ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2017. Т. 48. ВЫП. 2. С. 194–235

НЕОБЫЧАЙНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ГРУППЫ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

В. В. Белокуров [1,2,*], *Е. Т. Шавгулидзе* [1,**]

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

[2] Институт ядерных исследований РАН, Москва

*E-mail: vvbelokurov@yandex.ru

**E-mail: shavgulidze@bk.ru

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2017. Т. 48. ВЫП. 2. С. 194–235

НЕОБЫЧАЙНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ГРУППЫ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

В. В. Белокуров [1,2,*], *Е. Т. Шавгулидзе* [1,**]

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

[2] Институт ядерных исследований РАН, Москва

Представлен обзор работ авторов, в которых изучаются следствия квазиинвариантности функциональных интегралов по мере Винера относительно действия группы диффеоморфизмов, исследуется поведение функциональных интегралов при нелинейных нелокальных заменах переменных интегрирования. В частности, с помощью таких замен удается определить функциональные интегралы по разрывным траекториям. Предложены простейшие модели (евклидовой) квантовой теории поля, в которых наличие скрытых внутренних симметрий либо учет разрывных траекторий в функциональных интегралах приводят к ряду парадоксальных свойств, противоречащих обычной интуиции.

We give a review of the papers of the authors where some consequences of the quasi-invariance of the Wiener functional integrals under the action of the group of diffeomorphisms and the behavior of the functional integrals under the nonlinear nonlocal substitutions are studied. In particular, such substitutions make it possible to define the functional integrals over the discontinuous trajectories. We propose some simple quantum field theory (Euclidean) models where the presence of the hidden symmetries or the discontinuous trajectories in functional integration lead to a series of paradoxical properties that are contrary to the common intuition.

PACS: 02.30.Sa; 03.70.+k; 11.10.-z

Светлой памяти В. Г. Кадышевского

Статья посвящена светлой памяти выдающегося ученого и замечательного человека — Владимира Георгиевича Кадышевского. Масштаб его личности требовал постановки грандиозных задач, и он со свойственными ему смелостью и упорством брался за их решение.

*E-mail: vvbelokurov@yandex.ru
**E-mail: shavgulidze@bk.ru

Созданием реалистичной модели нелокальной квантовой теории поля, в которой присутствует фундаментальный размерный параметр типа элементарной длины или кривизны импульсного пространства, Владимир Георгиевич начал заниматься еще в молодости и сохранил привязанность к этой теме на всю жизнь. В то же время он блестяще разбирался в самых разных областях современной теоретической физики высоких энергий и всегда был открыт для новых идей.

Владимир Георгиевич с большим уважением, неподдельным интересом и заботливым вниманием относился к работе своих коллег, как уже известных, так и совсем молодых, давал очень полезные советы и, самое главное, воодушевлял.

Память о нем и глубокая благодарность — навсегда в наших сердцах.

ВВЕДЕНИЕ

В данной статье представлен обзор работ авторов [1–7], в которых изучаются следствия бесконечномерных симметрий для функциональных интегралов квантовой теории поля.

Разд. 1 имеет вспомогательный характер. Здесь приведены некоторые сведения о мере Винера, группах диффеоморфизмов и получены формулы, задающие правила преобразования винеровской меры при действии группы диффеоморфизмов.

В разд. 2 показано, что квантовые меры для свободной безмассовой и свободной массивной частиц эквивалентны с точностью до диффеоморфизмов.

В разд. 3 предложено обобщение локальной квантовой теории поля, учитывающее наличие скрытых внутренних симметрий, а именно построена модель квантовой теории поля на пространстве петель, которая в локальном пределе (когда петля стягивается в точку) превращается в локальную квантовую теорию поля со сходящимися фейнмановскими диаграммами.

В разд. 4 и 5 исследуются общие свойства нелинейных нелокальных замен переменных интегрирования в функциональных интегралах, связанных с преобразованиями группы диффеоморфизмов. Показано, в частности, что такие замены приводят к необходимости интегрировать по функциональным пространствам, содержащим функции, имеющие сингулярности. В результате оказывается возможным построить квантовую теорию в случаях, где наличие сингулярностей принципиально, например, в квантовой космологии.

В разд. 6 предложена простейшая квантовая модель скалярной гравитации, в которой удается вычислить функциональные интегралы явным образом.

В разд. 7 продемонстрировано, как правильный учет сингулярностей в функциональных интегралах приводит к дополнительному неожиданному эффекту, названному нами «квантовым восстановлением нарушенной симметрии».

В разд. 8 расширение функциональных пространств, по которым ведется интегрирование, связывается с изменением граничных условий для гамильтониана системы, что позволяет описывать более широкий круг физических явлений.

Разд. 9 представляет собой некоторое математическое дополнение, в котором описывается схема построения квазиинвариантных мер на группах диффеоморфизмов отрезка и окружности и приводятся некоторые неожиданные следствия.

В работе рассматривается евклидов вариант квантовой теории поля, в котором фейнмановские континуальные интегралы заменяются на интегралы Винера.

1. КВАЗИИНВАРИАНТНОСТЬ МЕРЫ ВИНЕРА ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

Сначала, для удобства читателя, кратко напомним простейшие сведения о мере и интеграле Винера [8]. (Подробное и строгое изложение можно найти во многих книгах, см., например, [9] или [10].)

Рассмотрим пространство $C([0,1])$ вещественных непрерывных функций на отрезке $[0,1]$, таких, что $x(0)=0$.

Подмножество X в $C([0,1])$ вида

$$X = \{x \in C([0,1]);\ (x(t_1),\dots,x(t_n)) \in U_n\},$$
$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1, U_n \subset \mathbf{R}^n,$$

называется цилиндрическим.

Определим его меру $w(X)$, полагая

$$w(X) = [(2\pi)^n t_1(t_2-t_1)\cdots(t_n-t_{n-1})]^{-1/2}\times \\ \times \int\limits_{U_n} \exp\left\{-\frac{u_1^2}{2t_1} - \frac{(u_2-u_1)^2}{2(t_2-t_1)} - \dots - \frac{(u_n-u_{n-1})^2}{2(t_n-t_{n-1})}\right\} du_1\cdots du_n. \quad (1)$$

Заданная таким способом мера счетно-аддитивна*, что позволяет продолжить ее естественным образом (см., например, [11]) на все измеримые по

*Т. е. обладает таким свойством, что мера объединения счетного числа взаимно непересекающихся подмножеств равна сумме их мер.

этой мере подмножества пространства $C([0,\,1])$. Это продолжение называется мерой Винера w в пространстве $C([0,\,1])$.

Интеграл по мере w от функционала называется винеровским интегралом и записывается как

$$\int\limits_{C([0,1])} F(x)\,w(dx). \tag{2}$$

Чтобы получить его конструктивное определение, рассмотрим сначала интегралы от так называемых цилиндрических функционалов

$$F(x) = f(x(t_1), \ldots, x(t_n)).$$

В этом случае винеровский интеграл сводится к обычному n-кратному интегралу

$$[(2\pi)^n t_1 \cdots (t_n - t_{n-1})]^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u_1, \ldots, u_n) \times \\ \times \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(u_i - u_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right\} du_1 \cdots du_n. \tag{3}$$

Сопоставим теперь непрерывному и ограниченному функционалу $F(x)$ цилиндрические функционалы следующим образом.

Разобьем отрезок $[0,1]$ на n частей $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$, $\Delta t \equiv \max(t_k - t_{k-1})$, и рассмотрим ломаную $\xi_n(t)$, задаваемую условиями

$$\xi_n(0) = x(0) = 0, \quad \xi_n(t_1) = x(t_1), \ldots, \xi_n(t) = x(t_n).$$

Тем самым имеем цилиндрический функционал

$$F(\xi_n) = f(x(t_1), \ldots, x(t_n)),$$

для которого винеровский интеграл вычисляется по формуле (3).

Таким образом получается семейство значений винеровских интегралов для построенных по указанному правилу цилиндрических функционалов.

Оказывается, существует не зависящий от способа разбиения отрезка предел этих значений при $n \to \infty$ ($\Delta t \to 0$), который и дает конструктивное определение винеровского интеграла (2) от непрерывного и ограниченного функционала $F(x)$.

В связи с естественным желанием записать плотность меры Винера в компактном виде необходимо сделать следующее замечание. В пределе

$n \to \infty$ ($\Delta t \to 0$) сумма в показателе экспоненты в формуле (1) переходит в интеграл

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 (x'(t))^2\,dt.$$

Парадокс, однако, состоит в том, что мера Винера сосредоточена на траекториях, которые почти всюду не дифференцируемы, т. е. множества гладких или даже дифференцируемых в единственной точке отрезка функций имеют нулевую меру Винера. Тем не менее формальная запись

$$w(dx) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^1 (x'(t))^2\,dt\right\} dx$$

определяет меру Винера и позволяет проводить вычисление интегралов.

При некоторых преобразованиях мера Винера, заданная на пространстве непрерывных функций, не выводится из этого пространства, а лишь умножается на некоторую функцию, зависящую от преобразования, — так называемую производную Радона–Никодима. В этом случае мера является квазиинвариантной. Простейший пример — это сдвиг аргумента меры на некоторую дифференцируемую функцию [9].

Оказывается, что мера Винера также квазиинвариантна относительно групп диффеоморфизмов.

Пусть на отрезке $[a,b]$* действует группа диффеоморфизмов

$$g : [a,b] \to [a,b]; \quad g(t) = \tau, \quad g^{-1}(\tau) = t, \quad g(a) = a, \quad g(b) = b.$$

Будем считать, что $g \in \mathrm{Diff}^3_+([a,b])$, т. е. функция $g(t)$ трижды дифференцируема и $g'(t) > 0$. При этом $(g^{-1}(\tau))' = (g'(t))^{-1}$. Штрих $'$ обозначает производную по аргументу.

Заметим, что выводы этого раздела справедливы не только для конечного отрезка, но и для всей оси $(-\infty, +\infty)$, или полуоси $(0, +\infty)$.

Рассмотрим теперь меру Винера**:

$$w(dq) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_a^b (q'(\tau))^2\,d\tau\right\} dq. \tag{4}$$

*До сих пор мы говорили об отрезке $[0,1]$, но очевидно, что он может быть произвольным.

**Напомним, что здесь и далее производная в записи меры Винера понимается в обобщенном смысле.

Известно (см., например, [12]), что существует класс преобразований функции $q(\tau)$
$$q(\tau) = p\left(g^{-1}(\tau)\right)\left((g^{-1}(\tau))'\right)^{\alpha},$$
такой, что для каждого α можно построить некоторую квазиинвариантную гауссову меру.

Мера Винера (4) оказывается квазиинвариантной при $\alpha = -1/2$, что сейчас непосредственно и проверим.

Квазиинвариантность меры Винера на пространстве функций, непрерывных на отрезке, была установлена в работе [13], где также была вычислена и производная Радона–Никодима. Здесь приведем другой вывод этого результата.

