

## СТАЦИОНАРНЫЕ САМОСОГЛАСОВАННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*О. И. Дривотин\**, *Д. А. Овсянников*

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

|  |      |
|--|------|
| ВВЕДЕНИЕ   | 1622 |
| УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА  | 1624 |
| ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ПУЧОК ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ<br>В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ  | 1626 |
| ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО<br>ПУЧКА  | 1627 |
| ПРОСТРАНСТВО ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ   | 1631 |
| ФАЗОВАЯ ПЛОТНОСТЬ  | 1635 |
| КОВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА  | 1638 |
| ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕВЫРОЖДЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ<br>ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПУЧКА С ПОМОЩЬЮ<br>ПЛОТНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ | 1640 |
| САМОСОГЛАСОВАННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ<br>ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПУЧКА   | 1642 |
| РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ОДНОРОДНОЙ ФАЗОВОЙ<br>ПЛОТНОСТЬЮ   | 1646 |
| РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТИПА «ВОДЯНОЙ МЕШОК»   | 1647 |
| ТЕОРЕМА ОБ ИНВЕРСИИ ПЛОТНОСТИ  | 1649 |
| РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОГО<br>ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПУЧКА  | 1651 |
| ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ<br>РАСПРЕДЕЛЕНИЯ  | 1658 |

---

\*E-mail: o.drivotin@spbu.ru

2 ДРИВОТИН О. И., ОВСЯННИКОВ Д. А.

---

|   |      |
|---|------|
| ПРОСТРАНСТВО ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ<br>ДЛЯ ПРОДОЛЬНО-НЕОДНОРОДНОГО ПУЧКА | 1661 |
| САМОСОГЛАСОВАННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ<br>ДЛЯ ПРОДОЛЬНО-НЕОДНОРОДНОГО ПУЧКА  | 1667 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ  | 1674 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ   | 1675 |

## СТАЦИОНАРНЫЕ САМОСОГЛАСОВАННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*О. И. Дривотин\**, *Д. А. Овсянников*

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Представлен обзор аналитических решений уравнения Власова для пучка заряженных частиц. Эти результаты проанализированы на основе единого подхода, развитого авторами статьи. В рамках этого метода вводится пространство интегралов движения, в котором в качестве координат рассматриваются интегралы движения частиц. При этом задание самосогласованного распределения сводится к заданию плотности распределения в этом пространстве. Такой подход позволяет упростить построение и анализ различных самосогласованных распределений. В частности, в некоторых случаях можно получать новые решения, рассматривая линейные комбинации известных решений. Этот подход позволяет также дать во многих случаях наглядное геометрическое представление самосогласованных распределений в пространстве интегралов движения.

A review of analytical solutions of the Vlasov equation for a charged particle beam is given. These results are analyzed on the base of a common approach developed by the authors of the article. According to this method, the space of integrals of motion is introduced, integrals of motion being regarded as coordinates in it. At that, specifying of a self-consistent distribution is reduced to specifying of a density in this space. Such an approach allows one to simplify construction and analysis of various self-consistent distributions. Particularly, in some cases it is possible to obtain new solutions considering linear combinations of known solutions. This approach also gives a possibility to provide pictorial geometric representation of self-consistent distributions in the space of motion integrals.

PACS: 52.20.-j; 52.25.Fi; 52.27.Jt; 29.27.-a

### ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее известных уравнений математической физики является уравнение Власова, которое представляет собой интегродифференциальное уравнение с частными производными [1–5]. Уравнение Власова находит широкое применение в физике пучков заряженных частиц для описания эво-

---

\*E-mail: o.drivotin@spbu.ru

люции распределений частиц в фазовом пространстве [6–15]. Решения уравнения Власова называют самосогласованными распределениями, поскольку в рамках уравнения Власова учитывается действие поля, создаваемого ансамблем движущихся частиц на себя, которое называется собственным или самосогласованным полем.

Вопросы существования и единственности решений уравнения Власова рассматривались в работах [16–27].

Нахождение решений уравнения Власова представляет собой весьма сложную с математической точки зрения задачу, что обусловлено нелинейным характером уравнения Власова. Этой задаче посвящено большое количество работ, в которых найдены различные решения уравнения Власова. Наиболее известное решение для пучка заряженных частиц как в канале с квадрупольной фокусировкой электрическим полем, так и в канале с фокусировкой продольным магнитным полем — распределение Капчинского–Владимирского [7, 15, 28], которое является точным решением уравнения Власова. Решения уравнения Власова ищут также в виде некоторых рядов (см., например, [29]).

В этой работе рассматриваются стационарные самосогласованные распределения для пучка заряженных частиц в продольном магнитном поле. Здесь также известны различные точные решения, например распределение типа «водяной мешок» [15, 30].

Цель работы — проанализировать результаты работ, вошедших в обзор, на основе единого подхода, развитого авторами статьи в [31–45]. В рамках этого подхода интегралы движения частиц рассматриваются в качестве координат в пространстве этих интегралов, а задание самосогласованного распределения сводится к заданию плотности в пространстве интегралов движения.

Переходя к пространству интегралов движения, мы, прежде всего, абстрагируемся от исходного фазового пространства, координатами в котором являются координаты в конфигурационном пространстве и компоненты скорости, и плотность рассматриваем в пространстве этих интегралов, которые и являются его координатами. При этом существует математический аппарат, позволяющий корректно ввести плотность в любом абстрактном пространстве, — это дифференциальные формы. Этот же аппарат применяется в работе и для описания, в частности, плотности в исходном фазовом пространстве. Так понимается фазовая плотность во многих работах по динамике пучков. Вводимая таким образом плотность в пространстве интегралов движения позволяет находить новые стационарные самосогласованные распределения, в отличие от многих работ, где интегралы движения также используются. Безусловно, традиция использования инвариантов при исследовании динамики частиц имеет длительную историю. Так, функцию распределения фазовой плотности, являющуюся решением уравнения Власова и заданную как функция координат, импульсов и времени, всегда можно представить как функцию некоторого числа независимых интегралов движения [7]. Однако

отметим, что здесь речь идет о функции распределения плотности частиц в фазовом пространстве. В данной работе рассматривается плотность распределения в пространстве этих самых интегралов. Это и отличает подход авторов статьи от других подходов, рассматриваемых ранее.

Такой подход позволяет упростить построение и анализ различных самосогласованных распределений. В частности, в некоторых случаях можно получать новые решения, рассматривая линейные комбинации известных решений, что невозможно получить при других известных подходах. Этот подход также позволяет дать во многих случаях наглядное геометрическое представление самосогласованных распределений в пространстве интегралов движения.

Значительная часть работы посвящена самосогласованным распределениям для продольно-однородного аксиально-симметричного пучка. Широкие классы решений для этого случая могут быть также получены с использованием теоремы об инверсии плотности [46]. Особое внимание уделяется пучку с равномерным распределением частиц по сечению. Здесь представлены такие известные вырожденные распределения, как поток Бриллюэна [47], распределение Капчинского–Владимирского, распределения типа «жесткого ротатора» [6, 13, 14, 48]. Также рассмотрены невырожденные распределения, простейшее из которых можно рассматривать как линейную комбинацию распределений типа «жесткого ротатора». Невырожденные распределения можно получать, используя решения некоторого интегрального уравнения.

Далее рассматривается неоднородный вдоль своей оси пучок с равномерным распределением частиц по сечению, для которого также представлены самосогласованные распределения. Эти распределения могут быть получены в результате анализа распределений в пространстве интегралов движения.

Полученные для неоднородного пучка решения можно рассматривать как обобщения соответствующих решений для продольно-однородного пучка, например обобщенный поток Бриллюэна или обобщенное распределение Капчинского–Владимирского.

## 1. УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА

Выпишем уравнение Власова для простейшего случая, когда частицы заполняют некоторую область фазового пространства. Для более общего случая, включающего вырожденные распределения, для которых размерность их носителя меньше размерности фазового пространства, уравнение Власова будет рассмотрено далее. В рассматриваемом здесь случае плотность распределения частиц в фазовом пространстве может быть описана с помощью функции распределения частиц  $f(t, q)$ , которая определяется как отношение числа частиц в некоторой области фазового пространства к фазовому объему этой области, если область достаточно мала. Здесь  $t$  — время, а  $q$  обозначает точку фазового пространства, характеризуемую положением в конфигурационном

пространстве  $\mathbf{x}$  и скоростью  $\mathbf{v}$ . При этом в качестве координат в фазовом пространстве можно выбрать декартовы координаты точки  $\mathbf{x}$ , которые обозначим через  $x, y, z$ , и декартовы компоненты скорости  $v_x, v_y, v_z$ .

Тогда уравнение Власова можно записать в виде

$$\frac{\partial f(t, q)}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f(t, q)}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F} \frac{\partial f(t, q)}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{F}$  — силовой член, равный для заряженной частицы  $\mathbf{F} = (e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B})/m$  ( $e$  и  $m$  — заряд и масса частицы,  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля,  $\mathbf{B}$  — индукция магнитного поля). Второй член в уравнении (1) следует понимать следующим образом:

$$\mathbf{v} \frac{\partial f(t, q)}{\partial \mathbf{x}} \equiv v_x \frac{\partial f(t, q)}{\partial x} + v_y \frac{\partial f(t, q)}{\partial y} + v_z \frac{\partial f(t, q)}{\partial z}.$$

Аналогичный смысл имеет и третий член.

Электрическое поле, так же как и магнитное, может быть представлено в виде суммы внешнего и собственного полей:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_s$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_s$ . Внешние составляющие электрического и магнитного полей предполагаются заданными, а собственные удовлетворяют уравнениям Максвелла, которые в рассматриваемом случае можно записать в виде [49]

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E}_s = \rho/\varepsilon_0, & \operatorname{rot} \mathbf{H}_s = \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_s}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H}_s = 0, & \operatorname{rot} \mathbf{E}_s + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_s}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\mathbf{H}_s$  — напряженность собственного магнитного поля,  $\mathbf{B}_s = \mu_0 \mathbf{H}_s$ .

Правые части уравнения Максвелла содержат объемную плотность частиц в конфигурационном пространстве  $\rho$  и вектор плотности тока частиц  $\mathbf{j}$ , которые могут быть выражены через функцию распределения:

$$\rho(t, x) = \int_{\Omega} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z, \quad (3)$$

$$j_{x,y,z} = \int_{\Omega} v_{x,y,z} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z. \quad (4)$$

Систему уравнений (1), (2) называют системой Власова–Максвелла. Если скорости движения частиц малы, то вместо системы Власова–Максвелла можно рассматривать систему Власова–Пуассона, включающую уравнение Власова (1) и уравнение Пуассона

$$\Delta u = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (5)$$

где  $u$  — потенциал собственного электрического поля,  $\mathbf{E}_s = -\operatorname{grad} u$ .

В дальнейшем будем использовать термин уравнение Власова, подразумевая, что собственные поля, в которых движутся частицы, удовлетворяют уравнениям Максвелла (2) или Пуассона (5).

Уравнение Власова может быть выведено из цепочки уравнений Борна–Боголюбова–Грина–Кирквуда–Ивона (ББГКИ) [3] в предположении о факторизации двухчастичной функции распределения. Такая факторизация означает пренебрежение взаимодействием частиц на близких расстояниях, которое может быть учтено с помощью интеграла столкновений, как, например, в уравнении Больцмана. Таким образом, уравнение Власова описывает заряженную плазму низкой плотности. Рассматривая эффективное сечение рассеяния одной частицы на другой, нетрудно оценить плотность, которую можно рассматривать как низкую [34, 37, 39]:

$$\rho \ll 4\pi\varepsilon_0^2 d^{-1} m^2 v_0^4 / e^4, \quad (6)$$

где  $v_0$  — характерная скорость частиц;  $d$  — характерный геометрический размер области. Например, для пучка протонов с энергией 100 кэВ, током 100 мА, радиусом 1 см и расходимостью 1 мрад при анализе поперечного движения частиц характерная скорость составляет  $3 \cdot 10^4$  м/с, а плотность частиц —  $6 \cdot 10^{16}$  м<sup>-3</sup>, и неравенство (6) выполняется с большим запасом.

Цепочка уравнений ББГКИ рассматривается в рамках статистического, т. е. вероятностного, описания. С другой стороны, уравнение Власова можно использовать и в рамках модели, в которой ансамбль частиц описывается как некоторая непрерывная заряженная среда, распределенная в фазовом пространстве. В рамках такой модели нелинейные эффекты, обусловленные взаимодействием частей среды, близких друг к другу, с самого начала не учитываются.

## 2. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ПУЧОК ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим стационарный аксиально-симметричный продольно-однородный пучок заряженных частиц, распространяющийся в однородном продольном магнитном поле. Стационарность означает, что функция распределения частиц в любой точке фазового пространства не зависит от времени. Будем считать, что продольные компоненты скорости всех частиц одинаковы и не меняются вдоль оси пучка, т. е. ускорения не происходит. Поперечные компоненты скорости будем считать много меньшими продольных. При этом с учетом также продольной однородности размерность фазового пространства равна четырем.

Собственное поле рассматриваемого пучка есть поле заряженного цилиндра, движущегося вдоль своей оси, и его нетрудно найти. Перейдем в

систему отсчета, движущуюся вдоль оси пучка со скоростью  $v_z$ . В этой системе отсчета магнитное поле отсутствует, а электрическое поле определяется потенциалом  $\tilde{u} = \tilde{u}(r)$ , который удовлетворяет уравнению Пуассона (5).

Будем считать, что потенциал  $u(r)$  удовлетворяет граничным условиям

$$u(0) = 0, \quad \left. \frac{du}{dr} \right|_{r=0} = 0. \quad (7)$$

Первое условие задает потенциал на оси пучка, а второе можно трактовать как условие ограниченности плотности частиц на оси пучка.

Итак, четырехмерный векторный потенциал в движущейся системе отсчета имеет вид  $\tilde{A} = (-\tilde{u}(r), 0, 0, 0)$ . В лабораторной системе отсчета имеем

$$A = (-\gamma\tilde{u}(r), 0, 0, \beta\gamma\tilde{u}(r)) = (-u(r), 0, 0, \beta u(r)),$$

где  $\beta = v_z/c$  — приведенная продольная скорость частиц;  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$  — приведенная энергия. Компоненты собственного электрического поля равны  $E_x = -\partial u/\partial x$ ,  $E_y = \partial u/\partial y$ , а магнитного поля —  $B_x = \beta\partial u(r)/\partial y$ ,  $B_y = -\beta\partial u(r)/\partial x$ .

Записывая уравнение поперечного движения частиц в поле движущегося цилиндра в декартовых координатах, нетрудно получить

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{e}{m\gamma^3} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{e}{m\gamma^3} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Тогда уравнение Власова в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$\mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{m\gamma} \left( -\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (8)$$

где  $\mathbf{B}$  — индукция внешнего магнитного поля;  $u$  — потенциал собственного поля пучка, удовлетворяющий уравнению Пуассона (5) и условиям (7). Если задана сила тока пучка  $J$ , то функция распределения и плотность в конфигурационном пространстве, входящая в уравнение Пуассона, удовлетворяют следующим условиям нормировки:

$$\int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \int \varrho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{J}{e\beta c}. \quad (9)$$

### 3. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПУЧКА

Стандартный подход к построению решений уравнений и систем уравнений с частными производными первого порядка состоит в применении метода характеристик. Как известно, уравнениями характеристических линий



для уравнения Власова являются уравнения динамики частиц. При этом фазовая плотность в пространстве канонически сопряженных переменных вдоль характеристических линий сохраняется. Это следует из теоремы Лиувилля о сохранении фазового объема вдоль траекторий движения частиц.

Таким образом, при анализе самосогласованных распределений важную роль играют траектории движения частиц. Запишем уравнения этих траекторий.

Уравнения для импульса частицы имеют вид [50]

$$\frac{dp}{ds} = \frac{\partial L}{\partial x}, \quad (10)$$

где  $p$  — четырехмерный ковариантный вектор канонически сопряженного импульса, который будем называть импульсом. Пространственные компоненты импульса равны

$$p_i = -m\gamma g_{ik} v^k + eA_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11)$$

где  $g_{ik}$  — компоненты метрического тензора. Здесь и далее будем записывать ковариантные тензорные индексы снизу, контравариантные — сверху и использовать правило суммирования Эйнштейна по совпадающим ковариантным и контравариантным индексам. Далее,  $s$  — релятивистский интервал, отсчитываемый вдоль траектории движения частицы (собственное время частицы),  $d/ds$  обозначает ковариантную производную по  $s$ ,  $L$  — лагранжиан заряженной частицы:

$$L = -mc\sqrt{g_{ik}u^i u^k} + eA_i u^i,$$

где  $u = dx/ds$  — четырехмерная скорость частицы,  $u^0 = \gamma$ ,  $u^i = \beta\gamma v^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Наконец,  $\partial L/\partial x$  обозначает производную лагранжиана по  $x$  при условии, что при изменении  $x$  скорость частицы не меняется в том смысле, что ее можно получить параллельным переносом на основе метрической связности. Применяемый здесь подход к формулировке уравнений важен при анализе движения в криволинейных координатах.

Записывая уравнение (10) покомпонентно, нетрудно получить

$$\frac{dp_i}{ds} - mc\Gamma_{ij}^k u_k u^j = e\frac{\partial A_j}{\partial x^i} u^j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (12)$$

где  $\Gamma_{ij}^k$  обозначает символ Кристоффеля второго рода. Рассмотрим уравнения (12) для цилиндрической системы координат  $r, \varphi, z$ , ось которой совпадает с осью пучка.

Учитывая, что временной координатой здесь является  $x^0 = ct$ , а не  $t$ , как ранее, компоненты векторного потенциала собственного поля равны  $A_0 = -u(r)/c$ ,  $A_z = \beta u(r)$ . Однородное продольное магнитное поле, в котором

движется пучок, может быть описано потенциалом  $A_0 = A_r = A_z = 0$ ,  $A_\varphi = B_z r^2/2$ .

Подставляя эти компоненты в уравнения (12), получаем уравнение азимутального движения в виде  $\dot{p}_\varphi = 0$ , где точка обозначает дифференцирование по времени. Компонента  $p_\varphi$  в соответствии с выражениями (12) равна

$$p_\varphi = -mcg_{\varphi\varphi}u^\varphi + eA_\varphi = r^2(m\gamma\dot{\varphi} + eB_z/2). \quad (13)$$

Введем обозначение  $M = p_\varphi/(mc)$ . В соответствии с (13) получим

$$M = r^2(\dot{\varphi} + \omega_0), \quad (14)$$

где  $\omega_0 = eB_z/(2m\gamma)$ . Таким образом, азимутальная компонента импульса сохраняется и  $M$  является интегралом движения, который часто называют интегралом Буша.

Учитывая, что согласно (14)  $\dot{\varphi} = M/r^2 - \omega_0$ , получаем уравнение радиального движения частицы в виде

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = -\omega_0^2 r + \frac{M^2}{r^3} - \varepsilon \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (15)$$

где  $\varepsilon = e/(m\gamma^3)$ . Умножая (15) на  $\dot{r}$  и интегрируя, получим второй интеграл движения в виде

$$H = \dot{r}^2 + \omega_0^2 r^2 + \frac{M^2}{r^2} + 2\varepsilon U. \quad (16)$$

Величина  $H$  представляет собой, с точностью до постоянного множителя, энергию поперечного движения частицы.

