)$$

будет функция $\Psi = \chi^{(23)}$. Это видно также и из исходных уравнений (39) и (40), так как при этом

$$\Psi^{(31)} = \Psi^{(12)} = 0, \quad \Psi^{(23)} = \Phi^{(23)} \quad \text{и} \quad \Psi = (1 + G_0 T_{12}^C) \Psi^{(23)} = \chi^{(23)}.$$

Таким же образом преобразуем уравнение (41), избавившись одновременно от сложного оператора T_{23}^N . Заметим еще, что уравнение (41) в отличие от (47) не зависит от ядерных потенциалов V_{12} и V_{31} , так как от них не зависят известная функция Φ_{23} и все операторы, входящие в (41), как и оператор G_{12}^C . Поэтому функции $\Phi^{(23)}$ и $\chi^{(23)}$ также не зависят от потенциалов V_{12} и V_{31} и не меняются, если последние занулить.

Используя уравнение для оператора T_{23}^N , запишем уравнение (41) в виде

$$\Phi^{(23)} = \Phi_{23} + G_0 V_{23} G_0 T_{12}^C \Phi^{(23)} + G_0 V_{23} [G_0 T_{23}^N G_0 T_{12}^C \Phi^{(23)}] \quad (51)$$

и заметим, что выражение в квадратных скобках согласно (41) есть разность $\Phi^{(23)} - \Phi_{23}$. Действуя слева на полученное уравнение

$$\Phi^{(23)} = (1 - G_0 V_{23}) \Phi_{23} + G_0 V_{23} (1 + G_0 T_{12}^C) \Phi^{(23)} \quad (52)$$

оператором $1 + G_0 T_{12}^C$, используя (48), вводя оператор G_{12}^C и определяя функцию (аналог Φ_{23})

$$\chi^C = (1 + G_0 T_{12}^C) (1 - G_0 V_{23}) \Phi_{23}, \quad (53)$$

для функции $\chi^{(23)}$ окончательно получим уравнение

$$\chi^{(23)} = \chi^C + G_{12}^C V_{23} \chi^{(23)}. \quad (54)$$

В этом уравнении все, кроме функции $\chi^{(23)}$, считается известным.

Далее будем исходить из преобразованных уравнений (49) и (54), но для обоснования некоторых утверждений нам также понадобятся и первоначальные уравнения (39)–(41).

2.2. Разложение в быстросходящиеся ряды. Из уравнений (39), (40), содержащих кроме короткодействующих ядерных потенциалов V_{ij} также и далекодействующий кулоновский потенциал V_{12}^C , тем не менее следует, что отдельные части полной волновой функции, а именно $\Psi^{(23)} - \Phi^{(23)}$, $\Psi^{(31)}$, $\Psi^{(12)}$ и разность $\Psi - (1 + G_0 T_{12}^C) \Phi^{(23)} = \Psi - \chi^{(23)}$, можно разложить в быстросходящиеся ряды по K -гармоникам. Этого, однако, нельзя сделать для разности $\Phi^{(23)} - \Phi_{23}$ ввиду далекодействия потенциала V_{12}^C , что непосредственно видно из (41). Поэтому остановимся пока на разложении разности $\Psi - \chi^{(23)}$.

Несмотря на возможность разложения $\Psi - \chi^{(23)}$ в ряд по гиперсферическому базису (подобно тому, как это было сделано в предыдущем разделе), в настоящем случае это выполнить крайне неудобно из-за наличия в полном гамильтониане потенциала V_{12}^C . Поэтому рациональным здесь будет выбор следующих переменных: двух размерных переменных длины $r = |\mathbf{r}|$ и $\rho = |\boldsymbol{\rho}|$ и двух пар соответствующих углов $\Omega_1 \equiv (\theta_1, \varphi_1)$ и $\Omega_2 \equiv (\theta_2, \varphi_2)$, определяющих ориентации двух трехмерных векторов $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_3 - (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2)/(m_1 + m_2)$, где \mathbf{r}_j и m_j — радиус-вектор и масса j -й частицы. Рациональность такого выбора переменных объясняется тем, что в этом случае кулоновский потенциал будет зависеть только от одной переменной: $V_{12}^C \equiv V_{12}^C(r)$. Разложим теперь разность $\Psi - \chi^{(23)}$ в ряд по произведениям сферических функций:

$$\Psi - \chi^{(23)} = \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \psi_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}(r, \rho) Y_{\ell_1 m_1}(\Omega_1) Y_{\ell_2 m_2}(\Omega_2), \quad (55)$$

который, как и ряд по K -гармоникам, будет быстросходящимся, поскольку при $r \rightarrow \infty$ и $\rho \rightarrow \infty$ разность $\Psi - \chi^{(23)}$ и все радиальные функции $\psi_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}(r, \rho)$ быстро стремятся к нулю.

Подставим разложение (55) в (49) и умножим получившееся уравнение на $Y_{\ell'_1 m'_1}^*(\Omega_1) Y_{\ell'_2 m'_2}^*(\Omega_2)$, интегрируя его далее по угловым переменным Ω_1 и Ω_2 , получим бесконечную систему связанных уравнений для радиальных функций $\psi_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}(r, \rho)$. Приведем здесь только результат для $\ell'_1 = m'_1 = 0$ и $\ell'_2 = m'_2 = 0$, которым будем пользоваться ниже, вводя для краткости обозначение $\psi_{00,00}(r, \rho) = \psi(r, \rho)$:

$$\begin{aligned} \psi(r, \rho) &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 G_{12}^C U \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \psi_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}(r, \rho) Y_{\ell_1 m_1}(\Omega_1) Y_{\ell_2 m_2}(\Omega_2) + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 G_{12}^C (V_{31} + V_{12}) \chi^{(23)}. \quad (56) \end{aligned}$$

Неизвестная функция $\chi^{(23)}$ в (56) до сих пор считалась заданной. Для ее нахождения введем теперь асимптотическую функцию χ_{23} , которую можно

