

# ЭКЗОТИЧЕСКИЕ ФЕРМИОНЫ В ТЕОРИИ В. Г. КАДЫШЕВСКОГО И ВОЗМОЖНОСТИ ИХ ОБНАРУЖЕНИЯ

*В. Н. Родионов\**

Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Москва

ВВЕДЕНИЕ	284
ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЭРМИТОВОСТИ И $\gamma_5$ -ФАКТОРИЗАЦИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ОПЕРАТОРА КЛЕЙНА–ГОРДОНА	291
МОДЕЛЬ С $\gamma_5$ -МАССОВЫМ ВКЛАДОМ, СОДЕРЖАЩАЯ ОГРАНИЧЕНИЯ МАССЫ ФЕРМИОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ	296
ТЕОРИЯ С МАКСИМАЛЬНОЙ МАССОЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ОБНАРУЖЕНИЯ ЭКЗОТИЧЕСКИХ ФЕРМИОНОВ	299
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	301
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	306

---

\*E-mail: rodyvn@mail.ru

## ЭКЗОТИЧЕСКИЕ ФЕРМИОНЫ В ТЕОРИИ В. Г. КАДЫШЕВСКОГО И ВОЗМОЖНОСТИ ИХ ОБНАРУЖЕНИЯ

*В. Н. Родионов\**

Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Москва

Основные работы В. Г. Кадышевского посвящены развитию геометрического подхода к построению квантовой теории поля (КТП) с ограничением спектра масс элементарных частиц. Неэрмитовы операторы, возникающие в этом случае, казались серьезным препятствием на пути создания последовательной теории. В последние годы эти проблемы устранены, и в настоящее время значительное развитие получило направление исследований в виде псевдоэрмитова алгебраического подхода к построению квантовой теории. Основной идеей таких теорий является построение  $\mathcal{PT}$ -симметричных неэрмитовых гамильтонианов, которые имеют вещественные собственные значения. Важно отметить, что среди многочисленных работ на эту тему можно встретить не только чисто теоретические, но и экспериментальные работы, как, например, в случае неэрмитовой оптики. В связи с этим мы считаем, что развитие псевдоэрмитовой релятивистской квантовой теории с максимальной массой может создать весьма благоприятные условия для обсуждения экспериментальной проверки теоретических результатов, полученных в этой области. Важное предсказание своей теории Кадышевский связывал с гипотезой о существовании новых частиц, которые он назвал «экзотическими фермионами». В частности, возможность обнаружения экзотических нейтрино в прецизионных экспериментах по определению массы нейтрино обсуждается в этой статье.

As is known, the main works of V. G. Kadyshevsky are devoted to the construction of geometric approach to the creation of quantum field theory with restriction of the elementary particles' mass spectrum. Non-Hermitian operators arising in this case seemed a very serious obstacle on the way of creating a consistent theory. In recent years, these problems were rectified and now we have received considerable development of these physical researches with limiting mass using a pseudo-Hermitian algebraic approach to the construction of a quantum theory. The central point of such theories is the construction of  $\mathcal{PT}$ -symmetric non-Hermitian Hamiltonians that have real eigenvalues. It is important to note that among the numerous works on this subject we can find not only purely theoretical but also experimental works, as, for example, in the case of non-Hermitian optics. In this

---

\*E-mail: rodyvn@mail.ru

regard, we believe that the development of pseudo-Hermitian relativistic quantum theory with a Maximal Mass can create very favorable conditions to discuss the possibility of experimental verification of the theoretical results obtained in this area. Kadyshevsky saw an important prediction of his theory in the hypothesis of the existence of new particles that he named “the exotic fermions”. In particular, the possibility of detecting exotic neutrino in precise experiments for determination of neutrino mass is discussed in this article.

PACS: 02.30.Jr; 03.65.-w; 03.65.Ge; 12.10.-g; 12.20.-m

*Светлой памяти  
Владимира Георгиевича Кадышевского  
посвящается*

## ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день элементарными считаются частицы, свойства и взаимодействия которых могут быть адекватно описаны в терминах локальных полей. В этих же терминах может быть сформулирован вопрос: должна ли масса элементарных частиц быть ограничена сверху? Или другими словами: до каких значений массы частицы  $m$  для ее описания применима концепция локального поля? До сих пор специальные эксперименты по поиску частиц с максимальной массой не ставились. Известно лишь, что в Стандартной модели (СМ) наиболее массивной частицей считается топ-кварк. Понятно, что поиск прямых экспериментов по обнаружению «максимонов» ограничивается возможностями создания сверхмощной ускорительной техники. Однако детальное изучение моделей с максимальной массой может открыть совершенно новые уникальные возможности обнаружения следствий этого ограничения. Речь идет об учете различных внешних воздействий, позволяющих выделить ряд эффектов, которые обусловлены существованием ограниченности спектра масс элементарных частиц. В качестве примера можно привести изучение влияния на подобные процессы интенсивных магнитных полей, учет взаимодействия с которыми позволит наблюдать ряд эффектов. В частности, одним из возможных следствий ограниченности спектра масс является появление в теории так называемых «экзотических» частиц, существование которых было предсказано В. Г. Кадышевским в рамках геометрического подхода [1, 2].

Необходимо отметить, что идея ограниченности спектра масс элементарных частиц первоначально была высказана еще в 1965 г. М. А. Марковым. Это ограничение связывалось с массой Планка

$$m_{\text{Pl}} = \sqrt{\hbar c/G} \sim 10^{19} \text{ ГэВ},$$

где  $G$  — гравитационная постоянная,  $\hbar$  — постоянная Планка,  $c$  — скорость света, и записывалось в виде [3]

$$m \leq m_{\text{P1}}. \quad (1)$$

Частицы с предельной массой  $m = m_{\text{P1}}$ , названные автором максимонами, занимали особое место среди элементарных частиц, и, в частности, в марковском сценарии ранней Вселенной максимоны должны были играть существенную роль [4]. Однако первоначально условие (1) было чисто феноменологическим и в построении теории оно фактически не участвовало.

Новый, радикальный подход действительного введения в теорию условия ограниченности спектра масс был предложен в конце 1970-х гг. В. Г. Кадышевским [2]. В этом подходе марковская идея о существовании максимальной массы частиц принималась как *новый фундаментальный физический принцип квантовой теории поля* (КТП). В предложенной теории постулировалось условие конечности спектра масс в виде

$$m \leq M, \quad (2)$$

где параметр максимальной массы  $M$ , называемый *фундаментальной массой*, являлся новой физической константой. При этом величина  $M$  рассматривалась как радиус кривизны пятимерного гиперboloида, поверхность которого представляет собой реализацию искривленного импульсного четырехмерного пространства  $(p_0, p_1, p_2, p_3, p_5)$ . В частности, при использовании для этих целей пространства анти-де Ситтера нетрудно получить

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + p_5^2 = M^2. \quad (3)$$

Необходимо отметить, что свойства экзотических частиц кардинально отличаются от аналогичных свойств их обычных партнеров. Однако оказалось, что появление в теории подобных частиц не является прерогативой только геометрического подхода. Действительно, развитие псевдоэрмитовой алгебраической  $\mathcal{PT}$ -симметричной квантовой теории показало, что подобные частицы появляются как следствие *самого ограничения спектра масс элементарных частиц*. Таким образом, эксперименты по поиску экзотических частиц фактически могут приводить к обнаружению существования и самой предельной массы. Подобный подход становится реальным благодаря расчету спектра энергий нейтрального фермиона, обладающего аномальным магнитным моментом в алгебраической теории с максимальной массой [5, 6].

Существенное отличие развиваемого нами подхода [5, 6] от методов, используемых ранее, состоит в том, что в этом подходе наиболее массивные фермионы (максимоны с массой  $M$ ), которым может принадлежать ведущая роль в структуре темной материи, должны являться псевдофермионами и иметь модифицированный характер взаимодействия. Вследствие этого особую важность приобретает изучение псевдоэрмитовых характеристик массив-

ных фермионов, что в результате приводит к выработке рекомендации по выяснению диапазона ограничений на параметры максимонов. Не исключено, что новые физические явления будут обнаружены при значениях энергии несколько ТэВ, что является центральным пунктом программы исследований на Большом адронном коллайдере (LHC) в ЦЕРН [7, 8]. Но уже сейчас ясно, что некоторые из краеугольных положений СМ могут претерпевать дальнейшую модернизацию. В частности, речь может идти об описании спектра масс фермионов, для которого в настоящее время согласно СМ не существует никаких ограничений. Тем не менее в рамках самой СМ наблюдается чрезвычайно широкий разброс значений масс известных элементарных частиц. В частности, масса  $t$ -кварка, который является наиболее массивным среди известных элементарных частиц, примерно в 300 тыс. раз превышает массу электрона.

Таким образом, вопрос о нейтральных максимонах, обладающих аномальным магнитным моментом (АММ), представляет значительный интерес с точки зрения выяснения возможности вхождения их в структуру темной материи. Особую роль здесь могут сыграть астрофизические исследования, в которых первостепенное значение приобретает выяснение необычных псевдоэрмитовых характеристик рассматриваемых нами фермионов. Следует отметить, что в настоящий момент проблемой поиска темной материи в космических лучах интенсивно занимаются многие исследовательские группы по всему миру. Однако обращает на себя внимание наиболее масштабный проект, который известен как «ледяной куб» («Ice Cube») [9], расположенный на Антарктическом щите Южного полюса. Аппаратура, используемая в «Ice Cube», представляет собой более чем 5000 высокочувствительных датчиков, осуществляющих сбор информации от галактических потоков различных частиц. Глубина залегания этих детекторов от поверхности льда составляет около 1500–2500 м. Таким образом, датчики, расположенные на разной глубине, занимают объем льда  $1 \text{ км}^3$ , и специалисты надеются, что на этой установке с помощью космических лучей удастся изучить источники весьма глубокого космоса.