Итак, пусть функция $q(\tau)$ есть образ функции $p(t)$ относительно преобразований группы диффеоморфизмов, получаемый по правилу
$$q(\tau) = (gp)(\tau) = p(t)\sqrt{g'(t)} = p\left(g^{-1}(\tau)\right)\frac{1}{\sqrt{(g^{-1}(\tau))'}}. \tag{5}$$

Тогда
$$q'(\tau) = p'(g^{-1}(\tau))\,\frac{(g^{-1}(\tau))'}{\sqrt{(g^{-1}(\tau))'}} - \frac{1}{2}p\left(g^{-1}(\tau)\right)\frac{(g^{-1}(\tau))''}{\left[(g^{-1}(\tau))'\right]^{3/2}}.$$

Принимая во внимание равенство
$$\frac{(g^{-1}(\tau))''}{\left[(g^{-1}(\tau))'\right]^{2}} = -\frac{g''(t)}{g'(t)},$$
получим
$$\int\limits_a^b (q'(\tau))^2\,d\tau = \int\limits_a^b \left\{(p'(t))^2 + p(t)\,p'(t)\frac{g''(t)}{g'(t)} + \frac{1}{4}p^2(t)\left(\frac{g''(t)}{g'(t)}\right)^2\right\}dt. \tag{6}$$

Таким образом, при преобразованиях диффеоморфизмов мера Винера ведет себя как
$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_a^b (q'(t))^2\,dt\right\}dq =$$
$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(p(t)\,p'(t)\frac{g''(t)}{g'(t)} + \frac{1}{4}p^2(t)\left(\frac{g''(t)}{g'(t)}\right)^2\right)dt\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_a^b (p'(t))^2\,dt\right\}dp. \tag{7}$$

Хотя приведенные выкладки носят формальный характер, можно утверждать, что эти меры Винера эквивалентны (см. в [9] теорему Фельдмана–Гаека). Дополнительный множитель (производная Радона–Никодима) определен на пространстве непрерывных функций. Вычислим теперь его явным образом. Напомним, что $q(\tau)$ и $p(t)$ задают стохастический винеровский процесс. В силу этого второе слагаемое в правой части (6) представляет собой стохастический интеграл Ито (см., например, [14]), который равен*

$$\int_a^b p(t)\, p'(t)\, f(t)\, dt = \frac{1}{2}\left[p^2(b) f(b) - p^2(a) f(a)\right] - \\ - \frac{1}{2}\int_a^b p^2(t) f'(t)\, dt - \frac{1}{2}\int_a^b f(t)\, dt. \quad (8)$$

Здесь введем обозначение

$$f(t) \equiv \frac{g''(t)}{g'(t)}.$$

Последнее слагаемое в правой части (8) (так называемый член Ито) равно

$$-\frac{1}{2}\left[\ln\, g'(b) - \ln\, g'(a)\right].$$

Таким образом, с учетом якобиана перехода от q к p получим формулу для изменения функциональных интегралов при преобразованиях группы диф-

---

*Следующее равенство легко проверить, если представить интеграл как предел дискретной суммы

$$\tau \sum_{k=1}^{n} (p_k - p_{k-1})\, p_{k-1} f(t_{k-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (p_k^2 - p_{k-1}^2)\, f(t_{k-1}) - \\ - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (p_k - p_{k-1})^2 f(t_{k-1}) = \frac{1}{2}\left[p_n^2 f(t_n) - p_0^2 f(t_0)\right] - \\ - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} p_k^2\left[f(t_k) - f(t_{k-1})\right] - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (p_k - p_{k-1})^2 f(t_{k-1})$$

и принять во внимание, что для винеровского процесса

$$(p_k - p_{k-1})^2 \sim \Delta t.$$

феоморфизмов

$$\int\limits_{C([a,b])} F[q]\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_a^b (q'(\tau))^2\,d\tau\right\} dq =$$

$$= C(g) \int\limits_{C([a,b])} F[gp]\,\exp\left\{\frac{1}{4}\int\limits_a^b p^2(t)\,\mathcal{S}_g(t)\,dt + \frac{1}{4}\left(p^2(b)\frac{g''(b)}{g'(b)} - p^2(a)\frac{g''(a)}{g'(a)}\right)\right\}\times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_a^b (p'(t))^2\,dt\right\} dp. \quad (9)$$

Здесь $\mathcal{S}_g$ обозначает производную Шварца

$$\mathcal{S}_g(t) \equiv \left(\frac{g''(t)}{g'(t)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{g''(t)}{g'(t)}\right)^2 = \frac{g'''(t)}{g'(t)} - \frac{3}{2}\left(\frac{g''(t)}{g'(t)}\right)^2, \qquad (10)$$

а коэффициент $C(g)$ зависит от диффеоморфизма $g(t)$ и поведения стохастического процесса $p(t)$ на границе отрезка.

Если значения $p(a)$ и $p(b)$ фиксированы, то

$$C(g) = \frac{1}{\sqrt{g'(a)g'(b)}}. \qquad (11)$$

Если значение $p(a)$ фиксировано, а значение $p(b)$ не фиксировано, то

$$C(g) = \frac{\sqrt{g'(b)}}{\sqrt{g'(a)}}. \qquad (12)$$

Если оба значения $p(a)$ и $p(b)$ не фиксированы, то

$$C(g) = \sqrt{g'(a)g'(b)}. \qquad (13)$$

Для группы диффеоморфизмов окружности $\mathrm{Diff}^3_+(S^1)$ получается аналогичная формула, в которой, однако, коэффициент C_g оказывается равным единице и из-за периодичности отсутствуют граничные члены:

$$\int F[q]\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{S^1} \left(q'(\tau)\right)^2\,d\tau\right\} dq =$$

$$= \int F[gp]\,\exp\left\{\frac{1}{4}\int\limits_{S^1} p^2(t)\,\mathcal{S}_g(t)\,dt\right\}\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{S^1} \left(p'(t)\right)^2\,dt\right\} dp. \quad (14)$$

Мера Винера на пространстве непрерывных функций, заданных на отрезке или окружности, является квазиинвариантной относительно групп диффеоморфизмов отрезка и, соответственно, окружности.

Оказывается, что с помощью меры Винера можно построить квазиинвариантные меры на группах диффеоморфизмов отрезка и окружности [20]. Подробнее об этом будет рассказано в разд. 9.

Используем формулу (14) для построения квантово-полевой модели на пространстве петель в разд. 3, а в следующем разделе обсудим одно интересное следствие формулы для производной Радона–Никодима.

2. МАССА КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ КАК РЕЗУЛЬТАТ ДИФФЕОМОРФИЗМА

В этом разделе найдем явный вид диффеоморфизмов, переводящих квантовую меру для свободной безмассовой частицы в квантовую меру для свободной массивной частицы.

Перепишем для удобства формулу (9) в случае, когда фиксированы оба граничных значения, как

$$\int\limits_{C([a,\,b])} F[y]\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(y'(\tau)\right)^2\,d\tau\right\}dy = \frac{1}{\sqrt{g'(a)g'(b)}}\times$$

$$\times\int\limits_{C([a,\,b])} F[gx]\,\exp\left\{\frac{1}{4}\int\limits_a^b x^2(t)\,\mathcal{S}_g(t)\,dt + \frac{1}{4}\left(x^2(b)\frac{g''(b)}{g'(b)} - x^2(a)\frac{g''(a)}{g'(a)}\right)\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(x'(t)\right)^2\,dt\right\}dx. \quad (15)$$

Будем считать, что стохастические процессы $x(t)$ и $y(t)$ представляют собой броуновский мост и $x(a) = x(b) = y(a) = y(b) = 0$.

Легко проверить, что диффеоморфизмы вида

$$g_0(t) = \frac{1}{(\mathrm{e}^{2mb} - \mathrm{e}^{2ma})}\left\{(b-a)\,\mathrm{e}^{2mt} + (a\,\mathrm{e}^{2mb} - b\,\mathrm{e}^{2ma})\right\} \quad (16)$$

преобразуют отрезок в себя: $[a,\,b] \to [a,\,b]$, и производная Шварца для них есть константа

$$\mathcal{S}_{g_0}(t) = -2\,m^2.$$

Соответствующий им коэффициент равен

$$C(g_0) = \frac{\sinh\left(m(b-a)\right)}{m(b-a)}. \tag{17}$$

Таким образом, формула (15) приобретает вид

$$\int\limits_{C([a,\,b])} F[y]\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(y'(t)\right)^2\,dt\right\} dy = \frac{\sinh\left(m(b-a)\right)}{m(b-a)}\times$$
$$\times \int\limits_{C([a,\,b])} F[gx]\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_a^b m^2x^2(t)\,dt\, - \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(x'(t)\right)^2\,dt\right\} dx. \tag{18}$$

Отсюда следует вывод, который кажется парадоксальным: *квантовая теория свободной массивной частицы есть не что иное, как квантовая теория свободной безмассовой частицы, но при другом способе измерения времени и соответствующем изменении канонических координат.*

В силу следующего свойства производной Шварца

$$\mathcal{S}_{f\circ g}(t) = \mathcal{S}_f(g(t))\left(g'(t)\right)^2 + \mathcal{S}_g(t), \quad (\,f\circ g\,)(t) = f\left(g(t)\right), \tag{19}$$

кроме (16), существует целый класс диффеоморфизмов, для которых $\mathcal{S}_g(t) = -2\,m^2$.

Действительно, для дробно-линейных преобразований

$$f(t) = \frac{\alpha t + \beta}{t + \delta}$$

производная Шварца равна нулю.

В случае $\alpha = (a+b) + \delta$ и $\beta = -ab$ преобразования сохраняют концы отрезка $[a, b]$.

Поэтому класс диффеоморфизмов, приводящих к соотношению (18), записывается как

$$g(t) = \frac{(a+b+\delta)\,g_0(t) - ab}{g_0(t) + \delta}, \tag{20}$$

где $g_0(t)$ задается формулой (16), а δ — произвольный параметр.

Заметим, что при этом коэффициент (17) инвариантен:

$$C(f\circ g_0) = C(g_0).$$

Если в формуле (18) положить $F = 1$, то без обычных громоздких вычислений (см., например, [15]) в качестве дополнительного бонуса получится формула Фейнмана–Каца.

Аналог соотношения (18) можно также получить в результате нелокальной линейной замены в винеровском интеграле

$$y(t) = x(t) + m\int\limits_a^t x(\tau)\,d\tau. \tag{21}$$

Похожие нелокальные, но нелинейные замены обсуждаются в разд. 4 и 5.

Необходимо заметить, что с помощью замен переменных в функциональных интегралах, сопровождающихся также изменением времени, оказалось возможным связать между собой ряд квантово-механических задач с разными потенциалами взаимодействия. После пионерской статьи [16] появилось довольно много работ в этом направлении. Здесь, однако, мы не будем обсуждать эту тему. Отметим лишь работу [17], в которой получена формула, связывающая квантово-механические функции Грина для гамильтонианов, полученных друг из друга с помощью преобразований, аналогичных преобразованиям группы диффеоморфизмов*.

Попробуем описанную выше схему реализовать непосредственным образом в квантовой теории поля. В отличие от квантовой механики ситуация здесь более сложная. Действительно, если перейти к трехмерному преобразованию Фурье полевой функции, то она представляет собой бесконечный набор квантовых гармонических осцилляторов с частотами $\sqrt{\mathbf{k}^2}$ и $\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}$, соответственно, для безмассового и массивного полей. В этом случае переход от безмассовой релятивистской частицы к массивной релятивистской частице осуществляется с помощью композиции диффеоморфизмов

$$g_{\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} \circ g^{-1}_{\sqrt{\mathbf{k}^2}}.$$

Имея в виду бесконечный временной интервал, рассмотрим диффеоморфизм

$$g(t) = \exp\{2mt\}.$$

Производная Шварца для него равна $-2m^2$, а обратный диффеоморфизм имеет вид

$$g^{-1}(t) = \frac{1}{2m}\ln t.$$

В результате для интересующей нас композиции получим

$$\tau_k = g_{\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} \circ g^{-1}_{\sqrt{\mathbf{k}^2}} = g_{\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}\big(g^{-1}_{\sqrt{\mathbf{k}^2}}(t)\big) = t^{\sigma(k)}, \tag{22}$$

*Авторы благодарны С. Н. Сторчаку за ценные замечания.

