

МАКСИМИЗАЦИЯ КРИТЕРИЯ УЛЬМАНА–ЙОЖИ ДЛЯ ОТКРЫТОЙ ДВУХУРОВНЕВОЙ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ С КОГЕРЕНТНЫМ И НЕКОГЕРЕНТНЫМ УПРАВЛЕНИЯМИ

*О. В. Моржин*¹, *А. Н. Печень*^{1,2}

¹ Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва

² Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», Москва

Рассмотрена задача максимизации критерия Ульмана–Йожи, показывающего степень совпадения заданной целевой матрицы плотности и финальной матрицы плотности двухуровневой открытой квантовой системы, находящейся под одновременным воздействием когерентного и некогерентного управлений. Для некоторых начальных и целевых матриц плотности аналитически показано, что нулевые когерентное и некогерентное управления являются особыми управлениями и удовлетворяют необходимым условиям оптимальности второго порядка. Для общего случая рассмотрен метод численного решения с помощью редукции к конечномерной оптимизации. Получены и описаны численные результаты.

The article considers the problem of maximization of the Uhlmann–Jozsa fidelity which shows the coincidence degree between the given target density matrix and the final density matrix of a two-level open quantum system evolving under simultaneous action of coherent and incoherent controls. For some initial and target density matrices, it is analytically shown that zero coherent and incoherent controls are singular controls which satisfy the second-order necessary optimality conditions. For the general case, a numerical method with reduction to finite-dimensional optimization is considered. The numerical results were obtained and presented.

PACS: 03.65.-w; 03.65.Yz

ВВЕДЕНИЕ

В современной квантовой механике одной из важных областей является теория управления квантовыми системами [1–5]. В реальных ситуациях квантовые системы, как правило, взаимодействуют с окружением, т. е. являются открытыми. Данное обстоятельство определяет важность решения задач управления открытыми квантовыми системами. В работе [6] был предложен общий метод некогерентного управления открытыми квантовыми системами,

в котором управлением является спектральная плотность числа частиц резервуара. В работе [7] было показано, что комбинация некогерентного и когерентного управлений для n -уровневых открытых квантовых систем позволяет в случае общего положения реализовать приближенную управляемость на множестве всех матриц плотности, т. е. приближенно реализовать наиболее сильную степень управляемости состояниями квантовых систем. Другим способом некогерентного управления является управление с помощью неселективных квантовых измерений [8, 9]. Анализ ландшафтов задач управления открытыми квантовыми системами [10] был применен к изучению оптимизации химических свойств и процессов [11] и анализу фитнес-функции биологических систем [12]. Для конечномерных и бесконечномерных открытых квантовых систем построены операторные графы и антиклики, соответствующие подпространствам, исправляющим ошибки [13, 14].

В данной статье на основе метода [7], использующего когерентное и некогерентное управления, и теории оптимального управления рассмотрен класс задач оптимального управления (ЗОУ) открытой двухуровневой квантовой системой. Ранее в работах [15, 16] для таких систем были рассмотрены два класса ЗОУ с различными целевыми функционалами, для решения которых были применены численные методы оптимизации, в том числе использующие редукцию к конечномерной оптимизации. В данной статье для таких систем исследована задача максимизации критерия Ульмана–Йोजи (Uhlmann–Jozsa), задающего степень отклонения финальной матрицы плотности системы от заданной целевой матрицы плотности (про этот критерий см. [17, 18]). Для некоторых начальных и целевых матриц плотности аналитически показано, что нулевые когерентное и некогерентное управления являются особыми управлениями и удовлетворяют необходимым условиям оптимальности второго порядка (разд. 3). С помощью оптимизационного метода на основе редукции ЗОУ к конечномерной оптимизации (разд. 4) получены и описаны численные результаты (разд. 5).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе [6] предложен общий метод некогерентного управления открытыми квантовыми системами. Рассматривается мастер-уравнение типа Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада для матрицы плотности, где гамильтониан зависит от когерентного управления, описывающего лазерное излучение, а супероператор диссипации зависит от некогерентного управления.