Эти исследования, безусловно, помогут решить важные вопросы как в области низкоэнергетических нейтрино, так и в области частиц высокой энергии. В частности, подобные эксперименты связаны с изучением внутренней структуры сверхновых звезд, процессов образования черных дыр и гамма-всплесков. Существующая теория предполагает, что взаимодействия, происходящие в этих объектах, позволяют ускорять частицы до поразительно высоких значений энергии. По ряду оценок, проведенных специалистами в области астрофизики космических лучей, подобные частицы могут двигаться с энергией, достигающей значений  $10^6$ – $10^9$  ГэВ [9]. Вполне вероятно, что в этом же энергетическом диапазоне могут оказаться и значения масс новых частиц, которые могли бы претендовать на роль кандидатов в структуру тем-

ной материи. Таким образом, астрофизические оценки указывают на значительное превышение искомым значений массы по сравнению с энергетическим диапазоном, достижимом на ЛНС, где, как известно, также проводится целенаправленный поиск тяжелых экзотических частиц [8].

Интуитивно ясно, что наиболее успешными могут стать исследования, охватывающие максимально широкий энергетический диапазон и, что не менее важно, которые могли бы, наконец, позволить провести расшифровку «тайн темной материи». В этой связи нельзя не отметить, что экзотические частицы, возникающие в теориях с максимальной массой, имеют своеобразный «код» в виде набора псевдоэрмитовых характеристик, существенно отличающий их от обычных частиц, известных в СМ. По нашим оценкам, значение максимальной массы может быть ограничено  $M = 2 \cdot 10^{14}$  ГэВ [10], когда магнитный момент экзотических нейтрино составляет величину порядка  $10^{-19} \mu_0$ , где  $\mu_0$  — магнетон Бора, и магнитное поле имеет значение 8000 Гс. Однако если принять, что магнитный момент нейтрино может оказаться несколько больше по сравнению с (48) (см., например, данные коллаборации GEMMA [11]), то в этом случае уровень ограничения максимальной массы может заметно снизиться и войти в пределы астрофизических наблюдений  $M \sim 10^8$  ГэВ (см. [9]).

Кроме того, необходимо учитывать, что в экспериментах, использующих нейтринную астрофизику и астрофизику космических лучей, могут присутствовать также и гигантские магнитные поля, создаваемые пульсарами и магнитарами. Таким образом, для получения аналитических и численных оценок характеристик массивных фермионов, движущихся в магнитных полях с интенсивностью вплоть до значений  $\sim 10^{15}$ – $10^{16}$  Гс [12], необходимо иметь в виду, что расчетные формулы должны охватывать эти гигантские по земным масштабам значения. Отметим, что учет интервала ультравысоких значений энергии, достигающих до  $\sim 10^9$  ГэВ, в сверхсильных магнитных полях  $\sim 10^{16}$  Гс могут обеспечить точные решения, полученные нами для энергии нейтральных псевдофермионов, имеющих АММ и движущихся в магнитных полях [5, 6].

Таким образом, дальнейшее развитие теории, основанной В. Г. Кадышевским, может дать конкретные предложения по постановке экспериментов по обнаружению экзотических фермионов в ближайшем будущем. Отметим, в частности, что относительно наименее трудоемкими могут оказаться лабораторные эксперименты с низкоэнергетическими поляризованными нейтрино, движущимися в магнитном поле. В виде идеи отметим, что в этом случае речь может идти об использовании для этих целей прецизионных экспериментов по измерению массы нейтрино с контролируемым действием магнитного поля, в которых слабовозбужденные нейтринные потоки движутся в достаточно сильных магнитных полях, как, например, в троицком тритиевом эксперименте.

Как уже отмечалось, ограничение спектра масс может быть получено не только в геометрическом подходе, но и в рамках неэрмитовых (псевдоэрмитовых) фермионных систем, имеющих прямое приложение к нейтринной физике. Системы подобного типа называются  $\mathcal{PT}$ -симметричными моделями и используются в различных областях современной физики. В частности, отметим, что в области неэрмитовой оптики уже свыше десятка лет с успехом проводятся не только теоретические, но и экспериментальные исследования [13–15].

Легко видеть, что в геометрической теории В. Г. Кадышевского для свободной частицы  $p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$  условие (2) автоматически выполняется на поверхности (3). Также очевидно, что в приближении

$$|p_0|, |\mathbf{p}| \ll M, \quad p_5 \cong M, \quad (4)$$

геометрия анти-де Ситтера переходит в геометрию Минковского в четырехмерном псевдоевклидовом  $p$ -пространстве\*, и для этого перехода закрепилось общее название «плоский предел». Таким образом, в пространстве де Ситтера строилась новая теория, в которой объекты с массой больше  $M$  не могли рассматриваться как элементарные частицы [16–26].

Важно отметить, что с понятием фундаментальной массы тесно связана и концепция фундаментальной длины

$$l = \hbar/Mc. \quad (5)$$

Физический смысл ее может быть, по крайней мере, частично прояснен из сравнения  $l$  и комптоновской длины волны частицы  $\lambda_C = \hbar/mc$ . Из формулы (2) видно, что  $\lambda_C$  не может быть меньше  $l$ . Так как согласно Ньютону и Вигнеру [27] параметр  $\lambda_C$  характеризует размеры области пространства, в которой локализуется релятивистская частица массой  $m$ , то следует признать, что фундаментальная длина  $l$  должна вносить в теорию универсальное ограничение на точность пространственной локализации элементарных частиц.

Идея введения фундаментальной длины как новой универсальной постоянной размерности длины, фиксирующей характерный масштаб в пространстве-времени, активно обсуждалась в литературе (см., например, [28–37]). Главным стимулом использования данного параметра была надежда с помощью  $l$  избавиться от ультрафиолетовых расходимостей. Однако, как известно, нашлось другое решение этой проблемы. Теперь фундаментальная длина снова возникает в теории в совершенно ином контексте — как величина, в определенном смысле сопряженная фундаментальной массе.

---

\*Отметим, что В. Г. Кадышевский использовал в своих работах как понятие пространства де Ситтера, так и понятие пространства анти-де Ситтера.

Следует отметить, что модели КТП, в которых возникал параметр типа фундаментальной длины  $l$ , оказывались нелокальными. Возвращаясь к теории В. Г. Кадышевского, еще раз укажем на последовательное использование требования локальности данной версии квантовой теории. Благодаря этому при описании взаимодействия по-прежнему можно опираться на принцип локальной калибровочной симметрии. Ключевая идея, позволяющая совместить постулат об ограниченности масс (2) и условие локальности поля, состоит в необходимости модификации самого понятия поля.

Как можно модифицировать уравнение движения, чтобы учесть условие ограниченности масс (2)? Следуя [2–20], необходимо заменить четырехмерное импульсное пространство Минковского, которое используется в стандартной КТП, на деситтеровское импульсное пространство постоянной кривизны, реализуемое на поверхности пятимерного гиперboloида\*:

$$p_0^2 - \mathbf{p}^2 + p_5^2 = M^2. \quad (6)$$

Функция, определенная на этой поверхности, является функцией пяти переменных  $p_0, \mathbf{p}, p_5$ , связанных соотношением (6).

Энергия  $p_0$  и трехмерный импульс  $\mathbf{p}$  сохраняют здесь свой обычный смысл, и соотношение для массовой оболочки также удовлетворяется. При этом условие (2) для рассматриваемого поля  $\varphi(p_0, \mathbf{p}, p_5)$  также оказывается выполненным.

Отметим, что возникновение новой дискретной степени свободы

$$\epsilon = \frac{p_5}{|p_5|} = \pm 1 \quad (7)$$

и появление пары полевых переменных  $\varphi_1(p)$ ,  $\varphi_2(p)$  является характерной чертой развиваемой геометрической теории.

Из-за выполнения соотношения

$$m^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 \quad (8)$$

уравнение Клейна–Фока–Гордона также должно удовлетворяться полем  $\varphi(p_0, \mathbf{p}, p_5)$ :

$$(m^2 - p_0^2 + \mathbf{p}^2) \varphi(p_0, \mathbf{p}, p_5) = 0. \quad (9)$$

Однако это соотношение не отражает условия ограниченности спектра масс (2). Оно также не может быть использовано для выяснения зависимости поля от нового квантового числа  $\epsilon = p_5/|p_5|$ , т. е. для определения полей  $\varphi_1(p)$

---

\*Здесь и далее для определенности мы используем понятие пространства анти-де Ситтера.