где

$$\sigma(k) = \sqrt{\frac{\mathbf{k}^2 + m^2}{\mathbf{k}^2}}.$$

Таким образом, для свободного скалярного поля имеем

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int d^3\mathbf{k}\int dt\big(|\dot{\phi}(t,\mathbf{k})|^2 + \mathbf{k}^2|\phi(t,\mathbf{k})|^2\big)\right\}d\phi =$$
$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\int d^3\mathbf{k}\ z(k)\int d\tau_k\,\left(|\dot{\varphi}(\tau_k,\mathbf{k})|^2 + \left(\mathbf{k}^2 + m^2\right)|\varphi(\tau_k,\mathbf{k})|^2\right)\right\}d\varphi. \tag{23}$$

Здесь $|\phi(t,\mathbf{k})|^2 = \phi(t,\mathbf{k})\,\phi(t,-\mathbf{k})$, $z(k)$ — некоторый нормировочный множитель. Нетрудно заметить, однако, что при таком переходе от безмассового поля к массивному в правой части формулы (23) получается нелокальная теория.

3. ЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ КАК ПРЕДЕЛ ТЕОРИИ, ЗАДАННОЙ НА ПРОСТРАНСТВЕ ПЕТЕЛЬ

В работах [1–3] было предложено нелокальное обобщение квантовой теории поля на пространстве петель и изучен ее локальный предел, при котором размер петли стремится к нулю (т. е. петля стягивается в точку).

Оказывается, что этот предел представляет собой модель локальной квантовой теории поля, в которой фейнмановские диаграммы свободны от ультрафиолетовых расходимостей. Такое неожиданное свойство тесно связано с инвариантностью исходной нелокальной теории относительно группы диффеоморфизмов.

Идея нелокального обобщения состоит в замене обычного импульсного пространства пространством петель [18]. Таким образом, импульсное пространство новой теории

$$\mathcal{P} = C(S^1, \mathbf{R}^4)$$

есть пространство всех непрерывных отображений окружности единичной длины в $\mathbf{R}^4$ с нормой

$$\|p\|_{\mathcal{P}} = \|p\| = \max_{\tau\in S^1}\|p(\tau)\|,$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbf{R}^4$.

Произвольный элемент этого пространства может быть представлен в виде

$$p(\tau) = r + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\xi(\tau), \tag{24}$$

где $\xi(\tau)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{S^1} \xi(\tau)\, d\tau = 0. \tag{25}$$

В локальном пределе ($\lambda \to +\infty$) $p(\tau)$ переходит в r (точку обычного импульсного пространства $\mathbf{R}^4$).

Как уже говорилось, группа диффеоморфизмов окружности

$$G = \mathrm{Diff}^3_+(S^1), \quad g \in G \quad \{g:\, S^1 \to S^1,\ g'(\tau) > 0\},$$

действует на пространстве $\mathcal{P}$ следующим образом:

$$(gp)(\tau) = p\left(g^{-1}(\tau)\right) \frac{1}{\sqrt{(g^{-1}(\tau))'}}. \tag{26}$$

На пространстве $\mathcal{P}$ не существует меры, инвариантной относительно группы G. Как мы видели выше, мера Винера

$$w_\lambda(dp) = \exp\left\{-\frac{\lambda}{2}\int\limits_{S^1} \|p'(\tau)\|^2\, d\tau\right\} dp \tag{27}$$

является квазиинвариантной и преобразуется как

$$w_\lambda(d\,(gp)) = \exp\left\{\frac{\lambda}{4}\int\limits_{S^1} \mathcal{S}_g(\tau)\, \|p(\tau)\|^2\, d\tau\right\} w_\lambda(dp). \tag{28}$$

Заметим, что

$$w_\lambda(dp) = dr\, w_1(d\xi).$$

Пусть E — гильбертово пространство всех квадратично-интегрируемых по мере Винера функций $\varphi : \mathcal{P} \to \mathbf{C}$ с правилом сопряжения

$$\overline{\varphi(p)} = \varphi(-p).$$

Функции φ реализуют регулярное унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве E:

$$(g\,\varphi)(p) = \varphi(g^{-1}\,p)\ \exp\left\{\frac{\lambda}{8}\int\limits_{S^1} \mathcal{S}_{g^{-1}}(\tau)\, \|p(\tau)\|^2\, d\tau\right\}. \tag{29}$$

При таком определении скалярное произведение $\int\limits_{\mathcal{P}} \varphi(p)\, \overline{\phi(p)}\, w_\lambda(dp)$ оказывается инвариантным.

Свободное действие имеет вид

$$\mathcal{A}_0^g[\varphi] = \int\limits_{\mathcal{P}} \left(\int\limits_{S^1} \|g\, p(\tau)\|^2 \, d\tau + m^2 \right) |\varphi(p)|^2 \, w_\lambda(dp) \tag{30}$$

с некоторым фиксированным g.

Для непрерывных полевых функций $\varphi(p)$ в локальном пределе получим действие свободного скалярного поля, умноженное на фактор, зависящий от g:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}_0^g[\varphi] = \int\limits_{S^1} (g'(\tau))^2 \, d\tau \int\limits_{\mathbf{R}^4} |\varphi(r)|^2 \left(\|r\|^2 + m^2 \right) dr. \tag{31}$$

Рассмотрим также следующий член взаимодействия:

$$\mathcal{A}_1^g[\varphi] = \int\limits_{\mathcal{P}} \cdots \int\limits_{\mathcal{P}} \left(\int\limits_{S^1} \delta(gp_1(\tau) + gp_2(\tau) + gp_3(\tau) + gp_4(\tau)) \, d\tau \right) \times$$
$$\times\, \varphi(p_1)\, \varphi(p_2)\, \varphi(p_3)\, \varphi(p_4)\, w_\lambda(dp_1)\, w_\lambda(dp_2)\, w_\lambda(dp_3)\, w_\lambda(dp_4). \tag{32}$$

Для непрерывных полевых функций $\varphi(p)$ локальный предел дает обычное взаимодействие φ^4, умноженное на зависящий от g фактор:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}_1^g[\varphi] = \int\limits_{S^1} \frac{d\tau}{g'(\tau)} \int\limits_{\mathbf{R}^4} \cdots \int\limits_{\mathbf{R}^4} \delta(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \times$$
$$\times\, \varphi(r_1)\, \varphi(r_2)\, \varphi(r_3)\, \varphi(r_4)\, dr_1\, dr_2\, dr_3\, dr_4. \tag{33}$$

Удобно сделать замену переменных

$$q(\tau) = (gp)(\tau), \quad \psi(q) = (g\varphi)(q).$$

Новая импульсная переменная q имеет вид $q(\tau) = \rho + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\eta(\tau)$.

В новых переменных свободное действие

$$\mathcal{A}_0^g[\psi] = \mathcal{A}_0[\psi] = \int\limits_{\mathcal{P}} \left(\int\limits_{S^1} \|q(\tau)\|^2 d\tau + m^2 \right) |\psi(q)|^2 \, w_\lambda(dq) \tag{34}$$

не зависит от g.

Зависимость $\mathcal{A}_1^g[\psi]$ от g содержится только в производной Шварца:

$$\mathcal{A}_1^g[\psi] = \int\limits_{\mathcal{P}} \cdots \int\limits_{\mathcal{P}} \left(\int\limits_{S^1} \delta(q_1(\tau) + \ldots + q_4(\tau))\, d\tau \right) \times$$

$$\times \exp\left\{ \frac{\lambda}{8} \int\limits_{S^1} \mathcal{S}_{g^{-1}}(\tau) \left(\|q_1(\tau)\|^2 + \ldots + \|q_4(\tau)\|^2 \right) d\tau \right\} \times$$

$$\times\, \psi(q_1)\, \psi(q_2)\, \psi(q_3)\, \psi(q_4)\, w_\lambda(dq_1)\, w_\lambda(dq_2)\, w_\lambda(dq_3)\, w_\lambda(dq_4). \quad (35)$$

Чтобы получить совпадение с действием обычной теории, когда $\lambda \to +\infty$, будем рассматривать только диффеоморфизмы $g_\lambda(\tau)$, которые удовлетворяют условиям

$$\lim_{\lambda \to +\infty} g''_\lambda(\tau) = 0, \qquad \lim_{\lambda \to +\infty} g'_\lambda(\tau) = 1. \quad (36)$$

В предельном случае такие диффеоморфизмы обращаются в тождественный

$$\lim_{\lambda \to +\infty} g_\lambda(\tau) = \tau.$$

Сделаем теперь замену

$$\frac{g''(\tau)}{g'(\tau)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, f(\tau). \quad (37)$$

Здесь $f \in C(S^1, \mathbf{R}) : \int\limits_{S^1} f(\tau)\, d\tau = 0.$

В терминах f производная Шварца $\mathcal{S}_g$ имеет вид

$$\mathcal{S}^f(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, f'(\tau) - \frac{1}{2\lambda}\, f^2(\tau). \quad (38)$$

Усредним член взаимодействия по f, используя квазиинвариантную меру Винера $w_\alpha(df)$:

$$\mathcal{A}_1 = \int \mathcal{A}_1^g\, w_\alpha(df). \quad (39)$$

Заметим, что подынтегральное выражение в усредненном действии $\mathcal{A}_1$ для каждого g имеет один и тот же локальный предел (обычное взаимодействие φ^4).

Таким образом, в локальном пределе выражения (34) и (39) приводят к стандартному классическому действию самодействующего скалярного поля.

Однако в квантовой теории для получения локального предела нельзя просто заменить $\psi(q) \to \psi(\rho)$ в подынтегральном выражении производящего функционала. Дело в том, что в этом случае мы интегрируем по пространству полевых функций ψ, которые не являются непрерывными*.

Поэтому мы должны сначала проинтегрировать по ψ, а затем перейти к пределу $\lambda \to +\infty$. (Напомним, что в этом пределе петля стягивается в точку и диффеоморфизмы превращаются в тождество.)

При этом оказывается, что память о том, что теория исходно формулировалась на пространстве петель, сохраняется. В частности, это приводит к сходимости фейнмановских диаграмм.

Проиллюстрируем это на примере простейшей диаграммы (так называемой «рыбы»).

Функциональный интеграл для этой диаграммы имеет вид

$$\int \psi(q_1)\,\psi(q_2)\,\psi(q_3)\,\psi(q_4)\ \left(\mathcal{A}_1[\psi]\right)^2\ \exp\left\{-\mathcal{A}_0[\psi]\right\} d\psi. \tag{40}$$

Интегрируя с помощью соотношения

$$\begin{aligned}\int\int \psi(q_1)\,a(q_1)\,w_\lambda(dq_1)\int \psi(q_2)\,b(q_2)\,w_\lambda(dq_2)\ \exp\left\{-\mathcal{A}_0[\psi]\right\} d\psi = \\ = \int \frac{1}{\Omega(q)}\,a(q)\,b(-q)\,w_\lambda(dq) \quad \left(\,\Omega(q) = \|q\|^2 + m^2\right),\end{aligned} \tag{41}$$

получим

$$\begin{aligned}\int \left[\int \delta(q_1(\tau)+q_2(\tau)-q_5(\tau)-q_6(\tau))\,d\tau\right] \times \\ \times \left[\int \delta(q_3(\tau)+q_4(\tau)+q_5(\tau)+q_6(\tau))d\tau\right] \times \\ \times \exp\left\{\frac{\lambda}{8}\int \mathcal{S}^{f_1}(\tau)\left(\|q_1(\tau)\|^2+\|q_2(\tau)\|^2+\|q_5(\tau)\|^2+\|q_6(\tau)\|^2\right)d\tau\right\} \times \\ \times \exp\left\{\frac{\lambda}{8}\int \mathcal{S}^{f_2}(\tau)\left(\|q_3(\tau)\|^2+\|q_4(\tau)\|^2+\|q_5(\tau)\|^2+\|q_6(\tau)\|^2\right)d\tau\right\} \times \\ \times \frac{1}{\Omega(q_5)}\frac{1}{\Omega(q_6)} w_\lambda(dq_5)\,w_\lambda(dq_6)\,w_\alpha(df_1)\,w_\alpha(df_2).\end{aligned} \tag{42}$$

*Для того чтобы на пространстве непрерывных функций мера $\exp\left\{-1/2(T^{-1}\psi,\psi)\right\} d\psi$ была счетно-аддитивной, необходимо, чтобы оператор T был ядерным [9]. Для квантовой теории поля в d-мерном пространстве-времени это достигается, только когда свободный пропагатор имеет вид $(\|p\|^2+m^2)^{-\alpha}$, $\alpha > d/2$. В реалистичных же моделях квантовой теории поля $\alpha = 1$ и квантовым полям соответствуют обобщенные функции.