Как можно описывать динамику частицы, используя интегралы движения  $M$  и  $H$ ? Интеграл  $M$  характеризует азимутальное движение: из (14), зная  $M$  и  $r$ , можно однозначно определить азимутальную скорость  $\dot{\varphi}$ . Интеграл  $H$  характеризует радиальное движение. Зная  $M$  и  $H$ , можно, используя соотношение (16), попытаться найти  $\dot{r}$ , тогда определится некоторая траектория в фазовом пространстве радиального движения. Сформулируем достаточное условие, при котором каждой допустимой паре значений  $M$  и  $H$  соответствует вполне определенная траектория в фазовом пространстве радиального движения. Рассмотрим функцию

$$V_0(r) = \omega_0^2 r^2 + 2\varepsilon U(r) \quad (17)$$

и предположим, что  $V_0(r)$  — строго выпуклая функция. Поскольку  $dV_0/dr|_{r=0} = 0$ , то  $V_0(r)$  — возрастающая функция, причем возрастающая неограниченно. В силу этого уравнение

$$H = V_0(r) \quad (18)$$

не имеет корней при  $H < 0$  и имеет ровно один корень при  $H \geq 0$ . Обозначим этот корень через  $r_{\max}(0, H)$  и положим  $r_{\min}(0, H) = 0$ . Рассмотрим также функцию  $V_M(r) = V_0(r) + M^2/r^2$  при  $M \neq 0$ . Эта функция выпуклая, как сумма двух выпуклых функций. При  $r \rightarrow 0$  имеем  $V_M(r) \rightarrow \infty$  и  $dV_M/dr \rightarrow -\infty$ , а при  $r \rightarrow \infty$  имеем  $V_M(r) \rightarrow \infty$  и  $dV_M/dr > 0$ . Следовательно, функция  $V_M(r)$  имеет единственный минимум. Тогда при  $H$ , больших наименьшего значения функции  $V_M(r)$ , уравнение

$$H = V_M(r) \quad (19)$$

имеет ровно два корня, а при меньших значениях  $H$  не имеет корней. Обозначим корни уравнения (19) через  $r_{\min}(M, H)$  и  $r_{\max}(M, H)$ :  $r_{\min}(M, H) \leq r_{\max}(M, H)$ . Согласно (16) движение возможно только в интервале  $[r_{\min}(M, H), r_{\max}(M, H)]$ , поскольку в этом интервале значение  $\dot{r}$  только и определено. Графики функций  $V_0(r)$  и  $V_M(r)$  показаны на рис. 1.

Если  $M \neq 0$  и  $r_{\min}(M, H) \neq r_{\max}(M, H)$ , то  $r_{\min}(M, H)$  и  $r_{\max}(M, H)$  представляют собой точки поворота частицы (по координате  $r$ ). В этих точках  $\dot{r} = 0$ , но  $\ddot{r} \neq 0$ . Действительно, в соответствии с (16) имеем

$$\ddot{r} = \frac{M^2}{r^3} - \omega_0^2 r - \varepsilon \frac{dU}{dr} = -\frac{1}{2} \frac{dV_M(r)}{dr}.$$

В силу строгого возрастания функции  $dV_M/dr$  в точке  $r_{\max}(M, H)$ , расположенной правее точки минимума функции  $V_M(r)$ , которую обозначим  $r_0(M, H)$ , имеем  $\ddot{r} < 0$ , а в точке  $r_{\min}(M, H)$ , расположенной левее точки  $r_0(M, H)$ , имеем  $\ddot{r} > 0$ .

Итак, поперечное движение частицы можно описать следующим образом: радиальная координата  $r$  частицы возрастает от значения  $r_{\min}(M, H)$  до значения  $r_{\max}(M, H)$ . При этом частица поворачивается вокруг оси на угол  $\delta\varphi$ ,

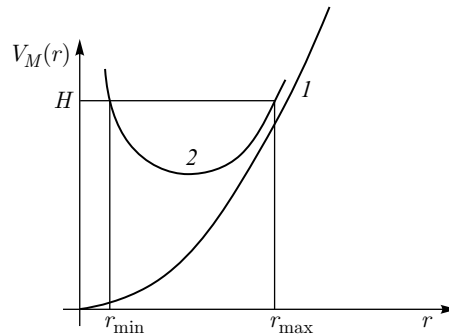


Рис. 1. Графики функций  $V_0(r) = \omega_0^2 r^2$  (кривая 1) и  $V_M(r) = M^2/r^2 + \omega_0^2 r^2$ ,  $M \neq 0$  (кривая 2). Движение частицы с  $M \neq 0$  возможно только на отрезке  $[r_{\min}(M, H), r_{\max}(M, H)]$

который можно найти, используя (14):

$$\delta\varphi = \int_{r_{\min}(M,H)}^{r_{\max}(M,H)} \frac{d\varphi}{dr} dr = \int_{r_{\min}(M,H)}^{r_{\max}(M,H)} \frac{(M/r^2 - \omega_0) dr}{(H - M^2/r^2 - \omega_0^2 r^2 - 2\varepsilon U(r))^{1/2}}.$$

Затем радиальная координата  $r$  убывает снова до значения  $r_{\min}(M, H)$ , поворачиваясь на такой же угол  $\delta\varphi$ , и т. д.

Если  $r_{\min}(M, H) = r_{\max}(M, H)$ , то  $\dot{r} = 0$ ,  $\ddot{r} = 0$ , и траектория движения частицы представляет собой окружность.

При  $M = 0$  картина движения остается такой же, за исключением того, что  $\dot{r} \neq 0$  в точке  $r_{\min}(0, H)$ .

Поскольку в (14), (16) не входит координата  $\varphi$ , то, повернув траекторию, соответствующую определенным значениям  $M$  и  $H$ , на любой угол вокруг оси  $z$ , опять получим траекторию, отвечающую тем же значениям  $M$  и  $H$ .

Таким образом, если функция  $U(r)$  такова, что  $V_0(r)$  — строго выпуклая функция, то траектории движения частиц ограничены и каждой паре значений  $M$  и  $H$  из области допустимых значений, которая будет рассматриваться ниже, соответствует семейство траекторий, переводимых друг в друга поворотами вокруг оси  $z$ .

#### 4. ПРОСТРАНСТВО ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим пространство интегралов движения  $M, H$ . Выделим в этом пространстве множество допустимых значений интегралов  $M, H$ , которое обозначим через  $\Omega_R$ . Под допустимыми будем понимать такие значения интегралов  $M, H$ , при которых траектория частицы не выходит за границы пучка. Другими словами, для всех точек траектории, определяемой  $M, H$  из  $\Omega_R$ , выполняется неравенство  $r \leq R$ .

Из (16) вытекает, что

$$H \leq \frac{M^2}{R^2} + \omega_0^2 R^2 + 2\varepsilon U(R), \quad (20)$$

так как частицы с большими значениями  $H$  будут иметь в точке  $r = R$  скорость  $\dot{r} \neq 0$  и выйдут за пределы цилиндра радиусом  $R$ .

С другой стороны, так как функция  $V_M(r)$  имеет минимум при  $r = r_0(M)$ , допустимые значения  $H$  ограничены снизу этим минимумом, поскольку  $H - V_M(r) = \dot{r}^2 \geq 0$ . Из определения  $V_M(r)$  видно, что  $r_0$  строго возрастает с ростом  $|M|$ . При  $M = 0$  имеем  $r_0 = 0$ . Если при  $|M|$ , равном некоторому  $M^*$ , выполнено  $r_0 = R$ , то в силу строгого возрастания  $r_0(M)$  как функции  $M$  при  $|M| \leq M^*$  выполнено  $r_0(M) \leq R$ . Таким образом, при  $|M| \leq M^*$  допустимы все значения  $H$  от верхней границы, задаваемой неравенством (20), вплоть до нижней границы  $V_M(r_0(M))$ . Если же  $|M| > M^*$ , то

движение с таким  $M$  невозможно без того, чтобы частица вышла за пределы цилиндра радиусом  $R$ .

Итак, 
$$H \geq V_M(r_0(M)). \quad (21)$$

Значение  $r_0(M)$  можно найти из уравнения

$$\left( \frac{dV_M(r)}{dr} \right) \Big|_{r=r_0(M)} = 0. \quad (22)$$

Диаграмма, изображающая множество допустимых значений в пространстве интегралов движения  $\Omega_R$ , представлена на рис. 2.

Рассмотрим также множество  $\Omega(r)$  всех допустимых значений интегралов движения  $H$  и  $M$  для частиц, чьи траектории проходят через точку с координатой  $r$ . При фиксированном значении  $M$ , с одной стороны,  $H$  удовлетворяет (20), а с другой —  $H \geq V_M(r)$  согласно (21). Следовательно, для  $H$  имеем

$$\frac{M^2}{r^2} + \omega_0^2 r^2 + 2\varepsilon U(r) \leq H \leq \frac{M^2}{R^2} + \omega_0^2 R^2 + 2\varepsilon U(R). \quad (23)$$

Наименьшее значение  $M^2$  равно нулю, а наибольшее — то, при котором еще будет выполняться неравенство

$$\frac{M^2}{r^2} + \omega_0^2 r^2 + 2\varepsilon U(r) \leq \frac{M^2}{R^2} + \omega_0^2 R^2 + 2\varepsilon U(R).$$

Таким образом,

$$|M| \leq rR \sqrt{\omega_0^2 + 2\varepsilon \frac{U(R) - U(r)}{R^2 - r^2}}. \quad (24)$$

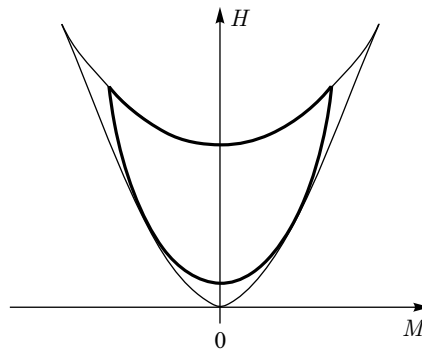


Рис. 2. Множество допустимых значений интегралов движения  $M$ ,  $H$ : тонкие линии — границы множества  $\Omega_R$ ; толстые линии — границы множества  $\Omega(r)$

Итак, множество  $\Omega(r)$  определяется неравенствами (23), (24). Оно также представлено на рис. 2.

Определим теперь множество всех допустимых значений фазовых переменных в четырехмерном фазовом пространстве поперечного движения. Введем величины  $v_r = \dot{r}$  и  $v_\perp = r(\dot{\varphi} + \omega_0)$ . Из (23), (24) имеем

$$\begin{cases} |v_\perp| \leq R \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2\varepsilon(U(R) - U(r))}{R^2 - r^2}}, \\ v_r^2 \leq v_\perp^2 \left( \frac{r^2}{R^2} - 1 \right) + \omega_0^2(R^2 - r^2) - 2\varepsilon(U(r) - U(R)) \end{cases}$$

или

$$\frac{v_r^2}{\omega_0^2(R^2 - r^2) - 2\varepsilon(U(r) - U(R))} + \frac{v_\perp^2}{\omega_0^2 R^2 - \frac{2\varepsilon(U(r) - U(R))}{1 - r^2/R^2}} \leq 1. \quad (25)$$

Когда  $\varphi$  и  $r$  в (25) фиксированы,  $r \in [0, R]$ , получаем сечение указанного фазового множества поверхностями  $r = \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$ , определяющее области допустимых значений фазовых переменных в касательном пространстве для данной точки конфигурационного пространства. При этом величины  $v_r$  и  $v_\perp$  могут рассматриваться как координаты в этом касательном пространстве. Видно, что рассматриваемые области представляют собой эллипсы с центром в точке  $v_r = 0$ ,  $v_\perp = 0$  и полуосями  $\{\omega_0^2(R^2 - r^2) + 2\varepsilon(U(R) - U(r))\}^{1/2}$ ,  $\{\omega_0^2 R^2 + 2\varepsilon R^2(U(R) - U(r))/(R^2 - r^2)\}^{1/2}$ , направленными вдоль осей  $v_r$  и  $v_\perp$  соответственно. При  $r \rightarrow R$  одна из полуосей стремится к нулю, а другая — к  $\left( \omega_0^2 R^2 + 2\varepsilon R \frac{dU}{dr} \Big|_{r=R} \right)^{1/2}$ . Эти области при различных  $r$  показаны на рис. 3. Зависимость от  $\varphi$  отсутствует благодаря аксиальной симметрии. Тонкие линии изображают границы множества допустимых значений  $v_r$ ,  $v_\perp$  для четырех значений  $r$ : 0,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $R$  ( $0 < r_1 < r_2 < R$ ). Все точки внутри границ допустимы. Носитель распределения может не совпадать со всей областью, а только должен содержаться в этой области.

В качестве примера на рис. 3 показан носитель распределения, для которого все частицы имеют одно и то же значение интеграла движения  $H$ . Как известно, таким свойством характеризуется распределение Капчинского–Владимирского. Поскольку границы  $r = R$  достигают частицы с  $M = 0$ , для которых на границе  $\dot{r} = 0$ , имеем  $H = \omega_0^2 R^2 + 2\varepsilon(U(R) - U(r))$ . Поэтому носитель в фазовом пространстве представлен окружностями  $v_r^2 + v_\perp^2 = \omega_0^2(R^2 - r^2) + 2\varepsilon(U(R) - U(r))$  (толстые линии на рис. 3). Жирная точка в начале координат изображает поток Бриллюэна, в котором все частицы вращаются как единое целое вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $-\omega_0$  [47].

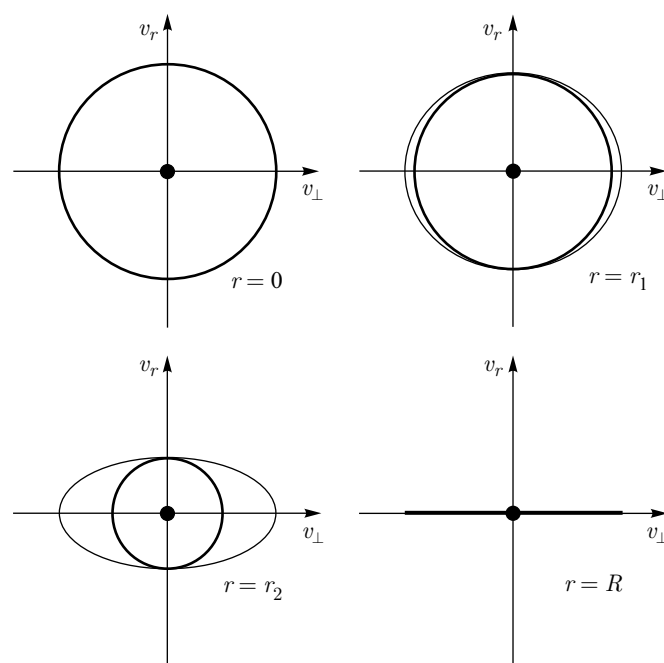


Рис. 3. Множества допустимых поперечных скоростей (ограничены тонкими линиями) и сечения носителя распределения Капчинского–Владимирского (толстые линии) при различных значениях  $r$ :  $r = 0$ ,  $r = r_1$ ,  $r = r_2$  ( $0 < r_1 < r_2$ ),  $r = R$ . При  $r = 0$  и  $r = R$  тонкие линии совпадают с толстыми

Далее рассмотрим плотность распределения частиц в пространстве интегралов движения  $M$ ,  $H$  и найдем связь между этой плотностью и плотностью распределения в фазовом пространстве.

Как отмечалось ранее, при сформулированном условии на функцию  $V_M(r)$  каждой паре значений  $M$ ,  $H$  соответствует набор траекторий, отличающихся друг от друга поворотом на некоторый угол  $\varphi$ . В дальнейшем будем требовать выполнения еще двух условий. Предположим, что частицы, соответствующие заданной паре  $M$  и  $H$ , равномерно распределены по всем возможным для этой пары траекториям, а также равномерно распределены по фазам каждой из траекторий. Очевидно, первое из этих условий гарантирует азимутальную симметрию всего распределения в целом. Как мы увидим далее, второе условие гарантирует стационарность распределения.

Впервые плотность в пространстве интегралов движения  $M$  и  $H$  была введена в работе [31], а затем рассматривалась также в работах [32–39, 41–45]. Впоследствии аналогичный подход использовался в работе [51] для

анализа равномерных по сечению пучка распределений частиц и трехмерных сферических распределений.

## 5. ФАЗОВАЯ ПЛОТНОСТЬ

Введем понятие фазовой плотности, которым и будем пользоваться для описания распределений частиц в фазовом пространстве. Будем следовать подходу, предложенному в работах [37, 38, 40, 41].

Обозначим фазовое пространство через  $\mathcal{M}$ , а его размерность — через  $m$ ,  $m = \dim \mathcal{M}$ ,  $m \leq 6$ . Будем считать, что фазовое пространство  $\mathcal{M}$  представляет собой дифференцируемое многообразие. Это означает, в частности, что в окрестности любой точки  $q$  из  $\mathcal{M}$  можно ввести систему координат  $q_1, \dots, q_m$ . Во многих задачах в качестве координат в фазовом пространстве могут быть взяты координаты частицы в конфигурационном пространстве, ассоциированном с некоторой системой отсчета [52, 53], и соответствующие компоненты скорости или импульса.

Как уже говорилось ранее, для описания системы большого числа частиц можно рассматривать как вероятностную модель, так и некоторую заряженную среду, распределенную в фазовом пространстве. Такая модель аналогична модели сплошной среды, которую используют, например, для описания жидкости или твердого тела и в которой игнорируется молекулярная или атомная структура, а распределение массы описывается с помощью кусочно-непрерывных функций. Поскольку мы рассматриваем ансамбль заряженных частиц, то введенную здесь модель будем называть моделью заряженной среды.

Рассмотрим сначала модель непрерывной заряженной среды в фазовом пространстве, размерность носителя которой равна размерности фазового пространства. Дадим формальное определение фазовой плотности для этого случая. Пусть частицы находятся в некоторой области  $G_0$  фазового пространства. Рассмотрим семейство подобластей  $\{G\}$ ,  $G \subset G_0$ , с достаточно гладкими границами, для которых определены их характеристические функции

$$\chi_G(q) = \begin{cases} 1, & q \in G, \\ 0, & q \notin G. \end{cases}$$

Плотностью распределения частиц в фазовом пространстве будем называть такую дифференциальную форму  $n$  степени  $m$

$$n = n_{1\dots m}(t, q) dx^1 \dots dq^m, \quad (26)$$

что для любой подобласти  $G$  рассматриваемого семейства выполняется равенство

$$\int_{G_0} \chi_G(q) n(q) = N_G, \quad (27)$$



где  $N_G$  — число частиц в области  $G$ , которое в рамках рассматриваемой модели непрерывной заряженной среды не обязательно целое. Произведение дифференциалов здесь и далее всегда рассматривается как внешнее произведение.

Будем считать, что компонента рассматриваемой формы  $n_{1\dots m}(t, q)$  — достаточно гладкая функция координат, а именно кусочно-непрерывно дифференцируемая по координатам.

Рассмотрим пространство функций, для которых для любой рассматриваемой формы  $\omega(q)$  степени  $m$  из заданного класса существует  $\int_G f(q)\omega(q)$ . Будем называть такие функции интегрируемыми и обозначим их пространство через  $\mathcal{F}$ . Для некоторой формы  $\omega(q)$  определим линейный функционал, действующий на интегрируемые функции по правилу

$$\langle \omega, f \rangle = \int_{G_0} f(q)\omega(q), \quad f \in \mathcal{F}. \quad (28)$$

Тогда определение (27) можно записать в виде

$$\langle n, \chi_G \rangle = N_G. \quad (29)$$

Рассмотрим теперь модель точечных частиц. В рамках этой модели заряженная частица представляется точкой в фазовом пространстве, в отличие от ранее рассмотренной модели непрерывной заряженной среды.