В работах [15, 16] был рассмотрен случай матрицы плотности $\rho(t)$, имеющей размерность 2×2 , т. е. $\rho(t) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ является эрмитовой положительно полуопределенной матрицей ($\rho(t) = \rho^\dagger(t) \geq 0$), имеющей единичный след ($\text{Tr} \rho(t) = 1$). На основе статей [6, 7] для описания динамики матрицы плот-

ности $\rho(t)$ в работах [15, 16] было рассмотрено следующее мастер-уравнение:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left[\widehat{\mathbf{H}}_0 + \widehat{\mathbf{H}}_1 v(t), \rho(t) \right] + \mathcal{L}_{n(t)}(\rho(t)), \quad \rho(t) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad \rho(0) = \rho_0, \quad (1)$$

где супероператор \mathcal{L} действует на $\rho(t)$ как

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n(t)}(\rho(t)) = \gamma n(t) & \left(\sigma^- \rho(t) \sigma^+ + \sigma^+ \rho(t) \sigma^- - \frac{1}{2} \{ \sigma^+ \sigma^- + \sigma^- \sigma^+, \rho(t) \} \right) + \\ & + \gamma \left(\sigma^- \rho(t) \sigma^+ - \frac{1}{2} \{ \sigma^+ \sigma^-, \rho(t) \} \right). \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь $\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, \hbar — постоянная Планка, $\gamma > 0$, $[A, B] = AB - BA$ (коммутатор) и $\{A, B\} = AB + BA$ (антикоммутатор операторов A, B). В нетривиальном случае без потери общности можно положить [15]: $\widehat{\mathbf{H}}_0 = \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\widehat{\mathbf{H}}_1 = \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, где $\omega > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ и $\mu \neq 0$. Матрица ρ_0 задана.

Мастер-уравнение (1) линейно зависит от скалярного управления v , которое вместе с оператором $\widehat{\mathbf{H}}_1 \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ описывает когерентные воздействия на квантовую систему. Супероператор $\mathcal{L}_{n(t)}$ линейно зависит от скалярного управления n , описывающего некогерентные воздействия. Рассматриваем кусочно-непрерывные управления v и n :

$$u = (v, n) \in \mathcal{U}(\mathbb{R}_+, Q) := \text{PCont}(\mathbb{R}_+; Q), \quad Q := [v_{\min}, v_{\max}] \times [0, n_{\max}] \quad (3)$$

(«PCont» от «piecewise continuous»). Дополнительно могут быть заданы ограничения на вариации управлений v, n .

Для системы (1), (2) в статье [15] была рассмотрена задача быстродействия

$$J_1(u, T) = T \rightarrow \min_{(u, T)}, \quad \rho(T) = \rho_{\text{target}} \quad (4)$$

на множестве допустимых пар $\{(u, T)\}$ (ρ_{target} — заданная целевая матрица плотности), а в статье [16] была исследована оптимизационная задача

$$J_2(u, T) = 1 - \langle \rho(T), \rho_{\text{target}} \rangle_{\text{HS}} \rightarrow \inf_{(u, T)}, \quad (5)$$

$$J_1(\widehat{u}, \widehat{T}) = \widehat{T} \rightarrow \inf_{(\widehat{u}, \widehat{T})}, \quad (6)$$

где $\langle \rho(T), \rho_{\text{target}} \rangle_{\text{HS}} = \text{Tr}(\rho(T)\rho_{\text{target}})$ — скалярное произведение Гильберта–Шмидта. Условие (5) означает максимизацию среднего $\langle \rho(T), \rho_{\text{target}} \rangle$, показывающего степень совпадения финальной и целевой матриц плотности.

Условие (6) рассматривается на множестве $\{(\hat{u}, \hat{T})\}$ таких пар, на которых выполняется условие (5). В теории квантовой информации [17], а также в квантовом управлении [18] известен критерий Ульмана-Йожи $\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2) = (\text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho_1}\rho_2\sqrt{\rho_1}})^2$, также измеряющий степень совпадения двух матриц плотности. В данной статье рассматривается ЗОУ для системы (1), (2) с условием

$$J_3(u, T) = 1 - \left(\text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho(T)}\rho_{\text{target}}\sqrt{\rho(T)}} \right)^2 \rightarrow \inf_{(u, T)} \quad (7)$$