и  $\varphi_2(p)$ . Для того чтобы учесть эти требования и найти удовлетворяющее им модифицированное уравнение, воспользуемся соотношениями (6), (8) и получим

$$m^2 - p_0^2 + \mathbf{p}^2 = p_5^2 - M^2 \cos^2 \mu,$$

где  $\cos \mu = \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}$ . Таким образом, вместо (9) можно записать

$$(p_5 + M \cos \mu)(p_5 - M \cos \mu) \varphi(p, p_5) = 0. \quad (10)$$

Это равенство удовлетворяется, когда

$$(p_5 - M \cos \mu) \varphi(p, p_5) = 0. \quad (11)$$

Естественно предположить, что (11) и есть новое уравнение движения скалярных частиц. Тем самым в КТП с максимальной массой вместо обычного разложения оператора Клейна–Гордона возникает следующее соотношение:

$$2M(p_5 - M \cos \mu) = [\gamma^0 p_0 - \gamma \mathbf{p} - \gamma^5 (p_5 - M) - 2M \sin(\mu/2)] \times \\ \times [-\gamma^0 p_0 + \gamma \mathbf{p} + \gamma^5 (p_5 - M) - 2M \sin(\mu/2)]. \quad (12)$$

Таким образом, выражение

$$D(p, M) = p_\nu \gamma^\nu - (p_5 - M) \gamma^5 - 2M \sin(\mu/2) \quad (13)$$

можно использовать в качестве оператора модифицированного уравнения Дирака. Легко проверить, что в «плоском пределе» (см. (4)) выражение (13) переходит в обычный оператор Дирака. Весьма важно, что новый оператор Клейна–Гордона  $2M(p_5 - M \cos \mu)$  может быть разложен на матричные множители и иным, независимым от (12), способом:

$$2M(p_5 - M \cos \mu) = [\gamma^0 p_0 - \gamma \mathbf{p} + \gamma^5 (p_5 + M) + 2M \cos(\mu/2)] \times \\ \times [\gamma^0 p_0 - \gamma \mathbf{p} + \gamma^5 (p_5 + M) - 2M \cos(\mu/2)]. \quad (14)$$

Тем самым в развиваемом подходе мы встречаемся с неким не имеющим аналога в обычной теории *экзотическим фермионным полем*, ассоциированным с волновым оператором [1, 24]:

$$D_{\text{exot}}(p, M) = p_\nu \gamma^\nu + (p_5 + M) \gamma^5 - 2M \cos(\mu/2). \quad (15)$$

Главное отличие оператора  $D_{\text{exot}}(p, m)$  от оператора (13) состоит в том, что он не имеет плоского предела (см. (4)) и, таким образом, не может служить

для описания известных частиц. Следовательно, (15) может соответствовать описанию *еще неизвестных в СМ фермионов*.

Вводя обозначения\*

$$\begin{aligned} m_1 &= 2M \sin(\mu/2), & m_2 &= 2M \sin^2(\mu/2), \\ m_3 &= 2M \cos(\mu/2), & m_4 &= 2M \cos^2(\mu/2), \end{aligned} \quad (16)$$

а также  $p_\mu = i\partial_\mu$  и переходя к гамильтоновой форме дираковских уравнений движения, можно записать:

$$(p_0 - \hat{\alpha}\mathbf{p} - \hat{\beta}m_1 - \hat{\beta}\gamma^5 m_2)\Psi(x, t, x_5) = 0, \quad (17)$$

$$(p_0 - \hat{\alpha}\mathbf{p} - \hat{\beta}m_3 - \hat{\beta}\gamma^5 m_4)\Psi_{\text{exot}}(x, t, x_5) = 0. \quad (18)$$

В этих модифицированных уравнениях Дирака матрицы  $\hat{\beta} = \gamma_0$ ,  $\gamma^i = \hat{\beta}\hat{\alpha}^i$ \*\*.

В квантово-механическом приближении гамильтонианы, соответствующие уравнениям (17), (18), могут быть представлены в виде

$$\hat{H} = \hat{\alpha}\mathbf{p} + \hat{\beta}(m_1 + m_2\gamma_5), \quad (19)$$

$$\hat{H}_{\text{exot}} = \hat{\alpha}\mathbf{p} + \hat{\beta}(m_3 + m_4\gamma_5). \quad (20)$$

Очевидно, что выражения (19), (20) оказываются неэрмитовыми из-за появления в них  $\gamma_5$ -массовых слагаемых ( $H \neq H^\dagger$ ,  $H_{\text{exot}} \neq H_{\text{exot}}^\dagger$ ). Таким образом, можно сделать вывод о том, что ограничение спектра масс (2), которое было положено в основу геометрического подхода при разработке модифицированной КТП с ограниченной массой [24, 26], приводит к появлению неэрмитовых вкладов в гамильтонианы (19), (20).

## 1. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЭРМИТОВОСТИ И $\gamma_5$ -ФАКТОРИЗАЦИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ОПЕРАТОРА КЛЕЙНА–ГОРДОНА

Рассмотрим алгебраический подход к разработке квантовой теории с максимальной массой. Для этого запишем модифицированное уравнение Дирака для свободных массивных частиц с помощью  $\gamma_5$ -факторизации обыкновенного оператора Клейна–Гордона. По существу, в этом случае нужно проделать

\* Отметим, что аналогичные обозначения для масс использовались также в работах [38].

\*\* Важно отметить, что на массовой поверхности  $p_5 = M \cos \mu$  не существует операторов, которые действуют на координату  $x_5$ , и этот параметр без потери общности может быть выбран равным нулю [24, 26].

те же действия, как и в известной процедуре Дирака. В частности, в одной из своих работ он писал: «... нужно извлечь нечто вроде квадратного корня из оператора Клейна–Гордона» [39]. И действительно, если не ограничиваться только эрмитовыми операторами, то можно представить оператор Клейна–Гордона в виде произведения двух коммутирующих матричных неэрмитовых (псевдоэрмитовых) операторов с  $\gamma_5$ -расширением массы

$$(\partial_\mu^2 + m^2) = (i\partial_\mu\gamma^\mu - m_1 - \gamma_5 m_2)(-i\partial_\mu\gamma^\mu - m_1 + \gamma_5 m_2), \quad (21)$$

где масса частицы  $m$  выражается через новые параметры  $m_1$  и  $m_2$

$$m^2 = m_1^2 - m_2^2, \quad (22)$$

а также используется система единиц  $\hbar = c = 1$ .

Для того чтобы функция подчинялась уравнению Клейна–Фока–Гордона

$$(\partial_\mu^2 + m^2)\tilde{\psi}(x, t) = 0, \quad (23)$$

можно потребовать, чтобы она также удовлетворяла и одному из уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} (i\partial_\mu\gamma^\mu - m_1 - \gamma_5 m_2)\tilde{\psi}(x, t) &= 0, \\ (-i\partial_\mu\gamma^\mu - m_1 + \gamma_5 m_2)\tilde{\psi}(x, t) &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнения (24), конечно, являются менее общими, чем (23), и, несмотря на то, что всякое решение одного из уравнений (24) удовлетворяет (23), обратное утверждение не имеет места. Очевидно также, что гамильтонианы, ассоциированные с уравнениями (24), неэрмитовы (псевдоэрмитовы), потому что в них содержится  $\gamma_5$ -зависимость массы ( $H \neq H^\dagger$ ):

$$H = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta(m_1 + \gamma_5 m_2) = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta m e^{\gamma_5 \alpha} \quad (25)$$

и

$$H^\dagger = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta(m_1 - \gamma_5 m_2) = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta m e^{-\gamma_5 \alpha}, \quad (26)$$

где матрицы  $\alpha_i = \gamma_0\gamma_i$ ,  $\beta = \gamma_0$ ,  $\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ , и введена однозначная зависимость от параметра  $\alpha$

$$\sinh(\alpha) = \frac{m_2}{m}, \quad \cosh(\alpha) = \frac{m_1}{m}, \quad (27)$$

где  $\alpha$  меняется от нуля до бесконечности. Подчеркнем еще раз, что уравнения (24) являются абсолютно новыми, так как содержат более детальную информацию о рассматриваемых системах. Удовлетворяющие им функции реализуют спинорное представление группы Лоренца и соответствуют описанию частиц с полужелым спином.

Кроме того, альтернативный формализм в отношении рассматриваемых систем явно показывает, что это неэрмитовы гамильтонианы с определенными характеристиками. Для них известно, что реальность их спектра обусловлена так называемыми псевдоэрмитовыми свойствами, использование которых в последнее время получило широкое распространение (см., например, [40–69]). Отметим, что гамильтониан называется псевдоэрмитовым, если он удовлетворяет условиям

$$H^+ = \eta_0 H \eta_0^{-1},$$

где  $\eta_0$  — линейный эрмитов оператор. Из (25) и (26) в нашем случае получаем

$$\eta_0 = e^{\gamma_5 \alpha}.$$

Из (22) легко видеть, что масса  $m$ , появляющаяся в уравнении (23), реальна, когда имеет место неравенство

$$m_1^2 \geq m_2^2 \tag{28}$$

(см. также [55, 56]). Однако в случае перехода к переменной  $\alpha$  для  $m_1, m_2$  это условие автоматически выполняется во всей области  $0 \leq \alpha < \infty$ .

Простой анализ рассматриваемых выражений показывает, что существуют две области описания псевдоэрмитовых фермионов. С одной стороны, в первой из них получаем описание псевдоэрмитовых фермионов, которые в результате эрмитового перехода  $m_1 = m$  и  $m_2 = 0^*$  совпадают с обычными частицами. Однако во второй области подобный переход отсутствует. Другими словами, описание фермионов во втором случае не подчиняется обычному уравнению Дирака и требует дополнительного исследования.

Как было отмечено ранее, особенностью модели с  $\gamma_5$ -массовым вкладом является то, что она может содержать ограничения на параметры массы в дополнение к условию

$$m_2 \leq m_1. \tag{29}$$

Действительно, на первый взгляд величина физической массы  $m$  может быть построена бесконечным числом произвольных комбинаций  $m_1$  и  $m_2$ , удовлетворяющих условиям (22) и (29). Однако при фиксированных значениях  $m_1$  и  $m_2$  можно видеть, что с помощью данных  $m_1, m_2$  нельзя описать частицы с произвольной массой, и в частности с массой, которая превышает величину максимальной массы  $M$ :

$$m \leq M = m_{\max} = \frac{m_1^2}{2m_2}. \tag{30}$$

---

\* Отметим, что этот переход соответствует «плоскому пределу» в геометрической теории В. Г. Кадышевского.