Теперь можно перейти к пределу $\lambda \to +\infty$, что дает

$$\begin{aligned}
&\delta(\rho_1 + \ldots + \rho_4)\times \\
&\qquad \times \int \exp\left\{-\frac{1}{16}(\|\rho\|^2 + \|\rho_1+\rho_2-\rho\|^2)\int \big(f_1^2(\tau)+f_2^2(\tau)\big)\,d\tau\right\}\times \\
&\qquad \times \exp\left\{\frac{1}{4}\int \big(f_1'(\tau)+f_2'(\tau)\big)\big[(\rho,\eta_5(\tau)) + (\rho_1+\rho_2-\rho,\eta_6)\big]\,d\tau\right\}\times \\
&\qquad\qquad \times J\,\frac{1}{\Omega(\rho)}\,\frac{1}{\Omega(\rho_1+\rho_2-\rho)}\,d\rho\,w_1(d\eta_5)\,w_1(d\eta_6)\,w_\alpha(df_1)\,w_\alpha(df_2). \qquad (43)
\end{aligned}$$

Множитель J не зависит от ρ, η_5, η_6.

Интегрирование по η_5, η_6 и $f_1 + f_2$ приводит к

$$I = \int \frac{1}{\Omega(\rho)}\,\frac{1}{\Omega(\rho_1+\rho_2-\rho)}\,\exp\left\{-\frac{1}{16}\|\rho\|^2\int v^2(\tau)\,d\tau\right\}\,d\rho\,w_\alpha(dv), \qquad (44)$$

где $v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(f_1 - f_2)$.

Проводя простейшие оценки, видим, что интеграл I сходится:

$$\begin{aligned}
I &\leqslant C_1 \int \exp\left\{-\frac{1}{16}\|\rho\|^2\int v^2(\tau)\,d\tau\right\}\,d\rho\,w_1(dv) \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant C_2 \int \frac{1}{\left(\int v^2(\tau)\,d\tau\right)^2}\,\exp\left\{-\frac{\alpha}{2}\int v'(\tau)^2 d\tau\right\}dv < \infty. \qquad (45)
\end{aligned}$$

Благодаря усреднению по f в действии (39) тот же самый «вычитательный» механизм имеет место и в случае других диаграмм. Действительно, после интегрирования по η_i каждая линия приобретает убывающий фактор $\exp\left\{-\dfrac{1}{32}\|\rho\|^2\int v_i^2(\tau)\,d\tau\right\}$, который обеспечивает сходимость диаграммы.

Этот удивительный эффект можно смоделировать следующим простым примером.

Легко заметить, что интеграл по вещественной полуоси

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_0^{\lambda}\frac{x\,\mathrm{e}^{\imath\sigma}}{\left(x\,\mathrm{e}^{\imath\sigma}-1\right)^2}\,dx$$

расходится.

Однако интеграл по бесконечно узкой полосе (так сказать, по «физической» прямой) существует:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_{-1/\lambda}^{1/\lambda}d\sigma\int\limits_0^{\lambda}\frac{x\,\mathrm{e}^{\imath\sigma}}{\left(x\,\mathrm{e}^{\imath\sigma}-1\right)^2}\,dx = 2\pi.$$

Здесь также усреднение и переход к пределу приводят к сходимости интеграла.

Усреднение по мере Винера $w_\alpha(df)$ содержит произвол в выборе размерного параметра α ($[\alpha] = [p^2]$). Вопросы о связи этого произвола с известным произволом в выборе точки вычитания в обычной теории, а также связи рассматриваемой свободной от расходимостей модели с обычной перенормированной теорией остаются открытыми.

4. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛАХ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Рассмотрим меру Винера

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{T_1} (\dot{y}(t))^2\,dt\right\} dy \equiv w(dy). \tag{46}$$

Как видно из разд. 2, линейная нелокальная замена

$$y(t) = x(t) + \int\limits_{T_0}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

не выводит функциональное интегрирование за пределы пространства непрерывных функций. В этом разделе покажем, что нелинейные нелокальные замены, вообще говоря, приводят к необходимости интегрировать по более сложным функциональным пространствам.

В результате нелинейной нелокальной замены

$$y(t) = x(t) + \int\limits_{T_0}^{t} f\bigl(x(\tau)\bigr)\,d\tau \tag{47}$$

мера (46) превращается в

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{T_1} \dot{x}^2(t)\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{T_1} f^2\bigl(x(t)\bigr)\,dt - \int\limits_{t=T_0}^{t=T_1} f\bigl(x(t)\bigr)\,dx(t)\right\} dx. \tag{48}$$

Последний член в показателе экспоненты — это стохастический интеграл Ито

$$\int\limits_{t=T_0}^{t=T_1} f(x(t))\,dx(t).$$

Помимо граничных членов

$$BT = \Phi\big(x(T_1)\big) - \Phi\big(x(T_0)\big), \quad \Phi(u) = \int^{u} f(v)\, dv,$$

он дает еще дополнительное слагаемое (член Ито)*

$$-\frac{1}{2}\int_{T_0}^{T_1} f'\big(x(t)\big)\, dt.$$

Таким образом, мы имеем формальное равенство мер

$$w(dy) \equiv \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{T_0}^{T_1} (\dot{y}(t))^2\, dt\right\} dy =$$
$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{T_0}^{T_1} \Big(\dot{x}^2(t) + f^2\big(x(t)\big) - f'\big(x(t)\big)\Big)\ dt - BT\right\} dx. \quad (49)$$

Это соотношение можно рассматривать как формальную связь между свободной теорией и теорией с взаимодействием.

Заметим, что наличие члена Ито позволяет факторизовать гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + f^2(x) - f'(x)\right) = a_f^+\, a_f^-, \quad (50)$$

где

$$a_f^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mp\frac{d}{dx} + f(x)\right). \quad (51)$$

---

*Это легко проверяется, если представить интеграл как предел дискретной суммы

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\big(\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})\big) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})^2 f'(x_{k-1})$$

и принять во внимание, что для винеровского процесса

$$(x_k - x_{k-1})^2 \sim \Delta t.$$

Если замена (47) обратима, т. е. если существует функция $x(y)$, то

$$\int\limits_X F(x)\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{T_1}\bigl(\dot{x}^2(t)+f^2\bigl(x(t)\bigr)-f'\bigl(x(t)\bigr)\bigr)dt-BT\right\}dx = \\ = \int\limits_Y F(x(y))\,w(dy). \quad (52)$$

До сих пор мы ничего не говорили про функциональные пространства X и Y. В следующих примерах увидим, что они, вообще говоря, различны.

5. ОДНОМЕРНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ φ^4

Для одномерной квантовой теории скалярного поля с взаимодействием φ^4 нелинейная нелокальная замена выглядит как

$$\chi(t)=\varphi(t)+\int\limits_{T_0}^{t}\varphi^2(\tau)\,d\tau. \quad (53)$$

В этом случае имеет место равенство

$$\int\limits_X F(\varphi)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{T_1}\bigl((\dot{\varphi}(t))^2+\varphi^4(t)-2\varphi(t)\bigr)\,dt-BT\right\}d\varphi = \\ = \int\limits_{C([T_0,T_1])} F(\varphi(\xi))\,w(d\xi). \quad (54)$$

Член Ито и граничные члены равны соответственно $-2\varphi(t)$ и

$$BT=\frac{1}{3}[\varphi^3(1)-\varphi^3(0)].$$

Выясним теперь, что представляет собой пространство X.

Нетрудно показать, что функция $\varphi(t)$ в некоторых точках $t=t^*$ отрезка $[T_0,T_1]$ может иметь сингулярности вида

$$\varphi(t)\sim(t-t^*)^{-1}.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что функция $\chi(t)$ ограничена на отрезке, при этом могут быть области, где значения функции $|\varphi(t)|$ достаточно большие.

Тогда в этих областях поведение функции $\varphi(t)$ задается дифференциальным уравнением $\dot{\varphi} = -\varphi^2$.

Так как функция $\chi(t)$ ограничена на отрезке $[T_0, T_1]$, то существует конечный отрезок $[t_1, t_2] \subset [T_0, T_1]$, на котором у функции $\varphi(t)$ сингулярность $(t - t^*)^{-1}$ единственная.

В зависимости от вида функции $\chi(t)$ могут быть другие конечные отрезки $[t_3, t_4], \ldots$, на которых у $\varphi(t)$ есть сингулярности того же типа $(t - t_j^*)^{-1}$.

При более детальном рассмотрении видно, что поведение функции $\varphi(t)$ в окрестности точки t_j^* задает выражение

$$\varphi(t) = \frac{1}{t - t_j^*} + [\chi(t) - \chi(t_j^*)] - \\ - 2(t - t_j^*)^{-2} \int_{t_j^*}^{t} [\chi(\tau) - \chi(t_j^*)](\tau - t_j^*)\, d\tau + o((t - t_j^*)). \quad (55)$$

Второе и третье слагаемые — это стохастические члены, которые в этой окрестности ведут себя как $(t - t_j^*)^{\varepsilon}$, $\varepsilon < 1$.

Таким образом, пространство X может быть представлено в виде

$$X = X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup \ldots X_n \cup \ldots,$$

где $X_0 = C([T_0, T_1])$, X_n — пространство функций, имеющих n сингулярностей указанного выше вида.

Равенство (54) может быть записано как

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{X_n} F(\varphi) \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_1} \big((\dot{\varphi}(t))^2 + \varphi^4(t) - 2\varphi(t) \big)\, dt - BT \right\} d\varphi = \\ = \int_{C([T_0, T_1])} F(\varphi(\xi))\, w(d\xi). \quad (56)$$

Итак, мы показали, что функциональные интегралы по пространству непрерывных функций в свободной теории поля равны функциональным интегралам в теории с взаимодействием, но заданным на более сложных функциональных пространствах. В частности, в данном примере необходимо интегрировать по пространству, содержащему подпространства разрывных функций*.

*Заметим, что переход от интегрирования по пространству непрерывных функций к интегрированию по пространству, содержащему также и разрывные функции, связан с нелокальным характером замены (47).

Понимание того, каким должно быть пространство, по которому вычисляются функциональные интегралы, является определяющим.

Так, для непрерывных функций $\varphi(t) \in C([T_0, T_1])$ интеграл (54) есть интеграл по мере Винера

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (\dot\varphi(t))^2 dt\right\} d\varphi = w(d\varphi).$$

И при этом подынтегральное выражение

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (\varphi^4(t) + \ldots)\, dt\right\}$$

является ограниченным функционалом. Поэтому интеграл хорошо определен.

Однако на пространствах X_n $(n \geqslant 1)$ функциональный интеграл вида

$$\int\limits_{X_n} P(\varphi)\, \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{T_1} (\dot\varphi(t))^2\, dt\right\} d\varphi,$$

где $P(\varphi)$ — полином, не существует.