получить из $\chi^{(23)}$ при условии $r \rightarrow \infty$ и которая будет равна произведению известной волновой функции связанного состояния частиц 2 и 3 $\psi_{\epsilon_{23}}(23)$ и функции $\varphi^C(1, 23)$ относительного движения связанной системы (23) и заряженной частицы 1. Функция $\varphi^C(1, 23)$ определяется согласно [106] следующим образом:

$$\varphi^C(1, 23) = \varphi(1, 23) \exp \{i\eta_{12} \ln(k_{12}r - \mathbf{k}_{12}\mathbf{r})\}, \quad k_{12} = |\mathbf{k}_{12}|, \quad (57)$$

где η_{12} — параметр Зоммерфельда; \mathbf{k}_{12} — относительный импульс частиц 1 и 2 на бесконечности. Функция (57) переходит в плоскую волну $\varphi(1, 23)$ при $V_{12}^C \rightarrow 0$. Таким образом, функция $\chi_{23} = \varphi^C(1, 23) \psi_{\epsilon_{23}}(23)$ считается известной, как и $\Phi_{23} = \varphi(1, 23) \psi_{\epsilon_{23}}(23)$.

В то время как разность $\Phi^{(23)} - \Phi_{23}$ не разлагается в быстросходящийся ряд по полному набору угловых функций, разность $\chi^{(23)} - \chi_{23}$ можно разложить, как и $\Psi - \chi^{(23)}$:

$$\chi^{(23)} - \chi_{23} = \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} \chi_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}(r, \rho) Y_{\ell_1 m_1}(\Omega_1) Y_{\ell_2 m_2}(\Omega_2). \quad (58)$$

Чтобы получить уравнения для радиальных функций $\chi_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}(r, \rho)$, можно поступить таким же образом, как и при составлении уравнений для функций $\psi_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}(r, \rho)$, используя аналог уравнения (49) для функции $\chi^{(23)}$:

$$\chi^{(23)} - \chi_{23} = G_{12}^C V_{23} (\chi^{(23)} - \chi_{23}) + G_{12}^C V_{23} \chi_{23} + \chi^C - \chi_{23}, \quad (59)$$

что непосредственно следует из (54).

2.3. Уравнения для радиальных функций в случае $\ell_1 = \ell_2 = 0$. Не ограничивая общности, рассмотрим в качестве примера простейшее уравнение для радиальных функций (56), входящее в бесконечную систему связанных интегральных уравнений.

Прежде всего рассмотрим типичный общий четырехкратный интеграл по угловым переменным, присутствующий в исследуемых уравнениях:

$$J(r, \rho) = \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 G_{12}^C f(r, \rho, \Omega_1, \Omega_2), \quad (60)$$

где $f(r, \rho, \Omega_1, \Omega_2)$ — пока произвольная функция, а G_{12}^C — кулоновская функция Грина, входящая в (56):

$$\begin{aligned} G_{12}^C &\equiv (E + i0 - H_0 - V_{12}^C)^{-1} = \left(E + i0 + \frac{\hbar^2}{2\mu_{12}} \Delta_r + \frac{\hbar^2}{2\mu_{3(12)}} \Delta_\rho - V_{12}^C \right)^{-1} = \\ &= \left(E + i0 - T_r - \frac{\hbar^2 \ell_r^2}{2\mu_{12} r^2} - T_\rho - \frac{\hbar^2 \ell_\rho^2}{2\mu_{3(12)} \rho^2} - V_{12}^C \right)^{-1}, \quad (61) \end{aligned}$$

$$T_r = -\frac{1}{2\mu_{12}r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad T_\rho = -\frac{1}{2\mu_{3(12)}\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right), \quad (62)$$

где $\mu_{12} = m_1 m_2 / m_{12}$ и $\mu_{3(12)} = m_3 m_{12} / (m_3 + m_{12})$ — приведенные массы, $m_{12} = m_1 + m_2$. Разложим теперь $f(r, \rho, \Omega_1, \Omega_2)$ в ряд по произведениям сферических функций

$$f(r, \rho, \Omega_1, \Omega_2) = \sum_{\ell_1 m_1} \sum_{\ell_2 m_2} f_{\ell_1 m_1, \ell_2 m_2}(r, \rho) Y_{\ell_1 m_1}(\Omega_1) Y_{\ell_2 m_2}(\Omega_2) \quad (63)$$

и подставим соотношения (61)–(63) в (60):

$$J(r, \rho) = 4\pi G_{12}^C(r, \rho) f_{00,00}(r, \rho), \quad (64)$$

где $G_{12}^C(r, \rho)$ — «укороченная» кулоновская функция Грина

$$G_{12}^C(r, \rho) = (E + i0 - T_r - T_\rho - V_{12}^C)^{-1}, \quad (65)$$

а функция $f_{00,00}(r, \rho)$ определяется согласно (63) выражением

$$f_{00,00}(r, \rho) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 f(r, \rho, \Omega_1, \Omega_2). \quad (66)$$

Поскольку в бесконечный быстросходящийся ряд в (56) основной вклад вносит слагаемое с $\ell_1 = m_1 = 0$ и $\ell_2 = m_2 = 0$, мы и рассмотрим этот простейший случай. Используя соотношения (64)–(66), из (56) получим линейное неоднородное интегральное уравнение для $\psi(r, \rho)$:

$$\begin{aligned} \psi(r, \rho) = & \frac{1}{(4\pi)^2} G_{12}^C(r, \rho) \psi(r, \rho) \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 U + \\ & + \frac{1}{4\pi} G_{12}^C(r, \rho) \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 (V_{31} + V_{12}) \chi^{(23)}. \end{aligned} \quad (67)$$

Аналогичным образом можно получить, используя (58) и (59), интегральное уравнение для радиальной функции $\chi(r, \rho) = \chi_{00,00}(r, \rho)$:

$$\begin{aligned} \chi(r, \rho) = & \frac{1}{(4\pi)^2} G_{12}^C(r, \rho) \chi(r, \rho) \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 V_{23} + \\ & + \frac{1}{4\pi} G_{12}^C(r, \rho) \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 [V_{23} \chi_{23} + (G_{12}^C)^{-1} (\chi^C - \chi_{23})]. \end{aligned} \quad (68)$$

Поскольку уравнение (68) содержит только одну неизвестную функцию $\chi(r, \rho)$, целесообразно сначала решить именно это уравнение, которое запишем в краткой форме:

$$\chi(r, \rho) = G_{12}^C(r, \rho) \chi(r, \rho) \bar{V}_{23} + X(r, \rho), \quad (69)$$

где

$$\bar{V}_{23} \equiv \bar{V}_{23}(r, \rho) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int d\Omega_1 \int d\Omega_2 V_{23}(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|)$$

и $X(r, \rho)$ (второе слагаемое в правой части (68)) — известные функции.