совместно с условием (6), определенным на множестве пар $\{(\hat{u}, \hat{T})\}$, на которых выполняется (7). В отличие от ограничения-равенства в (4), условие (7) не требует найти матрицу $\rho(T)$, равную ρ_{target} . Используя известное [17] представление для $\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2)$, верное в случае матриц плотности размерности 2×2 , имеем

$$\mathcal{F}(\rho(T), \rho_{\text{target}}) = \langle \rho(T), \rho_{\text{target}} \rangle_{\text{HS}} + 2\sqrt{\det(\rho(T))}\sqrt{\det(\rho_{\text{target}})}. \quad (8)$$

2. ФОРМУЛИРОВКА С ПОМОЩЬЮ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ БЛОХА

Как и в статьях [15, 16], используем хорошо известную параметризацию Блоха:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & 1 - x_3 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где вектор Блоха $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{B}$; $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2^2 \leq 1\}$ называется шаром Блоха; $x_j = \text{Tr}(\rho\sigma_j)$, $j = 1, 2, 3$. Параметризация (9) представляет собой биекцию между матрицами плотности и векторами Блоха. В этом случае уравнение (1) принимает вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A + B^v v(t) + B^n n(t))x(t) + d, \quad x(0) = x_0 \in \mathcal{B}, \quad (10)$$

$$A = \begin{pmatrix} -\gamma/2 & \omega & 0 \\ -\omega & -\gamma/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad B^v = \kappa \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$B^n = \gamma \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad d = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где параметр $\kappa := \mu/\hbar$. С учетом (8) и (9) условие (7) принимает вид

$$J_3(u, T) = g(x(T), x_{\text{target}}) \rightarrow \inf_{(u, T)}, \quad (12)$$

где

$$g(x, x_{\text{target}}) := 1 - \frac{1}{2}(1 + \langle x, x_{\text{target}} \rangle) - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \|x\|^2}\sqrt{1 - \|x_{\text{target}}\|^2} \quad (13)$$

для $x = x(T)$, зависящего от v, n . В случае $x_{\text{target}} \in \partial\mathcal{B}$ (т. е. лежит на сфере Блоха) функционал J_3 становится линейным по $x(T)$. Функция $g(x, x_{\text{target}})$: 1) при $x = x_{\text{target}}$ равна нулю; 2) при $\|x_{\text{target}}\| = 1$ сводится к исследованной в [16, § 2.1] функции; 3) в случае $\|x_{\text{target}}\| < 1$ имеет стационарную точку $x^* = x_{\text{target}}$.

3. СЛУЧАЙ ОСОБОГО УПРАВЛЕНИЯ

Здесь представлены некоторые аналитические результаты, полученные на основе необходимых условий оптимальности управлений. Рассматривается задача (10)–(12) с фиксированным T и кусочно-непрерывными управлениями v, n , удовлетворяющими (3), где вместо \mathbb{R}_+ берем $[0, T]$. В соответствии с теорией принципа максимума Понтрягина [19] рассматривается функция Понтрягина $H(p, x, v, n) = \langle p, f(x, v, n) \rangle$, где $f(x, v, n) := (A + B^v v + B^n n)x + d$, $p \in \mathbb{R}^3$. Пусть начальное состояние $x_0 = (0, 0, a)$, $a \in (0, 1)$, целевое состояние $x_{\text{target}} = (0, 0, b)$, $b \in (a, 1)$, т. е. оба состояния находятся внутри шара Блоха. В этом случае сопряженная система на некотором допустимом процессе $(\tilde{T}, \tilde{v}, \tilde{n}, \tilde{x})$ имеет вид (интегрируется «справа налево»)

$$\frac{d\tilde{p}(t)}{dt} = -(A^T + (B^v)^T \tilde{v}(t) + (B^n)^T \tilde{n}(t)) \tilde{p}(t), \quad (14)$$

$$\tilde{p}_j(\tilde{T}) = \frac{x_{\text{target},j}}{2} - \frac{\sqrt{1 - \|x_{\text{target}}\|^2}}{2\sqrt{1 - \|\tilde{x}(\tilde{T})\|^2}} \tilde{x}_j(\tilde{T}), \quad j = 1, 2, 3. \quad (15)$$

