

СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ФЕРМИОННЫХ ТОКОВ

В. А. Бедняков *

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Представлен полный набор скалярных произведений для векторных, аксиально-векторных, скалярных и псевдоскалярных токов двух массивных фермионов (лептона и нуклона). Скалярные произведения получены для трех физически различных случаев ориентации спина лептона и спина нуклона. Эти выражения как минимум необходимы для самосогласованного вычисления сечений когерентного (упругого) и некогерентного (неупругого) взаимодействия массивных нейтральных слабовазаимодействующих частиц с ядерными мишенями детекторов, нацеленных на прямое детектирование галактических частиц темной материи на Земле.

This review contains a complete set of scalar products for vector, axial-vector, scalar and pseudoscalar currents of two massive fermions (lepton and nucleon). The scalar products are obtained for three physically various cases of orientation of the lepton spin and nucleon spin. These expressions are, at least, necessary for the self-consistent calculation of the cross sections of coherent (elastic) and incoherent (inelastic) interactions of massive neutral weakly interacting particles with nuclear targets of detectors aimed at direct detection of galactic dark matter particles on Earth.

PACS: 13.15.+g; 14.60.St; 12.15.-y

1. ВВЕДЕНИЕ. ЗАЧЕМ НУЖНЫ СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ТОКОВ?

В работах [1–3] сформулирован и подробно изложен новый теоретический подход для описания нейтрино-ядерного $\nu A \rightarrow \nu A^{(*)}$ и антинейтрино-ядерного $\bar{\nu} A \rightarrow \bar{\nu} A^{(*)}$ взаимодействий, когда ядро-мишень A может оставаться в своем первоначальном состоянии или переходить в возбужденное состояние $A^{(*)}$ с сохранением своей целостности. В частности, показано, что упругое взаимодействие, сохраняющее изначальное квантовое состояние ядра, приводит к квадратичному усилению наблюдаемого сечения в терминах числа

*E-mail: bedny@jinr.ru

нуклонов. В то же время наблюдаемое сечение (всех возможных) неупругих процессов, когда квантовое состояние ядра изменяется, обладает линейной зависимостью от числа нуклонов.

Помимо этого впервые было показано, что поведение упругого (когерентного) и неупругого (некогерентного) сечений, соответственно, определяется множителями $|F_{p/n}(\mathbf{q})|^2$ и $(1 - |F_{p/n}(\mathbf{q})|^2)$, где $F_{p/n}(\mathbf{q})$ — нормированный на единицу и усредненный по начальному состоянию ядра формфактор протона/нейтрона. Эти формфакторы регулируют плавный переход от режима упругого (когерентного) рассеяния к режиму неупругого (некогерентного) (анти)нейтрино-ядерного рассеяния. В общем случае оба режима дают вклад в наблюдаемые величины. Очевидно, что в промежуточной области значений переданного ядру 3-импульса \mathbf{q} когерентный и некогерентный вклады в полное сечение должны рассматриваться одновременно.

Важная роль в этом подходе принадлежала амплитуде процесса $\chi A \rightarrow \chi A^{(*)}$, которая приведена для нейтрино и антинейтрино схематически в виде

$$i\mathcal{M}_{mn}(\chi A \rightarrow \chi A^{(*)}) \propto i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^A \sum_{r'r} f_{mn}^k \lambda^{mn}(r', r) (l_{\mp\mp} h_{r'r}^k). \quad (1.1)$$

Поскольку необходимым условием когерентности (см., например, [4–10]) в данном случае является неизменность внутреннего состояния ядра после взаимодействия с налетающим лептоном, то нужно иметь возможность контролировать и неизменность спинового состояния активного нуклона (и, следовательно, всего ядра) после взаимодействия. Поэтому входящие в амплитуду (1.1) скалярные произведения лептонного и (k -го) нуклонного нейтральных токов

$$(l_{\mp\mp} h_{r'r}^k) = \bar{u}(k', \mp) O'_\mu u(k, \mp) \bar{u}(p', r') O^\mu u(p, r)$$