Введем линейный функционал  $\langle \delta_{q_0}, \cdot \rangle$ , действующий на интегрируемую функцию  $f \in \mathcal{F}$  по правилу

$$\langle \delta_{q_0}, f \rangle = f(q_0). \quad (30)$$

Нетрудно видеть, что функционал (30) задается с помощью скалярной функции

$$\delta_{q_0}(q) = \begin{cases} 1, & q = q_0, \\ 0, & q \neq q_0, \end{cases}$$

значения которой в точке  $q_0$  равно 1, а в остальных точках ее значение равно нулю. Действие этого функционала на некоторую функцию состоит в следующем: значение этой функции в точке  $q_0$  умножается на значение задающей функционал функции в этой же точке.

Рассматривая функционал (30) как плотность частиц, т. е. учитывая условие (29), видим, что такой функционал задает плотность системы, состоящей из одной частицы, находящейся в точке  $q_0$ . Поскольку мера  $\mu_G = \langle \delta_{q_0}, \chi_G \rangle$  называется мерой Дирака, будем называть функционал (30) плотностью меры Дирака.

Функционалы (30) образуют линейное пространство, причем их линейная комбинация действует по правилу

$$\left\langle \sum_{i=1}^N \alpha_i \delta_{q_{(i)}}, f \right\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i f(q_{(i)}). \quad (31)$$

Аналогично предыдущему видно, что функционалы (31) задаются с помощью скалярной функции

$$\varphi(q) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \delta_{q_{(i)}}(q) = \begin{cases} \alpha_i, & q = q_{(i)}, \quad i = \overline{1, N}, \\ 0, & q \neq q_{(i)}, \quad i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (32)$$

значения которой в точках  $q_{(i)}$  равны  $\alpha_i$ , а действие функционала можно описать следующим образом: берутся значения функции, являющейся аргументом функционала, во всех точках, где значения функции, задающей функционал, не равны нулю, умножаются на значения этой функции в этих точках, и вычисляется сумма по всем таким точкам.

В модели точечных частиц плотностью их распределения в фазовом пространстве будем называть такую функцию вида (32), что для любой подобласти  $G$  из рассмотренного ранее семейства для задаваемого этой функцией функционала (31) имеет место (29). Легко понять, что при этом  $\alpha_i = 1$ , а  $q_{(i)}$  — положения частиц в фазовом пространстве,  $i = \overline{1, N}$ , где  $N$  — число частиц в рассматриваемой системе. Тогда плотность можно записать в виде

$$n(q) = \sum_{i=1}^N \delta_{q_{(i)}}(q). \quad (33)$$

Поскольку скалярную функцию можно рассматривать как форму нулевой степени, можно сказать, что в модели точечных частиц плотность задается формой нулевой степени.

Рассмотрим случай, который можно считать промежуточным между моделью с непрерывным распределением частиц в некоторой области и моделью точечных частиц. Рассмотрим систему частиц, в которой частицы непрерывно распределены на некоторой ориентированной поверхности  $S$  в фазовом пространстве,  $S \subset G_0$ .

Ориентация поверхности размерности  $m'$  задается в  $m$ -мерном многообразии набором векторов  $m-m'$ . Плотность распределения частиц на поверхности будем характеризовать дифференциальной формой степени  $m'$ , относительно компонент могут быть сделаны те же предположения, что и ранее: эти компоненты — непрерывно дифференцируемые функции координат. Форма, задающая плотность, должна быть согласована с ориентацией поверхности: изменение ориентации может повлечь умножение формы на  $-1$ .

Форма  $\sigma(q)$  степени  $m'$ , заданная на  $m'$ -мерной ориентированной поверхности  $S$  задает функционал, действующий на интегрируемые функции:

$$\langle \sigma(q), f \rangle = \int_S f(q) \sigma(q).$$

Фазовой плотностью в этом случае будем называть такую форму степени  $m'$

$$n(q) = \sigma(q), \quad (34)$$

чтобы выполнялось условие (29).

Обобщая все рассмотренные случаи, отметим, что при задании плотности распределения частиц должны быть заданы ориентированные поверхности различных размерностей от 0 до  $m$ , на которых задаются дифференциальные формы соответствующих степеней, так чтобы выполнялось условие (29). При этом соответствующий функционал равен сумме функционалов, определенных для каждого из рассматриваемых случаев. Кроме того, в рамках такого подхода ориентация области и точки не вводится, поскольку при интегрировании дифференциальной формы по области ориентация области не учитывается [50], а точки будем рассматривать как имеющие положительную ориентацию. Отметим также, что в рамках данного подхода плотность меры Дирака характеризуется скалярной функцией, которая может рассматриваться и как дифференциальная форма нулевой степени.

## 6. КОВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА

Уравнения динамики частиц задают некоторое векторное поле  $f$  в некоторой области  $G_0$  фазового пространства. Будем считать, что правые части уравнений динамики непрерывно дифференцируемы по фазовым координатам. Тогда через каждую точку области  $G_0$  проходит единственная интегральная кривая. В качестве параметра интегральных кривых возьмем время  $t$ .

Для описания эволюции фазовой плотности частиц в фазовом пространстве используем такие операции, как сдвиг Ли и перенос Ли.

Сдвиг Ли определим следующим образом. Рассмотрим отображение  $F_{f\delta t}$ , которое каждой точке  $q$  ( $q \in G_0$ ) ставит в соответствие точку, получаемую сдвигом вдоль интегральной кривой векторного поля  $f$ , проходящей через эту точку, на приращение параметра  $\delta t$ . Будем называть это отображение сдвигом Ли. В силу единственности интегральной кривой, проходящей через заданную точку, это отображение обратимо, т.е. является взаимнооднозначным. Для малых  $\delta t$  это отображение имеет вид  $F_{f\delta t}q = q + f(x)\delta t$ .

Отображение  $F_{f\delta t}$  индуцирует следующее преобразование координат. Для каждой точки  $q$  в качестве ее координат возьмем координаты ее прообраза при отображении  $F_{f\delta t}$ . Такое преобразование можно рассматривать как сдвиг всей системы координат. Обозначим эти координаты  $q_{(f\delta t)}^1, \dots, q_{(f\delta t)}^m$ .

Пусть на фазовом пространстве задан тензор  $T$ . В данной работе в качестве  $T$  мы рассматриваем дифференциальную форму, характеризующую плотность распределения. Плотность меры Дирака будем рассматривать как скалярную функцию, т. е. форму нулевой степени, значения которой отличны от нуля лишь на дискретном множестве точек.

Для каждой точки  $q \in G_0$  сделаем следующую процедуру. Зададим в точках, сдвинутых относительно точки  $q$  на параметр  $\delta t$  в результате отображения  $F_{f\delta t}$ , тензор следующим образом: его компоненты в точке  $F_{f\delta t}q$  в координатах  $q_{(f\delta t)}^1, \dots, q_{(f\delta t)}^m$  равны компонентам исходного тензора в точке  $q$  в тех координатах, которые рассматривались первоначально. Этот тензор будем называть переносом Ли исходного тензора вдоль векторного поля  $f$  на параметр  $\delta t$  и обозначать  $F_{f\delta t}T$ .

Легко доказать, что размерность носителя распределения частиц не меняется в процессе эволюции распределения, поскольку в качестве базисных векторов в точке, полученной переносом Ли вдоль векторного поля, определяемого уравнениями динамики, можно взять перенесенные базисные векторы. Примем также предположение, что не происходит рождения и уничтожения частиц. Это значит, что интегрирование по любой области фазового пространства или поверхности, где лежат частицы, дает те же результаты, что и для перенесенной области. Таким образом, компонента фазовой плотности в перенесенной точке в координатах, ассоциированных со сдвигом Ли, равна фазовой плотности в исходной точке в исходных координатах. А это и означает в соответствии с определением переноса Ли тензорного поля, что эволюцию формы плотности можно описать как перенос Ли формы плотности вдоль векторного поля, задаваемого уравнениями динамики частиц. Учитывая, что при переносе тензорного поля рассматриваются его значения в перенесенной точке, запишем уравнение эволюции формы плотности распределения в виде

$$n(t + \delta t, F_{f\delta t}q) = F_{f\delta t}n(t, q). \quad (35)$$

Будем называть это уравнение ковариантной формой уравнения Власова.

Уравнение (35) математическим образом выражает простой и широко известный факт: фазовая плотность сохраняется вдоль траекторий движения частиц в фазовом пространстве. Отсюда, в частности, вытекает, что если фазовая плотность зависит только от интегралов движения, то она сохраняется вдоль фазовых траекторий, поскольку в соответствии со своим определением интегралы движения не изменяются. При этом сохранение понимается именно в смысле переноса Ли.

Пусть фазовая плотность описывается формой высшей степени, т. е. формой, степень которой равна размерности фазового пространства  $m$ . Такая форма имеет всего одну компоненту, и для нее можно записать дифференциальное уравнение, содержащее производную Ли вдоль векторного поля  $f$ ,

которую можно определить для произвольного тензорного поля  $T$  как

$$\mathcal{L}_f T = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{T - F_{f\delta t} T}{\delta t}, \quad (36)$$

если этот предел существует.

Пусть при некотором  $t$  форма фазовой плотности в точке  $q$  равна  $n(t, q)$ . Тогда в следующий момент времени  $t + \delta t$  она будет равна  $n(t + \delta t, q) = F_{f, \delta t} n(t, F_{f, -\delta t} q)$ , поскольку за прошедший интервал времени  $\delta t$  форма изменялась в соответствии с уравнением (35). Вводя производную дифференциальной формы по параметру как форму, компоненты которой равны производным соответствующих компонент дифференцируемой формы, получим уравнение Власова в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\mathcal{L}_f n(t, q). \quad (37)$$

Кинетические уравнения в ковариантной форме рассматривались также в работах [54, 55]. При этом рассматривалось уравнение (37), которое справедливо только для формы высшей степени, и указывалось также, что в качестве его решения можно взять выражение (35) [54]. В данной работе мы рассматриваем в качестве первичного уравнение (35), а уравнение (37) следует из него лишь в частном случае, когда степень формы наивысшая.

Существенным моментом является то, что рассматриваемый в этой работе подход не содержит концепции фазового объема в отличие, например, от работы [55], где вводилась форма фазового объема  $\Psi$  и функция распределения как множитель в равенстве, связывающем фазовую плотность и форму фазового объема:  $n = f\Psi$ . Поскольку для введенной в [55] формы фазового объема также выполняется уравнение (37), оно же будет выполняться и для функции распределения (при этом в уравнении вместо  $n$  следует писать  $f$ ). Предложенный в [55] подход испытывает трудности в общем случае, поскольку форма фазового объема определяется там не как форма в шестимерном фазовом пространстве, а как форма в семимерном пространстве. При этом редукция к шестимерному пространству может быть выполнена только для плоского пространства-времени.

## 7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕВЫРОЖДЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПУЧКА С ПОМОЩЬЮ ПЛОТНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ

Введенный в предыдущем разделе аппарат можно применить для описания распределений частиц в пространстве интегралов движения. Введем плотность распределения частиц в пространстве интегралов движения  $M, H$  и обозначим ее компоненту в координатах  $M, H$  через  $f(M, H)$ . Для ограниченного по радиусу пучка будем задавать эту плотность в множестве  $\Omega_R$ .

Как отмечалось ранее, если частицы равномерно распределены по траекториям, соответствующим точке  $M$ ,  $H$ , и по фазам траекторий, а также если потенциал собственного поля пучка  $u$  таков, что функция (18) строго выпуклая, то плотность  $f(M, H)$  однозначно задает некоторое стационарное аксиально-симметричное и однородное вдоль оси самосогласованное распределение частиц.

Заметим, что  $M$ ,  $H$ , азимутальный угол  $\varphi$ , характеризующий поворот траектории в пространстве, и фазу частицы на траектории  $\theta$  можно взять как четыре координаты во введенном ранее четырехмерном фазовом пространстве поперечного движения.

Компоненту фазовой плотности как формы четвертой степени в этих координатах обозначим через  $n_{\varphi\theta MH}$ . Поскольку для каждой пары  $M, H$  частицы равномерно распределены по углам  $\varphi$  и по фазам  $\theta$ , имеем

$$n_{\varphi\theta MH} = \frac{f(M, H)}{4\pi P(M, H)},$$

где  $P(M, H)$  — изменение фазы вдоль половины траектории:

$$P(M, H) = \int_{r_{\min}(M, H)}^{r_{\max}(M, H)} \frac{dr}{|\dot{r}|} = \int_{r_{\min}(M, H)}^{r_{\max}(M, H)} \frac{dr}{\sqrt{H - \omega_0^2 r^2 - M^2/r^2 - 2\varepsilon U(r)}}. \quad (38)$$

В силу неравенства (21) внутри интервала интегрирования в (38)  $\dot{r} \neq 0$ .

Подставляя эту компоненту в уравнение Власова (37), имеем

$$\frac{\partial n_{\varphi\theta MH}}{\partial t} = -\frac{\partial n_{\varphi\theta MH}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} - \frac{\partial n_{\varphi\theta MH}}{\partial \theta} \dot{\theta} - \frac{\partial n_{\varphi\theta MH}}{\partial M} \dot{M} - \frac{\partial n_{\varphi\theta MH}}{\partial H} \dot{H}.$$

По построению  $n$  не зависит от  $t$ ,  $\varphi$  и  $\theta$ . Поэтому равны нулю левая часть и первое и второе слагаемые в правой части. А так как  $M$  и  $H$  не меняются при движении частицы, то  $n$  удовлетворяет уравнению Власова. Отметим, что равномерное распределение частиц по фазам траектории дает стационарность распределения.

Чтобы вычислить плотность частиц в конфигурационном пространстве, найдем сначала  $n_{xyMH}$ :

$$n_{xyMH} = n_{\varphi\theta MH} \det \left| \begin{pmatrix} \partial(\varphi, \theta) \\ \partial(x, y) \end{pmatrix} \right| = \frac{n_{\varphi\theta MH}}{r|\dot{r}|}.$$

Отсюда получаем, что плотность частиц в конфигурационном пространстве равна

$$\begin{aligned} \varrho(r) &= 2 \int_{\Omega(r)} n_{xyMH} dM dH = \\ &= \varrho(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\Omega(r)} \frac{f(M, H) dM dH}{P(M, H)(H - M^2/r^2 - \omega_0^2 r^2 - 2\varepsilon U(r))^{1/2}}. \quad (39) \end{aligned}$$

Множитель 2 перед первым интегралом в (39) учитывает, что поскольку одному и тому же допустимому значению  $H$  соответствуют два значения радиальной скорости (при  $\dot{r}^2 > 0$ ), то компонента плотности  $n_{xyMH}$  как функция  $M, H$  имеет две ветви: первая соответствует частицам, удаляющимся от оси  $z$ , а вторая — приближающимся.

Подставляя (39) в уравнение Пуассона, записанное в цилиндрических координатах, и учитывая, что производные по  $\varphi$  и  $z$  обращаются в нуль в силу симметрии распределения, имеем интегриродифференциальное уравнение для потенциала  $U(r)$ :

$$\frac{d}{dr} r \frac{dU}{dr} = -\frac{e}{2\pi\epsilon_0} \int_{\Omega(r)} \frac{f(M, H) dM dH}{P(M, H)(H - M^2/r^2 - \omega_0^2 r^2 - 2\epsilon U(r))^{1/2}}. \quad (40)$$

Таким образом, задача о построении стационарных самосогласованных распределений, однородных вдоль оси пучка и аксиально-симметричных, сводится к решению краевой задачи (40), (7).

Установим также связь между  $f(M, H)$  и функцией распределения. В качестве функции распределения можно взять компоненту фазовой плотности  $n_{xy\dot{x}\dot{y}}$ , поскольку компонента формы фазового объема в этих координатах равна 1. С учетом того, что  $\dot{\varphi} = (x\dot{y} - \dot{x}y)/r^2$ ,  $\dot{r} = (x\dot{x} + y\dot{y})/r$ , имеем

$$n_{xy\dot{x}\dot{y}} = \frac{1}{2} n_{xyMH} \det \left| \left( \frac{\partial(M, H)}{\partial(\dot{x}, \dot{y})} \right) \right| = r|\dot{r}| n_{xyMH}.$$

Отсюда получаем, что

$$n_{xy\dot{x}\dot{y}} = \frac{f(M(\mathbf{x}, \mathbf{v}), H(\mathbf{x}, \mathbf{v}))}{2\pi P(M(\mathbf{x}, \mathbf{v}), H(\mathbf{x}, \mathbf{v}))}. \quad (41)$$

Таким образом, задавая плотность в пространстве интегралов  $M, H$ , мы можем получать, используя соответствующие преобразования, фазовую плотность в различных координатах.

## 8. САМОСОГЛАСОВАННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПУЧКА

Как вытекает из (41), различные самосогласованные распределения для цилиндрического пучка, обладающие указанными свойствами, будут полностью определены, если задать плотность распределения частиц в пространстве интегралов движения  $f(M, H)$ . Но найти соответствующую фазовую плотность или функцию распределения представляет собой довольно сложную задачу, так как выражение для этих величин (41) содержит неизвестную

функцию  $P(M, H)$ , зависящую, в свою очередь, от самосогласованного потенциала  $u(r)$ . Кроме того, область интегрирования в уравнении (39) зависит также от  $u(r)$ .

С практической точки зрения удобнее искать решение задачи не для заданной плотности  $f(M, H)$ , а для заданного отношения

$$\tilde{f}(M, H) = \frac{f(M, H)}{2\pi P(M, H)}.$$

Как видно из соотношения (41), эта величина при выполнении сформулированных выше условий равна компоненте фазовой плотности  $n_{xy\dot{x}\dot{y}}$ , равной, в свою очередь, функции распределения.

Таким образом, если задать  $\tilde{f}(M, H)$  как некоторую функцию интегралов движения  $M$  и  $H$ , то это определит некоторое стационарное самосогласованное распределение. Действительно, по фазам траекторий  $\theta$  частицы должны быть распределены равномерно, иначе распределение было бы нестационарно, по углам  $\varphi$ , характеризующим траектории, тоже равномерно, иначе нарушилась бы азимутальная симметрия. А тогда, рассматривая  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $M$  и  $H$  как координаты в фазовом пространстве, приходим к тому, что такое задание функции распределения как функции  $M$  и  $H$  для стационарного азимутально-симметричного цилиндрического пучка равносильно заданию плотности распределения частиц в пространстве интегралов движения при условии равномерного распределения частиц по  $\theta$  и  $\varphi$ . Единственное ограничение здесь, как отмечалось ранее, это условие строгой выпуклости функции (18), которое требуется проверять, когда самосогласованный потенциал  $u(r)$  уже найден.

Вообще говоря, выражение функции распределения через интегралы движения является основным методом построения аналитических решений уравнения Власова. Такой подход широко используется не только для цилиндрического пучка. Известны, например, такие решения уравнения Власова для двухмерного фазового пространства, как моды Бернштейна–Грина–Крускала [56], когда функция распределения представляется как некоторая функция от энергии частиц. Задание функции распределения как функции интегралов движения применяется также при исследовании самосогласованных распределений для сгустка частиц, когда рассматриваются распределения частиц в шестимерном фазовом пространстве [57–61].

Для рассматриваемого здесь цилиндрического пучка построению решений уравнения Власова с помощью представления функции распределения как функции интегралов  $M$  и  $H$  посвящено большое количество работ. При этом во многих из них функция распределения рассматривается как функция только  $H$ . Далее мы проанализируем эти работы. Особое внимание будет уделено распределению типа «водяной мешок» как одному из наибо-



лее известных невырожденных распределений, а также теореме об инверсии плотности, позволяющей получать широкие классы распределений.

Сначала рассмотрим распределения, описанные в работах [31, 34, 37, 39], когда функция распределения задается в пространстве интегралов движения как полином по  $M$  и  $H$ . Отдельно рассмотрим частный случай полинома нулевой степени.

Если отношение  $\tilde{f}(M, H)$  представляет собой полином, можно получить конечное выражение для плотности  $\varrho(r)$ .