Пусть $\tilde{u} = (\tilde{v}, \tilde{n}) = (0, 0)$. Тогда система (10), (11) имеет решение $\tilde{x} = (0, 0, (a - 1)e^{-\gamma t} + 1)$. Положим $\tilde{T} = (1/\gamma) \log((1-a)/(1-b))$. Тогда $\tilde{x}(\tilde{T}) = (0, 0, b)$, а условие трансверсальности (15) принимает вид $\tilde{p}_j(\tilde{T}) = 0$, $j = 1, 2, 3$. Сопряженная система (14), (15) имеет решение $\tilde{p} = (0, 0, 0)$. Приращение $H(\tilde{p}(t), \tilde{x}(t), v(t), n(t)) - H(\tilde{p}(t), \tilde{x}(t), \tilde{v}(t), \tilde{n}(t)) \equiv 0$ для любых управлений v, n , т. е. $\tilde{u} = (0, 0)$ является особым управлением. С точки зрения принципа максимума Понтрягина здесь вырожденная ситуация. Известна теорема о необходимых условиях оптимальности второго порядка ([20, 21, гл. IV, § 3]), использующая решение матричной сопряженной системы, которую для краткости записываем сразу на процессе $(\tilde{T}, \tilde{v} = 0, \tilde{n} = 0, \tilde{x})$:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\Phi}(t)}{dt} &= -A^T \tilde{\Phi}(t) - \tilde{\Phi}(t)A, \\ \tilde{\Phi}(T) &= \text{diag} \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2(b^2 - 1)} \right), \quad b \in (0, 1). \end{aligned} \quad (16)$$

Находим решение системы (16):

$$\tilde{\Phi} = \text{diag} \left(-\frac{1}{2}e^{\gamma(t-\tilde{T})}, -\frac{1}{2}e^{\gamma(t-\tilde{T})}, \frac{1}{2(b^2-1)}e^{2\gamma(t-\tilde{T})} \right).$$

В соответствии с указанной теоремой о необходимых условиях оптимальности второго порядка в случае, если особое управление \tilde{u} является оптимальным, выполняется неравенство (1), данное в [21, гл. IV, § 3] и в нашем случае имеющее вид $4(\tilde{x}_3(t))^2 \left(\kappa^2(v(t))^2 \tilde{\Phi}_{22}(t) + \gamma^2(n(t))^2 \tilde{\Phi}_{33}(t) \right) \leq 0$. Таким образом, управление $\tilde{u} = (0, 0)$ является особым и удовлетворяет необходимым условиям оптимальности второго порядка. Физически рассмотренная задача означает достижение в шаре Блоха финальной точки $x(\tilde{T}) = (0, 0, b)$, соответствующей квантовому состоянию с меньшей степенью смешанности по сравнению с начальным квантовым состоянием, представленным точкой $x_0 = (0, 0, a)$.

4. РЕДУКЦИЯ К КОНЕЧНОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассматривается ЗОУ для системы (10), (11) при условиях (12), (13) и (6), используемых совместно. Для численного решения данной ЗОУ по аналогии с [16, § 3.2] будем использовать: 1) вспомогательный целевой функционал, учитывающий как (12), (13), так и (6) за счет линейной свертки; 2) аппроксимацию кусочно-непрерывных управлений v, n кусочно-постоянными функциями $v(t) = \sum_{j=0}^{N_v-1} \theta_{[t_j, t_{j+1})}(t_j)v_j$ и $n(t) = \sum_{j=0}^{N_n-1} \theta_{[t_j, t_{j+1})}(t_j)n_j$, где $\theta_{[t_j, t_{j+1})}$ — индикаторная функция; $v_j \in [v_{\min}, v_{\max}]$, $n_j \in [0, n_{\max}]$, $t \in [0, T]$, а величина T определяется на некотором заданном отрезке $[T^1, T^2]$ при $0 < T^1 < T^2$. Построим вектор

$$\mathbf{u} = \left(\{v_j\}_{j=0}^{N_v-1}, \{n_j\}_{j=0}^{N_n-1} \right) \in [v_{\min}, v_{\max}]^{N_v} \times [0, n_{\max}]^{N_n} \subset \mathbb{R}^{N_v+N_n}.$$