Значение  $M$  в данном случае соответствует значению массы максимона, который оказывается неэрмитовым фермионом

$$M_{\text{Максимон}} = \sqrt{2}M + \gamma_5 M. \quad (31)$$

Дальнейшее повышение значений  $m_1$  и  $m_2$ , как это следует из формул (27) и (30), может происходить вплоть до значения  $2M$ , при котором значение физической массы частицы обращается в нуль ( $m = 0$ ). Эти значения также легко получить, если выразить явным образом  $m_1$  и  $m_2$  непосредственно через параметры  $m$  и  $M$ . Действительно, фиксируя  $M$  и  $m$  и выражая через них (22) и (30), имеем

$$m_1^{\mp} = \sqrt{2}M \sqrt{1 \mp \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}}, \quad (32)$$

$$m_2^{\mp} = M \left( 1 \mp \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}} \right). \quad (33)$$

Два знака в выражениях (32) и (33) явно указывают на различную природу полученных выражений, соответствующую двум возможным типам частиц  $m_1^{\mp}$  и  $m_2^{\mp}$ . Причем верхний знак относится к случаю обычных частиц, а нижний определяет «экзотические фермионы» (см. определение масс для случая геометрического подхода к построению КТП с максимальной массой (16)).

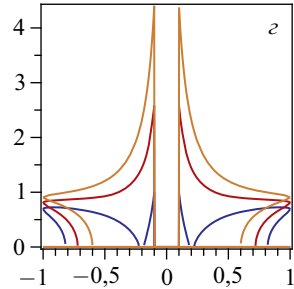
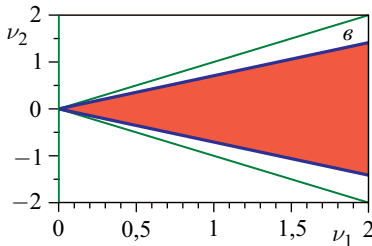
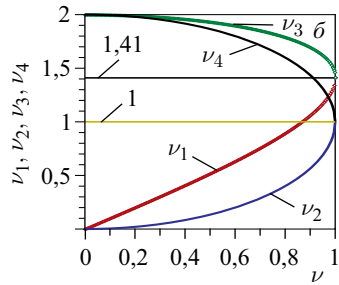
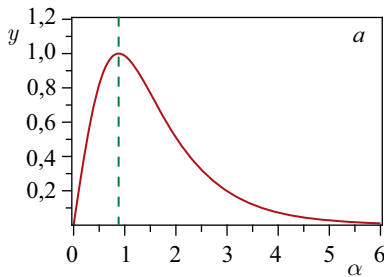
Обоснование определения величины максимальной массы в алгебраическом подходе можно выразить через известные ограничения на параметры массы, используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел  $a$  и  $b$ . Действительно, принимая  $a = m^2$  и  $b = m_2^2$ , получаем

$$m^2 + m_2^2 \geq 2\sqrt{m^2 m_2^2}. \quad (34)$$

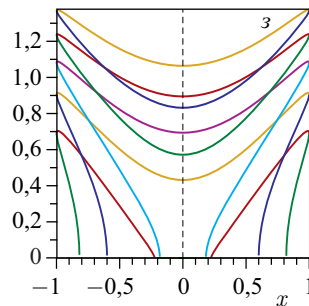
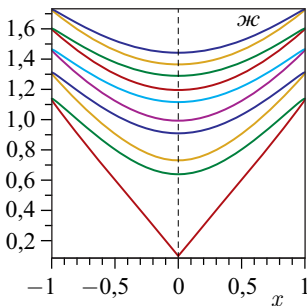
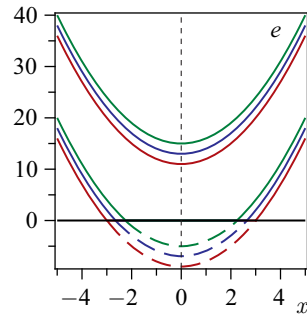
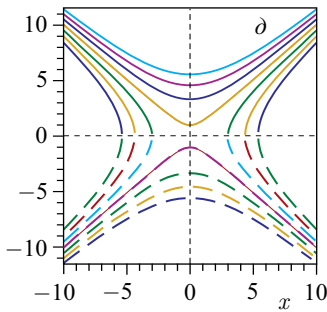
Знак равенства, как известно, имеет место, когда  $m = m_2$ , и это значение массы частицы  $m = m_2 = M$  определяет ее максимально допустимое значение. Кроме того, из (22) мы также можем получить, что данное значение максимальной массы соответствует  $m_1 = \sqrt{2}M$ . Таким образом, значение  $M$  действительно определяет некую максимально возможную массу в рассматриваемой псевдоэрмитовой фермионной системе при фиксированных значениях  $m$  и  $m_2$  и в терминологии Маркова [3, 4] может рассматриваться как определение массы максимона. Нетрудно видеть, что эта масса безусловно совпадает с (30) и может быть записана также в неэрмитовой форме (см. (31)).

На рисунке (а) видно явное распределение приведенной массовой зависимости

$$y(\alpha) = \frac{m}{M} = \frac{2 \sinh(\alpha)}{\cosh^2(\alpha)}, \quad (35)$$



$\nu_1/\sqrt{2} \leq \nu_2 \leq \nu_1$  (I);  $-\nu_1 < \nu_2 < -\nu_1\sqrt{2}$  (III)  
■  $-\frac{\nu_1}{\sqrt{2}} < \nu_2 < \frac{\nu_1}{\sqrt{2}}$  (II)



выраженной через параметр  $\alpha$ . Из рисунка (а) следует, что кривая, соответствующая массе рассматриваемой частицы, имеет максимальное значение  $m(\alpha) = m/M = 1$  в точке  $\alpha_0 = 0,881$ , которая, как уже отмечалось, соответствует максимуму. По этому значению мы можем определить фермионы, для которых существует эрмитов предел  $M \rightarrow \infty$  ( $m_2 \rightarrow 0$ ). Но после значения  $\alpha_0 = 0,881$ , где  $M$  — максимально достижимое значение массы фермиона ( $\alpha > \alpha_0$ ), мы имеем дело с уменьшением массы частицы, и в этом регионе уже нет возможности предельного перехода к случаю эрмитовой массы. Таким образом, в этой области могут существовать частицы, которые в принципе отличаются от частиц СМ. В частности, описание *безмассовых фермионов* в этом случае может быть представлено в форме

$$\tilde{m} = 2M(1 + \gamma_5), \quad (36)$$

где  $M$  — значение массы максимона.

Таким образом, благодаря наличию максимального значения массы можно говорить о возможности появления новых частиц, которые не существуют в СМ. Именно эти частицы В. Г. Кадышевский отмечал как «экзотические». Если ограничение спектра масс элементарных частиц не существует в природе, то экзотические частицы просто не могут возникнуть. И наоборот, если удастся их обнаружить, это будет означать, что ограничение массы существует в природе. Следует, однако, отметить, что если ранее возникновение экзотических фермионов трактовалось как прерогатива геометрического подхода к построению *КТП с фундаментальной массой* [2, 24], то теперь можно с уверенностью отнести их появление к возможности простого ограничения массы фермионов. Также мы считаем, что точные решения модифицированного уравнения Дирака–Паули, полученные нами в случае существования псевдоэрмитового нейтрино [5, 6], могут позволить получить ценную информацию для экспериментального обнаружения экзотических частиц. На это также указывает огромное увеличение взаимодействия экзотических частиц с магнитными полями, которое связано с их необычными свойствами [6].

## 2. МОДЕЛЬ С $\gamma_5$ -МАССОВЫМ ВКЛАДОМ, СОДЕРЖАЩАЯ ОГРАНИЧЕНИЯ МАССЫ ФЕРМИОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим вопрос об описании движения фермионов в магнитном поле при условии, что их собственный магнитный момент отличается от магнетона Бора, т. е. когда они обладают аномальными магнитными моментами (АММ). Как было показано Швингером [70], уравнение Дирака для частицы во внешнем электромагнитном поле  $A^{\text{ext}}$ , учитывающее радиационные по-

правки, может быть представлено в форме

$$(\mathcal{P}\gamma - m)\Psi(x) - \int \mathcal{M}(x, y|A^{\text{ext}})\Psi(y) dy = 0, \quad (37)$$

где  $\mathcal{M}(x, y|A^{\text{ext}})$  — массовый оператор фермиона во внешнем поле и

$$\mathcal{P}_\mu = p_\mu - eA_\mu^{\text{ext}}.$$

Из уравнения (37) с помощью разложения массового оператора в ряд по  $eA^{\text{ext}}$  с точностью не выше линейных членов по полю можно получить модифицированное уравнение. Это уравнение сохраняет релятивистскую ковариантность и соответствует феноменологическому уравнению Паули, полученному в его ранних работах (см., например, [71]).

Рассмотрим теперь модели массивных фермионов с  $\gamma_5$ -расширением масс  $m \rightarrow m_1 + \gamma_5 m_2$ , принимая во внимание взаимодействие их зарядов и АММ с электромагнитным полем  $F_{\mu\nu}$ :

$$\left( \gamma^\mu \mathcal{P}_\mu - m_1 - \gamma_5 m_2 - \frac{\Delta\mu}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \tilde{\Psi}(x) = 0, \quad (38)$$

где  $\Delta\mu = (\mu - \mu_0) = \mu_0(g - 2)/2$ ;  $\mu$  — магнитный момент фермиона;  $g$  — фермионный гиромангнитный фактор;  $\mu_0 = |e|/2m$  — магнетон Бора;  $\sigma^{\mu\nu} = i/2(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$ . Таким образом, феноменологическая константа  $\Delta\mu$ , которая вводилась Паули, является частью уравнения и может быть интерпретирована с точки зрения КТП.