Преобразуем выражение (39) для плотности. Вводя величину  $\omega$ :

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon \frac{U(R) - U(r)}{R^2 - r^2},$$

имеем

$$\begin{aligned} \varrho(r) &= \frac{1}{r} \int_{-rR\omega}^{rR\omega} dM \times \\ &\times \int_{M^2/r^2 + \omega^2 r^2 + 2\varepsilon U(r)}^{M^2/r^2 + \omega^2 r^2 + 2\varepsilon U(r)} dH \left( H - \frac{M^2}{r^2} - \omega_0^2 - 2\varepsilon U(r) \right)^{-1/2} \tilde{f}(M, H) = \\ &= \frac{2}{r} \int_{-rR\omega}^{rR\omega} dM \int_0^{[M^2(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}) + \omega_0^2(R^2 - r^2) + 2\varepsilon(U(R) - U(r))]^{-1/2}} dv_r \times \\ &\quad \times \tilde{f}\left(M, v_r^2 + \frac{M^2}{r^2} + \omega_0^2 r^2 + 2\varepsilon U(r)\right) = \\ &= 2 \int_{-\omega R}^{\omega R} dv_{\perp} \int_0^{\sqrt{R^2 - r^2} \sqrt{\omega^2 - v_{\perp}^2 / R^2}} dv_r \tilde{f}(v_{\perp} r, v_r^2 + v_{\perp}^2 + \omega_0^2 r^2 + 2\varepsilon U(r)) = \\ &= 2R \int_{-\omega}^{\omega} dv_s \int_0^{\sqrt{R^2 - r^2} \sqrt{\omega^2 - v_s^2}} dv_r \tilde{f}(v_s r R, v_r^2 + v_s^2 R^2 + \omega_0^2 r^2 + 2\varepsilon U(r)) = \\ &= 2R \sqrt{R^2 - r^2} \int_{-\omega}^{\omega} dv_s \int_0^{\sqrt{\omega^2 - v_s^2}} dv_t \tilde{f}(v_s r R, v_t^2 (R^2 - r^2) + v_s^2 R^2 + \omega_0^2 r^2 + 2\varepsilon U(r)), \end{aligned}$$

где  $v_s \equiv v_\perp/R$ ,  $v_t \equiv v_r/\sqrt{R^2 - r^2}$ . Вместо переменных интегрирования  $v_s$ ,  $v_t$  введем переменные  $v$  и  $\theta$ :  $v_s = v \cos \theta$ ,  $v_t = v \sin \theta$ . Тогда

$$\begin{aligned} \varrho(r) &= 2R^2 \sqrt{R^2 - r^2} \int_0^\pi d\theta \times \\ &\times \int_0^{\sqrt{\omega_0^2 + 2\varepsilon(U(R) - U(r))/(R^2 - r^2)}} \tilde{f}(vrR \cos \theta, v^2(R^2 - r^2 \sin^2 \theta) + V_0(r)) v dv. \end{aligned} \quad (42)$$

Подставляя полученное выражение для плотности в уравнение Пуассона, получим интегродифференциальное уравнение для определения  $U(r)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{du}{dr} &= - \frac{2eR \sqrt{R^2 - r^2}}{\varepsilon_0} \times \\ &\times \int_0^\pi d\theta \int_0^{\sqrt{\omega_0^2 + 2\varepsilon(U(R) - U(r))/(R^2 - r^2)}} \tilde{f}(vrR \cos \theta, v^2(R^2 - r^2 \sin^2 \theta) + V_0(r)) v dv. \end{aligned} \quad (43)$$

Если  $\tilde{f}(M, H)$  представляет собой полином, то из (42) нетрудно получить выражение для  $\varrho(r)$  в конечном виде, поскольку в этом случае подынтегральное выражение в (42) является полиномом от  $v \cos \theta$  и интегрируется в элементарных функциях. В этом случае уравнение (43) редуцируется к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению.

Так, например, если

$$\tilde{f}(M, H) = f_0 + \alpha_1 H + \alpha_2 M,$$

где  $f_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  — некоторые постоянные, ограниченные только условием  $\tilde{f}(M, H) \geq 0$ , то

$$\begin{aligned} \varrho(r) &= \pi R (R^2 - r^2)^{1/2} \left[ \omega_0^2 + 2\varepsilon \frac{U(R) - U(r)}{R^2 - r^2} \right] \{ f_0 + \alpha_1 [\omega^2 r^2 + 2\varepsilon U(r)] \} + \\ &+ \pi \alpha_1 \frac{R (R^2 - r^2)^{1/2}}{2} \left( R^2 - \frac{r^2}{2} \right) \left[ \omega_0^2 + 2\varepsilon \frac{U(R) - U(r)}{R^2 - r^2} \right]^2. \end{aligned} \quad (44)$$

Видно, что  $\varrho(r)$  не зависит от  $\alpha_2$ . Из общего выражения (42) также следует, что слагаемые с нечетными степенями  $M$  не дают вклада в  $\varrho(r)$ .

### 9. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ОДНОРОДНОЙ ФАЗОВОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

В наиболее простом случае полинома нулевой степени [31, 34, 37, 39], когда функция распределения постоянна при всех допустимых значениях интегралов движения  $M$  и  $H$ , получаем

$$\varrho(r) = \pi f_0 R \left( \omega_0^2 \sqrt{R^2 - r^2} + 2\varepsilon \frac{U(R) - U(r)}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right). \quad (45)$$

Вводя безразмерные величины

$$y = \frac{r}{R}, \quad \Phi(y) = 2\varepsilon \frac{U(yR) - U(R)}{\omega_0^2 R^2}, \quad \lambda = 2\pi e f_0 \varepsilon R^2 / \varepsilon_0 > 0, \quad (46)$$

запишем уравнение Пуассона (40) в виде

$$\frac{1}{y} \frac{d}{dy} y \frac{d\Phi}{dy} = -\lambda \left[ (1 - y^2)^{1/2} - \frac{\Phi(y)}{(1 - y^2)^{1/2}} \right]. \quad (47)$$

Согласно условиям (7) граничные условия для  $\Phi$  есть

$$\Phi(1) = 0, \quad \left. \frac{d\Phi}{dy} \right|_{y=0} = 0. \quad (48)$$

Можно доказать, что решение краевой задачи (47), (48), определенное на интервале  $[0, 1]$ , существует и единственно при любых положительных значениях параметра  $\lambda$ . Можно также доказать некоторые свойства решения краевой задачи (47), (48), из которых, в частности, вытекает, что сформулированное выше условие строгой выпуклости функции  $V_0(r) = \omega_0^2 R^2 (y^2 + \Phi(y)) + 2\varepsilon U(R)$  удовлетворяется, а также что

$$0 < \varrho(r) < \varrho_B, \quad 0 \leq r < 1, \quad (49)$$

где  $\rho_B = \varepsilon_0 B_z^2 \gamma / 2m_0$  — плотность бриллюэновского потока, который будет рассмотрен далее. Левое неравенство в (49) означает, что плотность частиц положительна, так что решение  $\Phi(y)$  физически реализуемо. Правое неравенство (49) означает, что плотность в любой точке не превосходит плотности бриллюэновского потока. Кроме того, можно показать, что предельное значение плотности при  $\lambda \rightarrow \infty$  есть плотность бриллюэновского потока. Поскольку функция распределения есть  $f_0 = \lambda \varepsilon_0 / 2\pi e R^2 \varepsilon$ , то  $\lambda \rightarrow \infty$  означает, что  $f_0 \rightarrow \infty$ .

Наконец, можно показать, что при  $\lambda \rightarrow \infty$  множество  $\Omega_R$  сжимается в точку  $(0, 0)$ .

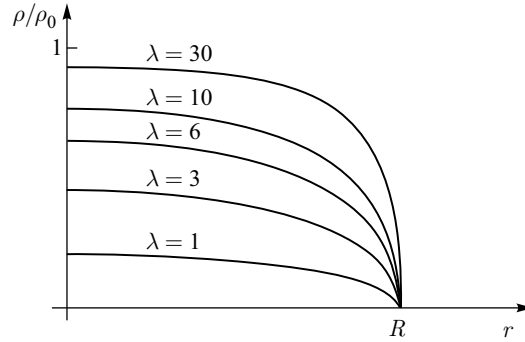


Рис. 4. Радиальные профили плотности пучка при различных значениях  $\lambda$

Таким образом, предельным распределением для рассматриваемых распределений является поток Бриллюэна, для которого плотность частиц постоянна ( $\rho_0 = \rho_B$ ) и сила электрического тока  $J = e\beta cL = \pi R^2 \rho_0 e\beta c = \pi \epsilon_0 R^2 B_z^2 \gamma \beta c / 2m_0$ .

В работе [31] (см. также [34, 37, 39]) приводятся результаты численного решения краевой задачи (47), (48). Профили плотности пучка, полученные в результате численного решения при различных значениях параметра  $\lambda$ , представлены на рис. 4.

## 10. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТИПА «ВОДЯНОЙ МЕШОК»

Во многих случаях функция распределения задается не во всей области  $\Omega_R$ , а лишь в ее части. Наиболее распространенное ограничение области задания имеет вид

$$H \leq H_0. \quad (50)$$

Отметим, что при этом есть и другие ограничения на фазовые переменные, о которых обычно умалчивают. В этой работе мы в качестве таких ограничений используем ограничение радиальной координаты траекторий частиц  $r \leq R$  и вытекающие отсюда ограничения на интеграл  $M$ . Обозначим область, сверху ограниченную линией (50), где  $H_0 = \omega_0^2 R^2 + 2\epsilon U(R)$ , а снизу — нижней границей множества  $\Omega_R$  через  $\Omega_0$ .

Рассмотренные далее распределение типа «водяной мешок» и теорема об инверсии плотности справедливы при задании функции распределения именно в области  $\Omega_0$ .

Распределение типа «водяной мешок» (см. [7, 15, 30]) характеризуется тем, что функция распределения частиц постоянна в области  $\Omega_0$ :  $\tilde{f}(M, H) = f_0$ , но в отличие от предыдущего случая частицы заполняют не все множество  $\Omega_R$ ,

а только его часть  $\Omega_0$ . Говорят также, что частицы заполняют внутренность энергетической поверхности  $H = H_0$  с постоянной фазовой плотностью. Название «водяной мешок» происходит оттого, что распределение частиц в фазовом пространстве, обладая однородной фазовой плотностью, подобно несжимаемой жидкости, плотность которой также однородна. С этой точки зрения распределение, рассмотренное в предыдущем разделе, тоже можно назвать распределением типа «водяной мешок», но с областью задания фазовых переменных, включающей все пространство  $\Omega_R$ , а не только его часть  $\Omega_0$ .

Чтобы записать уравнение Пуассона для рассматриваемого случая, преобразуем выражение для плотности (39), учитывая, что область интегрирования определяется неравенствами

$$\omega_0^2 + \frac{M^2}{r^2} + 2\varepsilon U(r) \leq H \leq \omega_0^2 R^2 + 2\varepsilon U(R), \quad (51)$$

$$|M| < \eta r, \quad \text{где} \quad \eta^2 = \omega_0^2(R^2 - r^2) + 2\varepsilon(U(R) - U(r)).$$

Используя переменные интегрирования  $v_r = r'$ ,  $v_\perp = M/r$ , имеем

$$\varrho(r) = \frac{1}{r} \int_{\eta r}^{\eta r} dM \int_{\omega_0^2 r^2 + M^2/r^2 + 2\varepsilon U(r)}^{\omega_0^2 R^2 + 2\varepsilon U(R)} \frac{f_0 dH}{\sqrt{H - \omega_0^2 r^2 - M^2/r^2 - 2\varepsilon U(r)}} =$$

$$= \int_{-\eta}^{\eta} dv_\perp \int_0^{\sqrt{\eta^2 - v_\perp^2}} f_0 dv_r = \pi \eta^2 f_0 = \pi(\omega(R^2 - r^2) + 2\varepsilon(U(R) - U(r))). \quad (52)$$

Теперь запишем уравнение Пуассона (40):

$$\frac{1}{r} \frac{dU}{dr} r \frac{dU}{dr} = -\frac{\pi e f_0}{\varepsilon_0} (\omega(R^2 - r^2) + 2\varepsilon(U(R) - U(r))).$$

Переходя к безразмерным переменным (46), имеем

$$\Phi'' + \frac{1}{y} \Phi' - \lambda \Phi = -\lambda(1 - y^2). \quad (53)$$

Граничные условия для безразмерного потенциала  $\Phi$ , как и ранее, имеют вид (48).

Однородное уравнение, соответствующее уравнению (53), представляет собой уравнение Бесселя, ограниченное в точке  $y = 0$ , решение которого есть  $\Phi_0 = \alpha I_0(\sqrt{\lambda} y)$ , где  $I_0(z)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода, а  $\alpha$  — произвольная постоянная. Решение неоднородного уравнения (53) будем искать в виде  $\Phi(y) = c_1 + c_2 y^2$ . Подставляя в (53), получим

$$4c_2 - \lambda c_1 - \lambda c_2 y^2 = -\lambda + \lambda y^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $y$ , находим  $c_1$  и  $c_2$ :  $c_1 = 1 - 4/\lambda$ ,  $c_2 = -1$ . Тогда общее решение уравнения (53), ограниченное в нуле, запишем в виде

$$\Phi = 1 - \frac{4}{\lambda} - y^2 + \alpha I_0(\sqrt{\lambda}y).$$

Второе условие (48) выполнено, так как производная функции  $J_0(z)$  в нуле равна нулю. Требуя, чтобы выполнялось первое условие (48), а именно  $\Phi(1) = 0$ , находим  $\alpha$ :  $\alpha = 4/(\lambda I_0(\sqrt{\lambda}))$ . Таким образом, решение задачи (53), (48) имеет вид

$$\Phi(y) = 1 - y^2 + \frac{4}{\lambda} \left( \frac{I_0(\sqrt{\lambda}y)}{I_0(\sqrt{\lambda})} - 1 \right). \quad (54)$$

Поскольку

$$\frac{d^2}{dy^2}(\Phi(y) + y^2) > 0,$$

условие строгой выпуклости введенной ранее функции  $V_0(r)$ , наложенное при выводе выражения для плотности (39), выполняется. В соответствии с (52) плотность частиц равна

$$\varrho(r) = \frac{\omega_0^2 \varepsilon_0}{4e\varepsilon} \lambda (1 - y^2 - \Phi(y)) = \lambda \left( 1 - y^2 - \Phi(y) \right) \frac{\varrho_B}{4} = \varrho_B \left( 1 - \frac{I_0(\sqrt{\lambda}y)}{I_0(\sqrt{\lambda})} \right).$$

Видно, что

$$0 < \varrho(r) < \varrho_B, \quad 0 \leq r < 1.$$

Поскольку при  $\lambda \rightarrow \infty$   $I_0(\sqrt{\lambda}y)/I_0(\sqrt{\lambda}) \rightarrow 0$ ,  $y < 1$ , то  $\varrho(r) \rightarrow \varrho_B$ , как и для распределения, рассмотренного в предыдущем разделе.

Аналогично предыдущему можно показать, что и область допустимых значений  $H$ ,  $M$  сжимается в точку, соответствующую бриллюэновскому потоку, так что предельное распределение и в этом случае есть бриллюэновский поток.

## 11. ТЕОРЕМА ОБ ИНВЕРСИИ ПЛОТНОСТИ

В работе [46] предложена теорема об инверсии плотности, которая позволяет находить широкие классы самосогласованных распределений для стационарного аксиально-симметричного продольно-однородного пучка, распространяющегося в однородном продольном магнитном поле, в случае, когда функция распределения зависит только от интеграла  $H$ .

Сформулируем и докажем эту теорему. Пусть функция распределения частиц зависит только от интеграла движения  $H$  и не зависит от  $M$ :  $\tilde{f}(M, H) =$

$f_H(H)$ . Кроме того, будем считать, что все частицы находятся внутри энергетической поверхности (как и в предыдущем разделе):  $H \leq H_0 = \omega_0^2 R^2 + 4\varepsilon U(R)$ . Тогда если  $\varrho(r)$  — монотонно убывающая функция  $r$ , можно найти функцию распределения по формуле

$$f_H(V_0(r)) = -\frac{1}{dV_0/dr} \frac{d\varrho}{dr}, \quad (55)$$

где  $V_0(r)$  — функция, задаваемая выражением (18).

Прежде всего заметим, что условие строгой выпуклости функции  $V_0(r)$  здесь выполняется. Действительно,  $r^{-1}d/dr(r du/dr)$  — монотонно возрастающая функция. Это означает, что  $u''(r) + u'(r)/r > u''(0)$ . Поскольку  $u'(r) < 0$  при  $r > 0$ , имеем  $u''(r) > u''(0)$ . Учтем также, что  $V_0''(0) \geq 0$ . Противное означает, что напряженность магнитного поля недостаточна для того, чтобы удерживать частицы вблизи оси пучка. Тогда  $V_0''(r) > 0$  при  $r > 0$ , и функция  $V_0(r)$  выпуклая.

Для доказательства теоремы запишем выражение для плотности (39) и перейдем к переменным интегрирования  $v_\perp$  и  $v_r$ . Действуя так же, как и при выводе выражения для плотности распределения типа «водяной мешок» (52), имеем

$$\begin{aligned} \varrho(r) &= \frac{1}{r} \int_{\eta r}^{\eta r} dM \int_{\omega_0^2 r^2 + M^2/r^2 + 2\varepsilon U(r)}^{\omega_0^2 R^2 + 2\varepsilon U(R)} \frac{f_H(H) dH}{\sqrt{H - \omega_0^2 r^2 - M^2/r^2 - 2\varepsilon U(r)}} = \\ &= 2 \int_{-\eta}^{\eta} dv_\perp \int_0^{\sqrt{\eta^2 - v_\perp^2}} f_H(v_r^2 + v_\perp^2 + \omega_0^2 + 2\varepsilon U(r)) dv_r = \\ &= \pi \int_0^{\eta} f_H(v_t^2 + \omega_0^2 + 2\varepsilon U(r)) v_t dv_t = \\ &= \pi \int_{\omega_0^2 r^2 + 2\varepsilon U(r)}^{\omega_0^2 R^2 + 2\varepsilon U(R)} f_H(H) dH = \pi \int_{V_0(r)}^{V_0(R)} f_H(H) dH. \quad (56) \end{aligned}$$

Дифференцируя это равенство по  $r$ , получаем соотношение (55).

Таким образом, если задан потенциал самосогласованного поля  $U(r)$ , можно найти соответствующую этому потенциалу плотность  $\varrho(r)$ , выбрать некоторое значение  $r$  и найти соответствующее значение  $V_0(r)$ , которое определяется однозначно, так как  $V_0(r)$  — монотонно возрастающая функция. Найденное значение  $V_0(r)$  и определяет то значение  $H$ , для которого выражение (55) задает функцию распределения.

Если плотность распределения частиц задана в конфигурационном пространстве, то использовать выражение (55) можно только тогда, когда удастся разрешить уравнение Пуассона для этой плотности, чтобы найти аргумент  $f_H$ , для которого определяется эта функция.

## 12. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПУЧКА

Равномерно заряженный цилиндрический пучок рассматривался во многих работах [6–8, 13, 14, 32, 34, 37–39, 42, 44, 48, 62], поскольку для такого пучка проще найти решения уравнения Власова. Одно из первых известных равномерных по сечению пучка самосогласованных распределений — поток Бриллюэна [47]. Наиболее широкой известностью пользуется распределение Капчинского–Владимирского [7, 15, 28], которое также характеризуется равномерным распределением заряда по сечению пучка.