От ЗОУ переходим к конечномерной задаче

$$J_\delta(\mathbf{u}, T; \beta) = \beta_1 T + \beta_2 J_3(\mathbf{u}, T) + \mathcal{R}(\mathbf{u}; \beta_3, \beta_4) \rightarrow \inf_{(\mathbf{u}, T)}, \quad (17)$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}; \beta_3, \beta_4) = \beta_3 \sum_{j=0}^{N_v-1} |v_{j+1} - v_j| + \beta_4 \sum_{j=0}^{N_n-1} |n_{j+1} - n_j|, \quad (18)$$

где \mathcal{R} — возможный регуляризатор, позволяющий ограничивать вариации управлений; вектор β образован настроечными параметрами $\beta_1, \beta_2 > 0$,

$\beta_3, \beta_4 \geq 0$. За счет \mathcal{R} имеем возможность регулировать вариации управлений v и n . Для задачи (17) можно применить стохастические оптимизационные методы нулевого порядка, например, Differential Evolution [22] и Dual Annealing [23]. В отличие от статьи [16], где использован метод Dual Annealing без метода Differential Evolution, в данной работе для каждой ЗОУ осуществлены запуски обоих методов оптимизации с последующим анализом их результатов. Следует учитывать увеличение вычислительной сложности данного подхода с ростом N_v, N_n .

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Изложенный в разд. 4 численный метод решения ЗОУ запрограммирован первым автором по аналогии с программными реализациями описанных и использованных в статье [16] численных методов решения ЗОУ, а именно на языке Python с применением реализаций [22, 23] оптимизационных методов Differential Evolution и Dual Annealing, с использованием библиотеки `odeint` [24] для численного решения задач Коши.

В качестве первого примера рассматриваем ЗОУ с начальным состоянием $x_0 = (0, 0, a = 0)$ и целевым состоянием $x_{\text{target}} = (0, 0, b = 0, 8)$. Пусть $\omega = 1$, $\kappa = 0,01$, $\gamma = 0,05$, $v_{\text{max}} = -v_{\text{min}} = 100$, $n_{\text{max}} = 20$, $N_v = N_n = 10$, $T \in [1, 50]$. В целевой функции (17), (18) положим $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 10^5$, $\beta_3 = \beta_4 = 0,1$. Найденное численной оптимизацией значение $T \approx 32,12$ очень близко к аналитическому результату $\tilde{T} = (1/\gamma) \log((1-a)/(1-b)) = 20 \log 5 \approx 32,19$, а найденные управления v, n достаточно хорошо воспроизводят $\tilde{v} = 0$, $\tilde{n} = 0$.

Во втором примере рассматривается ЗОУ с $x_0 = (-0,7, 0, 0)$, $x_{\text{target}} = (0,7, 0, 0)$, $\omega = 1$, $\kappa = 0,01$, $\gamma = 0,01$, $v_{\text{max}} = -v_{\text{min}} = 50$, $n_{\text{max}} = 10$. Рассматриваем $N_v = N_n = 20$, $T \in [1, 50]$. Положим $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 10^5$, $\beta_3 = \beta_4 = 0,05$. Полученное численной оптимизацией значение $T \approx 3,2$. Найденное некогерентное управление $n \equiv 0$, а полученное когерентное управление v показано на рис. 1, *a*; на участке $t \in [1,5, 2]$ это управление имеет последовательные «ступеньки», хотя регуляризатор (18) предназначен для ограничения вариации функции v , а не каждой разности $|v_{j+1} - v_j|$ по отдельности. Соответствующая траектория x в шаре Блоха представлена на рис. 1, *б*, графики функций x_j ($j = 1, 2, 3$) показаны на рис. 1, *в*. Найденному процессу (T, v, n, x) соответствуют величина $g(x(T), x_{\text{target}}) \approx 2 \cdot 10^{-5}$ и кривая $g(x(t), x_{\text{target}})$, показанная на рис. 1, *г*.