Введем собственные функции операторов $T_r + V_{12}^C(r)$ и T_ρ [106]

$$\varphi_{k_{12}}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k_{12} \exp\left[ik_{12}r - \frac{\pi\eta_{12}}{2}\right] \left(\frac{\pi\eta_{12}}{\text{sh}(\pi\eta_{12})}\right)^{1/2} F(1 + i\eta_{12}, 2, -2ik_{12}r),$$

(70)

$$\varphi_{k_{3(12)}}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(k_{3(12)}\rho)}{\rho},$$

где $k_{3(12)}$ — волновое число относительного движения частицы 3 и системы (12). Используя ортонормировку и полноту этих функций, интегральное уравнение (69) для $\chi(r, \rho)$ согласно (64)–(66) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \chi(r, \rho) - X(r, \rho) = & \int_0^\infty dr' r'^2 \int_0^\infty d\rho' \rho'^2 \chi(r', \rho') \bar{V}_{23}(r', \rho') \times \\ & \times \int_0^\infty dq \varphi_q^*(r') \varphi_q(r) \int_0^\infty d\kappa \frac{\varphi_\kappa^*(\rho') \varphi_\kappa(\rho)}{Z - \left(\frac{\hbar^2 q^2}{2\mu_{12}} + \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2\mu_{3(12)}}\right)}. \end{aligned} \quad (71)$$

Интеграл по $d\kappa$ в (71) можно представить в форме интеграла с бесконечными пределами и, используя теорему о вычетах и функции Хевисайда, вычислить его в явном виде:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\rho\rho'} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty d\kappa \frac{\sin(\kappa\rho') \sin(\kappa\rho)}{E + i0 - \left(\frac{\hbar^2 q^2}{2\mu_{12}} + \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2\mu_{3(12)}}\right)} = \\ = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\rho\rho'} [R_+(q)\Theta(b_q) + R_-(q)\Theta(-b_q)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_\pm(q) = -\frac{\pi\mu_{3(12)}}{\hbar^2\sqrt{b_q}} [\exp(\pm i\sqrt{b_q}\rho) \sin(\sqrt{b_q}\rho')\Theta(\rho - \rho') + \\ + \exp(\pm i\sqrt{b_q}\rho') \sin(\sqrt{b_q}\rho)\Theta(\rho' - \rho)], \end{aligned}$$

$$b_q = \frac{2\mu_{3(12)}}{\hbar^2} \left(E - \frac{\hbar^2 q^2}{2\mu_{12}}\right).$$

После нахождения функции $\chi(r, \rho)$ и подстановки ее в (67) можно аналогичным образом преобразовать и интегральное уравнение (67) для функции $\psi(r, \rho)$.

2.4. Выводы. Подведем итоги изложенного в этом разделе.

1. Полученная ранее система связанных интегральных уравнений для отдельных частей полной волновой функции Ψ системы трех сильно взаимодействующих частиц, две из которых заряжены и только одна заряженная частица связана с нейтральной, сведена к одному интегральному уравнению для Ψ .

2. Наиболее сложные фрагменты полной волновой функции, зависящие одновременно от ядерного и кулоновского взаимодействий, представлены в виде быстросходящихся рядов по произведениям сферических функций, а для радиальных функций, зависящих от двух размерных переменных, составлена бесконечная система связанных интегральных уравнений и указан метод численного решения обрезанной системы.

3. На примере основного приближения с нулевыми значениями относительных моментов, которое сводится к двум связанным интегральным уравнениям для двух радиальных функций, уравнения движения записаны в форме, удобной для их численного решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основная идея предложенного подхода — выделение в модифицированных уравнениях Фаддеева для непрерывного спектра энергий фрагментов искомой полной волновой функции трехчастичной системы, которые можно было бы разложить в быстросходящиеся ряды, т. е. фактически — реализация идеи о разделении конфигурационного пространства на «внутреннюю» и «внешнюю» области. И хотя реализацию этой идеи нужно рассматривать как модель (ибо она не возникает как результат решения многочастичного уравнения Шредингера), тем не менее она оказывается весьма эффективной и продуктивной. Метод гиперсферических гармоник как достаточно мощный аппарат отлично сочетается с решаемой задачей. Хотя, разумеется, при этом не исключается возможность использования и других базисов: многое определяется рассматриваемой конкретной физической системой, что продемонстрировано, в частности, при выводе уравнений для системы трех частиц, две из которых заряжены, т. е. при решении такой нетривиальной задачи, как учет кулоновского взаимодействия в континууме трехнуклонной системы на основе уравнений Фаддеева.

Заметим, что предлагаемый подход помимо прочего дает не только дополнительные обоснования интерполяционной модели ядра, упомянутой во введении и применяемой при исследовании процессов в непрерывном спектре

для трехчастичных ядерных систем, но и позволяет эффективно рассчитать уточнения для этой модели. Немаловажным фактором для позитивной оценки используемого в настоящей работе подхода является относительная простота полученных уравнений, их одномерность и однозначность. Можно надеяться, что предлагаемый подход станет еще одним шагом к исследованию более сложных ядерных систем.