Гамильтонову форму (38) в однородном магнитном поле можно представить в следующем виде:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi}(r, t) = H_{\Delta\mu} \tilde{\Psi}(r, t), \quad (39)$$

где

$$H_{\Delta\mu} = \alpha \mathcal{P} + \beta(m_1 + \gamma_5 m_2) + \Delta\mu \beta(\sigma \mathbf{H}). \quad (40)$$

Используя рисунок (б), можно видеть различные ветви параметров  $\nu_1^\pm = m_1^\pm/M$  и  $\nu_2^\pm = m_2^\pm/M$  как функции нормированного физического параметра  $\nu = m/M$ . Теперь существование областей  $\mathcal{PT}$ -симметрии определяется условием  $0 \leq \nu \leq 1$ . При этих значениях  $\nu$  параметры  $\nu_1$  и  $\nu_2$  соответствуют модифицированному уравнению Дирака с максимальной массой, описывающему распространение фермионов с действительной массой. Однако только нижние ветви  $\nu_1^-$ ,  $\nu_2^-$  соответствуют обычным частицам, а верхние кривые  $\nu_1^+$ ,  $\nu_2^+$  определяют зависимости их экзотических партнеров.

Основное отличие обычных неэрмитовых фермионов и экзотических частиц можно проиллюстрировать следующим образом. Если принять, что максимальная масса в фермионном спектре сравнима с массой Планка, то, используя рисунок (б), легко видеть, что все известные частицы СМ располагаются



в левом нижнем углу этого рисунка. В самом деле, согласно оценкам, которые можно получить из формул (32), (33), используя значение массы наиболее массивного фермиона  $SM$ , каким является топ-кварк, мы имеем

$$m_{t\text{-quark}} = (173,34 \pm 0,76) \text{ ГэВ}.$$

И если предположить, что максимальная масса соответствует массе Планка  $M = 10^{19}$  ГэВ, можно получить

$$m_1 = m_{t\text{-quark}}, \quad m_2 = \frac{m_{t\text{-quark}}^2}{2M} = 1,9 \cdot 10^{-15} \text{ ГэВ}. \quad (41)$$

Следовательно, в этом случае для неэрмитового  $t$ -кварка оказывается справедлива следующая оценка:

$$\tilde{m}_{t\text{-quark}} = m_{t\text{-quark}} + \gamma_5 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ эВ}. \quad (42)$$

Тем самым легко видеть, что неэрмитов вклад в этом случае оказывается экстремально мал и практически ненаблюдаем. В то же время, используя формулы (32), (33) для нижних знаков, т.е. для экзотических частиц, получаем

$$\tilde{m}_{t\text{-quark}} = 2M \left[ 1 - \frac{m_{t\text{-quark}}^2}{8M^2} \right] + \gamma_5 2M \left[ 1 - \frac{m_{t\text{-quark}}^2}{4M^2} \right]. \quad (43)$$

Это означает, что вся наиболее интересная информация о неэрмитовых фермионах в этом случае концентрируется на верхних ветвях рисунка (б), где изображена зависимость нормированных значений параметров  $m_1^+/M$ ,  $m_2^+/M$ , характеризующих экзотические частицы. Следовательно, отсюда можно сделать вывод о том, что наиболее интригующие явления могут происходить именно с наиболее легкими фермионами (см. (36)), так как область больших масс  $m \sim M$  еще долго может оставаться недостижимой.

Можно предположить, что весьма похожая ситуация наблюдалась в физике больших скоростей при переходе от нерелятивистской теории к разработке релятивистского подхода. Как известно, этот переход проходил в несколько этапов и только в окончательном варианте был связан с экспериментальными наблюдениями предельных значений скорости света. И хотя, как известно, свет был всегда, но корректное измерение значения его скорости заняло достаточно много времени. На первый взгляд измерения, связанные с проявлением ограничений спектра масс известных частиц, в принципе невозможно достичь, так как существующая мощность коллайдеров и даже их планируемые показатели еще долго могут оставаться недостаточными.

В связи с этим сама мысль о несбыточности непосредственного наблюдения максимонов у некоторых физиков порождает полный отказ от изучения вопросов ограниченности спектра масс элементарных частиц!

Однако и в этом случае сохраняется возможность использовать опыт поэтапного становления развиваемой теории. Действительно, на первом этапе можно осуществить поиск ограничений в спектре масс элементарных частиц путем проведения косвенных экспериментов, однозначно указывающих на *проявления такого ограничения*. В этом отношении весьма удобными могут оказаться экзотические частицы, которые были предсказаны В. Г. Кадышевским на основе разработки геометрического подхода. Существование экзотических фермионов было затем подтверждено и в рамках алгебраической теории, разрабатываемой нами для случая неэрмитовых (псевдоэрмитовых) фермионов [62–69], движущихся в магнитном поле [5, 6]. Как было показано [5, 6], имеется прямая связь между утверждением о существовании максимальной массы и появлением в теории экзотических фермионов. Причем эта связь существует независимо от того, какой подход выбирается для исследования: геометрический или алгебраический. На рисунке (б и в) можно видеть, что области ненарушенной  $\mathcal{PT}$ -симметрии для обычных и экзотических частиц существенно отличаются.

### 3. ТЕОРИЯ С МАКСИМАЛЬНОЙ МАССОЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ОБНАРУЖЕНИЯ ЭКЗОТИЧЕСКИХ ФЕРМИОНОВ

При выполнении расчетов в рамках модифицированного уравнения Дирака–Паули для случая движения фермионов в магнитном поле получаем точные решения для энергетического спектра [5, 6]:

$$E(\zeta, p_3, p_\perp, \Delta\mu H) = \sqrt{p_3^2 - m_2^2 + [\sqrt{m_1^2 + p_\perp^2} + \zeta \Delta\mu H]^2}, \quad (44)$$

и для собственных значений оператора поляризации  $\mu_3$  ( $\zeta = \pm 1$ ), которые характеризуют ориентацию спина фермиона вдоль или против направления магнитного поля, можно записать

$$k = \sqrt{m_1^2 + p_\perp^2}, \quad (45)$$

где  $p_3$  и  $p_\perp$  являются продольными и поперечными компонентами импульса нейтрино по отношению к магнитному полю.

Можно также видеть, что в случае  $\Delta\mu = 0$  в эрмитовом пределе  $m_1 = m$ ,  $m_2 = 0$  из (44) следует обычное выражение для энергии заряженной частицы, движущейся в магнитном поле (*уровни Ландау*). Таким образом, формула (44)

оказывается справедлива не только для нейтральных фермионов, но и для заряженных частиц, обладающих АММ. В этом случае необходимо просто заменить значение квадрата поперечной компоненты импульса на ее квантованные значения в магнитном поле

$$p_{\perp}^2 \rightarrow 2\gamma n,$$

где  $\gamma = eH$ ,  $n = 0, 1, 2 \dots$  определяет модифицированный уровень Ландау (см. [5, 6]):

$$E(\zeta, p_3, 2\gamma n, \Delta\mu H) = \sqrt{p_3^2 - m_2^2 + [\sqrt{m_1^2 + 2\gamma n} + \zeta \Delta\mu H]^2}. \quad (46)$$

Кроме того, подчеркнем, что из выражения (46) в эрмитовом пределе  $m_2 = 0$  и  $m_1 = m$  следует выражение, полученное ранее в работе [72].

Зависимость нормированных значений энергии, отнесенной к массе фермиона  $m$ ,

$$E(-1, 0, p_{\perp}, \Delta\mu H/m = 0, 1)/m$$

от параметра  $m/M$  для случаев  $\zeta = -1$ ,  $p_{\perp}/m = 0, 1, 2, 3, 4$  и  $\Delta\mu H/m = 0, 1$  представлена на рисунке (з). С другой стороны, зависимость нормированных значений энергии фермиона, отнесенной к максимальной массе  $M$ ,

$$E\left(\pm 1, \frac{p_3}{M}, \frac{p_{\perp}}{m}, \frac{\Delta\mu H}{M} = 0, 1\right)/M$$

от продольных компонент импульса нейтрино  $x = p_3/M$  для случая различных значений поляризации  $\zeta = \pm 1$ , поперечных компонент  $p_{\perp}/M = 0, 1, 2, 3, 4$  и  $\Delta\mu H/M = 0, 1$  можно видеть на рисунке (д), где штриховые кривые соответствуют античастицам. Весьма важно, что в случае фермионов со спином, ориентированным вдоль магнитного поля  $\zeta = +1$  энергетические состояния частиц и античастиц разделены энергетической щелью размером  $2m_{\nu}$ . Но в случае противоположной ориентации спина  $\zeta = -1$  можно видеть, что взаимодействие АММ фермиона с магнитным полем может привести к возможности пересечения ветвей частиц и античастиц, однако этот вопрос, безусловно, требует дополнительного исследования.

Зависимость квадрата энергии частиц

$$E^2\left(\pm 1, p_3, p_{\perp}, \frac{\Delta\mu H}{M}\right) \quad (47)$$

в магнитном поле  $H$  от продольной компоненты импульса нейтрино  $x = p_3/M$  можно видеть на рисунке (е). Как следует из (44), в поле, где  $PT$ -симметрия не нарушена, все квадраты энергетических уровней являются

положительно определенными для случая ориентации спина  $\zeta = +1$ . Однако в противоположном случае  $\zeta = -1$  можно видеть, что  $\mathcal{PT}$ -симметрия нарушается для некоторых значений поперечного импульса. В частности, мнимая часть энергетических уровней появляется для основного состояния фермиона в магнитном поле ( $p_{\perp} = 0, p_3 = 0$ ), т. е. по сути для массы частицы.

Распределение модифицированных уровней Ландау при различных значениях поперечного импульса в зависимости от параметра  $m/M$  для случая ориентации спина по полю  $\zeta = +1$  представлено на рисунке (ж). Здесь наблюдается полное отсутствие нарушения  $\mathcal{PT}$ -симметрии. Аналогичное распределение при противоположной спиновой поляризации  $\zeta = -1$  можно видеть на рисунке (з). В этом случае возникает нарушение  $\mathcal{PT}$ -симметрии при определенных значениях импульса нейтрино.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Хорошо известно [73,74], что в минимально расширенной СМ с включением ненулевой массы нейтрино однопетлевые радиационные поправки формируют магнитный момент нейтрино, который пропорционален его массе:

$$\mu_{\nu_e} = \frac{3}{8\sqrt{2}\pi^2} |e| G_F m_{\nu_e} = (3 \cdot 10^{-19}) \mu_0 \left( \frac{m_{\nu_e}}{1} \right), \quad (48)$$

где  $G_F$  — постоянная Ферми;  $\mu_0$  — магнетон Бора.