должны вычисляться при условии, что фиксированы проекции спина конечного r' и начального r нуклона на некоторое заранее выбранное направление (квантования). При когерентном рассеянии эти проекции должны совпадать. Поэтому все скалярные произведения вычислялись «напрямую», путем перемножения двух 4-векторов слабых токов нейтрино и нуклона с учетом конкретных значений проекций спина нуклона. В формуле (1.1) индексы \mp отвечают спиральностям нейтрино и антинейтрино, O^μ и O'_μ — комбинации матриц Дирака, A — число нуклонов в ядре мишени, индексами m и n обозначены начальное и конечное состояния (возбуждения) ядра, k — номер активного нуклона и $f_{mn}^k \lambda^{mn}(r', r)$ — множители формфакторного типа, определяющие пространственную и спиновую структуры ядерных состояний [1, 2].

Примененный в работах [1–3] подход к рассеянию нейтрино и антинейтрино на ядрах может быть обобщен на случай, когда вместо безмассового

(анти)нейтрино рассматривается массивная нейтральная частица и когда достаточно слабое взаимодействие этой частицы с нуклонами ядра описывается феноменологическим лагранжианом, учитывающим возможные лоренц-структуры (скаляр, псевдоскаляр, вектор и аксиальный вектор). Яркий пример такого случая — это выражения для сечений процесса прямого детектирования массивных слабовзаимодействующих нейтральных частиц темной материи за счет их рассеяния на ядрах, расположенной глубоко под землей мишени соответствующего детектора. Используемые для анализа данных этих экспериментов формулы (см., например, [11–13]), как правило, не учитывают возможность некогерентного (неупругого) взаимодействия. Далее, в случае прямого детектирования частиц темной материи вид амплитуды (1.1) усложняется, поскольку частица темной материи обладает заметной массой и спиральность ее, в отличие от нейтрино и антинейтрино, может легко меняться в процессе взаимодействия с нуклонами (ядром). Поэтому число необходимых скалярных произведений для каждой из возможных лоренц-структур возрастает в 4 раза.

Так, амплитуда рассеяния массивного (бесструктурного) лептона на мишени (также не обладающей внутренней структурой), скажем электроне или протоне (в 4-фермионном приближении), с учетом всех возможных направлений спина взаимодействующих фермионов пропорциональна скалярному произведению, зависящему от 4-спиновых индексов:

$$i\mathcal{M}^{s's'r'r} \propto i \frac{G_F}{\sqrt{2}} (l_{s's} h_{r'r}).$$

Квадрат этой амплитуды (или этого матричного элемента) определяет вероятность перехода из конкретного начального спинового состояния частиц, т. е. когда (из каких-то физических соображений заранее) фиксированы направления спина обеих частиц, в некоторое конечное состояние с вполне определенными (или ожидаемыми) значениями проекций спина этих частиц после взаимодействия.

Например, матричный элемент $i\mathcal{M}^{-+++}$, или скалярное произведение $(l_{-+} h_{++})$, описывает процесс, когда лептон «входит» во взаимодействие с проекцией спина $s = +1/2$, а «выходит» из взаимодействия с проекцией спина $s' = -1/2$, при этом частица-мишень (электрон/протон) «встречает» лептон с проекцией своего спина $r = +1/2$ и «отправляет дальше» с той же проекцией своего спина $r' = +1/2$. Квадрат матричного элемента $|\mathcal{M}^{-+++}|^2$ позволяет вычислить угловую и энергетическую зависимость вероятности такого исхода взаимодействия. Если считать, что спин частицы-мишени квантован вдоль некоторого направления, скажем по направлению импульса налетающего лептона, то $|\mathcal{M}^{-+++}|^2$ даст вероятность исхода взаимодействия, когда спин мишени сохраняет свое исходное направление, а спиральность

лептона меняется на противоположную, если индексы s', s определены как проекции спина лептона на его направление движения.