Итак, рассмотрим пучок, для которого плотность частиц в конфигурационном пространстве  $\varrho(r)$  постоянна в пределах его поперечного сечения:

$$\varrho(r) = \begin{cases} \varrho_0, & r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (57)$$

Тогда уравнение Пуассона можно записать в виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dU}{dr} = -\frac{e}{\varepsilon_0} \varrho_0, \quad r \leq R.$$

Решение краевой задачи для этого уравнения при условиях (7) имеет вид

$$U(r) = -\frac{e\varrho_0 r^2}{4\varepsilon_0}. \quad (58)$$

Рассмотрим сначала поток Бриллюэна [47]. Все частицы потока Бриллюэна вращаются с одинаковой угловой скоростью  $\dot{\varphi} = -\omega_0$  вокруг оси пучка, так что азимутальная компонента импульса для каждой частицы равна нулю:  $M = r^2(\omega_0 + \dot{\varphi}) = 0$ . Плотность частиц и электрический ток для потока Бриллюэна можно определить из уравнения (15). Поскольку  $\dot{r}$  для частиц бриллюэновского потока равно нулю, находим

$$\varrho_B = \frac{2\varepsilon_0 \omega_0^2}{e\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0 B_z^2 \gamma}{2m}, \quad J = e\beta c \pi R^2 \varrho_B = \frac{\pi e \varepsilon_0 B_z^2 R^2}{2m} \gamma \beta c. \quad (59)$$

Подставляя это значение в выражение для потенциала (58) и учитывая, что частицы сохраняют свою радиальную координату ( $\dot{r} = 0$ ), находим, что интеграл  $H$  для каждой из частиц также равен нулю. Таким образом, в пространстве интегралов движения поток Бриллюэна представляется точкой в начале координат.



С физической точки зрения поток Бриллюэна можно рассматривать как поток наибольшей плотности для заданных магнитного поля и радиуса пучка, который может распространяться вдоль магнитного поля. Электромагнитные силы поперечного расталкивания частиц компенсируются фокусирующими силами, действующими со стороны продольного магнитного поля. Но силы расталкивания настолько велики, что фокусирующие силы уже не могут удержать частицы, не только совершающие азимутальное движение, но и удаляющиеся от оси пучка.

Фазовая плотность потока Бриллюэна также удовлетворяет уравнению Власова (35), в котором векторное поле  $f$  определяется траекториями движения частиц в фазовом пространстве [41]. При этом фазовая плотность описывается формой второй степени, определенной на поверхности  $M = 0$ ,  $H = 0$ . Поскольку указанная поверхность не изменяется, ее также можно рассматривать как фазовое пространство. Для фазовой плотности в этом пространстве можно записать уравнение Власова (37). Выберем в качестве координат на рассматриваемой поверхности  $r$  и  $\varphi$ . Тогда уравнение Власова принимает вид

$$\frac{\partial n_{r\varphi}}{\partial t} + \dot{r} \frac{\partial n_{r\varphi}}{\partial r} + \dot{\varphi} \frac{\partial n_{r\varphi}}{\partial \varphi} = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется, поскольку в соответствии со сделанным предположением распределение стационарно,  $\dot{r} = 0$ , и частицы равномерно распределены по  $\varphi$ .

Далее будем рассматривать распределения с постоянной плотностью на основе подхода, предложенного в работах [32, 34, 37–39, 42, 44]. Будем считать, что плотность частиц меньше плотности потока Бриллюэна ( $\varrho_0 < \varrho_B$ ), и введем переменную  $\omega$ :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{e\varrho_0\varepsilon}{2\varepsilon_0}. \quad (60)$$

Условие строгой выпуклости функции  $V_0(r)$  выполняется, поскольку  $V_0(r) = \omega^2 r^2$ ,  $\omega^2 > 0$ .

Подставляя (58) в (38), (39), имеем

$$P(M, H) = \int_{r_{\min}(M, H)}^{r_{\max}(M, H)} \frac{r dr}{\sqrt{Hr^2 - M^2 - \omega^2 r^4}} = \frac{\pi}{2\omega},$$

и выражение (39) принимает вид

$$\varrho(r) = \frac{\omega}{\pi^2 r} \int_{\Omega(r)} \frac{f(M, H) dM dH}{(H - M^2/r^2 - \omega^2 r^2)^{1/2}}. \quad (61)$$

В рассматриваемом случае точка минимума функции  $V_M(r) = \omega^2 r^2 + M^2/r^2$  равна  $r_0(M, H) = \sqrt{|M|/\omega}$ , и неравенства (20), (21), определяющие пространство интегралов движения, принимают вид

$$2\omega|M| \leq H \leq \frac{M^2}{R^2} + \omega^2 R^2. \quad (62)$$

Для множества  $\Omega(r)$  из (23), (24) имеем

$$\omega^2 r^2 + \frac{M^2}{r^2} \leq H \leq \frac{M^2}{R^2} + \omega^2 R^2, \quad |M| \leq \omega r R. \quad (63)$$

Рассмотрим теперь распределение Капчинского–Владимирского. Оно также называется микроканоническим, поскольку все частицы имеют одну и ту же энергию поперечного движения  $H = H_0$ . Аналогичное распределение, характеризуемое тем, что частицы лежат на некоторой поверхности в фазовом пространстве, а плотность в конфигурационном пространстве постоянна, для пучка, фокусируемого поперечными высокочастотными электрическими полями, было впервые найдено Капчинским и Владимирским [28] и называется распределением Капчинского–Владимирского. Поскольку в рассматриваемом нами случае все частицы лежат на энергетической поверхности, это распределение также называют распределением Капчинского–Владимирского, но для пучка в продольном магнитном поле.

Энергетическую поверхность можно рассматривать как фазовое пространство, поскольку частицы остаются на этой поверхности при своем движении. Выберем азимутальный угол  $\varphi$ , фазу частицы на траектории  $\theta$  и интеграл  $M$  в качестве координат в фазовом пространстве. Уравнение Власова (37) в этих координатах принимает вид

$$\frac{\partial n_{\varphi\theta M}}{\partial t} + \dot{\varphi} \frac{\partial n_{\varphi\theta M}}{\partial \varphi} + \dot{\theta} \frac{\partial n_{\varphi\theta M}}{\partial \theta} + \dot{M} \frac{\partial n_{\varphi\theta M}}{\partial M} = 0. \quad (64)$$

Уравнение (64) удовлетворяется для стационарного аксиально-симметричного пучка при введенном ранее условии, что частицы равномерно распределены по фазам траекторий, поскольку каждый из членов левой части уравнения равен нулю (первый член — в силу стационарности, второй и третий — в силу однородности распределения по  $\varphi$  и  $\theta$ , а четвертый — в силу того, что  $M$  — интеграл движения).

Потребуем дополнительно, чтобы частицы были распределены равномерно также по  $M$ . Покажем, что именно для такого распределения пространственная плотность частиц однородна внутри сечения пучка, т. е. рассматриваемое распределение и есть распределение Капчинского–Владимирского.

Введем в фазовом пространстве координаты  $x, y, M$ . Аналогично предыдущему компонента фазовой плотности в этих координатах равна

$$n_{xyM} = 2n_{\varphi\theta M} \det \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\theta}{\partial x} & \frac{\partial\theta}{\partial y} \end{pmatrix} \right| = \frac{2n_{\varphi\theta M}}{r|\dot{r}|}. \quad (65)$$

Тогда

$$\varrho(r) = \int_{-M_0}^{M_0} n_{xyM} dM = \frac{2n_{\varphi\theta M}}{r} \int_{-M_0}^{M_0} \frac{dM}{(H_0 - M^2/r^2 - \omega^2 r^2)^{1/2}} = 2\pi n_{\varphi\theta M},$$

если  $r \leq \sqrt{H}\omega$ , и  $\varrho(r) = 0$ , если  $r > \sqrt{H}\omega$ . Таким образом,  $H_0 = \omega^2 R^2$ . Кроме того, нетрудно получить, что  $M_0 = \omega R^2/2$ .

Итак, носителем распределения Капчинского–Владимирского в пространстве интегралов движения является прямолинейный отрезок  $S_0$ :

$$H = \omega^2 R^2, \quad M \in [-\omega R^2/2, \omega R^2/2]$$

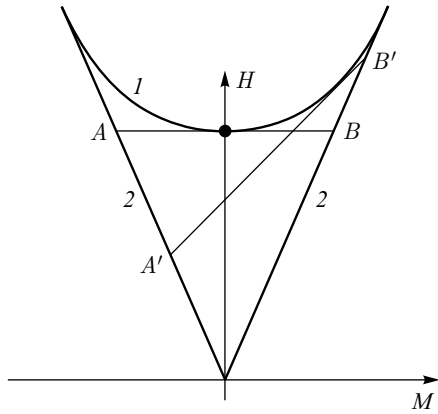


Рис. 5. Пространство  $\Omega_R$  для однородного пучка: кривая  $I$  — верхняя граница значений  $H : \Omega_R : H = M^2/R^2 + \omega^2 R^2$ ; линии  $2$  — нижняя граница значений  $H : \Omega_R : H = 2\omega|M|$

(отрезок  $AB$  на рис. 5). При этом плотность распределения  $f_0(M, H)$  в пространстве интегралов движения однородна на этом отрезке:

$$f_0(H, M) = f_0 dM, \\ f_0 = 2\pi^2 n_{\varphi\theta M} / \omega.$$

Если в качестве координат в фазовом пространстве поперечного движения выбрать  $r, \varphi, v_r = \dot{r}$  и  $v_{\perp} = r(\dot{\varphi} + \omega_0)$ , то сечения поверхности, на которой находятся частицы, гиперплоскостями  $r = \text{const}, \varphi = \text{const}$  представляют собой окружности (см. рис. 3).

Перейдем к распределению, которое можно рассматривать как обобщение распределения Капчинского–Владимирского. Рассмотрим вырожденное распределение, для которого частицы находятся на некотором отрезке  $S_k \in \Omega_R$ , лежащем в пространстве интегралов движения:

$$H = kM + H_0, \quad (M, H) \in \Omega_R. \quad (66)$$

рожденное распределение, для которого частицы находятся на некотором отрезке  $S_k \in \Omega_R$ , лежащем в пространстве интегралов движения:

В этом случае плотность в пространстве интегралов движения задается формой первой степени, которую обозначим через  $f_k(M, H)$  и которая имеет вид

$$f_k(M, H) = f_k dM, \quad (M, H) \in S_k, \quad f_k > 0, \quad (67)$$

где  $f_k$  принимает одно и то же значение во всех точках отрезка  $S_k$ .

Поскольку для каждой пары  $M, H$  частицы равномерно распределены по углам и по фазам траекторий, то, как и для распределения Капчинского–Владимирского,  $f_k = 2\pi^2 n_{\varphi\theta M} / \omega$ . В этом случае также справедливо равенство (65). Тогда получаем, что для распределения (67) плотность частиц  $\varrho(r)$  не зависит от  $r$  при  $r$  меньше некоторого  $R$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \varrho(r) &= 2 \int_{M_1}^{M_2} f_{xyM} dM = \\ &= \frac{\omega f_k}{\pi^2 r} \int_{M_1}^{M_2} \frac{dM}{(H_0 + kM - M^2/r^2 - \omega^2 r^2)^{1/2}} = \frac{\omega f_k}{\pi} = \varrho_0. \end{aligned} \quad (68)$$

Здесь  $M_1$  и  $M_2$  — корни знаменателя в подынтегральном выражении

$$M_{1,2} = \frac{kr^2}{2} \pm \left( \frac{k^2 r^4}{4} + H_0 r^2 - \omega^2 r^4 \right)^{1/2}.$$

Таким образом, распределение (67) задает распределение, равномерное внутри сечения некоторого радиуса. Учитывая, что этот радиус и есть радиус пучка  $R$ , можно получить соотношение, связывающее параметры  $H_0$  с  $k$ , которые задают отрезок (66). Поскольку знаменатель в (68) представляет собой радиальную скорость частицы, движение происходит в тех областях, где подкоренное выражение в (68) неотрицательно. Наибольшее значение координаты  $r$ , удовлетворяющее условию неотрицательности подкоренного выражения в (68), которое имеет вид  $k^2 r^4 / 4 + H_0 r^2 - \omega^2 r^4 \geq 0$ , равно  $[H_0 / (\omega^2 - k^2 / 4)]^{1/2}$ . Следовательно, имеем  $H_0 = R^2 (\omega^2 - k^2 / 4)$ .

Нетрудно видеть, что  $M_1$  и  $M_2$  — абсциссы точек пересечения прямой линии  $H = H_0 + kM$  прямыми линиями  $H = 2\omega M$  и  $H = -2\omega M$ , ограничивающими пространство интегралов движения  $\Omega_R$ , поскольку эти линии также определяются условием равенства нулю знаменателя подынтегрального выражения в (68).

Легко показать, что прямая линия  $H = H_0 + kM$  с такими значениями  $H_0$  и  $k$  является касательной к параболе  $H = M^2 / R^2 + \omega^2 R^2$ , представляющей собой верхнюю границу пространства интегралов движения. Найдем точки пересечения или касания прямой  $H = H_0 + kM$  и верхней границы множе-

ства  $\Omega_R$ , приравнивая правые части соответствующих уравнений:

$$R^2 \left( \omega^2 - \frac{k^2}{4} \right) + kM = \frac{M^2}{R^2} + \omega^2 R^2.$$

Отсюда находим единственное значение  $M$ :  $M = kR^2$ . Подставляя это значение в уравнение касательной к параболе  $H = M^2/R^2 + \omega^2 R^2$ , получаем, что наклон касательной в точке, являющейся общей для прямой и параболы, есть  $k$ , т. е. совпадает с наклоном прямой, так что найденная общая точка есть точка касания.

Итак, носитель плотности распределения (67) есть отрезок прямой, касательной к криволинейной части границы пространства интегралов движения, и содержащийся в нем (отрезок  $A'B'$  на рис. 5). Предельные положения этого отрезка — прямолинейные части границы пространства интегралов движения  $\Omega_R$ .

Распределения (67) с  $k \neq 0$  также хорошо известны. В работах [6, 13, 48, 14] они рассматриваются как наиболее простой пример так называемых распределений типа «жесткого ротатора». В общем случае распределение типа «жесткого ротатора» — это такое распределение, при котором его плотность в фазовом пространстве зависит только от комбинации  $H + kM$ , но не от  $M$  и  $H$  по отдельности.

Средний угловой момент для распределений (67) не равен нулю, за исключением распределения Капчинского–Владимирского. Это можно увидеть из рис. 5, где часть отрезка  $A'B'$ , находящаяся в левой полуплоскости, не равна части отрезка  $A'B'$  в правой полуплоскости. По этой причине такие распределения, кроме распределения Капчинского–Владимирского, не являются хорошими моделями, поскольку реальный пучок запускается со средним моментом, равным нулю.

Заметим, что значения  $f_k$  могут быть произвольно велики. Действительно, подставляя выражение для  $\varrho_0$  из (68) в (60) и разрешая относительно  $\omega$ , получим

$$\omega = -\frac{e\varepsilon f_k}{4\pi\varepsilon_0} + \left[ \frac{e^2\varepsilon^2 f_k^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2} + \omega_0^2 \right]^{1/2}. \quad (69)$$

Если  $f_k \rightarrow \infty$ , то главный член последнего выражения равен  $2\pi\varepsilon_0\omega_0^2(e\varepsilon f_k)^{-1}$ . Поэтому  $\varrho_0 \rightarrow 2\varepsilon_0\omega_0^2/e\varepsilon = \varrho_B$ . Пространство интегралов движения  $\Omega_R$  сжимается в точку  $(0, 0)$ , поскольку его размер определяется величиной  $\omega$ , а  $\omega \rightarrow 0$ . Таким образом, предельное распределение при  $f_k \rightarrow \infty$  есть бриллюэновский поток.

Легко понять, что мы получим равномерные по сечению пучка распределения, взяв произвольные линейные комбинации распределений (67). Для описания реального пучка можно брать линейные комбинации со средним угловым моментом, равным нулю.

Рассмотрим, например, линейную комбинацию конечного числа распределений (67)

$$f(M, H) = \sum_{k \in K} f_k(M, H), \quad (70)$$

где  $H_0(k) = R^2(\omega^2 - k^2/4) > 0$  и  $K$  — некоторое числовое множество,  $K \subset (-2\omega, 2\omega)$ . Подставляя (70) в (61), имеем

$$\varrho_0 = \frac{\omega}{\pi} \sum_{k \in K} f_k.$$

В общем случае

$$f(M, H) = \int_{-2\omega}^{2\omega} f_k(M, H) dk, \quad f_k > 0. \quad (71)$$

В (71) интегрирование происходит по угловому коэффициенту  $k$ , характеризующему отрезок прямой, проходящий через точку  $(M, H)$ , касательный к верхней границе множества  $\Omega_R$  — параболы  $H = \omega^2 R^2 + M^2/R^2$ . В то же время параметр  $k$ , характеризующий данный отрезок, можно рассматривать в качестве координаты в фазовом пространстве. При этом фазовая плотность уже описывается формой четвертой степени и ее компонента в координатах, например,  $\varphi, \theta, M, k$  обозначается как  $n_{\varphi\theta Mk}$ . Но для рассматриваемых здесь распределений эта компонента от координат  $\varphi, \theta, M$  не зависит, и тогда можно сохранить для нее ранее использовавшееся обозначение  $f_k$ .

Для плотности в конфигурационном пространстве имеем

$$\begin{aligned} \varrho_0 &= 2 \int_{-2\omega}^{2\omega} \int_{M_1(k)}^{M_2(k)} f_{xyMk} dM dk = \\ &= \frac{\omega}{\pi^2 r} \int_{-2\omega}^{2\omega} f_k dk \int_{M_1(k)}^{M_2(k)} \frac{dM}{\left(H - \frac{M^2}{r^2} - \omega^2 r^2\right)^{1/2}} = \\ &= \frac{\omega}{\pi^2 r} \int_{-2\omega}^{2\omega} f_k dk \int_{M_1(k)}^{M_2(k)} \frac{dM}{\left(H_0(k) + kM - \frac{M^2}{r^2} - \omega^2 r^2\right)^{1/2}} = \frac{\omega}{\pi} \int_{-2\omega}^{2\omega} f_k dk. \end{aligned}$$

Как и прежде, нетрудно показать, что допустимы любые конечные значения  $f_k$ .

Простейший случай, который не может быть сведен к предыдущим, — распределение (71) с постоянным  $f_k$ ,  $f_k = \pi \varrho_0 / (4\omega^2)$ . В этом случае

$$f(M, H) = \frac{\pi \varrho_0}{2\omega^2(M^2 - HR^2 + \omega^2 R^4)^{1/2}}. \quad (72)$$

Четырехмерный фазовый объем носителя плотности такого распределения, вообще говоря, не равен нулю. Таким образом, его можно рассматривать как простейшее невырожденное распределение для пучка с однородным распределением частиц по сечению. Функция распределения для него задается выражением

$$n_{xyij} = \frac{\varrho_0}{2\pi\omega\sqrt{R^2 - r^2}} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 R^2 - \frac{v_r^2}{1 - r^2/R^2} - r^2(\dot{\varphi} + \omega_0)^2}},$$

как следует из (41).

Впервые распределение (72) было найдено в работе [31] (см. также [33–39, 42–45]). Впоследствии это распределение было представлено в работе [51], где на основе рассматриваемого в данной статье подхода были получены распределения вида

$$f(M, H) = c \left\{ \frac{g\left(M, \left(R^2 + \frac{M^2}{R^2}\right)/2\right)}{\sqrt{\left(R^2 + \frac{M^2}{R^2}\right)/2 - H}} - \int_H^{\left(R^2 + \frac{M^2}{R^2}\right)/2} \frac{\partial g(M, s)}{\partial s} \frac{ds}{\sqrt{s - H}} \right\},$$

где  $g(M, H)$  — произвольная функция, как решения некоторого интегрального уравнения для фазовой плотности.