Кроме того, обсуждение проблемы измерения массы нейтрино (как активных, так и стерильных) показывает, что для активных нейтрино можно получить  $\sum m_{\nu} = 0,320$  эВ, тогда как для случая стерильных нейтрино мы имеем  $\sum m_{\nu} = 0,06$  эВ [11]. Следует также отметить, что лучшие лабораторные измерения верхнего предела магнитного момента нейтрино представляют значения на уровне  $\mu \leq 2,9 \cdot 10^{-11} \mu_0$ , которые были получены коллаборацией GEMMA [11], а лучшие астрофизические результаты находятся на уровне  $\mu \leq 3 \cdot 10^{-12} \mu_0$ .

Как уже отмечалось, одной из основных задач современной физики нейтрино после обнаружения их масс становится изучение их электромагнитных свойств. Эти исследования оказываются чрезвычайно важны, так как они могут явиться необходимым шагом при создании новой физики за пределами СМ. Однако главная особенность попыток изучения электромагнитных взаимодействий нейтрино заключается в том, что даже при самых благоприятных условиях в отношении величин их магнитного момента, которые позволяют оценить энергию обычных нейтрино, мы сталкиваемся с необходимостью предполагать, что соответствующие напряженности магнитных полей должны быть фантастически огромны.

Однако на случай экзотических нейтрино благодаря их необычным свойствам эти выводы не распространяются. Оказывается, для этого типа нейтрино может наблюдаться колоссальное усиление эффектов взаимодействия с магнитным полем (см. (44)), пропорциональное отношению максимальной массы к массе нейтрино  $k = M/\tilde{m}_\nu$  [5, 6] (см. также [65–67]). И поскольку значение максимальной массы в СМ простирается до бесконечности, проверку величины параметра усиления рекомендуется начинать с верхней части значения  $M$ , и наиболее подходящей для этого величиной является  $M = M_{\text{Pl}} \simeq 10^{19}$  ГэВ. Простые оценки показывают, что для значения максимальной массы  $M \sim 10^{19}$  ГэВ интенсивности магнитного поля могут находиться на экспериментально достижимом уровне, используемом в современных лабораториях, даже в случае оценки магнитного момента нейтрино в соответствии с (48).

Действительно, используя (44), можно записать для квадрата энергии нейтрино выражение [5, 6]

$$E^2(H) = p^2 + \tilde{m}_\nu^2 + 2\zeta\Delta\mu H\sqrt{m_1^2 + p_\perp^2} + (\Delta\mu H)^2. \quad (49)$$

Если рассмотреть случай холодных нейтрино, импульс которых близок к нулю, мы можем получить (см. также рисунок (e)) при  $p_z = 0$ ;  $p_\perp = 0$  и  $\zeta = -1$ ) для квадрата массы экзотических нейтрино в магнитном поле

$$\tilde{m}_\nu^2(H) = \tilde{m}_\nu^2 \pm 4\Delta\mu HM. \quad (50)$$

Тогда, оценивая параметр  $\Delta\mu HM$  с учетом того, что максимальная масса равна массе Планка, и используя предположение, что магнитный момент определяется формулой (48), можно записать

$$\Delta\mu HM = 10^{-19} \frac{e}{2m_e} H \cdot 10^{28} = \frac{10^{15}}{4} \left( \frac{H}{H_c} \right), \quad (51)$$

где  $m_e$  совпадает с массой электрона,  $H_c = m_e^2/e = 4,41 \cdot 10^{13}$  Гс — характерное квантующее магнитное поле для электрона. Отметим, что электрическое поле такой напряженности  $E_c = m_e^2/e$  производит работу на комптоновской длине волны электрона, равную его энергии покоя. Подставляя полученные выражения в (32), (33), легко видеть, что для случая экзотических нейтрино даже лабораторные интенсивности магнитных полей способны произвести значительные эффекты.

Как было отмечено ранее, на рисунке (з и ж) можно видеть зависимость энергетических состояний нейтрино  $E(-1, 0, p_\perp, \Delta\mu H)/M$  от параметра  $x = m/M$  для различных значений поперечной компоненты импульса фермиона:  $p_\perp/M = 0, 1, 2, 3, 4$  для  $\Delta\mu H/m = 0, 1$  и  $\zeta = \pm 1$ .

Если предположить, что экзотические нейтрино имеют значения массы ( $\tilde{m}_\nu$ ), примерно равные значениям массы обычных нейтрино, тогда возможно, что экзотический тип нейтрино имеет и сравнимую с ними величину АММ. Следовательно, эксперименты по поиску экзотических нейтрино могут одновременно ответить на вопрос о существовании максимальной массы и об ограниченности спектра масс элементарных частиц. Переходя к анализу возможных экспериментально значимых приложений полученных результатов, укажем, что наиболее близкими к ним по постановке задачи, на наш взгляд, являются прецизионные эксперименты по измерению абсолютных значений массы нейтрино.

Как известно, эксперименты, базирующиеся на использовании трития для измерения абсолютных значений массы нейтрино, имеют достаточно длительную историю. В частности, использование атомарных и молекулярных возбуждений в тритии, на которых базируются нейтринные эксперименты, впервые были реализованы в начале 1970-х гг. [75]. Это был первый раз, когда удалось установить абсолютный предел нейтринной массы на уровне около 55 эВ [76]. Главное в этом эксперименте было то, что возникло понимание возможности дальнейшего снижения уровня ошибки и получения более точных результатов.

После этого в Лос-Аламосской национальной лаборатории (LANL) в эксперименте были получены значения  $m_\nu < 9,3$  эВ, соответствующие 95%-му уровню достоверности [77]. События экспериментально наблюдались в конечной точке энергетического спектра, и впервые было количественно сообщено об отрицательных значениях центральной точки для величины  $m_\nu^2$ . В эксперименте, проведенном в Ливерморской национальной лаборатории им. Э. Лоуренса (LLNL), с помощью тритиевого источника  $T_2$  установили, что центральное значение для отрицательного квадрата массы нейтрино хорошо согласуется с результатом Лос-Аламосской национальной лаборатории, но с гораздо меньшей статистической неопределенностью.

В параллельных экспериментах [78] использовались комплексные источники трития. Однако все эти эксперименты дали результаты, которые согласуются с нулевым значением массы нейтрино, но по-прежнему с центральным значением в области отрицательных квадратов массы нейтрино. Эти значения были симптоматичными и свидетельствовали о недостаточно успешном согласовании теоретических и экспериментальных результатов для объяснения негативной зависимости квадрата массы нейтрино. Попытки уменьшить диапазон разброса столь конфликтных результатов возбудили интерес к экспериментам с молекулярным тритием. Был достигнут предел для массы нейтрино на уровне  $m < 2$  эВ в лабораториях Майнца [79] и Троицка [80, 81], где использовался новый тип спектрометров. В этих экспериментах применялись магнитоадиабатические фильтры и бета-электроны вращались в области интенсивных магнитных полей.

В троичном эксперименте, как и у его предшественников в Лос-Аламосской лаборатории, использовался газовый тритиевый источник. Плотность газа и чистота источника косвенно контролировались масс-анализатором. После этого была запущена электронная пушка, которая устанавливалась выше по течению источника [80]. Этот результат, основанный на повторном анализе исходных калибровок, был представлен в форме  $m < 2,05$  эВ на 95%-м уровне достоверности [81]. Наконец, финальные результаты троичного эксперимента, который по-прежнему воспроизводил отрицательный квадрат массы нейтрино в центральной точке энергетической области распределения нейтрино, могут быть представлены в виде [82]

$$m_\nu^2 = (-0,67 \pm 1,89 \text{ (стат.)} \pm 1,68 \text{ (сист.)}) \text{ эВ}^2 \quad (52)$$

на 95%-м уровне достоверности.

И несмотря на то, что в статье [82] отмечалось, что «результат для квадрата массы нейтрино в центральной точке хотя и дает отрицательное значение, но отклонение от нуля не является статистически значимым». Однако авторы статьи [82] также отметили, что в одном из сеансов измерений для отрицательных значений квадрата массы нейтрино было получено значение  $m_\nu^2 = -8,06$  эВ<sup>2</sup>. В этой ситуации мы хотим обратить внимание на то, что можно предположить, что мы просто имеем дело с неконтролируемым измерением нейтринной массы с учетом влияния магнитного поля. По схеме троичного эксперимента установка для измерения массы электронного антинейтрино включает в себя газ тритий, который вводится в длинную трубу, где присутствует сильное магнитное поле (до 0,8 Тл = 8000 Гс). Если предположить, что пучок нейтрино частично состоит из псевдоэрмитовых компонент экзотических нейтрино, то можно получить следующую оценку:

$$\tilde{m}_\nu^2(H) = \tilde{m}_\nu^2 - 4\Delta\mu HM. \quad (53)$$

Если учесть значения, которые следуют из обычных экспериментальных данных для центральной точки энергетической области распределения нейтрино с учетом влияния магнитного поля при ориентации спина нейтрино против направления магнитного поля

$$\tilde{m}_\nu^2(H) = -1 \text{ эВ}^2,$$

и использовать оценку для массы нейтрино  $\tilde{m}_\nu = 1$  эВ, а также формулы (52), (53), то в результате нетрудно получить оценку

$$4\Delta\mu HM \simeq 2 \text{ эВ}^2. \quad (54)$$

Последнее выражение дает возможность утверждать, что наблюдаемые результаты с отрицательными значениями квадратов массы нейтрино могут

оказаться просто следствием влияния магнитного поля при его напряженности порядка  $H \simeq 8000$  Гс [82] и значения максимальной массы, равной  $M = 2 \cdot 10^{14}$  ГэВ [10], когда магнитный момент экзотических нейтрино  $\mu_\nu$  берется из формулы (48) и составляет значение порядка  $10^{-19} \mu_0$ , где  $\mu_0$  — магнетон Бора. Однако если принять, что магнитный момент нейтрино может оказаться несколько больше по сравнению с (48) (см., например, данные коллаборации GEMMA [11]), то уровень ограничения максимальной массы может заметно уменьшиться и достигнуть пределов астрофизических наблюдений. Простые оценки показывают, что увеличение магнитного момента нейтрино до значений порядка  $10^{-12} \mu_0$  (см. [11]) привели бы к ограничению величины максимальной массы до уровня  $M \sim 10^8$  ГэВ, что находится внутри диапазона значений энергии, обозначенных коллаборацией «Ice Cube» [9].