А выражение

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{T_1} (\dot\varphi(t))^2\, dt\right\} d\varphi$$

не является мерой на X_n $(n \geqslant 1)$.

И только

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{T_1} \big((\dot\varphi(t))^2 + \varphi^4(t) - 2\varphi(t)\big)\, dt - BT\right\} d\varphi$$

может рассматриваться в качестве меры на X_n $(n \geqslant 1)$. При этом соотношение (54) представляет собой конструктивное определение этой меры.

В реалистичных квантово-полевых моделях с взаимодействием (с размерностью пространства-времени $d = 4$) полевые функции не только не являются непрерывными функциями, но и, более того, вообще представляют собой обобщенные функции. Поэтому неудивительно, что попытки обращаться с функциональными интегралами квантовой теории поля как с (квази-) винеровскими интегралами приводят к известным проблемам. Во всяком случае необходимо рассматривать функциональные интегралы на функциональных пространствах более сложных, чем C.

6. ТОЧНО РЕШАЕМАЯ КВАНТОВАЯ МОДЕЛЬ СКАЛЯРНОЙ ГРАВИТАЦИИ

Рассмотрим теорию самодействующего скалярного поля с действием

$$\tilde{A}(\varphi) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T \left\{(\dot{\varphi}(t))^2 + \lambda^2\,\mathrm{e}^{2\alpha\varphi(t)} - \alpha\lambda\,\mathrm{e}^{\alpha\varphi(t)}\right\} dt. \tag{57}$$

Последнее слагаемое здесь как раз имеет вид члена Ито.

Для определенности будем считать, что $\alpha < 0$ и $\lambda < 0$.

В результате замены

$$\xi(t) = \varphi(t) - \varphi(0) + \lambda \int\limits_0^t \mathrm{e}^{\alpha\varphi(\tau)}\, d\tau \tag{58}$$

мера превратится в меру Винера $w(d\xi)$. В действительности это есть определение функциональной меры, задаваемой действием $\tilde{A}(\varphi)$, на пространстве X:

$$\exp\left\{-\tilde{A}(\varphi)\right\}\; d\varphi = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^T (\dot{\xi}(t))^2\, dt\right\} d\xi \equiv w(d\xi). \tag{59}$$

При $t = 0$ замена (58) сингулярна и должна пониматься как предел соответствующего регуляризованного выражения.

Если обратить замену (58), то можно получить явный вид функции $\varphi(\xi)$:

$$\varphi(t) = \xi(t) - \frac{1}{\alpha}\ln\left(\alpha\lambda\int\limits_0^t \mathrm{e}^{\alpha\xi(\tau)}\, d\tau\right). \tag{60}$$

В результате можно будет вычислить функциональные интегралы по пространству функций $\varphi(t)$:

$$\int\limits_X F(\varphi)\,\exp\left\{-\tilde{A}(\varphi)\right\} d\varphi = \int\limits_{C([0,T])} F(\varphi(\xi))\, w(d\xi). \tag{61}$$

Здесь X — пространство функций, имеющих при $t = 0$ сингулярность вида $\varphi \sim (-1/\alpha)\,\ln\, t$.

Рассмотрим эту теорию как простейшую модель квантовой космологии, в которой масштабный фактор в конформных координатах для метрики FLRW задается квантовым скалярным полем

$$g(t) \equiv a^2(t) = \mathrm{e}^{2\varphi(t)}. \tag{62}$$

Мы выбрали граничные условия в соответствии с начальной сингулярностью

$$g(0) = 0, \quad \varphi(0) = -\infty. \tag{63}$$

Масштабный фактор $a(t)$ в терминах $\xi(t)$ имеет вид

$$a(t) = \mathrm{e}^{\varphi(t)} = \mathrm{e}^{\xi(t)} \left(\alpha\lambda \int\limits_0^t \mathrm{e}^{\alpha\xi(\tau)} d\tau \right)^{-1/\alpha}. \tag{64}$$

В квантовой теории, задаваемой действием $\tilde{A}(\varphi)$, можно вычислить среднее значение масштабного фактора, моменты и другие величины.

Для моделей с

$$\alpha = -\frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

вычисление может быть проведено явным образом, поскольку винеровские интегралы сводятся к итерациям обычных гауссовых интегралов.

Пусть, например, $\alpha = -1$. Среднее значение масштабного фактора равно

$$\langle a(t) \rangle = -\lambda \int\limits_{C([0,1])} \mathrm{e}^{\xi(t)} \int\limits_0^t \mathrm{e}^{\alpha\xi(\tau)}\, d\tau\, w(d\xi) = (-2\lambda)(\mathrm{e}^{t/2} - 1). \tag{65}$$

Для дисперсии получится выражение

$$\begin{aligned} \Delta_a^2(t) &= \langle a^2(t) \rangle - \langle a(t) \rangle^2 = \\ &= \lambda^2 \int\limits_{C([0,1])} \mathrm{e}^{2\xi(t)} \left(\int\limits_0^t \mathrm{e}^{\alpha\xi(\tau)}\, d\tau \right)^2 w(d\xi) - 4\lambda^2(\mathrm{e}^{t/2} - 1)^2 = \\ &= \frac{1}{3}\lambda^2(2\,\mathrm{e}^{2t} - 12\,\mathrm{e}^{t} + 16\,\mathrm{e}^{t/2} - 6). \end{aligned} \tag{66}$$

При малых значениях t среднее значение и дисперсия равны соответственно

$$\langle a(t) \rangle = -\lambda t \quad (\lambda < 0), \quad \Delta_a^2(t) = \frac{1}{3}\lambda^2\, t^3. \tag{67}$$

Поскольку $\Delta_a \sim t^{3/2} \ll t$ при достаточно малых значениях t, существует область, где среднее значение $\langle a(t) \rangle$ может рассматриваться как точное значение масштабного фактора.

Конечно, описанная выше модель вряд ли может считаться реалистичной. Однако благодаря тому, что функциональные интегралы вычисляются в ней явным образом, она может служить некоторым модельным примером, полезным для построения будущей настоящей теории.

7. КВАНТОВОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ НАРУШЕННЫХ СИММЕТРИЙ

Равенство соответствующих функциональных интегралов при рассмотренной выше нелинейной нелокальной замене переменных приводит к одному неожиданному эффекту: существуют действия, для которых классическая теория не совпадает с классическим пределом квантовой теории, построенной по этому действию.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующую простую модель. Пусть дано действие

$$A = \frac{1}{2}\int\limits_{-T}^{+T} (\dot{\varphi}(t))^2\,dt + \frac{a^2}{2}\int\limits_{-T}^{+T} \left(\varphi^2(t) - \beta\right)^2\,dt \tag{68}$$

$$\left(\beta \equiv \frac{b}{2a};\ a > 0,\ b > 0\right).$$

Потенциал

$$V(\varphi(t)) = \frac{1}{2}a^2(\varphi^2(t) - \beta^2)^2 \tag{69}$$

имеет два вырожденных минимума при $\varphi = \pm\beta$, локальный (нестабильный) максимум при $\varphi = 0$ и симметричен: $V(-\varphi) = V(\varphi)$.

Уравнение Эйлера–Лагранжа имеет вид

$$\ddot{\varphi}(t) - 2a^2\varphi\left(\varphi^2(t) - \beta^2\right) = 0. \tag{70}$$

Таким образом, классическая система, задаваемая действием A, симметрична относительно замены

$$\varphi \to -\varphi.$$

У классической системы, задаваемой действием

$$A_+ = A - a\int\limits_{-T}^{+T} \varphi(t)\,dt + \\ + \frac{a}{3}[\varphi^3(+T) - \varphi^3(-T)] - a\beta^2[\varphi(+T) - \varphi(-T)], \tag{71}$$

эта симметрия нарушена членом, линейным по φ, и граничными членами. Это как раз то, что дает интеграл Ито.

Действие A_+ приводит к уравнению Эйлера–Лагранжа

$$\ddot{\varphi}(t) - 2a^2\varphi(\varphi^2(t) - \beta^2) + a = 0 \tag{72}$$

и граничным условиям

$$\dot{\varphi}(\pm T) + a(\varphi^2(\pm T) - \beta^2) = 0. \tag{73}$$

Соответствующая квантовая теория задается функциональной мерой

$$\int \exp\{-A_+(\varphi)\}\, d\varphi.$$

Как мы видели, замена

$$\chi(t) = \varphi(t) + a\int_{-T}^{t} (\varphi^2(\tau) - \beta^2)\, d\tau \tag{74}$$

приводит к равенству функциональных интегралов

$$\int_{X^+} F(\varphi)\, \exp\{-A_+(\varphi)\}\, d\varphi = \\ = \int_{C([-T,+T])} F(\varphi(\chi))\, \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{-T}^{+T} (\dot{\chi}(t))^2\, dt\right\} d\chi. \tag{75}$$

При этом функциональное пространство X^+ — это пространство функций, которые могут иметь сингулярности на отрезке $[-T, +T]$.

Рассмотрим теперь классический предел выражения (75)

$$F(\tilde{\varphi}) = \lim_{\hbar\to 0}\int_{X^+} F(\varphi)\, \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\, A_+(\varphi)\right\} d\varphi = \\ = \lim_{\hbar\to 0}\int_{C([-T,+T])} F(\varphi(\chi))\, \exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}\int_{-T}^{+T} (\dot{\chi}(t))^2\, dt\right\} d\chi. \tag{76}$$

В правой части равенства (76) классический предел дает уравнение

$$\ddot{\chi}(t) = 0$$

или

$$\dot{\chi}(t) = \mathrm{const}.$$

В действительности, $\mathrm{const} = 0$, поскольку значение $\chi(+T)$ не фиксировано. Это следует также из граничных условий (73).

В терминах функции $\varphi(t)$ уравнение выглядит как

$$\dot{\varphi}(t) + a(\varphi^2(t) - \beta^2) = 0. \tag{77}$$

Заметим, что уравнение (70) может быть представлено в виде

$$\dot{\varphi} = \pm\sqrt{f(\varphi)}.$$

При этом разным знакам соответствуют две разные ветви решений.

Легко заметить, что уравнение (77) является одной из ветвей уравнения (70) с соответствующей константой интегрирования.

Таким образом, решение уравнения (77) $\tilde{\varphi}^+(t)$ является решением уравнения (70), но не решением уравнения (72).

В этом смысле квантовая теория восстанавливает симметрию, нарушенную в классической теории.

Ключевой момент здесь — это интегрирование по функциональному пространству X^+, содержащему сингулярные функции.

Если бы мы ограничились интегрированием только по пространству C, то имели бы традиционный результат, получаемый интегрированием ограниченного функционала по мере Винера

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^1 (\dot{\varphi}(t))^2\,dt\right\}\,d\varphi.$$

Легко найти явный вид решений $\tilde{\varphi}^+(t)$.

В зависимости от значения граничного условия

$$\tilde{\varphi}^+(-T) \equiv -\alpha$$

получим

$$\tilde{\varphi}^+_\alpha(t) = \beta\tanh(bt + c), \quad -\alpha > -\beta, \tag{78}$$

или

$$\tilde{\varphi}^+_\alpha(t) = \beta\coth(bt + c), \quad -\alpha < -\beta. \tag{79}$$

Если положим постоянную интегрирования c равной нулю, то решение будет нечетной функцией

$$\tilde{\varphi}^+(-t) = -\tilde{\varphi}^+(t).$$

В этом случае значения функционалов действия на классическом решении $\tilde{\varphi}^+$ совпадают:

$$A_+(\tilde{\varphi}^+) = A(\tilde{\varphi}^+).$$

До сих пор мы рассматривали теорию, задаваемую действием A_+.