И, наконец, авторы считают своим долгом с признательностью вспомнить имена А. Г. Ситенко и В. К. Тартаковского, стоявших у истоков этой работы, выразить благодарность В. Ф. Харченко и В. Е. Кузьмичеву за обсуждение ряда вопросов, касающихся обобщений уравнений Фаддеева при наличии кулоновского поля, а также И. В. Силенко за весьма плодотворные консультации.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Общие соотношения для трехчастичных K -гармоник имеют вид [7]

$$u_K^{l_x l_y LM}(\Omega) = \sum_{m_x m_y} (l_x l_y m_x m_y | LM) u_K^{l_x l_y m_x m_y}(\Omega),$$

$$u_K^{l_x l_y m_x m_y}(\Omega) = N_K^{l_x l_y} (\cos \theta)^{l_x} (\sin \theta)^{l_y} \times \\ \times P_u^{l_y+1/2, l_x+1/2}(\cos 2\theta) Y_{l_x m_x}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{l_y m_y}(\hat{\mathbf{y}}), \quad (\text{A.1})$$

где

$$N_K^{l_x l_y} = \sqrt{\frac{2u!(K+2)(u+l_x+l_y+1)}{\Gamma(u+l_x+3/2)\Gamma(u+l_y+3/2)}}, \quad u = \frac{K-l_x-l_y}{2},$$

$$P_u^{\alpha, \beta} = 2^{-u} \sum_{s=0}^u \binom{u+\alpha}{s} \binom{u+\beta}{u-s} (z-1)^{u-s} (z+1)^s$$

— полином Якоби, $\binom{p}{q} = \frac{\Gamma(p+1)}{q!\Gamma(p-q+1)}$; l_x, l_y — орбитальные моменты связанной пары (23) и частицы 1 относительно пары (23), соответствующие координатам Якоби \mathbf{x} и \mathbf{y} .

В обозначении K -гармоник $u_{Kn}(\Omega) \equiv u_K^{l_x l_y LM}(\Omega)$: K — величина гипермомента, n — мультииндекс, включающий в себя величины орбитальных моментов l_x, l_y , а также полный орбитальный момент L относительного движения всех трех частиц и его проекцию M , $\Omega = \{\Theta, \theta_x, \phi_x, \theta_y, \phi_y\}$ — совокупность пяти углов в шестимерном пространстве, определяющие ориентацию шестимерного вектора $\rho = \sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Оператор кинетической энергии H_0 в гиперсферическом базисе (ρ, Ω) имеет вид

$$H_0 = T_0 - \frac{\hbar^2}{2m\rho^2} \Delta_\Omega, \quad T_0 = -\frac{\hbar^2}{2m\rho^5} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^5 \frac{\partial}{\partial \rho}. \quad (\text{Б.1})$$

Собственными функциями оператора Δ_Ω являются K -гармоники (А.1)

$$\Delta_\Omega u_{Kn}(\Omega) = -K(K+4)u_{Kn}(\Omega). \quad (\text{Б.2})$$

Функции $u_{Kn}(\Omega)$ ортогональны и их нормируют обычным образом:

$$\int d\Omega u_{Kn}^*(\Omega) u_{K'n'}(\Omega) = \delta_{KK'} \delta_{nn'}. \quad (\text{Б.3})$$

Собственные функции $\omega_q(\rho)$ оператора T_0 в (Б.1) определяются уравнением [107]

$$T_0 \omega_q(\rho) = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \omega_q(\rho), \quad \omega_q(\rho) = \frac{\sqrt{q}}{\rho^2} J_2(q\rho). \quad (\text{Б.4})$$

Они удовлетворяют условиям ортонормировки [108]

$$\int_0^\infty d\rho \rho^5 \omega_q^*(\rho) \omega_{q'}(\rho) = \delta(q - q') \quad (\text{Б.5})$$

и полноты

$$\int_0^\infty dq \omega_q^*(\rho) \omega_q(\rho') = \frac{1}{\rho^5} \delta(\rho - \rho'). \quad (\text{Б.6})$$

Подставив (7) в (6), умножим левую и правую части полученного уравнения на $u_{K'n'}^*$ и проинтегрируем по переменным Ω . В результате с учетом (Б.3) получим систему интегральных уравнений для $\psi_{K'n'}(\rho)$ [109]:

$$\begin{aligned} \psi_{K'n'}(\rho) = & \int d\Omega u_{K'n'}^*(\Omega) G_0(Z) f(\rho, \Omega) + \\ & + \int d\Omega u_{K'n'}^*(\Omega) G_0(Z) (V_{12} + V_{31}) \Phi, \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

$$f(\rho, \Omega) = U \sum_{Kn} \psi_{Kn}(\rho) u_{Kn}(\Omega), \quad (\text{Б.8})$$

где U — сумма трех парных потенциалов (5).

Подставим теперь в уравнение (Б.7) оператор Грина

$$G_0(Z) = \left[Z - T_0 + \frac{\hbar^2}{2m\rho^2} \Delta_\Omega \right]^{-1} \quad (\text{Б.9})$$

и разложим $f(\rho, \Omega)$ в (Б.8) по K -гармоникам:

$$f(\rho, \Omega) = \sum_{K''n''} f_{K''n''}(\rho) u_{K''n''}(\Omega), \quad (\text{Б.10})$$

$$f_{K''n''}(\rho) = \int d\Omega u_{K''n''}^*(\Omega) f(\rho, \Omega). \quad (\text{Б.11})$$

Тогда с учетом (Б.2), (Б.3) система уравнений (Б.7) преобразуется к виду

$$\psi_{K'n'}(\rho) = \left[Z - T_0 - \frac{\hbar^2}{2m\rho^2} K'(K' + 4) \right]^{-1} F(\rho), \quad (\text{Б.12})$$

$$F(\rho) = \int d\Omega u_{K'n'}^*(\Omega) \left[f(\rho, \Omega) + (V_{12} + V_{31})\Phi \right]. \quad (\text{Б.13})$$

Разложим теперь функцию $F(\rho)$ по полной системе функций оператора T_0 (Б.4):

$$F(\rho) = \int_0^\infty dq \omega_q(\rho) F_q, \quad (\text{Б.14})$$

$$F_q = \int_0^\infty d\bar{\rho} \bar{\rho}^5 F(\bar{\rho}) \omega_q^*(\bar{\rho}). \quad (\text{Б.15})$$