### 13. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Более общие результаты можно получить, рассматривая выражение (61) для пространственной плотности  $\varrho(r)$  как интегральное уравнение. Впервые интегральное уравнение для фазовой плотности было представлено в работе [32]. Впоследствии аналогичное интегральное уравнение было использовано в работе [51], о чем уже упоминалось в предыдущем разделе.

Подставляя в левую часть (61) выражение (57) и учитывая, что область интегрирования определяется неравенствами (62), приходим к следующему интегральному уравнению для  $f(M, H)$ :

$$\varrho_0 = \frac{\omega}{\pi^2 r} \int_{-rR\omega}^{rR\omega} dM \int_{M^2/r^2 + \omega^2 r^2}^{M^2/R^2 + \omega^2 R^2} \left(H - \omega^2 r^2 - \frac{M^2}{r^2}\right)^{-1/2} f(M, H) dH, \quad r \leq R.$$

Здесь левая часть не зависит от  $r$  ( $r \leq R$ ), но в правой части пределы интегрирования зависят от  $r$ . Задача состоит в том, чтобы найти такую  $f(M, H)$ , для которой результат интегрирования не зависел бы от  $r$ .

Введем новые переменные  $y, \alpha$ :

$$H = \frac{M^2}{R^2} - \omega^2(R^2 - r^2)y^2 \sin^2 \alpha + \omega^2 R^2, \quad M = rR\omega y \cos \alpha.$$

Тогда интегральное уравнение примет вид

$$\varrho_0 = \frac{\omega}{\pi^2 r} \sqrt{R^2 - r^2} \times \\ \times \int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{1 - y^2}} \int_0^\pi f(\omega^2(R^2 + y^2 r^2 - y^2 R^2 \sin^2 \alpha), yrR\omega \cos \alpha) d\alpha.$$

Теперь введем функцию

$$F(k_1, k_2) = f(M, H)(M^2 - HR^2 + \omega^2 R^4)^{1/2}.$$

Здесь  $k_1$  и  $k_2$  — угловые коэффициенты прямых, проходящих через точку  $(M, H)$  и касательных к кривой  $H = M^2/R^2 + \omega^2 R^2$ , которая является частью границы  $\Omega_R$ , определяемые соотношением

$$k_{1,2} = \frac{2}{R^2} [M \pm (M^2 - \tilde{H}R^2 + \omega^2 R^4)^{1/2}]. \quad (73)$$

Выражая  $k_{1,2}$  через  $y, \alpha$ , имеем

$$k_1 = 2y \cos(\alpha - \theta), \quad k_2 = 2y \cos(\alpha + \theta), \quad \text{где } \theta = \arccos \frac{r}{R}.$$

Очевидно, что  $k_i \in (-2\omega, 2\omega)$ ,  $i = 1, 2$ . Из того, что  $\alpha \in [0, \pi]$ , следует  $k_1 \geq k_2$ . Таким образом,  $F(k_1, k_2)$  определена в треугольнике  $-2\omega < k_2 \leq k_1 < 2\omega$ . Пусть в треугольнике  $-2\omega < k_1 < k_2 < 2\omega$  функция  $F(k_1, k_2)$  определяется равенством

$$F(k_1, k_2) = F(k_2, k_1). \quad (74)$$

Тогда интегральное уравнение может быть записано в виде

$$\varrho_0 = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{F(2y \cos(\alpha - \theta), 2y \cos(\alpha + \theta))}{(1 - y^2)^{1/2}} y dy d\alpha. \quad (75)$$

Нетрудно видеть, что уравнению (75) удовлетворяет функция  $F(k_1, k_2) = f_1(k_1) + f_2(k_2)$ . Учитывая условие (74), найдем, что  $f_2(x) = f_1(x) + c$  (здесь



$c$  — некоторая постоянная). Не умаляя общности, можно считать, что  $c = 0$ . Тогда

$$f(M, H) = \frac{f_1(k_1) + f_1(k_2)}{(M^2 - HR^2 + \omega^2 R^4)^{1/2}}, \quad f(k) \geq 0. \quad (76)$$

Анализируя уравнение (75), можно получить широкие классы плотностей  $f(H, M)$ , для которых распределение частиц однородно по сечению пучка. Решение уравнения (75) можно искать в виде полинома

$$F(x, z) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N c_{mn} x^m z^n.$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты  $c_{m0}$  произвольны. Кроме того, из (74) следует, что  $c_{mn} = c_{nm}$ ,  $m, n > 0$ . Условию неотрицательности функции  $f(M, H)$  можно удовлетворить для ограниченной функции  $F(x, z)$ ,  $x, z \in (-2\omega, 2\omega)$  в результате добавления некоторой положительной постоянной  $F_0$  к  $F(x, z)$ .

Рассмотрим, например, полином третьей степени по  $x$  и  $z$ :  $F(x, z) = F_0 + c_1 xz + c_2 x^2 z^2 + c_3 (xz^3 + x^3 z)$ . Подставляя его в уравнение (75), можно найти коэффициенты полинома.

Учитывая, что

$$\int_0^1 y^3 (1 - y^2)^{1/2} dy = \frac{2}{3}, \quad \int_0^1 y^5 (1 - y^2)^{1/2} dy = \frac{8}{15},$$

получим уравнение

$$\varrho_0 = \frac{\omega^2}{\pi^2} 2\pi \left( F_0 + \frac{1}{3} c_1 \cos 2\theta + \frac{2}{15} c_2 \cos^2 2\theta + \frac{2}{5} c_3 \cos 2\theta \right).$$

Это равенство должно выполняться при любых  $\theta$ . Следовательно, коэффициенты как при члене, содержащем  $\cos 2\theta$ , так и при члене, содержащем  $\cos^2 2\theta$ , в левой части должны равняться нулю. Отсюда вытекает, что  $5c_1 + 6c_3 = 0$  и  $c_2 = 0$ . Поэтому

$$F(k_1, k_2) = F_0 + ck_1 k_2 [6 - 5(k_1^2 + k_2^2)].$$

Таким образом, плотность в пространстве интегралов движения вида

$$f(M, H) = \frac{-c(H - \omega^2 R^2)(10M^2 - 5HR^2 + 2\omega^2 R^4) + F_0}{(M^2 - HR^2 + \omega^2 R^4)^{1/2}} \quad (77)$$

дает однородное в сечении пучка распределение. Заметим, что в силу ограниченности полиномиальной функции на ограниченном множестве постоянной  $F_0$ , входящую в (77), всегда можно выбрать так, чтобы  $f(M, H)$  было

положительно при любых допустимых значениях  $M, H$ , что означает физическую реализуемость распределения.

Покажем, что значения функции  $F(k_1, k_2)$  могут быть как угодно велики. Обозначим интеграл в правой части уравнения (75) через  $I_0$ . Пусть  $I_0 \rightarrow \infty$ . Подставляя  $\varrho_0 = \omega^2 I_0 / \pi^2$  в (60), получим, что  $\varrho_0 \rightarrow 2\varepsilon_0 \omega^2 / e\varepsilon = \varrho_B$  и  $\omega \rightarrow 0$ , так что  $\Omega_R$  сжимается в точку  $(0, 0)$ . Это означает, что предельное распределение при  $I_0 \rightarrow \infty$  есть бриллюэновский поток.

Самосогласованные распределения для равномерно заряженного цилиндрического пучка рассматривались также в работе [62], в которой вводилась плотность  $\Psi(r_{\min}(H, M), r_{\max}(H, M))$  распределения частиц по интегралам движения  $r_{\min}(H, M), r_{\max}(H, M)$ . В предположении, что функция  $\Psi$  факторизуется, были получены интегральные представления для множителей. Но явное выражение для функции  $\Psi$  может быть получено только в некоторых частных случаях. Рассмотренные здесь распределения, вообще говоря, не сводятся к распределениям, представленным в работе [62], за исключением распределения (76) при  $f_1(k) = \text{const}$ , для которого, как можно показать,

$$\Psi(r_{\min}, r_{\max}) = c(R^2 - r_{\min}^2)^{-1/2}(R^2 - r_{\max}^2)^{-1/2},$$

где  $c$  — постоянная.

#### 14. ПРОСТРАНСТВО ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОДОЛЬНО-НЕОДНОРОДНОГО ПУЧКА

Стационарные самосогласованные распределения для продольно-неоднородного пучка заряженных частиц рассматривались в ряде работ [33–39, 42–46, 63–73].

Как показано в работах [33–39, 42–45], для продольно-неоднородного пучка могут быть найдены распределения, аналогичные распределениям для продольно-однородного пучка. При этом можно применить прежний метод исследования, а именно анализ распределений в пространстве интегралов движения. Однако вместо интеграла  $H$  вводится новый интеграл движения  $I$ , зависящий не только от динамики отдельной частицы, но и от динамики всего пучка в целом.

Итак, рассмотрим аксиально-симметричный стационарный пучок заряженных частиц в стационарном, но теперь уже неоднородном вдоль оси пучка продольном магнитном поле и построим для него пространство интегралов движения.

Будем считать, что продольные скорости всех частиц для каждого из сечений одинаковы. Будем также допускать, что продольная скорость частиц может изменяться вдоль оси пучка в результате действия на частицы внешнего

продольного электрического поля, создаваемого, например, электростатическими линзами. При этом будем считать, что внешнее электрическое поле однородно по сечению и может зависеть только от продольной координаты  $z$ , так что если в каком-либо из сечений продольные скорости одинаковы, то они одинаковы и в других сечениях.

При таких условиях вместо анализа стационарных распределений частиц в шестимерном фазовом пространстве, для которых зависимость от продольной скорости носит тривиальный характер, будем рассматривать распределение частиц тонкого слоя, движущегося вдоль оси пучка, в зависимости от времени. Вместо времени в качестве независимой переменной можно взять продольную координату  $z$ , она взаимно-однозначным образом выражается через время.

Если магнитное поле и продольная скорость частиц изменяются в продольном направлении, то, очевидно, пучок уже не может быть продольно-однородным. Но даже если магнитное поле однородно и продольная скорость частиц не меняется, как мы увидим, пучок также может не быть продольно-однородным. Продольная неоднородность пучка может выражаться, в частности, в том, что радиус его поперечного сечения будет изменяться вдоль оси пучка:  $R = R(z)$ .

Будем предполагать, что существенные изменения радиуса поперечного сечения пучка и продольной скорости частиц происходят только на расстояниях, значительно больших  $R$ . Тогда в пространственной области, не слишком протяженной по продольной координате  $z$ , можно считать пучок продольно-однородным и использовать некоторые результаты, полученные ранее для такого пучка. В частности, как и прежде, будем задавать четырехмерный векторный потенциал собственного поля пучка в виде  $A = (-U(r, z)/c, 0, 0, \beta U(r, z))$ . Но, в отличие от рассмотренного ранее случая, здесь  $U$  зависит не только от  $r$ , но и от  $z$ . При этом, однако, предполагается, что потенциал меняется существенно быстрее при изменении координаты  $r$ , чем при изменении координаты  $z$ .

Пренебрегая второй производной потенциала  $U$  по  $z$ , которая в данном случае мала по сравнению с производной по  $r$ , уравнение Пуассона для потенциала собственного электрического поля пучка  $U(r, z)$  запишем в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{e \rho_0(z)}{\varepsilon_0}. \quad (78)$$

Краевые условия для уравнения (78) возьмем в виде

$$U(a) = 0, \quad \left. \frac{dU}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad (79)$$

где  $a$  — апертура канала.

Будем считать, что продольная компонента внешнего электрического поля  $E_z$  и продольная компонента внешнего магнитного поля  $B_z$  не зависят от координат  $r$  и  $\varphi$ , т.е. однородны по сечению пучка. При этом из уравнения

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) = 0$$

можно найти  $E_r$ :

$$E_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

В случае продольного магнитного поля, однородного в поперечном сечении пучка, но медленно изменяющегося вдоль оси  $z$ , компоненты четырехмерного потенциала можно взять в виде  $A_0 = A_r = A_z = 0$ ,  $A_\varphi = -c B_z(z) r^2/2$ .

В качестве уравнений динамики частицы рассмотрим уравнения (12). Уравнение азимутального движения имеет вид

$$\frac{dp_\varphi}{ds} = \frac{e}{c} \frac{\partial A_j}{\partial \varphi} u^j. \quad (80)$$

Нетрудно видеть, что правая часть уравнения (80) равна нулю. Таким образом, получаем первый интеграл уравнения (80) в виде

$$M = r^2(\varphi' + \omega_0), \quad (81)$$

где  $\omega_0 = e B_z(z)/2mc$ ;  $M$  — постоянная, равная  $p_\varphi/mc$ ; штрих обозначает дифференцирование по  $s$ . Введенные здесь  $\omega_0$  и  $M$  отличаются от аналогичных величин для продольно-однородного пучка множителем  $\gamma/c$ , поскольку производится дифференцирование по  $s$ , а производная по  $s$  отличается от производной по времени именно этим множителем. Уравнение (81) означает, что теорема Буша справедлива и в рассматриваемом случае.

Для радиальной компоненты импульса имеем

$$\frac{dp_r}{ds} = -mcr\varphi'^2 + \frac{e}{\gamma c} \frac{\partial U}{\partial r} - e B_z r \varphi' + \frac{e\gamma r}{2c} \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (82)$$

Подставляя  $\varphi' = -\omega_0 + M/r^2$  и учитывая, что  $p_r = mc dr/ds$ , получим уравнение радиального движения в виде

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = -\omega_0^2 r + \frac{M^2}{r^3} - \frac{e}{m\gamma c^2} \frac{\partial U}{\partial r} - \gamma r \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (83)$$

где  $w = e E_z/2mc^2$ .

Для продольной компоненты импульса, учитывая, что  $u^0 = \gamma$ ,  $u^\varphi = \varphi'$ ,  $\partial A_0/\partial z = E_z$ ,  $\partial A_\varphi/\partial z = (cr^2/2)\partial B_z/\partial z$ , и пренебрегая вкладом, обусловленным продольным действием собственного поля пучка, получим

$$\frac{dp_z}{ds} = \frac{e}{c} E_z \gamma + \frac{er^2}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{d\varphi}{ds}. \quad (84)$$

При том, что  $p_z = m_0 c \beta \gamma$ , поскольку поперечное движение считаем нерелятивистским, запишем уравнение продольного движения в виде

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{2w}{\gamma^2} + \frac{r^2 \varphi'}{\gamma^3} \frac{d\omega_0}{dz}. \quad (85)$$

Второй член в правой части зависит от  $r$  и  $\varphi'$ . Из-за этого частицы, лежащие в некотором тонком слое, могут иметь различные продольные скорости, что приводит к перемешиванию частиц разных слоев. Но если разности продольных координат частиц данного слоя, приобретенные за период радиальных колебаний в результате действия рассматриваемого члена, много меньше радиуса поперечного сечения  $R$ , то можно считать, что перемешивания нет и что продольные скорости всех частиц слоя одинаковы. В результате оценки соответствующих величин получаем условие, которое далее будем считать выполненным:

$$\frac{d\omega_0}{dz} \ll \frac{\omega_0}{R}. \quad (86)$$

Рассмотрим распределения частиц, для которых плотность частиц в конфигурационном пространстве  $\varrho(r, z)$  постоянна по сечению пучка:

$$\varrho(r, z) = \begin{cases} \varrho_0(z), & r \leq R(z), \\ 0, & r > R(z). \end{cases}$$

При этом  $\varrho_0(z) = J/(\pi R(z)^2 e \beta(z) c)$ , где  $J$  — сила тока пучка, предполагаемая не зависящей от  $z$  и равная числу частиц, прошедших через любое поперечное сечение пучка за единицу времени:  $J = dN/dt$ .

С учетом условий (79) решение уравнения (78) для таких распределений имеет вид

$$U(r, z) = -\frac{e \varrho_0(z) r^2}{4\epsilon_0} + U_0(z) = -\frac{J}{4\pi \epsilon_0 R(z)^2 \beta(z) c} r^2 + U_0(z). \quad (87)$$

Подставляя (87) в уравнение (83), запишем уравнение радиального движения частицы в виде

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = -\left(\omega_0^2 + \gamma \frac{dw}{dz}\right) r + \frac{\lambda}{R(z)^2} r + \frac{M^2}{r^3} = -\omega^2 r + \frac{M^2}{r^3}. \quad (88)$$

Здесь

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \gamma \frac{dw}{dz} - \frac{\lambda}{R(z)^2}, \quad \lambda = \frac{J}{J_0} \frac{1}{\beta \gamma}, \quad J_0 = \frac{2\pi \epsilon_0 m c^3}{e},$$

а  $M$  — интеграл движения, определяемый соотношением (81). Величина  $H$ , задаваемая выражением (16),

$$H = r'^2 + \omega^2 r^2 + \frac{M^2}{r^2} \quad (89)$$

уже не является интегралом движения, что можно увидеть, дифференцируя правую часть равенства (16).

Сформулируем условия, при которых существует другой интеграл движения. Предположим, что огибающая пучка  $R(z)$  определяется только частицами с  $M = 0$ . Для таких частиц уравнение радиального движения линейно:

$$X' = AX, \quad (90)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что при прохождении начального сечения  $z = z_0$  в момент времени, соответствующий  $s = 0$ , частицы заполняют эллипс

$$X_0^* B_0 X_0 \leq 1, \quad B_0 = \begin{pmatrix} a_0^{-2} & 0 \\ 0 & c_0^{-2} \end{pmatrix}.$$

Тогда при  $z \geq z_0$  они будут заполнять эллипсы

$$X^* B X \leq 1,$$

где  $B = F^{*-1} B_0 F^{-1}$  и  $F$  — матрицант системы (90).

При этом первый диагональный элемент матрицы  $B^{-1}$  равен

$$R^2 = (B^{-1})_{11} = a_0^{-2} F_{11}^{-2} + c_0^{-2} F_{12}^2.$$

Элементы  $F_{11}$  и  $F_{12}$  матрицы  $F$  удовлетворяют уравнениям

$$F''_{11} = -\omega^2 F_{11}, \quad F''_{12} = -\omega^2 F_{12}.$$

Вводя переменную  $\theta$ ,  $a_0 F_{11} = R \cos \theta$ , приходим к уравнениям

$$R'' - R\theta'^2 = -\omega^2 R, \quad (91)$$

$$2R'\theta' + R\theta'' = 0. \quad (92)$$

Заметим, что в нашем случае зависимость  $R$  и  $\theta$  от  $s$  задается соотношениями  $R = R(z(s))$  и  $\theta = \theta(z(s))$ . Принимая во внимание, что  $F(z_0)$  — единичная матрица, имеем  $R(z_0) = a_0$ ,  $R'(z_0) = 0$ ,  $\theta(z_0) = 0$ ,  $\theta'(z_0) = c_0/a_0$ .

Интегрируя уравнение (92), получаем  $\theta' = a_0 c_0 / R^2$ . Тогда уравнение (91) для огибающей пучка принимает вид

$$R'' = -\omega^2 R + \frac{a_0^2 c_0^2}{R^3} \quad (93)$$

или

$$R'' = -\omega_0^2 R + \frac{\lambda}{R} + \frac{a_0^2 c_0^2}{R^3} - \gamma \frac{dw}{dz} R. \quad (94)$$

Уравнение для огибающей вида (94) широко известно [74]. Оно может быть получено только вследствие предположения, что частицы равномерно распределены по сечению пучка. Далее будут рассмотрены распределения в фазовом пространстве, огибающая которых в конфигурационном пространстве имеет вид (94). Существование таких распределений является некоторым обоснованием применения уравнения (94) в различных задачах. Уравнение для огибающей имеет тот же вид, если понимать огибающую и в смысле среднеквадратичного значения радиальной координаты частиц [75].