Однако аналогичная картина имеет место и для «зеркального» действия

$$A_- = A + a\int\limits_{-T}^{+T} \varphi(t)\,dt - \\ - \frac{a}{3}[\varphi^3(+T) - \varphi^3(-T)] + a\beta^2[\varphi(+T) - \varphi(-T)]. \quad (80)$$

Соответствующая замена переменных имеет вид

$$\chi(t) = \varphi(t) - a\int\limits_{-T}^{t} (\varphi^2(\tau) - \beta^2)\,d\tau. \quad (81)$$

И справедливо равенство функциональных интегралов

$$\int\limits_{X^-} F(\varphi)\,\exp\{-A_-(\varphi)\}\,d\varphi = \\ = \int\limits_{C([-T,+T])} F(\varphi(\chi))\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{-T}^{+T} (\dot{\chi}(t))^2\,dt\right\} d\chi. \quad (82)$$

Структура пространства X^- такая же, как и структура пространства X^+. Но функции из X^+ и X^- имеют сингулярности в разных точках.

Такой же эффект имеет место и в рассмотренной выше модели Лиувилля. Классическое действие $\tilde{A}(\varphi)$ и классический предел $A(\varphi)$ квантовой теории, соответствующей этому классическому действию, оказываются различными.

Классическое уравнение движения представляет собой уравнение Эйлера–Лагранжа для действия $A(\varphi)$, но не для действия $\tilde{A}(\varphi)$.

Таким образом, классическое поле $\varphi_c(t)$ есть

$$\varphi_c(t) = -\frac{1}{\alpha}\,\ln(\alpha\lambda t), \quad \alpha < 0, \quad \lambda < 0. \quad (83)$$

Следует отметить, что обычно наличие сингулярностей рассматривается как свидетельство противоречивости теории. В частности, из-за сингулярности классическое действие $\tilde{A}$ не подходит для описания динамики Вселенной.

В нашем подходе существование сингулярностей существенно для адекватной формулировки квантовой теории. Тем самым мы можем не только учесть квантовые эффекты, но и модифицировать правильным образом классическую теорию.

8. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ГАМИЛЬТОНИАНОВ, ПОЛУЧЕННЫХ В РЕЗУЛЬТАТЕ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАМЕН ПЕРЕМЕННЫХ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛАХ

Изучим теперь дифференциальные операторы, связанные с полученными мерами на пространстве разрывных функций. Для этого рассмотрим функцию $u(q,t)$, задаваемую функциональным интегралом по мере (49):

$$u(q,t) = \int\limits_{x(t)=q} \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{t} \big(\dot{x}^2(\tau) + f^2(x(\tau)) - \right.$$

$$\left. - f'(x(\tau))\big)\, d\tau - BT\right\} u_0(x(T_0))\, dx =$$

$$= \int\limits_{x_y(t)=q} u_0(x_y(T_0))\, \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{t} \dot{y}^2(\tau)\, d\tau\right\} dy. \quad (84)$$

Значение этой функции в другой момент времени равно

$$u(q,t+\Delta t) = \int\limits_{x_y(t+\Delta t)=q} u_0(x_y(T_0))\, \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{t} \dot{y}^2(\tau)\, d\tau\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{t}^{t+\Delta t} \dot{y}^2(\tau) d\tau\right\} dy. \quad (85)$$

Теперь сделаем замену, соответствующую разбиению экспоненты в предыдущей формуле:

$$\begin{aligned} &y(\tau) = y_1(\tau); && T_0 \leqslant \tau \leqslant t, \\ &y(\tau) = y_1(\tau) + z(\tau); && t \leqslant \tau \leqslant t+\Delta t, \quad z(t) = 0. \end{aligned}$$

Тогда интеграл (85) может быть переписан как

$$\int\limits_{x_{y_1,z}(t+\Delta t)=q,\ z(t)=0} u_0\left(x_{y_1,z}(T_0)\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{t} \dot{y_1}^2(\tau)\, d\tau\right\} dy_1 \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{t}^{t+\Delta t} \dot{z}^2(\tau)\, d\tau\right\} dz. \quad (86)$$

С учетом последнего равенства в формуле (84) получим

$$u(q,t+\Delta t)=\int\limits_{x_{y,z}(t+\Delta t)=q,\ z(t)=0} u(x_{y,z}(t),\,t)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{t}^{t+\Delta t}\dot{z}^2(\tau)\,d\tau\right\}dz. \tag{87}$$

Вспоминая вид нелокальной нелинейной замены (47), имеем

$$x_{y,z}(t+\Delta t)-x_{y,z}(t)=y(t+\Delta t)-y(t)-\int\limits_{t}^{t+\Delta t}f(x(\tau))\,d\tau,$$

откуда находим

$$x_{y,z}(t)=q-z(t+\Delta t)+f(q)\,\Delta t+o(\Delta t).$$

Разлагая теперь подынтегральное выражение в правой части (87) в ряд Тейлора и учитывая, что для винеровского процесса

$$\int\limits_{z(t)=0} z^2(t+\Delta t)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{t}^{t+\Delta t}\dot{z}^2(\tau)\,d\tau\right\}dz=\Delta t+o(\Delta t),$$

а затем переходя к пределу $\Delta t\to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}u(q,t)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^2}u(q,t)+f(q)\frac{\partial}{\partial q}u(q,t)\equiv -H_u u. \tag{88}$$

Уравнение (88) можно также вывести, если рассмотреть вначале функцию

$$v(q,t)=\mathrm{e}^{\Phi(q)}\,u(q,t).$$

Для нее функциональный интеграл имеет вид

$$v(q,t)=\int\limits_{x(t)=q}\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{t}\left(\dot{x}^2(t)+f^2\left(x(t)\right)-f'(x(t))\right)dt\right\}\ v_0(x(T_0))\,dx. \tag{89}$$

Таким образом, $v(q,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}v(q,t)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^2}v(q,t)-\frac{1}{2}\left(f^2(q)-f'(q)\right)\,v(q,t) \tag{90}$$

с начальным условием

$$v(q,T_0)=v_0(q).$$

Возвращаясь обратно к функции u, получим дифференциальное уравнение (88).

Рассмотрим действие каждого из слагаемых в гамильтониане по отдельности:
$$H_u = -A - B, \quad A = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dq^2}, \quad B = f(q)\frac{\partial}{\partial q}. \tag{91}$$

Для определенности положим $f(q) = aq^2 + bq$.

Оператор e^{At} «размазывает» начальную функцию $u_0(q)$:
$$u(q,t) = \mathrm{e}^{At}\, u_0(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(q-q_0)^2}{2t}\right) u_0(q_0)\, dq_0.$$

И для его нормы имеем
$$\|\mathrm{e}^{At}\| \equiv \sup_{u_0 \neq 0} \frac{\|\mathrm{e}^{At} u_0\|}{\|u_0\|} \leqslant 1. \tag{92}$$

Оператор e^{Bt} переносит начальные значения вдоль характеристик линейного дифференциального уравнения первого порядка
$$\frac{\partial u}{\partial t} - (aq^2 + bq)\frac{\partial u}{\partial q} = 0. \tag{93}$$

В результате действия только этого оператора
$$u(q,t) = \mathrm{e}^{Bt}\, u_0(q) = u_0\left(\frac{bq}{aq\,(\mathrm{e}^{-bt} - 1) + b\,\mathrm{e}^{-bt}}\right). \tag{94}$$

Оба предела $\lim\limits_{q\to\pm\infty} u$ существуют и равны друг другу:
$$u(-\infty,t) = u(+\infty,t) = u_0\left(\frac{b}{a\,(\mathrm{e}^{-bt} - 1)}\right). \tag{95}$$

Очевидно, что
$$\|\mathrm{e}^{Bt}\| = 1.$$

Из формулы Троттера
$$\mathrm{e}^{(A+B)t} = \lim_{n\to\infty}\left(\exp\left(\frac{At}{n}\right)\exp\left(\frac{Bt}{n}\right)\right)^n$$

следует, что
$$\|\mathrm{e}^{(A+B)t}\| \leqslant 1. \tag{96}$$

В силу условий (95) естественно рассматривать решения уравнения (88) на компактифицированной вещественной оси $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\bigcup\{\infty\}$. Тогда для непрерывной на компакте и, следовательно, ограниченной начальной функции $u_0 \in C\,(\overline{\mathbf{R}})$ решение уравнения (88) также является непрерывной функцией

$$u(q,t) = \mathrm{e}^{-H_u t}\, u_0 \in C\,(\overline{\mathbf{R}}).$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема

1. Решение уравнения (88) может быть записано в виде функционального интеграла (84) по пространству X, содержащему разрывные траектории.

2. Эволюционное уравнение (88) задает однопараметрическую группу преобразований $\mathrm{e}^{-H_u t}$ в пространстве $C\,(\overline{\mathbf{R}})$. При этом производящий оператор группы H_u на пространстве гладких функций $\psi(q)$ имеет вид

$$H_u = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dq^2} - f(q)\frac{\partial}{\partial q} \tag{97}$$

и определяется граничным условием

$$\psi(-\infty) = \psi(+\infty). \tag{98}$$

Если рассматривать уравнение (88) как уравнение теплопроводности, то мы имеем дело с явлением, при котором происходит перенос тепла через бесконечность.

Интересно, что собственные функции этого оператора, вообще говоря, не принадлежат гильбертову пространству. Так, если факторизовать гамильтониан

$$H_u = \frac{1}{2}\left(-\frac{d}{dq} - 2f(q)\right)\frac{d}{dq},$$

то видно, что его собственная функция ψ_0, соответствующая нулевому собственному значению, есть просто константа:

$$H_u\psi_0 = 0, \quad \psi_0 = \mathrm{const}. \tag{99}$$

9. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ, СВЯЗАННЫЕ С МЕРОЙ ВИНЕРА

9.1. Квазиинвариантные меры на группах диффеоморфизмов. Как известно, на бесконечномерных группах не существует инвариантной меры — аналога меры Хаара на конечномерных группах. Однако в этом случае можно построить меру, квазиинвариантную относительно действия более гладкой подгруппы. Это означает, что при действии подгруппы мера переходит в себя и умножается на некоторую функцию, параметризуемую элементами подгруппы, — так называемую производную Радона–Никодима (подробнее см., например, [9, 19]).

В работах [20–24] построены квазиинвариантные меры на группах диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}^1_+([0,\,1])$ и $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)$, исследованы их свойства и получен ряд совершенно удивительных следствий.

В этом разделе, который имеет более математизированный характер, чем предыдущие, мы опишем схему построения таких квазиинвариантных мер и приведем пару из этих математических парадоксов.

Пусть $\mathrm{Diff}^1_+([0,1])$ — группа всех непрерывно дифференцируемых диффеоморфизмов отрезка $[0,1]$, сохраняющих концы; $\mathrm{Diff}^3_+([0,1])$ — подгруппа всех диффеоморфизмов класса гладкости C^3 группы $\mathrm{Diff}^1_+([0,1])$; $C_0([0,1])$ — пространство всех непрерывных функций, определенных на отрезке $[0,1]$ и принимающих нулевое значение в точке 0.

Введем отображение

$$A : \mathrm{Diff}^1_+([0,1]) \to C_0([0,1]),$$

полагая

$$x(t) = (A(f))\,(t) = \ln\left(f'(t)\right) - \ln\left(f'(0)\right), \quad \forall t \in [0,1]. \tag{100}$$

Отображение A отождествляет пространства $\mathrm{Diff}^1_+([0,1])$ и $C_0([0,1])$, причем

$$A^{-1}(x)(t) = \frac{\int\limits_0^t \mathrm{e}^{x(\tau)}\,d\tau}{\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{x(\tau)}\,d\tau}. \tag{101}$$

Введем на $C_0([0,1])$ меру Винера w_σ с дисперсией σ.