И наоборот, если ограничение спектра масс элементарных частиц не существует в природе, то экзотические частицы в принципе не могут возникнуть. И это очень важно, поскольку ограничение массы в СМ полностью отсутствует, экспериментальную проверку можно предпринять, начиная с самых больших значений максимальной массы. В частности, это может быть масса Планка  $\sim 10^{19}$  ГэВ. Весьма интересно, что первоначально гипотеза о существовании экзотических частиц была высказана В. Г. Кадышевским в рамках рассматриваемого им геометрического подхода к построению КТП с фундаментальной массой [2–24]. Затем мы развили это предположение в рамках алгебраической псевдоэрмитовой квантовой теории и показали, что в ее рамках также могут возникать экзотические фермионы [62–69]. Кроме того, точные решения модифицированного уравнения Дирака–Паули, которые были получены нами для случая псевдоэрмитовых нейтрино, движущихся в магнитном поле [5, 6], могут дать ценную информацию для возможного обнаружения экзотических частиц. На эту возможность указывает также значительное усиление эффектов взаимодействия экзотических нейтрино с магнитными полями (см. [10]).

Существование массы нейтрино и различных типов смешивания разных нейтрино подразумевает, что нейтрино обладают также и магнитным моментом. В последнее время нередко можно встретить обзоры по электромагным свойствам нейтрино (см., например, [83]). Но, как было отмечено в статье [83], «в настоящее время нет положительных экспериментальных указаний в пользу существования электромагнитных свойств нейтрино». С этим трудно не согласиться, потому что взаимодействие обычных нейтрино с электромагнитными полями оказывается крайне слабым и вряд ли может серьезно обсуждаться. Однако если предположить существование «экзотических неэрмитовых нейтрино», то можно видеть, что их взаимодействие с магнитными полями может быть весьма существенно усилено благодаря коэффициенту, пропорциональному отношению максимальной массы к массе нейтрино  $k = M/m_\nu$  [5, 6, 10]. Именно такие эксперименты, по нашему мнению,



и могут плодотворно обсуждаться с целью создания новой физики за пределами СМ. Возможно, подобные наблюдения удастся провести в земных условиях. Как было отмечено, одними из первых для этой цели могли бы быть прецизионные лабораторные эксперименты по определению квадратов массы нейтрино, обсуждаемые в настоящей работе (см. также [10]). Подобные результаты, учитывающие взаимодействие АММ фермионов с сильными магнитными полями, по-видимому, могут быть использованы и для различных астрофизических оценок.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кадышевский В. Г.* Квантовая теория поля и «максимон» Маркова // III Междунар. семинар «Квантовая теория гравитации», Москва, 23–25 окт. 1984 г.; Препринт ОИЯИ Р2-84-753. Дубна, 1984.
2. *Kadyshesky V. G.* Fundamental Length Hypothesis and New Concept of Gauge Vector Field // Nucl. Phys. B. 1978. V. 141. P. 477; Fermilab-Pub. 78/22-ТНУ. 1978; Toward a More Profound Theory of Electromagnetic Interactions. Fermilab-Pub. 78/70-ТНУ. 1978;  
*Кадышевский В. Г.* Новый подход к теории электромагнитных взаимодействий // ЭЧАЯ. 1980. Т. 11, вып. 1. С. 5.
3. *Markov M. A.* Can the Gravitational Field Prove Essential for the Theory of Elementary Particles? // Prog. Theor. Phys. Suppl. Commemoration Issue for the Thirtieth Anniversary of Meson Theory and Dr. H. Yukawa. 1965. P. 85;  
*Марков М. А.* Элементарные частицы максимально больших масс (кварки, максимоны) // ЖЭТФ. 1966. Т. 51. С. 878 (Sov. Phys. JETP. 1967. V. 24. P. 584).
4. *Markov M. A.* Maximon-Type Scenario of the Universe (Big Bang, Small Bang, Micro Bang). Preprint INR P-0207. 1981; On the Maximon and the Concept of Elementary Particle. Preprint INR P-0208. 1981;  
*Марков М. А.* О «максимоне» и «минимоне» в свете возможной формулировки «элементарной частицы» // Письма в ЖЭТФ. 1987. Т. 45. С. 115;  
*Markov M. A., Mukhanov V. F.* On the Problems of a Very Early Universe // Phys. Lett. A. 1984. V. 104, No. 4. P. 200.
5. *Rodionov V. N.* Non-Hermitian  $\mathcal{PT}$ -symmetric Dirac–Pauli Hamiltonians with Real Energy Eigenvalues in the Magnetic Field // Intern. J. Theor. Phys. DOI 10.1007/s10773-014-2410-4 4065.
6. *Rodionov V. N.* Exact Solutions for Non-Hermitian Dirac–Pauli Equation in an Intensive Magnetic Field // Physica Scripta. 2015. V. 90, Iss. 4. P. 045302.
7. *Sigamani M.* Exotic Physics. arXiv:1603.08434.
8. *Arkani-Hamed N. et al.* Unification and New Particles at the LHC. arXiv:1608.01675v1.
9. *Aartsen M. G. et al.* Searches for Dark Matter and Exotic Particles. arXiv:1510.05226v2.

10. *Rodionov V. N.* Towards the Detecting of Pseudo-Hermitian Anomalies for Negative Square Masses Neutrinos in Intensive Magnetic Fields. arXiv:1603.08425.
11. *Battye R. A.* Evidence for Massive Neutrinos CMB and Lensing Observations. arXiv:1308.5870v2.
12. *Dong Lai.* Physics in Very Strong Magnetic Fields: Introduction and Overview. arXiv:1411.7995.
13. *Makris M. G., Lambropoulos P.* Quantum Zeno Effect by Indirect Measurement: The Effect of the Detector // *Phys. Rev. A.* 2004. V. 70. P. 044101; arXiv:quant-ph/0406191.
14. *Lambropoulos P., Nikolopoulos L. A. A., Makris M. G.* Signatures of Direct Double Ionization under XUV Radiation. arXiv:physics/0503195.
15. *Zanolin M., Vitale S., Makris N.* Application of Asymptotic Expansions of Maximum Likelihood Estimators Errors to Gravitational Waves from Binary Mergers: The Single Interferometer Case // *Phys. Rev. D.* 2010. V. 81. P. 124048; arXiv:0912.0065.
16. *Kadyshevsky V. G., Mateev M. D.* Local Gauge Invariant QED with Fundamental Length // *Phys. Lett. B.* 1981. V. 106. P. 139.
17. *Kadyshevsky V. G., Mateev M. D.* Quantum Field Theory and a New Universal High-Energy Scale: I. The Scalar Model // *Nuovo Cim. A.* 1985. V. 87. P. 324.
18. *Chizhov M. V. et al.* Quantum Field Theory and a New Universal High-Energy Scale: II. Gauge Vector Fields // *Nuovo Cim. A.* 1985. V. 87. P. 350.
19. *Chizhov M. V. et al.* Quantum Field Theory and a New Universal High-Energy Scale: III. Dirac Fields // *Ibid.* P. 373.
20. *Кадышевский В. Г.* К вопросу о конечности спектра масс элементарных частиц // ЭЧАЯ. 1998. Т. 29. С. 563 (*Phys. Part. Nucl.* 1998. V. 29. P. 227).
21. *Kadyshevsky V. G., Fursaev D. V.* Left-Right Components of Bosonic Field and Electroweak Theory // *JINR Rapid Commun.* 1992. No. 6. P. 5.
22. *Ибадов Р. М., Кадышевский В. Г.* О преобразованиях суперсимметрии в теории поля с фундаментальной массой. Препринт ОИЯИ P2-86-835. Дубна, 1986.
23. *Кадышевский В. Г., Фурсаев Д. В.* О киральных фермионных полях при высоких энергиях. Препринт ОИЯИ P2-87-913. Дубна, 1987; Докл. АН СССР. 1989. Т. 306, № 4. С. 856 (*Sov. Phys. Dokl.* 1989. V. 34. P. 534).
24. *Kadyshevsky V. G. et al.* Towards a Maximal Mass Model. CERN TH/2007-150; arXiv:hep-ph/0708.4205.
25. *Kadyshevsky V. G., Rodionov V. N.* Polarization of Electron-Positron Vacuum by Strong Magnetic Fields in the Theory with a Fundamental Mass // *Phys. Part. Nucl.* 2005. V. 36, No. 7A. P. 74.
26. *Кадышевский В. Г. и др.* О геометрическом подходе к формулировке Стандартной модели // Докл. РАН. 2006. Т. 408, № 4. С. 465 (*Dokl. Phys.* 2006. V. 51. P. 287; arXiv:hep-ph/0512332).
27. *Newton T. D., Wigner E. P.* Localized States for Elementary Systems // *Rev. Mod. Phys.* 1949. V. 21. P. 400 (Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971. С. 277).
28. *Heisenberg W.* Zur Theorie der Schauer der Höhenstrahlung // *Z. Phys.* 1936. Bd. 101. S. 533.