Нетрудно показать, что система уравнений (88) и (93) представляет собой частный случай обобщенной системы Ермакова, рассмотренной в работе [76]. Используя выражение для интеграла обобщенной системы Ермакова [76], можно показать, что величина

$$I = (Rr' - rR')^2 + \frac{M^2 R^2}{r^2} + \frac{a_0^2 c_0^2 r^2}{R^2} = \left( \frac{dq}{d\tau} \right)^2 + \frac{M^2}{q^2} + a_0^2 c_0^2 q^2 \quad (95)$$

является интегралом движения, где  $q = r/R$ ,  $d\tau = ds/R^2$ . Интеграл (95) впервые был предложен в работе [33] и далее использовался в работах [34–39, 42–45] при описании самосогласованных распределений для пучков заряженных частиц. При  $M = 0$  интеграл (95) совпадает с хорошо известным в физике пучков заряженных частиц инвариантом Куранта–Снайдера [77], который является интегралом и для системы Ермакова [78, 79]. Таким образом, вместо интеграла  $H$  мы ввели другой интеграл движения  $I$ , который не только определяется движением отдельной частицы, но и зависит от движения всех частиц пучка.

Интеграл движения  $M$  можно записать в виде

$$M = q^2 \left( \frac{d\varphi}{d\tau} + R^2 \omega_0 \right). \quad (96)$$

Найдем такое множество  $\tilde{\Omega}_1$  в пространстве интегралов движения  $M$ ,  $I$ , чтобы условие  $q \leq 1, \forall t \geq t_0$  выполнялось для всех частиц. Будем называть это множество множеством допустимых значений интегралов движения для продольно-неоднородного пучка заряженных частиц.

Из (95) следует, что

$$I \leq M^2 + a_0^2 c_0^2. \quad (97)$$

Кроме того,

$$I \geq \min_q \left( \frac{M^2}{q^2} + a_0^2 c_0^2 q^2 \right) = 2a_0 c_0 |M|. \quad (98)$$

Множество допустимых значений интегралов движения  $\tilde{\Omega}_1$  изображено на рис. 6. Сравнивая рис. 2 и 6, можно видеть, что конфигурации диаграмм, изображающих множества допустимых значений интегралов движения  $\Omega_R$  и  $\tilde{\Omega}_1$ , совпадают, но вертикальные оси различны (ось  $H$  на рис. 2 и ось  $I$  на рис. 6).

Если частицы пучка заполняют множество  $\tilde{\Omega}_1$ , то предположение, что огибающая пучка определяется только частицами с  $M = 0$ , соответствует действительности. Это вытекает из условия  $q \leq 1$ , или  $r \leq R$ , которое и определяет множество  $\tilde{\Omega}_1$ .

Рассмотрим также множество  $\tilde{\Omega}(q)$  таких  $I$  и  $M$ , что частицы, обладающие этими  $I$  и  $M$ , проходят через точку с координатой  $q$ . Прежде всего заметим, что

$$I \geq \frac{M^2}{q^2} + a_0^2 c_0^2 q^2. \quad (99)$$

Если неравенство (99) выполнено, то  $I - M^2/q^2 - a_0^2 c_0^2 q^2 \geq 0$  и частицы могут двигаться в точке с таким  $q$ . Таким образом, множество  $\tilde{\Omega}(q)$  определяется неравенствами (99), (97).

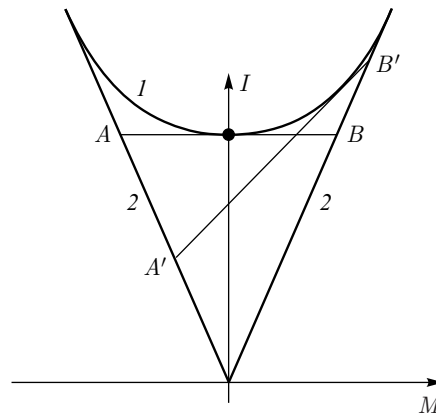


Рис. 6. Множество допустимых значений интегралов движения  $\tilde{\Omega}_1$ : кривая  $I$  — верхняя граница:  $I = M^2 + a_0^2 c_0^2$ ; линии  $2$  — нижняя граница:  $I = 2a_0 c_0 |M|$

### 15. САМОСОГЛАСОВАННЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ПРОДОЛЬНО-НЕОДНОРОДНОГО ПУЧКА

Рассмотрим распределение частиц некоторого тонкого слоя, движущегося вдоль оси  $z$  со скоростью  $\beta(z)c$ . Этот слой ограничен двумя параллельными близкими плоскостями, движущимися вдоль оси  $z$  с той же самой скоростью.

Внутри каждого такого слоя плотность частиц меняется по мере продвижения этого слоя вдоль пучка. Стационарность пучка может быть обеспечена независимостью от времени распределения частиц в некотором его сечении, например, в сечении  $z = z_0$ , которое будем называть начальным сечением. Другими словами, все слои, проходящие через начальное сечение в различные моменты времени, должны иметь в момент прохождения сечения  $z = z_0$  одно и то же распределение частиц. При выполнении этого условия распределение



частиц для всего пучка в целом может быть получено, если проследить за эволюцией распределения частиц одного слоя, поскольку в различные моменты времени слой проходит последовательно через все сечения пучка. Будем считать, что это условие выполнено.

При этом все плотности определены с точностью до некоторого нормировочного множителя, зависящего от толщины рассматриваемого слоя. Выберем этот множитель так, чтобы плотность в двухмерном конфигурационном пространстве для частиц рассматриваемого слоя совпадала бы с плотностью частиц в трехмерном конфигурационном пространстве в начальном сечении пучка (т.е. при  $z = z_0$ ). В других сечениях ( $z \neq z_0$ ) такого совпадения уже не будет, поскольку и толщина слоя, и радиус поперечного сечения будут меняться при движении слоя вдоль оси пучка.

Каждой допустимой паре значений  $M, I$  могут быть поставлены в соответствие некоторые траектории частиц. При этом траектории, соответствующие одним и тем же значениям  $M, I$ , могут отличаться друг от друга углом поворота относительно оси пучка, а точки, лежащие на таких траекториях, могут отличаться друг от друга по фазам.

Мы будем считать, так же как и для продольно-однородного пучка, что частицы равномерно распределены по траекториям, отвечающим одной и той же паре значений  $M$  и  $I$  и переводимым друг в друга поворотом, что приводит к аксиальной симметрии всего распределения, а также что частицы равномерно распределены по фазам траекторий, что обеспечивает стационарность распределения. В этом случае, как и для продольно-однородного пучка, можно ввести плотность распределения частиц в пространстве интегралов движения  $M$  и  $I$ :  $f(M, I)$ .

Простейшее из распределений — распределение, аналогичное потоку Бриллюэна, когда все частицы обладают одними и теми же значениями интегралов  $M$  и  $I$ :  $M = 0, I = 0$ . Из (95) имеем  $q' = 0, c_0 = 0$ , а уравнение для огибающей пучка будет иметь вид

$$R'' = -\omega_0^2 R + \frac{\lambda}{R} - \gamma \frac{dw}{dz} R. \quad (100)$$

В отличие от бриллюэновского потока все частицы могут двигаться в радиальном направлении, но так, чтобы их нормированная радиальная координата  $q$  все время оставалась бы постоянной для каждой частицы. При этом плотность частиц в конфигурационном пространстве равна  $\varrho_0(z) = J/(\pi R(z)^2 e\beta(z)c)$ . Тогда, нормируя, как указано выше, получим  $f_B = J/(e\beta(z_0)c)$ .

Если  $\omega_0 = \text{const}, w = 0, R = \text{const}$ , то, приравнявая правую часть уравнения (100) нулю, можно найти радиус пучка:

$$R^2 = 2m_0 J / \pi \varepsilon_0 e B_z^2 \beta \gamma c,$$

откуда получим, что плотность такого потока равна плотности потока Бриллюэна  $\varrho_B$ .

Таким образом, поток Бриллюэна есть частный случай распределения, характеризуемого значениями интегралов  $M = 0$ ,  $I = 0$  для всех частиц. Поэтому рассматриваемое здесь распределение можно называть обобщенным потоком Бриллюэна [33–39, 41–45].

Рассмотрим теперь распределения, аналогичные распределениям (67) для продольно-однородного пучка. Пусть все частицы лежат на отрезке  $S_k$  в пространстве интегралов движения

$$I = kM + I_0, \quad (M, I) \in \tilde{\Omega}_1, \quad (101)$$

где  $I_0(k) = a_0^2 c_0^2 - k^2/4$ . Плотность в пространстве интегралов движения будем задавать формой первой степени, которую также обозначим через  $f(M, I)$  и которая имеет вид

$$f_k(M, I) = f_k dM, \quad (M, I) \in S_k, \quad f_0 > 0. \quad (102)$$

Плотность такого распределения в фазовом пространстве описывается формой третьей степени, определенной на поверхности (101). Ее компонента в координатах  $x, y, M$  обозначается через  $f_{xyM}$ .

Покажем, что в рассматриваемом случае частицы распределены равномерно по сечению пучка. Поскольку для каждой пары  $M, I$  частицы равномерно распределены по углам и по фазам траекторий, получим

$$n_{\varphi\theta M} = \frac{f_k}{4\pi P(M, I)}, \quad n_{xyM} = n_{\varphi\theta M} \det \left| \left( \frac{\partial(\varphi, \theta)}{\partial(x, y)} \right) \right| = \frac{n_{\varphi\theta M}}{r|\dot{r}|}.$$

Здесь

$$P(M, I) = \int_{q_{\min}(M, I)}^{q_{\max}(M, I)} \frac{dq}{|\dot{q}|} = \frac{\pi}{2a_0 c_0}$$

— набег фазы на половине траектории.

Теперь найдем плотность частиц в конфигурационном пространстве в координатах  $\tilde{x} = x/R$ ,  $\tilde{y} = y/R$ , которую обозначим через  $\tilde{\varrho}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\varrho}(q) = \varrho_{\tilde{x}\tilde{y}} &= \frac{a_0 c_0 f_k}{\pi^2 q} \int_{M_1}^{M_2} \frac{dM}{(I - M^2/q^2 - a_0^2 c_0^2 q^2)^{1/2}} = \\ &= \frac{a_0 c_0 f_k}{\pi^2 q} \int_{M_1}^{M_2} \frac{dM}{(I - M^2/q^2 - a_0^2 c_0^2 q^2)^{1/2}} = \\ &= \frac{a_0 c_0 f_k}{\pi^2 q} \int_{M_1}^{M_2} \frac{dM}{(I_0 + kM - M^2/q^2 - a_0^2 c_0^2 q^2)^{1/2}} = \frac{a_0 c_0 f_k}{\pi} = \text{const}. \quad (103) \end{aligned}$$

Здесь  $M_1$  и  $M_2$  определяются из условия, что подкоренное выражение в подынтегральном выражении обращается в нуль:

$$M_{1,2} = kq^2 \pm \left( \frac{k^2 q^4}{4} + I_0 q^2 - a_0^2 c_0^2 q^4 \right)^{1/2}.$$

Следовательно, для распределения (102) плотность частиц постоянна по сечению пучка. Поэтому (102) есть решение задачи.

Учитывая, что  $J = \pi R^2(z_0) \varrho(z_0) e \beta(z_0) c$ , имеем

$$\tilde{\rho}_0 = R^2(z_0) \varrho_0(z_0) = \frac{J}{\pi e \beta(z_0) c}, \quad (104)$$

так что

$$f_k = \frac{J}{e \beta(z_0) c a_0 c_0}. \quad (105)$$

Соотношение (105) можно использовать также для определения параметра  $\lambda$ , входящего в уравнение для огибающей (94) по заданному  $f_k$ :

$$\lambda = \frac{J}{J_0} \frac{1}{\beta \gamma} = \frac{e \beta(z_0) c a_0 c_0 f_k}{J_0 \beta \gamma}. \quad (106)$$

Заметим, что для распределения (102) в отличие от распределения (67) увеличение параметра  $f_k$  имеет несколько другой смысл, поскольку означает увеличение тока пучка при условии, что  $\beta(z_0)$ ,  $a_0$ ,  $c_0$  фиксированы.

Тем же способом, как и для распределения (67), можно показать, что носитель плотности распределения (102) — отрезок прямой, касательный к верхней границе множества  $\tilde{\Omega}_1$ . Отрезок ограничен линиями  $I = \pm 2a_0 c_0 M$  (отрезок  $A'B'$  на рис. 6). Если  $k = 0$ , этот отрезок параллелен оси  $M$  (отрезок  $AB$  на рис. 6). Если  $R$ ,  $\omega_0$  — постоянны, а  $w = 0$ , то распределение (102) при  $k = 0$  есть распределение Капчинского–Владимирского, а распределения с  $k \neq 0$  — распределения типа «жесткого ротатора». Таким образом, распределение (102) при  $k = 0$  можно называть обобщенным распределением Капчинского–Владимирского, а при  $k \neq 0$  — обобщенным распределением типа «жесткого ротатора» [33–39, 41–45]. Такие распределения также рассматривались в работах [46, 63, 65–70], но только для пучка в периодическом магнитном поле.

Каждая линейная комбинация распределений (102)

$$f_k(M, I) = f_k dM, \quad (M, I) \in S_k, \quad f_k > 0, \quad (107)$$

также будет однородна по сечению пучка. Здесь, так же как и для продольно-однородного пучка, можно подобрать линейные комбинации с ненулевым средним угловым моментом.

Возьмем, например, линейную комбинацию конечного числа распределений (107):

$$f(M, I) = \sum_{k \in K} f_k(M, I), \quad (108)$$

$K \subset (-2\omega, 2\omega)$ . Здесь  $I_0(k) = a_0^2 c_0^2 - k^2/4$ , а  $K$  — некоторое числовое множество. Для плотности в конфигурационном пространстве легко получить

$$\tilde{\varrho}_0 = \frac{a_0 c_0}{\pi} \sum_{k \in K} f_k.$$

Рассмотрим также линейную комбинацию распределений вида (107), задаваемую выражением

$$f(M, I) = \int_{-2a_0 c_0}^{2a_0 c_0} f_k(M, I) dk, \quad f_k > 0. \quad (109)$$

В этом случае нетрудно показать, что

$$\tilde{\varrho}_0 = \frac{a_0 c_0}{\pi} \int_{-2a_0 c_0}^{2a_0 c_0} f(k) dk. \quad (110)$$

Выполняя преобразования, аналогичные соответствующим преобразованиям для продольно-однородного пучка, плотность для распределения (109) можно записать в виде

$$f(M, I) = \frac{f(k_1) + f(k_2)}{(M^2 - I - a_0^2 c_0^2)^{1/2}},$$

где  $k_1, k_2$  — угловые коэффициенты прямых, проходящих через точку с данными  $M, I$  и касательных к верхней границе множества  $\tilde{\Omega}_1$  — параболы  $I = M^2 + a_0^2 c_0^2$ . Простейшее из распределений вида (109) получается, если взять  $f(k) = \text{const}$ . Учитывая условие (110), имеем

$$f(M, I) = \frac{\pi \tilde{\varrho}_0}{2a_0^2 c_0^2} \frac{1}{(M^2 - I - a_0^2 c_0^2)^{1/2}}. \quad (111)$$

Для определения параметра  $\lambda$ , входящего в уравнение для огибающей, по-прежнему можно использовать соотношения (104), (106).

Величина  $f(M, I)$  в (111) фактически есть компонента формы второй степени, задающей плотность распределения в пространстве интегралов движения. Ей соответствует некоторая форма четвертой степени, задающая плотность распределения в фазовом пространстве поперечного движения.

Найдем связь между этими величинами, а также между ними и плотностью частиц в конфигурационном пространстве. Имеем

$$\begin{aligned} n_{qMI} &= \int_0^{2\pi} n_{q\varphi MI} d\varphi = 4\pi n_{q\varphi\dot{q}\dot{\varphi}} \det \left| \left( \frac{\partial(\dot{q}, \dot{\varphi})}{\partial(M, I)} \right) \right| = \frac{2\pi}{q^2|\dot{q}|} n_{q\varphi\dot{q}\dot{\varphi}} = \\ &= \frac{2\pi}{q^2|\dot{q}|} \frac{1}{R^4} n_{q\varphi q' \varphi'} = \frac{2\pi}{q^2|\dot{q}|} \frac{1}{R^4} n_{xyx'y'} \times \\ &\quad \times \det \left| \left( \frac{\partial(xy x' y')}{\partial(q\varphi q' \varphi')} \right) \right| = \frac{2\pi}{|\dot{q}|} n(M, I). \end{aligned} \quad (112)$$

Здесь точка означает дифференцирование по переменной  $\tau$ .

Учитывая равенство (112), получим

$$f(M, I) = \int_{q_{\min}(M, I)}^{q_{\max}(M, I)} n_{qMI} dq = \frac{\pi^2 n(M, I)}{a_0 c_0}, \quad (113)$$

так как

$$\int_{q_{\min}(M, I)}^{q_{\max}(M, I)} \frac{dq}{|\dot{q}|} = \frac{\pi}{2a_0 c_0}.$$

Рассмотрим плотность частиц в пространстве с координатами  $x/R$ ,  $y/R$ . Выражая ее через  $f(M, I)$ , имеем

$$\tilde{\varrho}(q) = \frac{R^2}{2\pi r} \int_{\tilde{\Omega}_q} n_{rMI} dM dI = \frac{R}{r} \int_{\tilde{\Omega}_q} \frac{n(M, I) dM dI}{|\dot{q}|}. \quad (114)$$

Подставляя в (114)  $n(M, I)$  из (113) и учитывая (95), находим

$$\tilde{\varrho}(q) = \frac{a_0 c_0}{\pi^2 q} \int_{\tilde{\Omega}_q} \frac{f(M, I) dM dI}{(I - M^2/q^2 - a_0^2 c_0^2 q^2)^{1/2}}. \quad (115)$$

Можно искать равномерные самосогласованные распределения, рассматривая равенство (115) как интегральное уравнение для плотности распределения:

$$\tilde{\varrho}_0 = \frac{a_0 c_0}{\pi^2 q} \int_{\tilde{\Omega}(q)} \frac{f(M, I) dM dI}{(I - M^2/q^2 - a_0^2 c_0^2 q^2)^{1/2}}. \quad (116)$$

Преобразуя уравнение (116) аналогично преобразованию уравнения (61) для пучка с постоянным радиусом поперечного сечения, получим интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{F(y \cos(\alpha - \theta), y \cos(\alpha + \theta))}{(1 - y^2)^{1/2}} y dy d\alpha = \tilde{q}_0. \quad (117)$$

Здесь

$$F(k_1, k_2) = \begin{cases} f(M, I)(M^2 - I + a_0^2 c_0^2)^{1/2}, & k_1 \geq k_2, \\ F(k_2, k_1), & k_1 < k_2, \end{cases}$$

$k_{1,2} = 2(M \pm (M^2 - I + a_0^2 c_0^2)^{1/2})$  и  $\theta = \arccos q$ . Это есть интегральное уравнение для функции двух аргументов  $F(k_1, k_2)$ .

Оба аргумента зависят от  $q$ , где  $q = r/R$ , поскольку  $q = \cos \vartheta$ . Задача состоит в том, чтобы найти такую функцию  $F(k_1, k_2)$ , для которой результат интегрирования не зависел бы от  $q$ .

Любое неотрицательное решение (117), удовлетворяющее условию

$$F(k_1, k_2) = F(k_2, k_1), \quad (118)$$

соответствует некоторому самосогласованному распределению частиц.

Простейший случай состоит в том, что  $F(k_1, k_2) = \text{const}$ . Этот случай уже рассматривался и соответствует распределению (111).