Подставим (Б.14) в (Б.12), (Б.13) и воспользуемся соотношениями (Б.4)–(Б.6) и (Б.15). После этих операций система уравнений (Б.12) приобретает окончательный вид

$$\begin{aligned} \psi_{K'n'}(\rho) = & \frac{\pi m}{\hbar^2 \rho^2} \int_0^\infty d\bar{\rho} \bar{\rho}^3 P_\pm(\rho, \bar{\rho}) \int d\Omega u_{K'n'}^*(\Omega) \times \\ & \times \left[U \sum_{Kn} \psi_{Kn}(\bar{\rho}) u_{Kn}(\Omega) + (V_{12} + V_{31})\Phi(\bar{\rho}, \Omega) \right], \end{aligned} \quad (\text{Б.16})$$

$$P_\pm(\rho, \bar{\rho}) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dq q \frac{J_2(q\rho) J_2(q\bar{\rho})}{q^2 - k_{K'}^2 \mp i0}, \quad (\text{Б.17})$$

где $k_{K'}^2 \equiv k_{K'}^2(\rho) = k_0^2 - K'(K' + 4)/\rho^2$, $k_0^2 = 2mE/\hbar^2$ (E — полная энергия системы). Таким образом, благодаря разложению $f(\rho, \Omega)$ в ряд по гиперсферическим гармоникам, а также разложению $F(\rho)$ в ряд по собственным функциям $\omega_q(\rho)$ оператора T_0 в (Б.7) частично, но достаточно существенно, выполнено действие резольвенты $G_0(Z)$. Далее интеграл типа (Б.17) может быть вычислен аналитически [110]:

$$\int dx x \frac{J_\nu(ax)J_\nu(bx)}{x^2 + c^2} = \begin{cases} I_\nu(bc)K_\nu(ac), & 0 < b < a, \quad \operatorname{Re} c > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1, \\ I_\nu(ac)K_\nu(bc), & 0 < a < b, \quad \operatorname{Re} c > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1, \\ I_\nu(-bc)K_\nu(-ac), & 0 < b < a, \quad \operatorname{Re} c < 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1, \\ I_\nu(-ac)K_\nu(-bc), & 0 < a < b, \quad \operatorname{Re} c < 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1. \end{cases} \quad (\text{Б.18})$$

Вводя функции (11)–(14), с учетом (Б.17), (Б.18) систему уравнений (Б.16) можно теперь записать в компактном виде (8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фаддеев Л. Д. Теория рассеяния для системы трех частиц // ЖЭТФ. 1960. Т. 39, вып. 4. С. 1459–1467.
2. Симонов Ю. А. Задача трех тел. Полная система угловых функций // ЯФ. 1966. Т. 3, вып. 4. С. 630–638.
3. Бадалян А. М., Симонов Ю. А. Задача трех тел. Уравнение для парциальных волн // ЯФ. 1966. Т. 3, вып. 5. С. 1032–1047.
4. Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985. 398 с.
5. Avery J. Hyperspherical Harmonics, Application in Quantum Theory. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1989. 257 p.
6. Джибути Р. И., Шитикова К. В. Метод гиперсферических функций в атомной и ядерной физике. М.: Энергоатомиздат, 1993. 272 с.
7. Джибути Р. И., Крупенникова Н. Б. Метод гиперсферических функций в квантовой механике нескольких тел. Тбилиси: Мецниереба, 1984. 181 с.
8. Шмид Э., Цигельман Х. Проблема трех тел в квантовой механике: Пер. с англ. М.: Наука, 1979. 272 с.
9. Базь А. И. Модель уравнений ядерной физики. Препринт Ин-та теор. физики АН УССР ИТФ-71-79Р. Киев, 1971. 38 с.;
Базь А. И., Жуков М. В. Модель уравнений ядерной физики // ЯФ. 1972. Т. 16, вып. 1. С. 60–73.

10. *Fedorov D. V., Jensen A. S.* Efimov Effect in Coordinate Space Faddeev Equations // *Phys. Rev. Lett.* 1993. V. 71. P. 4103–4106.
11. *Zhukov M. V. et al.* Bound State Properties of Borromean Halo Nuclei: ${}^6\text{He}$ and ${}^{11}\text{Li}$ // *Phys. Rep.* 1993. V. 231, No. 4. P. 151–199.
12. *Fedorov D. V., Jensen A. S., Riisager K.* Three-Body Halos. II. From Two- to Three-Body Asymptotics // *Phys. Rev. C.* 1994. V. 50, No. 5. P. 2372–2383.
13. *Fedorov D. V., Garrido E., Jensen A. S.* Three-Body Halos. III. Effects of Finite Core Spin // *Phys. Rev. C.* 1995. V. 51, No. 6. P. 3052–3065.
14. *Cobis A., Fedorov D. V., Jensen A. S.* Three-Body Halos. V. Computations of Continuum Spectra for Borromean Nuclei // *Phys. Rev. C.* 1998. V. 58, No. 3. P. 1403–1421.
15. *Nielsen E. et al.* The Three-Body Problem with Short-Range Interactions // *Phys. Rep.* 2001. V. 347, No. 5. P. 373–459.
16. *Das T. K., Coelho H. T., Brito V. P.* Comparison of Born–Oppenheimer and Hyperspherical Adiabatic Approximations in the Trinucleon Problem // *Phys. Rev. C.* 1993. V. 48, No. 5. P. 2201–2207.
17. *Симонов Ю. А., Бадалян А. М.* Энергия связи и волновая функция ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$ // *ЯФ.* 1967. Т. 5, вып. 1. С. 88–100.
18. *Ershov S. N., Danilin B. V., Vaagen J. S.* Inelastic Excitations and Momentum Distributions in Kinematically Complete Breakup Reactions of Two-Neutron Halo Nuclei // *Phys. Rev. C.* 2001. V. 64, No. 6. P. 064609.
19. *Ershov S. N., Danilin B. V., Vaagen J. S.* Continuum Spectroscopy of Borromean Two-Neutron Halo Nuclei // *Phys. Rev. C.* 2006. V. 74, No. 1. P. 014603.
20. *Ershov S. N. et al.* Halo Formation and Breakup: Lessons and Open Questions // *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* 2010. V. 37. P. 064026.
21. *Kadomtsev M. V., Vinitzky S. I.* Adiabatic Representation for the Three-Body Problem in Hyperspherical Coordinates. I. Statement of the Problem // *J. Phys. B.* 1987. V. 20. P. 5723–5736.
22. *Dubovik V. M. et al.* Scattering Problem for Faddeev Equations in Adiabatic Representation // *Phys. Lett. A.* 1989. V. 142, No. 2, 3. P. 133–138.
23. *Виницкий С. И., Кадомцева М. Б., Сузько А. А.* Адиабатическое представление задачи трех тел в гиперсферических координатах. Амплитуда рассеяния // *ЯФ.* 1990. Т. 51, вып. 4. С. 952–972.
24. *Виницкий С. И., Марковски В. Л., Сузько А. А.* Адиабатическое представление задачи рассеяния в квантовой системе трех частиц с короткодействующими потенциалами // *ЯФ.* 1992. Т. 55, вып. 3. С. 669–687.
25. *Kostykin V. V., Kvitsinsky A. A., Merkuriev S. P.* Faddeev Approach to the Three-Body Problem in Total-Angular-Momentum Representation // *Few-Body Syst.* 1989. V. 6, No. 2. P. 97–113.
26. *Квицинский А. А., Кострыкин В. В., Меркурьев С. П.* Квантовая теория рассеяния для систем трех частиц с фиксированным полным орбитальным моментом // *ЭЧАЯ.* 1990. Т. 21, вып. 6. С. 1301–1359.