Оказывается, удобно проводить вычисления скалярных произведений в различных базисах двухкомпонентных спиноров χ_r . Например, суммирование по спиновым индексам r, r' в некогерентном слагаемом дифференциального сечения легче проводить на основе спирального базиса, где r, r' — собственные значения оператора спиральности. Когерентное слагаемое сечения требует рассмотрения нуклонного тока, сохраняющего проекцию спина нуклона на заданное направление. Для решения этой задачи наиболее удобен базис биспиноров χ_r , которые суть собственные состояния оператора $\sigma_3 = (\mathbf{n}_k \cdot \boldsymbol{\sigma})$. В последнем случае (в силу принадлежности нуклона ядру) невозможно использовать общепринятую технику взятия шпуров от гамма-матриц с учетом проекционных операторов. Выбор базиса для вычисления скалярных произведений обусловлен физическим смыслом спиновых индексов ($s', s; r', r$), участвующих в рассеянии фермионов.

В этой работе содержатся наборы всех скалярных произведений для массивных лептонных и нуклонных скалярных, псевдоскалярных, векторных и аксиально-векторных токов, которые получены для трех различных сочетаний базисных биспиноров, что отвечает трем физически различным случаям ориентации спинов взаимодействующих друг с другом лептона и нуклона. Эти выражения востребованы при расчете когерентных сечений взаимодействия массивных нейтральных слабодействующих частиц темной материи с ядерными мишенями. Решение этой задачи дано в работе [14], для которой данный обзор имеет статус вспомогательного.

2. ТОКИ МАССИВНЫХ ФЕРМИОНОВ

2.1. Матрицы токов двух фермионов в их системе центра масс. Итак, задача состоит в том, чтобы вычислить скалярные произведения, отвечающие взаимодействию лептонного и нуклонного токов

$$(J_{s's}^i h_{r'r'}^k) \equiv \sum_{\mu, \nu} J_{s's}^{i, \mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) g_{\mu\nu} J_{r'r}^{k, \nu}(\mathbf{p}', \mathbf{p}), \quad (2.1)$$

при любых заранее фиксированных значениях индексов s, r (s', r'), обозначающих начальное (конечное) спиновые состояния лептона и нуклона соответственно. В формуле (2.1) 3-импульсы \mathbf{k} и \mathbf{k}' (\mathbf{p} и \mathbf{p}') относятся к начальному и конечному состоянию лептона (нуклона) и фактически маркируют собой лептонные и нуклонные токи. Индексами i и k обозначены векторные ($J^{i, \mu} \equiv V^\mu$), аксиально-векторные ($J^{a, \mu} \equiv A^\mu$), скалярные ($J^s \equiv S$) и

псевдоскалярные ($J^P \equiv P$) лоренц-структуры лептонного и адронного токов, имеющие следующий вид*:

$$\begin{aligned} V_{s's}^\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv \bar{u}(\mathbf{k}', s')\gamma^\mu u(\mathbf{k}, s), & V_{r'r}^\mu(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \bar{u}(\mathbf{p}', r')\gamma^\mu u(\mathbf{p}, r), \\ A_{s's}^\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv \bar{u}(\mathbf{k}', s')\gamma^\mu\gamma^5 u(\mathbf{k}, s), & A_{r'r}^\mu(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \bar{u}(\mathbf{p}', r')\gamma^\mu\gamma^5 u(\mathbf{p}, r), \\ S_{s's}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv \bar{u}(\mathbf{k}', s')u(\mathbf{k}, s), & S_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \bar{u}(\mathbf{p}', r')u(\mathbf{p}, r), \\ P_{s's}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv \bar{u}(\mathbf{k}', s')\gamma^5 u(\mathbf{k}, s), & P_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \bar{u}(\mathbf{p}', r')\gamma^5 u(\mathbf{p}, r). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Например, скалярное произведение аксиальных токов задается формулой

$$(l_{s's}^a h_{r'r}^a) = \sum_{\mu,\nu} A_{s's}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{r'r}^\nu(\mathbf{p}').$$