Другие решения можно искать в виде ряда

$$F(x, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} x^m z^n \quad (119)$$

или полинома, как об этом говорилось для пучка с постоянным радиусом поперечного сечения.

Например, если искать решение уравнения (117) как полином третьей степени, получим

$$f(M, I) = \frac{-c(I - a_0^2 c_0^2)(10M^2 - 5I + 2a_0^2 c_0^2) + g_0}{(M^2 - I + a_0^2 c_0^2)^{1/2}}.$$

Постоянные величины  $c$  и  $g_0$  должны быть таковы, чтобы было  $f(M, I) \geq 0$  для  $(M, I) \in \tilde{\Omega}_1$ . Значения  $F(k_1, k_2)$  могут быть как угодно велики. В этом случае значение  $J$  неограниченно возрастает, значение  $\lambda$  соответствующим образом возрастает, а радиус поперечного сечения пучка  $R(z)$  ведет себя в соответствии с уравнением огибающей с большими значениями  $\lambda$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного анализа можно сказать, что, несмотря на сложность задачи построения стационарных самосогласованных распределений, связанной с нелинейностью уравнения Власова, существует большое число известных решений для пучка заряженных частиц в магнитном поле. Наиболее удобный и естественный способ их представления — задание плотности распределения в пространстве интегралов движения. Такой способ, во-первых, обладает большой наглядностью, во-вторых, позволяет сравнивать различные распределения между собой и, наконец, дает возможность строить новые распределения с помощью линейных комбинаций известных распределений для пучков с равномерным распределением заряда по сечению как однородных в продольном направлении, так и неоднородных.

Для описания фазовой плотности в данной работе использован аппарат тензорного исчисления: плотности частиц в фазовом пространстве задаются как дифференциальные формы. Подход с использованием дифференциальных форм представляется нам наиболее естественным, поскольку, во-первых, не требует использования концепции фазового объема, во-вторых, содержит достаточно простое определение фазовой плотности, а в-третьих, позволяет переходить к различным координатам в фазовом пространстве. Это требуется не только при теоретическом анализе, но и для решения такой задачи, как моделирование распределений. Если требуется разыграть какое-либо неоднородное распределение, можно перейти к координатам, в которых плотность распределения не зависит от координат и задание плотности выполняется более просто. При этом преобразование компонент фазовой плотности сводится к умножению компоненты на якобиан соответствующего преобразования координат.

Описанные решения представляют интерес с математической точки зрения как решения нелинейного интегродифференциального уравнения. Кроме того, они имеют и практическое значение, поскольку могут быть использованы в качестве моделей реальных пучков при решении задач, связанных с проектированием ускорителей заряженных частиц. Большое значение при этом имеют задачи оптимизации структур ускорителей. Численное решение задач оптимизации требует обычно больших объемов вычислений. Использование простых моделей пучка часто позволяет сократить объем вычислений и повысить эффективность численных алгоритмов [80–88].

Отметим также большое значение аналитических решений для проверки вычислительных алгоритмов решения уравнения Власова [89].

Работа выполнена при поддержке СПбГУ, грант 9.38.673.2013.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов А. А. О вибрационных свойствах электронного газа // ЖЭТФ. 1938. Т. 8, № 3. С. 291–318.
2. Власов А. А. Теория многих частиц. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. 348 с.
3. Либов Р. Введение в теорию кинетических уравнений: Пер. с англ. М.: Мир, 1972. 372 с.
4. Лихтенберг А. Динамика частиц в фазовом пространстве: Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1972. 304 с.
5. Neunzert H. An Introduction to the Nonlinear Boltzmann–Vlasov Equation // Lect. Notes Math. 1984. V. 1048. P. 60–110.
6. Давидсон Р. Теория заряженной плазмы: Пер. с англ. М.: Мир, 1978. 216 с.
7. Капчинский И. М. Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. М.: Атомиздат, 1966. 312 с.
8. Капчинский И. М. Теория линейных резонансных ускорителей. Динамика частиц. М.: Энергоиздат, 1982. 240 с.
9. Лоусон Дж. Физика пучков заряженных частиц: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 440 с.
10. Мешков И. Н. Транспортировка пучков заряженных частиц. Новосибирск: Наука (Сиб. отд-ние), 1991. 224 с.
11. Рошаль А. С. Моделирование заряженных пучков. М.: Атомиздат, 1979. 224 с.
12. Чихачев А. С. Кинетическая теория квазистационарных состояний пучков заряженных частиц. М.: Физматлит, 2001. 176 с.
13. Davidson R. C. Physics of Nonneutral Plasmas. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publ. Co., 1990.
14. Davidson R. C., Quin H. Physics of Intense Charged Particle Beams in High Energy Accelerators. Singapore: World Sci., 2001. 242 p.
15. Reiser M. Theory and Design of Charged Particle Beams. New York: John Wiley & Sons, 1994.
16. Арсеньев А. А. Единственность и существование в малом классического решения системы уравнений Власова // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218, № 1. С. 11–12.
17. Арсеньев А. А. Существование и единственность классического решения системы уравнений Власова // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1975. Т. 15, № 5. С. 1344–1349.
18. Арсеньев А. А. Теоремы существования решения задачи Коши для системы уравнений Власова // Численные методы в физике плазмы. М.: Наука, 1977. С. 26–31.
19. Арсеньев А. А. Введение в теорию кинетических уравнений. М.: Наука, 1992. 212 с.
20. Иорданский С. В. О задаче Коши для кинетического уравнения плазмы // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1961. Т. 60. С. 181–194.
21. Horst E. On the Classical Solutions of the Initial Value Problem for the Unmodified Nonlinear Vlasov Equation. I // Math. Meth. Appl. Sci. 1981. V. 3. P. 229–248.



22. *Horst E.* On the Classical Solutions of the Initial Value Problem for the Unmodified Nonlinear Vlasov Equation. II // *Math. Meth. Appl. Sci.* 1982. V. 4. P. 19–32.
23. *Illner R., Neunzert H.* An Existence Theorem for the Unmodified Vlasov Equation // *Math. Meth. Appl. Sci.* 1979. V. 1. P. 530–534.
24. *Ukai S., Okabe T.* On Classical Solutions in the Large in Time of Two Dimensional Vlasov's Equation // *Osaka J. Math.* 1978. V. 15, No. 2. P. 245–261.
25. *Wallman S.* The Spherically Symmetric Vlasov–Poisson System // *J. Different. Equations.* 1980. V. 35, No. 1. P. 30–35.
26. *Wallman S.* Global-in-Time Solutions of Two Dimensional Vlasov–Poisson System // *Commun. Pure. Appl. Math.* 1980. V. 33. P. 173–197.
27. *Wallman S.* Existence and Uniqueness Theory of the Vlasov–Poisson System with Application to the Problem with Cylindrical Symmetry // *J. Math. Anal. Appl.* 1982. V. 90, No. 1. P. 138–170.
28. *Kapchinskij I., Vladimirskij V.* Limitations of Proton Beam Current in a Strong Focusing Linear Accelerator, Associated with Beam Space Charge // *Proc. of the II Intern. Conf. on High Energy Accelerators, CERN, Geneva, 1959.* P. 274–288.
29. *Плотников В. К.* О фокусировке интенсивных электронных пучков продольным магнитным полем // *АЭ.* 1975. Т. 39, № 5. С. 353–356.
30. *Hofmann I.* Transport and Focusing of High Intensity Unneutralized Beams // *Applied Charged Particle Optics / Ed. A. Septier. Part C: Very-High-Density Beams.* New-York, 1983. P. 49–140.
31. *Дривотин О. И., Овсянников Д. А.* Об определении стационарных решений уравнения Власова для аксиально-симметричного пучка заряженных частиц в продольном магнитном поле // *Журн. вычисл. математики и матем. физики.* 1987. Т. 27, № 3. С. 416–427.
32. *Дривотин О. И., Овсянников Д. А.* О новых классах стационарных решений уравнения Власова для аксиально-симметричного пучка заряженных частиц с постоянной плотностью // *Журн. вычисл. математики и матем. физики.* 1989. Т. 29, № 8. С. 1245–1250.
33. *Дривотин О. И., Овсянников Д. А.* О самосогласованных распределениях для пучка заряженных частиц в продольном магнитном поле // *Докл. РАН.* 1994. Т. 33, № 3. С. 284–287.
34. *Дривотин О. И., Овсянников Д. А.* Самосогласованные распределения для пучков заряженных частиц. СПб.: НИИХ СПбГУ, 2001. 108 с.
35. *Дривотин О. И., Овсянников Д. А.* Самосогласованные распределения заряженных частиц в продольном магнитном поле. I // *Вестн. Санкт-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикл. математика. Информатика. Процессы управления.* 2004. Вып. 1. С. 3–15.
36. *Дривотин О. И., Овсянников Д. А.* Самосогласованные распределения заряженных частиц в продольном магнитном поле. II // *Там же.* Вып. 2. С. 70–81.
37. *Дривотин О. И., Овсянников Д. А.* Методы анализа самосогласованных распределений для пучков заряженных частиц. СПб.: Изд-во ВВМ, 2013. 115 с.

38. *Дривотин О. И., Овсянников Д. А.* Решения уравнения Власова для пучка заряженных частиц в магнитном поле // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. «Математика». 2013. Т. 6, вып. 4. С. 2–22.
39. *Овсянников Д. А., Дривотин О. И.* Моделирование интенсивных пучков заряженных частиц. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2003. 176 с.
40. *Drivotin O. I.* Covariant Formulation of the Vlasov Equation // Proc. of Intern. Part. Accel. Conf. IPAC'2011, San-Sebastian, Spain. 2011. P. 2277–2279; [accelconf.web.cern.ch/accelconf/ipac2011/papers/wepc114.pdf](http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/ipac2011/papers/wepc114.pdf).
41. *Drivotin O. I.* Degenerate Solution of the Vlasov Equation // Proc. of RuPAC'2012, Saint-Petersburg, Sept. 2012. P. 376–378; [accelconf.web.cern.ch/accelconf/rupac2012/papers/tuppb028.pdf](http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/rupac2012/papers/tuppb028.pdf).
42. *Drivotin O. I., Ovsyannikov D. A.* New Classes of Uniform Distributions for Charged Particles in Magnetic Field // Proc. of Part. Accel. Conf. PAC'97, Vancouver, B.C., Canada, 1997. P. 1943–1945.
43. *Drivotin O. I., Ovsyannikov D. A.* Modeling of Self-Consistent Distributions for Longitudinally Non-Uniform Beam // Nucl. Instr. Meth. A. 2006. V. 558, No. 1. P. 112–118.
44. *Drivotin O. I., Ovsyannikov D. A.* Self-Consistent Distributions for Charged Particle Beam in Magnetic Field // Intern. J. Mod. Phys. A. 2009. V. 24, No. 5. P. 816–842.
45. *Drivotin O. I., Ovsyannikov D. A.* Exact Solutions of the Vlasov Equation in Magnetic Field // Proc. of Linear Accel. Conf. (LINAC'2014), Geneva, 2014. P. 377–380; [accelconf.web.cern.ch/accelconf/LINAC2014/papers/mopp135.pdf](http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/LINAC2014/papers/mopp135.pdf).
46. *Davidson R. C., Chen C.* Kinetic Description of High Intensity Beam Propagation through a Periodic Focusing Field Based on the Nonlinear Vlasov–Maxwell Equations // Part. Accel. 1998. V. 59. P. 175–250.
47. *Brillouin L.* A Theorem of Larmor and Its Importance for Electrons in Magnetic Fields // Phys. Rev. 1945. V. 67, No. 7–8. P. 260–266.
48. *Davidson R. C., Krall N. A.* Vlasov Equilibria and Stability of an Electron Gas // Phys. Fluids. 1970. V. 13, No. 6. P. 1543–1555.
49. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1967. 460 с.
50. *Дривотин О. И.* Математические основы теории поля. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2010. 168 с.
51. *Danilov V. et al.* Self-Consistent Time Dependent Two-Dimensional and Three-Dimensional Space Charge Distributions with Linear Force // Phys. Rev. Special Topics: Accel. Beams. 2003. V. 6, No. 9. P. 094202-1–094202-12.
52. *Drivotin O. I.* Reference Frames in Classical and Relativistic Physics. [arxiv.org/pdf/1403.1787v1.pdf](http://arxiv.org/pdf/1403.1787v1.pdf). 2014.
53. *Drivotin O. I.* Rigorous Definition of the Reference Frame // Вестн. Санкт-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. 2014. Вып. 4. С. 25–36.
54. *Holm D. D., Marsden J. E., Ratiu T. S.* The Euler–Poincare Equations and Semidirect Products with Applications to Continuum Theories // Adv. Math. 1998. V. 137. P. 1–81.

55. *Squire J. et al.* The Hamiltonian Structure and Euler–Poincaré Formulation of the Vlasov–Maxwell and Gyrokinetic Systems // *Phys. Plasmas*. V. 20, No. 2. P. 022501-1–022501-14.
56. *Bernstein I. B., Green J. M., Kruskal M. D.* Exact Nonlinear Plasma Oscillations // *Phys. Rev.* 1957. V. 108, No. 3. P. 546–550.
57. *Буданов Ю. А.* Распределение фазовой плотности в шестимерном фазовом пространстве для интенсивных пучков ионов // *ЖТФ*. 1984. Т. 54, № 6. С. 1068–1075.
58. *Буданов Ю. А.* О распределении фазовой плотности в пучке с нелинейным поперечным полем пространственного заряда // Тр. 10-го Всесоюз. совещ. по ускорителям заряженных частиц, Дубна. 21–23 окт. 1986 г. Дубна: ОИЯИ, 1987. Т. 1. С. 444–445.
59. *Буданов Ю. А., Швецов В. И.* О решениях уравнения Власова для равномерно заряженного эллипсоидального сгустка // Там же. С. 446–447.
60. *Davidson R. C.* Three-Dimensional Kinetic Stability Theorem for High-Intensity Charged Particle Beams // *Phys. Plasmas*. 1998. V. 5, No. 9. P. 3459–3468.
61. *Gluckstern R. L. et al.* Halo Formation in Three-Dimensional Bunches // *Phys. Rev. E*. 1998. V. 58. P. 4977–4990.
62. *Власов А. Д.* Самосогласованные цилиндрические пучки постоянной плотности // *ЖТФ*. 1979. Т. 49, № 9. С. 1821–1826.
63. *Chen C., Davidson R. C.* Nonlinear Properties of the Kapchinskij–Vladimirskij Equilibrium and Envelope Equation for an Intense Charged Particle Beam in a Periodic Focusing Field // *Phys. Rev. E*. 1994. V. 49, No. 6. P. 5679–5687.
64. *Davidson R. C., Stolz P., Chen C.* Intense Non-Neutral Beam Propagation in a Periodic Solenoidal Field Using a Macroscopic Fluid Model with Zero Thermal Emittance // *Phys. Plasmas*. 1997. V. 4, No. 10. P. 3710–3717.
65. *Chen C., Pakter R., Davidson R. C.* Rigid-Rotor Vlasov Equilibrium for an Intense Charged Particle Beam Propagating through a Periodic Solenoidal Magnetic Field // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 79, No. 2. P. 225–228.
66. *Davidson R. C., Chen C.* Kinetic Description of Intense Nonneutral Beam Propagating through a Periodic Focusing Field // *Nucl. Instr. Meth. Sect. A*. 1998. V. 415. P. 370.
67. *Davidson R. C., Quin H., Channel P. J.* Approximate Periodically Focused Solutions to the Nonlinear Vlasov–Maxwell Equations for Intense Beam Propagation through Alternating Gradient Field Configuration // *Phys. Rev. Spec. Topics: Accel. Beams*. 1999. V. 2, No. 7. P. 074401-1–074401-29.
68. *Chen C., Pakter R., Davidson R. C.* Phase Space Structure for Matched Intense Charged-Particle Beams in Periodic Focusing Transport Systems // *Phys. Plasmas*. 1999. V. 6, No. 9. P. 3647–3657.
69. *Davidson R. C., Quin H.* Guiding-Center Vlasov–Maxwell Description of Intense Beam Propagation through a Periodic Focusing Field // *Phys. Rev. Spec. Topics: Accel. Beams*. 2001. V. 4, No. 10. P. 104401-1–104401-13.
70. *Zhou J., Chen C.* Kinetic Equilibrium of a Periodically Twisted Ellipse-Shaped Charged Particle Beam // *Phys. Rev. Spec. Topics: Accel. Beams*. 2006. V. 9, No. 10. P. 104201-1–104401-8.

71. *Gluckstern R. L.* Analytic Model for Halo Formation in High Current Ion Linacs // *Phys. Rev. Lett.* 1994. V. 73, No. 9. P. 1247–1250.
72. *Gluckstern R. L., Cheng W.-H., Ye H.* Stability of a Uniform-Density Breathing Beam with Circular Cross-Section // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 75, No. 15. P. 2835–2838.
73. *Fedotov A. V. et al.* Halo Formation in Three-Dimensional Bunches with Various Phase Space Distributions // *Phys. Rev. Spec. Topics: Accel. Beams.* 1999. V. 2, No. 1. P. 014201-1–014201-12.
74. *Lee E. P., Cooper R. K.* General Envelope Equation for Cylindrically Symmetric Charge Particle Beams // *Part. Accel.* 1976. V. 7, No. 2. P. 83–95.
75. *Saherer F.* RMS Envelope Equations with Space Charge // *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 1971. V. 18, No. 3. P. 1105–1108.
76. *Ray J. R., Raid J. L.* More Exact Invariants for the Time-Dependent Harmonic Oscillator // *Phys. Lett. A.* V. 71, No. 4. P. 317–318.
77. *Courant E. D., Snyder H. S.* Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron // *Ann. Phys.* 1958. V. 3, No. 1. P. 1–48.
78. *Ермаков В. П.* Дифференциальные уравнения второго порядка. Условия интегрируемости в конечном виде // *Унив. изв. Киев*, 1880. Т. 20, № 9. С. 1–25.
79. *Lewis H. R., Leach P. G.* A Direct Approach to Finding Exact Invariants for One Dimensional Time-Dependent Classical Hamiltonians // *J. Math. Phys.* 1982. V. 23, No. 12. P. 2371–2374.
80. *Дривотин О. И., Кабанов В. С., Овсянников Д. А.* О минимизации амплитуды колебаний радиуса интенсивного пучка в продольном магнитном поле // *Математические методы моделирования и анализа управляемых процессов*. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1989.
81. *Овсянников Д. А.* О динамике заряженных частиц в продольном магнитном поле // *ЖТФ*. 1985. Т. 85, № 9. С. 1879–1880.
82. *Овсянников Д. А.* Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. 312 с.
83. *Овсянников Д. А., Егоров Н. В.* Математическое моделирование систем формирования электронных и ионных пучков. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1998. 276 с.
84. *Ovsyannikov D. A. et al.* Beam Dynamics Optimization: Models, Methods and Applications // *Nucl. Instr. Meth. A.* 2006. V. 26, No. 1. P. 11–19.
85. *Ovsyannikov D. A., Ovsyannikov A. D., Chung S. L.* Optimization of Radial Matching Section // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2009. V. 24, No. 5. P. 952–958.
86. *Овсянников А. Д. и др.* Оптимизация согласующей секции ускорителя с пространственно-однородной квадрупольной фокусировкой // *ЖТФ*. 2009. Т. 79, № 11. С. 101–102.
87. *Ovsyannikov D. A., Altsybeev V. V.* Mathematical Optimization Model for Alternating Phase Focusing (APF) Linac // *Вопр. атом. науки и техники*. 2013. № 4. С. 93.
88. *Ovsyannikov A. D. et al.* Application of Optimization Techniques for RFQ Design // *Вопр. атом. науки и техники*. 2014. Т. 91, № 3. С. 116.
89. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // *Дифференциальные уравнения*. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1955.