27. Пупышев В. В. Обобщения разложений Фока и Като для систем трех квантовых частиц // ЭЧАЯ. 2009. Т. 40, вып. 4. С. 763–892.
28. Pupyshv V. V. Asymptotic Expansions of Wave Functions of Three Identical Particles for Small Hyperradius and S -Wave Potentials // Few-Body Syst. 1990. V. 8, No. 3. P. 105–122.
29. Pupyshv V. V. Some Exact Solutions of the Three-Identical-Particle Problem with S -Wave Inverse Square Potentials // Phys. Lett. A. 1989. V. 140. P. 151–154.
30. Пупышев В. В. К задаче трех частиц с парными взаимодействиями, обратно пропорциональными квадратам расстояний // ТМФ. 2001. Т. 128, № 2. С. 268–287.
31. Пупышев В. В. Точные решения задачи трех частиц с S -волновыми взаимодействиями центробежного типа // ЯФ. 2003. Т. 66, № 1. С. 64–76.
32. Пупышев В. В. Ложные решения уравнений Фаддеева с центральными потенциалами // ТМФ. 1996. Т. 107, № 3. С. 501–512.
33. Пупышев В. В. Ложные решения трехмерных уравнений Фаддеева // ТМФ. 2006. Т. 148, № 2. С. 227–242.
34. Kievsky A., Viviani M., Rosati S. Study of Bound and Scattering States in Three-Nucleon Systems // Nucl. Phys. A. 1994. V. 577. P. 511–527.
35. Kievsky A. et al. Critical Comparison of Experimental Data and Theoretical Predictions for $N-d$ Scattering below the Breakup Threshold // Nucl. Phys. A. 1996. V. 607. P. 402–424.
36. Kievsky A. The Complex Kohn Variational Method Applied to $N-d$ Scattering // Nucl. Phys. A. 1997. V. 624. P. 125–139.
37. Matveenko A. V., Fukuda H. Hyperradial-Adiabatic Approach to Coulombic Three-Body Systems // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 1996. V. 29. P. 1575–1586.
38. Matveenko A. V. Canonical Three-Body Angular Basis // Few-Body Syst. 2001. V. 30, No. 4. P. 259–267.
39. Matveenko A. V. Diagonalization of the Coriolis Coupling // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2001. V. B34. P. L87–L92.
40. Захарьев Б. Н., Пустовалов В. В., Эфрос В. Д. Задача трех тел. Метод K -гармоник в задачах непрерывного спектра // ЯФ. 1968. Т. 8, вып. 2. С. 406–414.
41. Friar J. L. et al. Benchmark Solutions for $n-d$ Breakup Amplitudes // Phys. Rev. C. 1995. V. 51, No. 5. P. 2356–2359.
42. Kievsky A. et al. Benchmark Calculations for Polarization Observables in Three-Nucleon Scattering // Phys. Rev. C. 1998. V. 58, No. 6. P. 3085–3092.
43. Deltuva A. et al. Benchmark Calculations for Proton–Deuteron Elastic Scattering Observables Including the Coulomb Interaction // Phys. Rev. C. 2005. V. 71, No. 6. P. 064003.
44. Тартаковский В. К., Козловский И. В., Фурса А. Д. Влияние кластеризации на свойства ядер ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$ и их электрорасщепление // ЯФ. 1976. Т. 23, вып. 4. С. 727–734.