Определим теперь на группе $\mathrm{Diff}^1_+([0,1])$ меру μ_σ, полагая $\mu_\sigma(X) = w_\sigma(A(X))$ для любого измеримого подмножества X пространства $\mathrm{Diff}^1_+([0,\,1])$.

Для каждого $\varphi \in \mathrm{Diff}^3_+([0,1])$ и произвольного $f \in \mathrm{Diff}^1_+([0,1])$ определим $L_\varphi(f) = \varphi \circ f$ и $R_\varphi(f) = f \circ \varphi$.

Отображения R и L задают правое и левое действия подгруппы $\mathrm{Diff}^3_+([0,1])$ на группе $\mathrm{Diff}^1_+([0,1])$.

Мера μ_σ является квазиинвариантной мерой относительно левого действия L подгруппы диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}^3_+([0,1])$ на группе диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}^1_+([0,1])$.

Опишем краткую схему доказательства этого утверждения. (Полное, довольно длинное, доказательство дано в [23].)

С помощью отображения A сведем задачу к проверке квазиинвариантности меры Винера и нахождению ее производной Радона–Никодима при действии $AL_\varphi A^{-1}$ на пространстве $C_0([0,\,1])$. Итак, пусть

$$y = AL_\varphi A^{-1}(x).$$

Т. е.

$$y(t) = x(t) + h\left(\frac{\int\limits_0^t \mathrm{e}^{x(\tau)}\,d\tau}{\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{x(\tau)}\,d\tau}\right), \tag{102}$$

где $h = A(\varphi)$,

$$h(t) = \ln\,\varphi'(t) - \ln\,\varphi'(0).$$

Заметим, что если $\varphi \in \mathrm{Diff}^3_+([0,1])$, то $h \in C^2_0([0,1])$.

Якобиан отображения (102) находится с помощью разбиения отрезка $[0,1]$ и дискретизации соответствующих формул.

Оказывается, что якобиан отображения в точке x не зависит от x и равен $(\varphi'(1))^{-1}$.

Для непрерывно дифференцируемой функции y имеем

$$\int\limits_0^1 \left(y'(t)\right)^2\,dt = \int\limits_0^1 \left(x'(t)\right)^2\,dt + W + V,$$

где

$$W = 2\int\limits_0^1 x'(t)h'\left(\frac{\int\limits_0^t \mathrm{e}^{x(\tau)}\,d\tau}{\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{x(\tau)}\,d\tau}\right)\frac{\mathrm{e}^{x(t)}\,dt}{\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{x(\tau)}\,d\tau}\,dt,$$

$$V = \int\limits_0^1 \left(h'\left(\frac{\int\limits_0^t \mathrm{e}^{x(\tau)}\,d\tau}{\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{x(\tau)}\,d\tau}\right)\right)^2 \frac{\mathrm{e}^{2x(t)}\,dt}{\left(\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{x(\tau)}\,d\tau\right)^2}\,dt.$$

Если Φ — непрерывный, ограниченный функционал на $C_0([0,\,1])$, то

$$\int\limits_{C_0([0,\,1])} \Phi(y)\,w_\sigma(dy) =$$

$$= \frac{1}{\varphi'(1)}\int\limits_{C_0([0,\,1])} \Phi(AL_\varphi A^{-1}(x))\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\,(W+V)\right\}w_\sigma(dx).$$

Заметим, что если бы x был непрерывно дифференцируемым, то с помощью интегрирования по частям для W мы бы получили

$$\frac{1}{2}W = h'(1)\,\frac{e^{x(1)}}{\int\limits_0^1 e^{x(\tau)}\,d\tau} - h'(0)\,\frac{1}{\int\limits_0^1 e^{x(\tau)}\,d\tau} - \\ - \int\limits_0^1 h''\left(\frac{\int\limits_0^t e^{x(\tau)}\,d\tau}{\int\limits_0^1 e^{x(\tau)}\,d\tau}\right)\frac{e^{2x(t)}\,dt}{\left(\int\limits_0^1 e^{x(\tau)}\,d\tau\right)^2}\,dt.$$

Однако из-за того, что винеровский процесс $x(t)$ не является гладким, возникают дополнительные члены, которые вычисляются путем дискретизации и корректного перехода к непрерывному пределу (подробности см. в [23]).

В результате имеем

$$\int\limits_{C_0([0,1])} \Phi(y)\,w_\sigma(dy) = \frac{1}{\sqrt{\varphi'(1)\varphi'(1)}}\times \\ \times \int\limits_{C_0([0,1])} \Phi(AL_\varphi A^{-1}x)\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(h'(1)\,\frac{e^{x(1)}}{\int\limits_0^1 e^{x(\tau)}\,d\tau} - h'(0)\frac{1}{\int\limits_0^1 e^{x(\tau)}\,d\tau}\right)\right\} + \\ + \exp\left\{\frac{1}{\sigma^2}\int\limits_0^1 \mathcal{S}_\varphi\left(\frac{\int\limits_0^t e^{x(\tau)}\,d\tau}{\int\limits_0^1 e^{x(\tau)}\,d\tau}\right)\frac{e^{2x(t)}\,dt}{\left(\int\limits_0^1 e^{x(\tau)}\,d\tau\right)^2}\,dt\right\} w_\sigma(dx). \quad (103)$$

Заметим, что

$$\mathcal{S}_\varphi(t) = \left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}\right)^2 = h''(t) - \frac{1}{2}(h(t))^2.$$

С помощью отображения A^{-1} получим

$$\int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+([0,1])} F(g)\mu_\sigma(dg) = \frac{1}{\sqrt{\varphi'(0)\varphi'(1)}}\int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+([0,1])} F(\varphi\circ f)\times \\ \times\exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{\varphi''(0)}{\varphi'(0)}f'(0) - \frac{\varphi''(1)}{\varphi'(1)}f'(1)\right) + \frac{1}{\sigma^2}\int\limits_0^1 \mathcal{S}_\varphi(f(t))(f'(t))^2\,dt\right\}\mu_\sigma(df).$$

Отсюда следует квазиинвариантность меры μ_σ относительно левого действия L подгруппы диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}^3_+([0,1])$ на группе диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}^1_+([0,1])$:

$$\mu_\sigma(L_\varphi(X)) = \int\limits_X p_\varphi(f)\,\mu_\sigma(df), \tag{104}$$

где производная Радона–Никодима равна

$$p_\varphi(f) = \frac{1}{\sqrt{\varphi'(0)\varphi'(1)}}\exp\Biggl\{\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{\varphi''(0)}{\varphi'(0)}f'(0) - \frac{\varphi''(1)}{\varphi'(1)}f'(1)\right) + \\ + \frac{1}{\sigma^2}\int\limits_0^1 \mathcal{S}_\varphi(f(t))(f'(t))^2\,dt\Biggr\}. \tag{105}$$

Найденный вид производной Радона–Никодима позволяет представить интеграл от функционала F по мере μ_σ в виде функционального интеграла

$$\int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+([0,1])} F(f), \mu_\sigma(df) = \int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+([0,1])} F(f)\frac{1}{\sqrt{f'(0)f'(1)}}\times \\ \times\exp\left\{\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{f''(0)}{f'(0)} - \frac{f''(1)}{f'(1)}\right) + \frac{1}{\sigma^2}\int\limits_0^1 \mathcal{S}_f(t)\,dt\right\} df. \tag{106}$$

Для каждого измеримого по мере μ_σ множества $X \subset \mathrm{Diff}^1_+([0,1])$ положим

$$X^{-1} = \{f^{-1} :\, f \in X\},$$

т. е. множество X^{-1} состоит из отображений, обратных к диффеоморфизмам из множества X.

На группе $\mathrm{Diff}^1_+([0,1])$ зададим также меру γ_σ, полагая

$$\gamma_\sigma(X) = \mu_\sigma(X^{-1}).$$

Из предыдущего следует, что мера γ_σ квазиинвариантна относительно правого действия R подгруппы диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}^3_+([0,1])$ на группе диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}^1_+([0,1])$:

$$\gamma_\sigma(R_\varphi(X)) = \int\limits_X \varrho_\varphi(f)\,\gamma_\sigma(df). \tag{107}$$

В этом случае производная Радона–Никодима равна

$$\varrho_\varphi(f) = \sqrt{\varphi'(0)\varphi'(1)}\, \exp\left\{ \frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{\varphi''(1)}{(\varphi'(1))^2 f'(1)} - \frac{\varphi''(0)}{(\varphi'(0))^2 f'(0)} \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sigma^2}\int\limits_0^1 \mathcal{S}_\varphi(t) \frac{1}{f'(\varphi(t))\varphi'(t)}\, dt \right\}. \quad (108)$$

Из вида производной Радона–Никодима следует, что интеграл от функционала F по мере γ_σ можно представить в виде функционального интеграла

$$\int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+([0,1])} F(f), \gamma_\sigma(df) = \int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+([0,1])} F(f)\sqrt{f'(0)f'(1)} \times$$
$$\times \exp\left\{ \frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{f''(1)}{(f'(1))^2} - \frac{f''(0)}{(f'(0))^2} \right) - \frac{1}{\sigma^2}\int\limits_0^1 \mathcal{S}_f(t)\frac{1}{f'(t)} dt \right\} df. \quad (109)$$

Аналогичные квазиинвариантные меры можно ввести и на группе диффеоморфизмов окружности. А именно меру ν_σ, квазиинвариантную относительно левого действия $L_\varphi(f) = \varphi \circ f$ подгруппы диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}^3_+(S^1)$ на группе диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)$, и меру η_σ, квазиинвариантную относительно правого действия $R_\varphi(f) = f \circ \varphi$ подгруппы диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}^3_+(S^1)$ на группе диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)$.

При этом интеграл от функционала F на группе диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)$ по мере ν_σ может быть представлен в виде функционального интеграла

$$\int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+(S^1)} F(f), \nu_\sigma(df) = \int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+(S^1)} F(f)\, \exp\left\{ \frac{1}{\sigma^2}\int\limits_{S^1} \mathcal{S}_f(t) dt \right\} df. \quad (110)$$

А интеграл от функционала F на группе диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)$ по мере η_σ может быть представлен в виде функционального интеграла

$$\int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+(S^1)} F(f), \eta_\sigma(df) = \int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+(S^1)} F(f) \exp\left\{ -\frac{1}{\sigma^2}\int\limits_0^1 \mathcal{S}_f(t)\frac{1}{f'(t)} dt \right\} df. \quad (111)$$

9.2. Необычные свойства квазиинвариантных мер. Рассмотрим меру Винера w_σ на $C([0,\, 1])$ для случая, когда концы траекторий не фиксированы.

Возьмем траекторию $x(t)$, удовлетворяющую условию $x(t) > 0$, $\forall t \in [0,\, 1]$, т. е. $x(t) \in C_+([0,\, 1])$ — множество всех непрерывных функций, принимающих положительные значения.

Для этой траектории определим $\rho > 0$ равенством

$$\frac{1}{\rho^2} = \int\limits_0^1 \frac{1}{x^2(t)}\, dt \tag{112}$$

и рассмотрим диффеоморфизм

$$f^{-1}(t) = \rho^2 \int\limits_0^t \frac{1}{x^2(t)}\, dt. \tag{113}$$

Заметим, что при этом

$$f^{-1}(t) = \rho^2 \int\limits_0^t \frac{1}{x^2(t)}\, dt. \tag{114}$$

Таким образом, получается взаимно-однозначное отображение

$$(0,\, +\infty) \times \mathrm{Diff}^1([0,\, 1]) \leftrightarrow C_+([0,\, 1]).$$

Элементу

$$gx(t) = x\,\left(g^{-1}(t)\right)\, \frac{1}{\sqrt{\left(g^{-1}(t)\right)'}}$$

соответствует пара $(\varrho,\, g \circ f)$.