Таким образом, необходимо найти выражения для всех структур из (2.2) при всех лоренц-индексах $\mu = 0, 1, 2, 3$ и всех допустимых значениях спиновых индексов $s', s = \pm 1$ и $r', r = \pm 1$. Затем согласно конкретному характеру рассматриваемого взаимодействия лептона и нуклона с их помощью следует вычислить соответствующий набор скалярных произведений токов по формуле (2.1). При этом адронный и лептонный токи, произведение которых входит в лагранжиан 4-фермионного (или ток×ток) взаимодействия,

$$h^\mu(p', p, r', r) = \bar{u}(p', r')O_h^\mu u(p, r) \quad \text{и} \quad l^\mu(k', k, s', s) = \bar{u}_\chi(k', s')O_\chi^\mu u_\chi(k, s)$$

задаются операторами O_h^μ и O_χ^μ . Последние для случаев (2.2) «пробегают» значения

$$h_V\gamma^\mu, \quad h_A\gamma^\mu\gamma_5, \quad h_P\gamma_5, \quad h_S \quad \text{и} \quad \chi_V\gamma^\mu, \quad \chi_A\gamma^\mu\gamma_5, \quad \chi_P\gamma_5, \quad \chi_S.$$

Например, скалярные произведения лептонного и нуклонного токов, отвечающие взаимодействию массивного нейтрального лептона с нуклоном по каналу слабого тока, включающего в себя векторную и аксиально-векторную компоненты, могут быть заданы формулой

$$(l_{s's}^w h_{r'r}^{w,f}) = \alpha(l_{s's}^v h_{r'r}^v) + \beta(l_{s's}^v h_{r'r}^a) + \gamma(l_{s's}^a h_{r'r}^v) + \delta(l_{s's}^a h_{r'r}^a), \quad (2.3)$$

$$\text{где} \quad \alpha = \chi_V h_V^f, \quad \beta = \chi_V h_A^f, \quad \gamma = \chi_A h_V^f, \quad \delta = \chi_A h_A^f.$$

Индекс f обозначает нейтрон или протон. Далее удобно использовать обозначение χ -частицы для массивного нейтрального лептона (спин 1/2).

*Для простоты изложения *токами* будем называть *все* выражения в (2.2).

2.1.1. Система центра масс двух сталкивающихся частиц. Скалярные произведения лептонного и нуклонного токов вычисляются ниже в системе центра масс (с. ц. м.) лептона и нуклона, где

$$\mathbf{k} + \mathbf{p} = \mathbf{k}' + \mathbf{p}' = 0 \tag{2.4}$$

и энергии входящих и выходящих из процесса упругого рассеяния $\chi(k) + f(p) \rightarrow \chi(k') + f(p')$ фермионов равны. Для χ -частицы и нуклона (протона) эти энергии соответственно равны

$$E_\chi = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m_\chi^2} = \frac{s + m_\chi^2 - m^2}{2\sqrt{s}}, \quad E_p = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} = \frac{s + m^2 - m_\chi^2}{2\sqrt{s}}, \tag{2.5}$$

где $s = (p + k)^2$, p и m — 4-импульс и масса нуклона, k и m_χ — 4-импульс и масса χ -частицы.

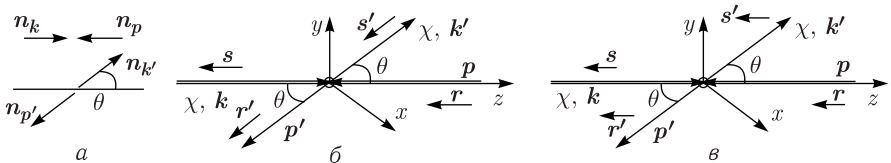
В дальнейшем все величины в п. 2.1, зависящие от кинематических переменных, взяты в с. ц. м. Кинематика упругого рассеяния χ -частицы на нуклоне в их с. ц. м. может быть построена на базе единичного 3-вектора, направленного по оси сталкивающихся частиц, которая может быть (без потери общности) выбрана вдоль координатной z -оси (рисунок). Тогда направления движения всех участвующих в рассеянии частиц будут заданы единичными векторами:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_k &= (0, 0, 1), & \mathbf{n}_p &= -\mathbf{n}_k, \\ \mathbf{n}_{k'} &= (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta), & \mathbf{n}_{p'} &= -\mathbf{n}_{k'}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь \mathbf{n}_k и $\mathbf{n}_{k'}$ соответствуют начальной и конечной χ -частице, а \mathbf{n}_p и $\mathbf{n}_{p'}$ — начальному и конечному нуклону. В явном виде они таковы:

$$\mathbf{n}_p = (0, 0, -1), \quad \mathbf{n}_{p'} = (-\cos \phi \sin \theta, -\sin \phi \sin \theta, -\cos \theta).$$

Итак, в с. ц. м. упругосталкивающихся χ -частицы и нуклона при фиксированном значении их полной энергии s единственной свободной переменной



Единичные векторы в с. ц. м. χ -частицы и нуклона (а). Для безмассовых нейтрино (б) начальные и конечные проекции спинов (\mathbf{s} и \mathbf{s}') всегда антипараллельны импульсам (\mathbf{k} и \mathbf{k}'). Для массивных фермионов (в) 3-векторы спинов (\mathbf{s} и \mathbf{s}' , \mathbf{r} и \mathbf{r}') могут быть произвольно направлены по отношению к их 3-импульсам (\mathbf{k} и \mathbf{k}' , \mathbf{p} и \mathbf{p}'), например, против z -оси

является угол рассеяния θ . Зависимость от угла ϕ , как будет видно далее, оказывается «чисто символической» в силу симметрии задачи рассеяния.

2.1.2. *Дираковские 4-спиноры и матрицы токов.* Будем использовать базис γ -матриц Дирака $\gamma^\mu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$, $\gamma_\mu = (\gamma_0, -\boldsymbol{\gamma}) = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$, где

$$\gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix},$$

и стандартные матрицы Паули:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \sigma_1 = \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2 &= \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Тогда 4-спинор с 3-импульсом \mathbf{p} , энергией $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ и спиновым индексом $r = \pm 1$, являющийся решением уравнения Дирака для нуклона (фермиона) с массой m , имеет вид

$$u(\mathbf{p}, r) = \begin{pmatrix} \lambda_+ \\ \lambda_- \alpha_{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \chi_r(\mathbf{p}), \quad u^\dagger(\mathbf{p}', r') = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') (\lambda_+, \lambda_- \alpha_{\mathbf{p}'}^\dagger),$$

где $\lambda_\pm = \sqrt{E_p \pm m}$. (2.8)

Для массивного антифермиона 4-спинор с 3-импульсом \mathbf{p} и спиновым индексом $r = \pm 1$ имеет вид

$$v(\mathbf{p}, r) = \begin{pmatrix} \lambda_- \alpha_{\mathbf{p}} \\ \lambda_+ \end{pmatrix} \chi_r(\mathbf{p}), \quad v^\dagger(\mathbf{k}', s') = \chi_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') (\lambda_- \alpha_{\mathbf{k}'}^\dagger, \lambda_+).$$

Для χ -частицы с массой m_χ , 3-импульсом \mathbf{k} , энергией E_χ и спиновым индексом $s = \pm 1$

$$u(\mathbf{k}, s) = \begin{pmatrix} \xi_+ \\ \xi_- \alpha_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \chi_s(\mathbf{k}), \quad u^\dagger(\mathbf{k}', s') = \chi_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') (\xi_+, \xi_- \alpha_{\mathbf{k}'}^\dagger),$$

где $\xi_\pm = \sqrt{E_\chi \pm m_\chi}$. (2.9)

Согласно выбору единичных векторов (2.6) операторы спиральности начальных и конечных фермионов (χ -частицы и нуклона), входящие в определения дираковских 4-спиноров $u(\mathbf{k}, s)$ и $u(\mathbf{p}, r)$, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_k &\equiv \mathbf{n}_k \cdot \boldsymbol{\sigma} = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \alpha_{k'} &\equiv \mathbf{n}_{k'} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\alpha_p \equiv \mathbf{n}_p \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\sigma_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\alpha_k, \quad (2.10)$$

$$\alpha_{p'} \equiv \mathbf{n}_{p'} \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\alpha_{k'} = \begin{pmatrix} -\cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрицы Паули (2.7) эрмитовы $\boldsymbol{\sigma}^\dagger = \boldsymbol{\sigma}$, то $\alpha_{k'}^\dagger = \alpha_{k'}$ и $\alpha_{p'}^\dagger = \alpha_{p'}$.