45. Базь А. И., Схиртладзе В. С., Шитикова К. В. Расчет трехнуклонной задачи на основе интерполяционного подхода // ЯФ. 1977. Т. 25, вып. 2. С. 281–287.
46. Джибути Р. И., Циклаури Ш. М. Новый подход к решению интегральных уравнений Фаддеева. Реализация для ${}^3\text{H}$ и гиперядра ${}^9_{\Sigma^0}\text{Be}$ // ЯФ. 1984. Т. 40, вып. 5(11). С. 1171–1179.
47. Джибути Р. И., Циклаури Ш. М. «Гибридный» метод исследования трехчастичных реакций // ЯФ. 1985. Т. 41, вып. 4. С. 865–874.
48. Джибути Р. И., Шитикова К. В. Новые тенденции в развитии и применении метода гиперсферических функций // ЭЧАЯ. 1989. Т. 20, вып. 2. С. 331–400.
49. Coelho H. T., Glöckle W., Delfino A. Simple Connection between Faddeev's and the K -harmonic Approaches // Phys. Rev. C. 1980. V. 22, No. 4. P. 1796–1798.
50. Raynal J., Revai J. Transformation Coefficients in the Hyperspherical Approach to the Three-Body Problem // Nuovo Cim. A. 1970. V. 68, No. 4. P. 612–622.
51. Пуньшев В. В. Коэффициенты Рейнала–Реваи как функции кинематического угла // ЯФ. 1999. Т. 62, № 11. С. 1955–1965.
52. Пуньшев В. В. Некоторые методы и результаты аналитических исследований задачи трех ядерных частиц // ЭЧАЯ. 1999. Т. 30, вып. 6. С. 1562–1649.
53. Liu F.-Q., Lim T. K. The Hyperspherical-Harmonics Expansion Method and the Integral-Equation Approach to Solving the Few-Body Problem in Momentum Space // Few-Body Syst. 1988. V. 5, No. 1. P. 31–43.
54. Schellingerhout N. W., Kok L. P., Bosveld G. D. Configuration-Space Faddeev Calculations: Supercomputer Accuracy on a Personal Computer // Phys. Rev. A. 1989. V. 40, No. 10. P. 5568–5576.
55. Yakovlev S. L., Roudnev V. A. Application of the Faddeev Equations in Configuration Space to Calculations of the He Trimer // Few-Body XV Conf.: Handbook. Groningen, 1997. P. 157.
56. Roudnev V. A., Yakovlev S. L. Improved Tensor-Trick Algorithm: Application to Helium Trimer // Comp. Phys. Commun. 2000. V. 126. P. 162–164.
57. Roudnev V. A., Yakovlev S. L. Investigation of ${}^4\text{He}_3$ Trimer on the Base of Faddeev Equations in Configuration Space // Chem. Phys. Lett. 2000. V. 328. P. 97–106.
58. Merkuriev S. P., Gignoux C., Laverne A. Three-Body Scattering in Configuration Space // Ann. Phys. 1976. V. 99, No. 1. P. 30–71.
59. Motovilov A. K., Sofianos S. A., Kolganova E. A. Bound States and Scattering Processes in the ${}^4\text{He}_3$ Atomic System // Chem. Phys. Lett. 1997. V. 275. P. 168–172.
60. Kolganova E. A., Motovilov A. K., Sofianos S. A. Ultralow Energy Scattering of a He Atom off a He Dimer // Phys. Rev. A. 1997. V. 56. P. R1686–R1689.
61. Kolganova E. A., Motovilov A. K., Sofianos S. A. Three-Body Configuration Space Calculations with Hard-Core Potentials // J. Phys. B. 1998. V. 31, No. 6. P. 1279–1302.

62. *Motovilov A. K. et al.* Binding Energies and Scattering Observables in the $^4\text{He}_3$ Atomic System // *Eur. Phys. J. D.* 2001. V. 13. P. 33–46.
63. *Motovilov A. K., Kolganova E. A.* Structure of T - and S -Matrices in Unphysical Sheets and Resonances in Three-Body Systems // *Few-Body Syst. Suppl.* 1999. V. 10. P. 75–84.
64. *Kolganova E. A., Motovilov A. K.* On the Mechanism of Formation of the Efimov States in the Helium ^4He Trimer // *Phys. At. Nucl.* 1999. V. 62, No. 7. P. 1179–1192.
65. *Пупышев В. В.* Методы сплайн-функций в проблеме нескольких тел // *ЭЧАЯ.* 2004. Т. 35, вып. 2. С. 257–347.
66. *Жуков М. В., Эфрос В. Д.* Реакции в системе нескольких нуклонов // *ЯФ.* 1971. Т. 14, вып. 3. С. 577–587.
67. *Эфрос В. Д.* К методу K -гармоник в задаче нескольких нуклонов // *ЯФ.* 1972. Т. 15, вып. 2. С. 226–241.
68. *Эфрос В. Д.* Замечания о методе K -гармоник в ядерной задаче трех тел // *ЯФ.* 1973. Т. 17, вып. 5. С. 988–1000.
69. *Сморodinский Я. А., Эфрос В. Д.* Ортогональные преобразования многомерных угловых гармоник // Там же. Вып. 1. С. 210–224.
70. *Эфрос В. Д.* Многочастичные осцилляторные скобки в микроскопических ядерных вычислениях // *ЯФ.* 1976. Т. 23, вып. 4. С. 715–726.
71. *Efros V. D.* Hyperspherical/Oscillator Brackets and Symmetrized States: A Simple Algorithm for $A > 3$ Few-Body Calculations // *Few-Body Syst.* 1995. V. 19, No. 3. P. 167–173.
72. *Fabre de la Ripelle M.* A Bridge Between Hyperspherical and Integro-Differential Approaches to the Many-Body Bound States // *Few-Body Syst.* 1986. V. 1, No. 4. P. 181–192.
73. *Fabre de la Ripelle M., Larsen S. Y.* Effect of a Spurious Component of the Potential in Faddeev-Type Equations // *Few-Body Syst.* 1992. V. 13, No. 4. P. 199–206.
74. *Верде М.* Проблема трех тел в ядерной физике // *Строение атомного ядра: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.* С. 169–206.
75. *Tartakovsky V. K., Kovalchuk V. I., Kozlovsky I. V.* The Numerical Solution of Faddeev Equations and the Calculation of nd -Scattering Cross Section in Fundamental K -Harmonic Approximation. Scientific Papers of the Institute for Nuclear Researches. Kiev, 2005. No. 3(16). P. 24–28.
76. *Тартаковский В. К., Козловский И. В., Ковальчук В. И.* Редукция уравнений Фаддеева к системе уравнений для функций одной переменной методом гиперсферических гармоник // *Nucl. Phys. At. Energy.* 2008. No. 3(25). P. 22–27.
77. *Kovalchuk V. I., Tartakovsky V. K., Kozlovsky I. V.* Calculations of nd -Scattering Cross Sections by Faddeev's Method with a Hyperspherical Basis // *Ukr. J. Phys.* 2008. V. 53, No. 8. P. 757–762.