В результате действия группы $\mathrm{Diff}^1([0,\, 1])$ на пространстве $C_+([0,\, 1])$ возникают орбиты, которые параметризуются числом ϱ. Другими словами, для каждого фиксированного ϱ орбита состоит из траекторий, удовлетворяющих равенству (112). Каждой точке орбиты соответствует диффеоморфизм (113).

Мера Винера w_σ на $C([0,\, 1])$ квазиинвариантна. Ее сужение на орбиту также квазиинвариантно.

Оказывается, что при переносе меры с орбиты на группу диффеоморфизмов получается мера μ_α, где $\alpha = \varrho\sigma$. Если вспомнить, что мера μ_α строится по мере Винера сложным нелинейным образом, то такое неожиданное совпадение мер представляется удивительным.

Другое неожиданное поразительное свойство демонстрирует свертка квазиинвариантных мер.

Групповая операция задает отображение

$$\Phi : \mathrm{Diff}^1_+([0,1]) \times \mathrm{Diff}^1_+([0,1]) \to \mathrm{Diff}^1_+([0,1])$$

по формуле

$$\Phi(f, g) = f \circ g.$$

Зададим на декартовом произведении $\mathrm{Diff}^1_+([0,1]) \times \mathrm{Diff}^1_+([0,1])$ меру $\mu_\alpha \otimes \gamma_\beta$.

Отображение Φ определяет меру $\zeta_{\alpha,\beta}$ на $\mathrm{Diff}^1_+([0,1])$, являющуюся сверткой мер μ_α и γ_β относительно операции композиции, следующим образом:

$$\zeta_{\alpha,\beta}(X) = \mu_\alpha \otimes \gamma_\beta(\Phi^{-1}(X)) = \\ = \int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+([0,1])} \mu_\alpha(X \circ f^{-1})\, \gamma_\beta(df) = \int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+([0,1])} \gamma_\beta(g^{-1} \circ X)\, \mu_\alpha(dg), \quad (115)$$

$X \subset \mathrm{Diff}^1_+([0,1])$.

Мера $\zeta_{\alpha,\beta}$ квазиинвариантна относительно правого и левого действий подгруппы $\mathrm{Diff}^3_+([0,1])$.

Рассмотрим множество $Z \subset \mathrm{Diff}^1_+([0,1]) \times \mathrm{Diff}^1_+([0,1])$, состоящее из всех пар $(f,\ g)$, для которых верно равенство

$$\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{f'(f^{-1}(t))}} = \overline{\lim_{\Delta t \to +0}} \frac{|\ln(g'(t + \Delta t)) - \ln(g'(t))|}{\sqrt{2\Delta t \ln|\ln \Delta t|}} \quad (116)$$

для всех рациональных $t \in [0,1]$.

Поскольку множество рациональных чисел счетно, из закона повторного логарифма (см., например, [25]) и того факта, что меры μ_α и γ_β в основе своей определяются мерой Винера, следует, что

$$\mu_\alpha \otimes \gamma_\beta(Z) = 1.$$

Поэтому

$$\mu_\alpha \otimes \gamma_\beta(\mathrm{Diff}^1_+([0,1]) \times \mathrm{Diff}^1_+([0,1])/Z) = 0,$$

т. е. всеми точками, не входящими в Z, можно пренебречь.

Множество рациональных точек на отрезке плотно. Отсюда и из последней формулы вытекает, что сужение отображения Φ на Z обратимо.

Таким образом, отображение Φ почти всюду обратимо относительно соответствующих мер, т. е. по каждому элементу группы $\mathrm{Diff}^1_+([0,1])$ однозначно, с точностью до множеств, пренебрежимых относительно мер, восстанавливается пара сомножителей из $\mathrm{Diff}^1_+([0,1]) \times \mathrm{Diff}^1_+([0,1])$.

Отметим необычность свойства «по произведению однозначно восстанавливаются сомножители» и уникальность в этом смысле построенных квазиинвариантных мер на группах диффеоморфизмов. В других случаях — для квазиинвариантных мер на локально-компактных группах и для других известных квазиинвариантных мер на бесконечномерных группах — подобное свойство не имеет места.

Из приведенных примеров видно, что используемый математический аппарат квазиинвариантных мер на группах диффеоморфизмов весьма нетривиален, а эти меры обладают рядом свойств, парадоксальных с интуитивной точки зрения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Хотя функциональное интегрирование представляет собой довольно сложный и интенсивно развивающийся раздел математики (см., например, [26, 10]), использование его в квантовой физике является общепринятым. Возникший как гениальное прозрение Фейнмана [27], этот подход позволил построить квантовую теорию неабелевых калибровочных полей [28], найти соотношения между вершинными функциями и доказать перенормируемость этой теории [29], исследовать поведение квантовых амплитуд (см., например, [30,31]), а также получить еще целый ряд замечательных результатов.

Однако, как правило, функциональные интегралы в физической литературе понимаются несколько упрощенно. В лучшем случае они считаются чем-то вроде винеровских интегралов, а функциональные пространства, по которым проводится интегрирование как для свободных, так и для взаимодействующих полей, полагаются просто пространством непрерывных функций. По-видимому, такое ограниченное понимание функциональных интегралов является недостаточным для квантовой теории поля. Тем более что математический аппарат функционального интегрирования еще далек от завершенности. Как мы видели, даже для, казалось бы, хорошо исследованных винеровских интегралов обнаруживаются парадоксальные свойства при новых классах преобразований подынтегральных выражений.

В данной работе предложено обобщение локальной квантовой теории поля с учетом скрытых внутренних симметрий, а также с помощью нелокальных замен переменных определены функциональные интегралы по разрывным траекториям. При этом мы продемонстрировали ряд курьезов функционального интегрирования (имеется в виду значение слова «курьез» как необычное, странное явление). Уже простейшие рассмотренные модели, оказывается, обладают рядом необычных свойств, противоречащих обычной интуиции, связанной с анализом на конечномерных пространствах и простейшими правилами вычисления бесконечномерных гауссовых интегралов.

Можно предположить, что в результате дальнейшего развития формализма функционального интегрирования и надлежащего использования его в квантовой теории поля квантово-полевая картина мира будет становиться «curiouser and curiouser» [32].

Благодарности. Авторы благодарны В. А. Рубакову и А. А. Славнову за полезные обсуждения ряда вопросов, затронутых в настоящей работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белокуров В. В., Соловьев Ю. П., Шавгулидзе Е. Т.* Существование функциональных интегралов в квантово-полевой модели на пространстве петель // УМН. 2004. Т. 59, № 5. С. 163–164.
2. *Белокуров В. В., Соловьев Ю. П., Шавгулидзе Е. Т.* Асимптотические свойства функциональных интегралов в квантово-полевой модели на пространстве петель // Докл. РАН. 2005. Т. 401, № 6. С. 749–751.
3. *Belokurov V. V., Shavgulidze E. T.* On the Local Limit of Quantum Field Theories Defined on the Loop Space. arXiv:1109.5954[hep-th].
4. *Belokurov V. V., Shavgulidze E. T.* Paths with Singularities in Functional Integrals of Quantum Field Theory. arXiv:1112.3899v2[hep-th].
5. *Belokurov V. V., Shavgulidze E. T.* Quantum Restoration of Broken Symmetries. arXiv:1303.3523[math-ph].
6. *Belokurov V. V., Shavgulidze E. T.* A Class of Exactly Solvable Quantum Models of Scalar Gravity. arXiv:1303.5027[hep-th].
7. *Belokurov V. V., Shavgulidze E. T.* Masses of Quantum Particles as a Result of Diffeomorphisms. arXiv:1511.08181[math-ph].
8. *Wiener N.* The Average Value of a Functional // Proc. London Math. Soc. 1922. V. 22. P. 454–467.
9. *Kuo H. H.* Gaussian Measures in Banach Spaces. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1975 (Рус. пер.: *Го Х.-С.* Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1978).
10. *Смолянов О. Г., Шавгулидзе Е. Т.* Континуальные интегралы. 2-е изд. М.: УРСС, 2015.
11. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. М.: Физматлит, 2006.
12. *Неретин Ю. А.* Представления алгебр Вирасоро и аффинных алгебр // Теория представлений и некоммутативный гармонический анализ. Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 22. С. 163–232.
13. *Shepp L. A.* Radon–Nikodym Derivatives of Gaussian Measures // Ann. Math. Statistics. 1966. V. 37. P. 321–354.
14. *McKean H. P., Jr.* Stochastic Integrals. New York; London: Acad. Press, 1969 (Рус. пер.: *Маккин Г.* Стохастические интегралы. М.: Мир, 1972).
15. *Simon B.* Functional Integration and Quantum Physics. New York; San Francisco; London: Acad. Press, 1979.
16. *Duru I. H., Kleinert H.* Solution of the Path Integral for the H-Atom // Phys. Lett. B. 1979. V. 84. P. 185.
17. *Storchak S. N.* On Relation between Green's Functions of Certain Dynamical Systems. IHEP Preprint 80-67. Serpukhov, 1980. P. 1–5.

18. *Pressley A., Segal G.* Loop Groups. Oxford: Clarendon Press, 1988 (Рус. пер.: *Прессли А., Сигал Г.* Группы петель. М.: Мир, 1990).
19. *Неретин Ю. А.* Категории симметрии и бесконечномерные группы. М.: УРСС, 1998.
20. *Шавгулидзе Е. Т.* Пример меры, квазиинвариантной относительно группы диффеоморфизмов окружности // Функционал. анализ и приложения. 1978. Т. 12, № 3. С. 55–60.
21. *Шавгулидзе Е. Т.* Мера, квазиинвариантная относительно группы диффеоморфизмов конечномерного многообразия // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303. С. 811–814.
22. *Шавгулидзе Е. Т.* Меры, квазиинвариантные относительно групп диффеоморфизмов // Тр. МИ РАН. 1997. Т. 217. С. 189–208.
23. *Shavgulidze E. T.* Some Properties of Quasi-Invariant Measures on Groups of Diffeomorphisms of the Circle // Russ. J. Math. Phys. 2000. V. 7, No. 4. P. 464–472.
24. *Shavgulidze E. T.* Properties of the Convolution Operation for Quasi-Invariant Measures on Groups of Diffeomorphisms of a Circle // Russ. J. Math. Phys. 2001. V. 8, No. 4. P. 495–498.
25. *Венцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. 2-е изд. М.: Наука, 1996.
26. *Albeverio S., Hoegh-Krohn R., Mazzucchi S.* Mathematical Theory of Feynman Path Integrals // Lecture Notes in Math. 2nd ed. Springer, 2008. V. 523.
27. *Feynman R. P.* Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics // Rev. Mod. Phys. 1948. V. 20. P. 367–377.
28. *Faddeev L. D., Popov V. N.* Feynman Diagrams for the Yang–Mills Field // Phys. Lett. B. 1967. V. 25. P. 29–30.
29. *Славнов А. А.* Тождества Уорда в калибровочных теориях // ТМФ. 1972. Т. 10. С. 153–161.
30. *Блохинцев Д. И., Барбашов Б. М.* Применение функциональных интегралов в квантовой механике и теории поля // УФН. 1972. Т. 106. С. 593–616.
31. *Ефимов Г. В.* Упругое рассеяние и функциональный интеграл // ТМФ. 2014. Т. 179. С. 367–386.
32. *Carrol L.* Alice in Wonderland.