Из формул (2.2) и выражений для 4-спиноров (2.8) и (2.9) следует, что необходимые комбинации биспиноров и матриц Паули таковы:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}', r') &= u^\dagger(\mathbf{p}', r')\gamma_0 = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')(\lambda_+, \lambda_- \alpha_{p'}^\dagger) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')(\lambda_+, -\lambda_- \alpha_{p'}^\dagger), \\ \bar{u}(\mathbf{p}', r')\gamma_0 &= u^\dagger(\mathbf{p}', r')\gamma_0^2 = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')(\lambda_+, \lambda_- \alpha_{p'}^\dagger) \equiv u^\dagger(\mathbf{p}', r'), \\ \bar{u}(\mathbf{p}', r')\boldsymbol{\gamma} &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')(\lambda_+, -\lambda_- \alpha_{p'}^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')(\lambda_- \alpha_{p'}^\dagger \boldsymbol{\sigma}, \lambda_+ \boldsymbol{\sigma}), \\ \bar{u}(\mathbf{p}', r')\gamma_5 &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')(\lambda_+, -\lambda_- \alpha_{p'}^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')(-\lambda_- \alpha_{p'}^\dagger, \lambda_+), \\ \bar{u}(\mathbf{p}', r')\gamma_0\gamma_5 &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')(\lambda_+, \lambda_- \alpha_{p'}^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')(\lambda_- \alpha_{p'}^\dagger, \lambda_+), \\ \bar{u}(\mathbf{p}', r')\boldsymbol{\gamma}\gamma_5 &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')(\lambda_- \alpha_{p'}^\dagger \boldsymbol{\sigma}, \lambda_+ \boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')(\lambda_+ \boldsymbol{\sigma}, \lambda_- \alpha_{p'}^\dagger \boldsymbol{\sigma}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Путем (формальной) замены \mathbf{p}', r' на \mathbf{k}', s' и λ_\pm на ξ_\pm для χ -лептона аналогично получаем

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{k}', s') &= \chi_{s'}^\dagger(\mathbf{k}')(\xi_+, -\xi_- \alpha_{k'}^\dagger), \quad \bar{u}(\mathbf{k}', s')\gamma_0 = \chi_{s'}^\dagger(\mathbf{k}')(\xi_+, \xi_- \alpha_{k'}^\dagger), \\ \bar{u}(\mathbf{k}', s')\boldsymbol{\gamma} &= \chi_{s'}^\dagger(\mathbf{k}')(\xi_- \alpha_{k'}^\dagger \boldsymbol{\sigma}, \xi_+ \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{u}(\mathbf{k}', s')\gamma_5 = \chi_{s'}^\dagger(\mathbf{k}')(-\xi_- \alpha_{k'}^\dagger, \xi_+), \\ \bar{u}(\mathbf{k}', s')\gamma_0\gamma_5 &= \chi_{s'}^\dagger(\mathbf{k}')(\xi_- \alpha_{k'}^\dagger, \xi_+), \quad \bar{u}(\mathbf{k}', s')\boldsymbol{\gamma}\gamma_5 = \chi_{s'}^\dagger(\mathbf{k}')(\xi_+ \boldsymbol{\sigma}, \xi_- \alpha_{k'}^\dagger \boldsymbol{\sigma}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