В качестве третьего примера рассматривается ЗОУ, где $x_0 = 1/\sqrt{3}(1, 1, 1) \in \partial\mathcal{B}$ (на сфере), $x_{\text{target}} = (0,5, 0, 0)$, $\omega = 1$, $\kappa = 0,01$, $\gamma = 0,01$, $v_{\text{max}} = -v_{\text{min}} = 50$, $n_{\text{max}} = 10$. Рассматриваем $N_v = N_n = 10$, $T \in [1, 50]$. Положим $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 10^5$, $\beta_3 = \beta_4 = 0,1$. Найденная величина

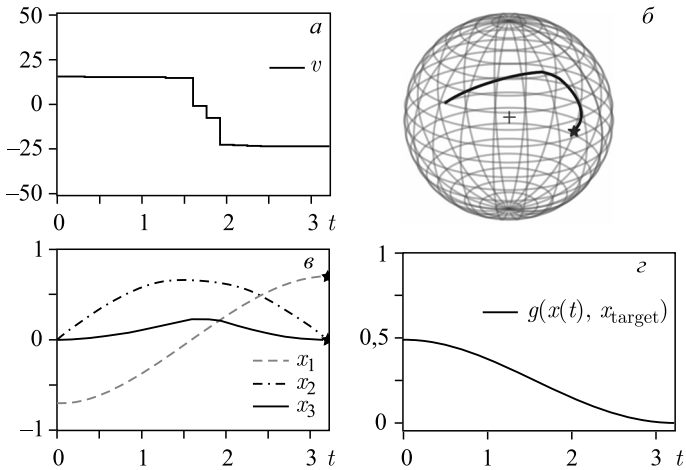


Рис. 1. Численное решение ЗОУ с начальным состоянием $x_0 = (-0,7, 0, 0)$ и целевым состоянием $x_{\text{target}} = (0,7, 0, 0)$

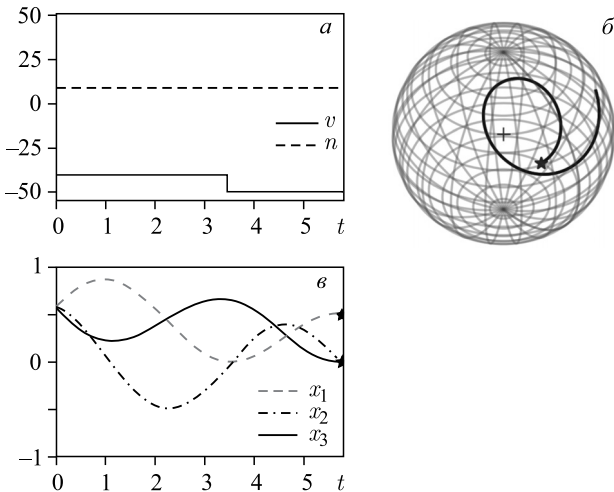


Рис. 2. Численное решение ЗОУ с начальным состоянием $x_0 = 1/\sqrt{3}(1, 1, 1) \in \partial B$ и целевым состоянием $x_{\text{target}} = (0,5, 0, 0)$

$T \approx 5,758$. Вычисленное некогерентное управление n таково, что $n_j \approx 8,892 \forall j = 0, N_n - 1$. Графики полученных когерентного v и некогерентного n управлений показаны на рис.2, а. Соответствующая траектория x в шаре Блоха показана на рис.2, б, а графики функций x_j ($j = 1, 2, 3$) представлены на рис. 2, в.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрена задача максимизации критерия Ульмана–Йожи для открытой двухуровневой квантовой системы, находящейся под воздействием когерентного и некогерентного управлений. Случай матриц плотности размерности 2×2 позволил применить следующие известные результаты: 1) представление критерия Ульмана–Йожи в виде (8), где первое слагаемое является скалярным произведением Гильберта–Шмидта рассматриваемых матриц плотности; 2) параметризацию Блоха (9). В разд. 3 для определенных начальных и целевых матриц плотности аналитически показано, что нулевые когерентное и некогерентное управления являются особыми управлениями и удовлетворяют необходимым условиям оптимальности второго порядка; этот случай физически означает достижение в шаре Блоха финальной точки, соответствующей квантовому состоянию с меньшей степенью смешанности по сравнению с начальным квантовым состоянием. С помощью описанного в разд. 4 численного метода решения ЗОУ, использующего ее редукцию к конечномерной оптимизации с последующим применением оптимизационных стохастических методов нулевого порядка (Differential Evolution и Dual Annealing), проведены вычислительные эксперименты по максимизации критерия Ульмана–Йожи в финальные моменты времени. Соответствующие численные результаты описаны в разд. 5, где показано, что найденное некогерентное управление может быть, в частности, тождественно равным нулю.