29. Марков М. А. Гипероны и  $K$ -мезоны. М.: Физматгиз, 1958.
30. Гольфанд Ю. А. О введении элементарной длины в релятивистскую теорию элементарных частиц // ЖЭТФ. 1959. Т. 37. С. 504.
31. Кадышевский В. Г. К теории пространства-времени // ЖЭТФ. 1961. Т. 41. С. 1885.
32. Кадышевский В. Г. К теории дискретного пространства-времени // Докл. АН СССР. 1961. Т. 136, № 1. С. 70.
33. Киржниц Д. А. Нелокальная квантовая теория поля // УФН. 1966. Т. 90. С. 129.
34. Блохинцев Д. И. Пространство и время в микромире. М.: Наука, 1970.
35. Тамм И. Е. Собр. науч. тр. Т. 2. М.: Наука, 1975.
36. Ефимов Г. В. Нелокальные взаимодействия квантованных полей. М.: Наука, 1977.
37. Osterwalder K., Schrader R. Feynman–Kac Formula for Euclidean Fermi and Boson Fields // Phys. Rev. Lett. 1973. V. 29. P. 1423; Euclidean Fermi Fields and a Feynman–Kac Formula for Boson–Fermion Models // Helv. Phys. Acta. 1973. V. 46. P. 277; Axioms for Euclidean Green’s Functions // Commun. Math. Phys. 1973. V. 31. P. 83; Axioms for Euclidean Green’s Functions II // Commun. Math. Phys. 1975. V. 42. P. 281.
38. Neznamov V. P. The Dirac Equation in the Model with a Maximal Mass. arXiv:1002.1403; Electron Self-Energy in Pseudo-Hermitian Quantum Electrodynamics with a Maximal Mass  $M$ . arXiv:1010.4042.
39. Dirac P. A. M. The Relativistic Electron Wave Equation. Preprint KFKI-1977-62. Budapest: Hung. Acad. of Sci. Central Res. Inst. for Phys., 1977. 19 p.
40. Bender C. M., Boettcher S. Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having  $\mathcal{PT}$ -Symmetry // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 5243.
41. Bender C. M., Boettcher S., Meisinger P. N.  $\mathcal{PT}$ -Symmetric Quantum Mechanics // J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 2210.
42. Mostafazadeh A. Pseudo-Hermitian Representation of Quantum Mechanics // Intern. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 2010. V. 7. P. 1191; arXiv:0810.5643.
43. Znojil M. Non-Hermitian Heisenberg Representation. arXiv:1505.01036.
44. Mostafazadeh A. Physics of Spectral Singularities. arXiv:1412.0454.
45. Ambichl P. et al. Breaking of  $\mathcal{PT}$ -Symmetry in Bounded and Unbounded Scattering Systems // Phys. Rev. X. 2013. V. 3. P. 041030; arXiv:1307.0149.
46. Esterhazy S. et al. Scalable Numerical Approach for the Steady-State *ab initio* Laser Theory // Phys. Rev. A. 2014. V. 90. P. 023816; arXiv:1312.2488.
47. Mostafazadeh A. A Dynamical Formulation of One-Dimensional Scattering Theory and Its Applications in Optics // Ann. Phys. (N. Y.). 2014. V. 341. P. 77; arXiv:1310.0592.
48. Makris K. G., Ge Li, Tureci H. E. Anomalous Transient Amplification of Waves in Non-Normal Photonic Media. arXiv:1410.4626.
49. Makris K. G. et al. Constant-Intensity Waves and Their Modulation Instability in Non-Hermitian Potentials. arXiv:1503.08986.
50. Znojil M. Fundamental Length in Quantum Theories with  $\mathcal{PT}$ -Symmetric Hamiltonians // Phys. Rev. D. 2009. V. 80. P. 045022; arXiv:0907.2677.
51. Znojil M. Fundamental Length in Quantum Theories with  $\mathcal{PT}$ -Symmetric Hamiltonians II: The Case of Quantum Graphs // Phys. Rev. D. 2009. V. 80. P. 105004; arXiv:0910.2560.

52. *Khare A., Mandal B. P.* A  $\mathcal{PT}$ -Invariant Potential with Complex QES Eigenvalues // *Phys. Lett. A.* 2000. V. 272. P. 53.
53. *Bender C. M. et al.* Equivalence of a Complex  $\mathcal{PT}$ -Symmetric Quartic Hamiltonian and a Hermitian Quartic Hamiltonian with an Anomaly // *Phys. Rev. D.* 2006. V. 74. P. 025016.
54. *Bender C. M., Brody D. C., Jones H. F.* Extension of  $\mathcal{PT}$ -symmetric Quantum Mechanics to Quantum Field Theory with Cubic Interaction // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 70. P. 025001; 2005. V. 71. P. 049901.
55. *Bender C. M.* Making Sense of Non-Hermitian Hamiltonians. arXiv:hep-th/0703096.
56. *Bender C. M., Jones H. F., Rivers R. J.* Dual  $\mathcal{PT}$ -Symmetric Quantum Field Theories // *Phys. Lett. B.* 2005. V. 625. P. 333.
57. *Mostafazadeh A., Batal A.* Physical Aspects of Pseudo-Hermitian and  $\mathcal{PT}$ -Symmetric Quantum Mechanics // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2004. V. 37. P. 11645.
58. *Mostafazadeh A.* Exact  $\mathcal{PT}$ -Symmetry Is Equivalent to Hermiticity // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2003. V. 36. P. 7081.
59. *Mostafazadeh A.* Hilbert Space Structures on the Solution Space of Klein–Gordon Type Evolution Equations // *Class. Quant. Grav.* 2003. V. 20. P. 155.
60. *Mostafazadeh A.* A Physical Realization of the Generalized  $\mathcal{PT}$ -,  $C$ -, and  $C\mathcal{PT}$ -Symmetries and the Position Operator for Klein–Gordon Fields // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2006. V. 21, No. 12. P. 2553.
61. *Zamani F., Mostafazadeh A.* Quantum Mechanics of Proca Fields // *J. Math. Phys.* 2009. V. 50. P. 052302.
62. *Rodionov V. N.*  $\mathcal{PT}$ -Symmetric Pseudo-Hermitian Relativistic Quantum Mechanics with Maximal Mass. arXiv:hep-th/1207.5463.
63. *Rodionov V. N.* Non-Hermitian  $\mathcal{PT}$ -Symmetric Quantum Mechanics of Relativistic Particles with the Restriction of Mass. arXiv:1303.7053.
64. *Rodionov V. N.* On Limitation of Mass Spectrum in Non-Hermitian  $\mathcal{PT}$ -Symmetric Models with the  $\gamma_5$ -Dependent Mass Term. arXiv:1309.0231.
65. *Rodionov V. N.* Non-Hermitian  $\mathcal{PT}$ -Symmetric Relativistic Quantum Mechanics with a Maximal Mass in an External Magnetic Field. arXiv:1404.0503.
66. *Rodionov V. N.* Exact Solutions for Non-Hermitian Dirac–Pauli Equation in an Intensive Magnetic Field. arXiv:1406.0383.
67. *Rodionov V. N.* Non-Hermitian  $\mathcal{PT}$ -Symmetric Dirac–Pauli Hamiltonians with Real Energy Eigenvalues in the Magnetic Field. arXiv:1409.5412.
68. *Родионов В. Н., Кравцова Г. А.* Алгебраический и геометрический подходы к неэрмитовой  $\mathcal{PT}$ -симметричной релятивистской квантовой механике с максимальной массой // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3: Физика. Астрономия.* 2014. № 3. С. 20 (*Mosc. Univ. Phys. Bull.* 2014. V. 69, No. 3. P. 223).
69. *Родионов В. Н., Кравцова Г. А.* К развитию неэрмитовой алгебраической теории с  $\gamma_5$ -расширением массы // *ТМФ.* 2015. Т. 182. С. 124 (*Theor. Math. Phys.* 2015. V. 182. P. 100).
70. *Schwinger J.* On the Green's Functions of Quantized Fields. I, II // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1951. V. 37. P. 452; 455.

71. Тернов И. М., Халилов В. Р., Родионов В. Н. Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.
72. Тернов И. М., Багров В. Г., Жуковский В. Ч. Синхротронное излучение электрона, обладающего вакуумным магнитным моментом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1966. Т. 7, № 1. С. 30.
73. Lee B., Shrock R. Natural Suppression of Symmetry Violation in Gauge Theories: Muon and Electron–Lepton-Number Nonconservation // Phys. Rev. D. 1977. V. 16. P. 1444.
74. Fujikawa K., Shrock R. Magnetic Moment of a Massive Neutrino and Neutrino-Spin Rotation // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 963.
75. Bergkvist K.-E. // Phys. Scripta. 1971. V. 4. P. 23.
76. Bergkvist K.-E. // Nucl. Phys. B. 1972. V. 39. P. 317.
77. Robertson R. G. H. et al. Limit on  $\nu_e$  Mass from Observation of the  $\beta$ -decay of Molecular Tritium // Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67, No. 8. P. 957–960.
78. Holzschuh E., Fritschi M., Kundig W. // Phys. Lett. B. 1992. V. 287. P. 381.
79. Bonn J. et al. Results from the Mainz Neutrino Mass Experiment // Yad. Fiz. 2002. V. 65, No. 12. P. 2234–2238.
80. Lobashev V. M. // Nucl. Phys. A. 2003. V. 719. P. C153.
81. Aseev V. N. et al. // Phys. Rev. D. 2011. V. 84. P. 112003.
82. Aseev et al. // Phys. At. Nucl. 2012. V. 75. P. 464.
83. Giunti C. et al. Electromagnetic Neutrinos in Laboratory Experiments and Astrophysics. arXiv:1506.05387.