78. *Kovalchuk V. I., Kozlovsky I. V., Tartakovsky V. K.* Calculations of Wave Functions of the nd -System, Phases and Cross Sections with the Use of Modified Faddeev's Equations and the Method of Hyperspherical Functions // *Ukr. J. Phys.* 2010. V. 55, No. 3. P. 342–349.
79. *Ковальчук В. И., Козловский И. В., Тартаковский В. К.* Решение уравнений Фаддеева для связанного состояния и непрерывного спектра трехнуклонной системы методом K -гармонических разложений // *ЯФ.* 2011. Т. 74, № 5. С. 720–727.
80. *Триками Ф.* Интегральные уравнения: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 299 с.
81. *Полянин А. Д., Манжиров А. В.* Справочник по интегральным уравнениям. М.: Физматлит, 2003. 608 с.
82. *Malfliet R. A., Tjon J. A.* Solution of the Faddeev Equations for the Triton Problem Using Local Two-Particle Interactions // *Nucl. Phys. A.* 1969. V. 127. P. 161–168.
83. *Volkov A. B.* Equilibrium Deformation Calculations of the Ground State Energies of $1p$ Shell Nuclei // *Nucl. Phys. A.* 1965. V. 74. P. 33–58.
84. *Thompson D. R., Tang Y. C.* Resonating-Group Calculation of ^3He – ^3He Scattering // *Phys. Rev.* 1967. V. 159. P. 806–815.
85. *Eikemeier H., Hackenbroich H. H.* A Phenomenological Local Soft-Core Nucleon–Nucleon Potential // *Nucl. Phys. A.* 1971. V. 169. P. 407–416.
86. *Мотт Н., Мессу Г.* Теория атомных столкновений: Пер. с англ. М.: Мир, 1969. 756 с.
87. *Ishikawa S.* Low-Energy Proton–Deuteron Scattering with a Coulomb-Modified Faddeev Equation // *Few-Body Syst.* 2003. V. 32, No. 4. P. 229–248.
88. *Chen C. R. et al.* Low-Energy Nucleon–Deuteron Scattering // *Phys. Rev. C.* 1989. V. 39, No. 4. P. 1261–1268.
89. *Fuda M. G., Girard B. A.* On-Shell Theory for n – d Scattering in High Partial Waves // *Phys. Rev. C.* 1978. V. 17, No. 1. P. 1–3.
90. *Alt E. O., Bakker B. L. G.* Test of a Separable Approximation to a Local Soft-Core Potential in the Three-Body System // *Z. Phys. A.* 1975. V. 273. P. 37–42.
91. *Seagrave J. D., Lawrence C.* n – d Scattering at 2.45 and 3.27 MeV // *Phys. Rev.* 1957. V. 105, No. 6. P. 1816–1820.
92. *Schwarz P. et al.* Elastic Neutron–Deuteron Scattering in the Energy Range from 2.5 MeV to 30 MeV // *Nucl. Phys. A.* 1983. V. 398. P. 1–18.
93. *Berthold G. H., Zankel H.* Momentum Space Faddeev Calculation for N – d Scattering below the Breakup Threshold // *Phys. Rev. C.* 1986. V. 34, No. 4. P. 1203–1213.
94. *Alt E. O., Mukhamedzhanov A. M., Sattarov A. I.* Calculation of Proton–Deuteron Elastic Scattering at 10 MeV with a Realistic Potential // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 81. P. 4820–4823.
95. *Sherr R. et al.* Scattering of Protons by Deuterons // *Phys. Rev.* 1947. V. 72, No. 8. P. 662–672.

96. Kocher D. C., Clegg T. B. Cross Sections for Proton–Deuteron Scattering from 1.0 to 10.0 MeV // Nucl. Phys. A. 1969. V. 132. P. 455–467.
97. Ситенко А. Г., Харченко В. Ф. Связанные состояния и рассеяние в системе трех частиц // УФН. 1971. Т. 103, вып. 3. С. 469–537.
98. Tartakovsky V. K., Kozlovsky I. V. To the Problem of Three Interacting Particles in Continuum // J. Phys. Stud. 2005. V. 9, No. 2. P. 112–117.
99. Noble J. V. Three-Body Problem with Charged Particles // Phys. Rev. 1967. V. 161, No. 4. P. 945–955.
100. Веселова А. М. Выделение двухчастичных кулоновских особенностей в системе трех заряженных частиц // ТМФ. 1970. Т. 3, № 3. С. 326–331.
101. Kharchenko V. F., Storozhenko S. A. Integral Equations for Three-Nucleon Problem with the Coulomb Interaction: Proton–Deuteron Scattering. Preprint of Inst. for Theor. Phys. ITP-75-53E, Acad. of Sci. of USSR. Kiev, 1975. 41 p.
102. Харченко В. Ф., Шадчин С. А. Теория рассеяния для системы трех частиц, две из которых заряжены // Укр. физ. журн. 1978. Т. 23, № 10. С. 1651–1660; Препринт Ин-та теор. физики АН УССР ИТФ-80-122Р. Киев, 1980. 36 с.
103. Шадчин С. А. и др. Интегральные уравнения для трех нуклонов при наличии кулоновского взаимодействия. Препринт Ин-та теор. физики АН УССР ИТФ-81-78Р. Киев, 1981. 46 с.
104. Куперин Ю. А., Меркурьев С. П., Квицинский А. А. Упругое рассеяние и развал в системе pd // ЯФ. 1983. Т. 37, вып. 6. С. 1440–1450.
105. Tartakovsky V. K., Kozlovsky I. V., Kovalchuk V. I. System of Two Charged and One Neutral Particles Strongly Interacting with One Another in the Continuous Spectrum // Ukr. J. Phys. 2006. V. 51, No. 8. P. 824–829.
106. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 768 с.
107. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Пер. с англ. М.: Мир, 1976. 584 с.
108. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Пер. с англ. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1984. 831 с.
109. Ситенко А. Г., Тартаковский В. К., Козловский И. В. К задаче трех тел с парным короткодействующим взаимодействием // Укр. физ. журн. 2001. Т. 46, № 12. С. 1251–1255.
110. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. 1108 с.