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 1.699.2016/1.4 МИСиС) и государственного задания МИАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А. Г., Самойленко Ю. И. Управление квантово-механическими процессами. М.: Наука, 1984.
2. D'Alessandro D. Introduction to Quantum Control and Dynamics. Boca Raton: CRC Press, 2007.
3. Brif C., Chakrabarti R., Rabitz H. Control of Quantum Phenomena: Past, Present and Future // New J. Phys. 2010. V. 12, No. 7. P. 075008.
4. Koch C. P. Controlling Open Quantum Systems: Tools, Achievements, and Limitations // J. Phys.: Condens. Matter. 2016. V. 28, No. 21. P. 213001.
5. Моржин О. В., Печень А. Н. Метод Кротова в задачах оптимального управления замкнутыми квантовыми системами // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74, № 5. С. 83–144.
6. Pechen A., Rabitz H. Teaching the Environment to Control Quantum Systems // Phys. Rev. A. 2006. V. 73. P. 062102.
7. Pechen A. Engineering Arbitrary Pure and Mixed Quantum States // Phys. Rev. A. 2011. V. 84. P. 042106.

8. *Pechen A., Il'in N., Shuang F., Rabitz H.* Quantum Control by von Neumann Measurements // *Phys. Rev. A.* 2006. V. 74. P. 052102.
9. *Pechen A.N., Trushechkin A.S.* Measurement-Assisted Landau–Zener Transitions // *Phys. Rev. A.* 2015. V. 91, No. 5. P. 052316.
10. *Wu R., Pechen A., Rabitz H., Hsieh M., Tsou B.* Control Landscapes for Observable Preparation with Open Quantum Systems // *J. Math. Phys.* 2008. V. 49, No. 2. P. 022108.
11. *Moore K.W., Pechen A., Feng X.-J., Dominy J., Beltrani V.J., Rabitz H.* Why Is Chemical Synthesis and Property Optimization Easier than Expected? // *Phys. Chem. Chem. Phys.* 2011. V. 13, No. 21. P. 10048–10070.
12. *Feng X.-J., Pechen A., Jha A., Wu R., Rabitz H.* Global Optimality of Fitness Landscapes in Evolution // *Chem. Sci.* 2012. V. 3, No. 3. P. 900–906.
13. *Amosov G.G., Mokeev A.S.* On Non-Commutative Operator Graphs Generated by Covariant Resolutions of Identity // *Quant. Inform. Processing.* 2018. V. 17, No. 12. P. 325.
14. *Amosov G.G., Mokeev A.S., Pechen A.N.* Non-Commutative Graphs and Quantum Error Correction for a Two-Mode Quantum Oscillator // *Quant. Inform. Processing.* 2020 (in press).
15. *Morzhin O.V., Pechen A.N.* Minimal Time Generation of Density Matrices for a Two-Level Quantum System Driven by Coherent and Incoherent Controls // *Intern. J. Theor. Phys.* 2019 (first online); <https://doi.org/10.1007/s10773-019-04149-w>.
16. *Morzhin O.V., Pechen A.N.* Maximization of the Overlap between Density Matrices for a Two-Level Open Quantum System Driven by Coherent and Incoherent Controls // *Lobachevskii J. Math.* 2019. V. 40, No. 10. P. 1532–1548.
17. *Mendonça P. E. M. F., Napolitano R. d. J., Marchioli M. A., Foster C. J., Liang Y.-C.* Alternative Fidelity Measure between Quantum States // *Phys. Rev. A.* 2008. V. 78. P. 052330.
18. *Levy Amikam, Kiely A., Muga J. G., Kosloff R., Torrontegui E.* Noise Resistant Quantum Control Using Dynamical Invariants // *New J. Phys.* 2018. V. 20. P. 025006.
19. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
20. *Gabasov R., Kirillova F. M.* High Order Necessary Conditions for Optimality // *SIAM J. Control.* 1972. V. 10, No. 1. P. 127–168.
21. *Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М.* Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973.
22. Differential Evolution Optimization. https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.differential_evolution.html
23. Dual Annealing Optimization. https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.dual_annealing.html
24. Solving Ordinary Differential Equations. <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html>