С помощью формул (2.11) компоненты нуклонных токов из (2.2) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} V_{r'r}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') [\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \alpha_{p'} \alpha_p] \chi_r(\mathbf{p}) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \hat{V}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \chi_r(\mathbf{p}), \\ V_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \lambda_+ \lambda_- [\boldsymbol{\sigma} \alpha_p + \alpha_{p'} \boldsymbol{\sigma}] \chi_r(\mathbf{p}) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \hat{V}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \chi_r(\mathbf{p}), \\ A_{r'r}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \lambda_+ \lambda_- [\alpha_{p'} + \alpha_p] \chi_r(\mathbf{p}) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \hat{A}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \chi_r(\mathbf{p}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') [\lambda_+^2 \boldsymbol{\sigma} + \lambda_-^2 \alpha_{p'} \boldsymbol{\sigma} \alpha_p] \chi_r(\mathbf{p}) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \chi_r(\mathbf{p}), \\
 \mathbf{S}_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') [\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \alpha_{p'}^\dagger \alpha_p] \chi_r(\mathbf{p}) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \chi_r(\mathbf{p}), \\
 \mathbf{P}_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \lambda_+ \lambda_- [-\alpha_{p'}^\dagger + \alpha_p] \chi_r(\mathbf{p}) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \chi_r(\mathbf{p}).
 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь введены нуклонные «токовые» матрицы

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{V}}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \lambda_+^2 + \lambda_-^2 \alpha_{p'}^\dagger \alpha_p, & \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \lambda_- \lambda_+ [\alpha_{p'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \alpha_p], \\
 \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \lambda_+^2 \boldsymbol{\sigma} + \lambda_-^2 \alpha_{p'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \alpha_p, & \hat{\mathbf{A}}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \lambda_+ \lambda_- [\alpha_{p'}^\dagger + \alpha_p], \\
 \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \lambda_+^2 - \lambda_-^2 \alpha_{p'}^\dagger \alpha_p, & \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \lambda_+ \lambda_- [-\alpha_{p'}^\dagger + \alpha_p],
 \end{aligned} \quad (2.14)$$

которые получены прямой подстановкой* выражений (2.11) в нуклонные токи (2.2).

Аналогично для χ -лептона на базе (2.12) имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_{s's}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{u}(\mathbf{k}', s') \gamma_0 u(\mathbf{k}, s) = \chi_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') \hat{\mathbf{V}}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \chi_s(\mathbf{k}), \\
 \mathbf{V}_{s's}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{u}(\mathbf{k}', s') \boldsymbol{\gamma} u(\mathbf{k}, s) = \chi_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \chi_s(\mathbf{k}), \\
 \mathbf{A}_{s's}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{u}(\mathbf{k}', s') \gamma_0 \gamma_5 u(\mathbf{k}, s) = \chi_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') \hat{\mathbf{A}}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \chi_s(\mathbf{k}), \\
 \mathbf{A}_{s's}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{u}(\mathbf{k}', s') \boldsymbol{\gamma} \gamma_5 u(\mathbf{k}, s) = \chi_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \chi_s(\mathbf{k}), \\
 \mathbf{S}_{s's}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{u}(\mathbf{k}', s') u(\mathbf{k}, s) = \chi_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \chi_s(\mathbf{k}), \\
 \mathbf{P}_{s's}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{u}(\mathbf{k}', s') \gamma^5 u(\mathbf{k}, s) = \chi_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \chi_s(\mathbf{k}).
 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Они могут быть получены напрямую с использованием формул (2.9), (2.12), (2.2) или путем замены $[\mathbf{p}', r'] \rightarrow [\mathbf{k}', s']$, $\lambda_\pm \rightarrow \xi_\pm$, а также $\alpha_{p,p'} \rightarrow \alpha_{k,k'}$ в соотношениях (2.13). В результате лептонные «токовые» матрицы имеют вид

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{V}}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv \xi_+^2 + \xi_-^2 \alpha_{k'}^\dagger \alpha_k, & \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv \xi_- \xi_+ [\alpha_{k'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \alpha_k], \\
 \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv \xi_+^2 \boldsymbol{\sigma} + \xi_-^2 \alpha_{k'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \alpha_k, & \hat{\mathbf{A}}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv \xi_+ \xi_- [\alpha_{k'}^\dagger + \alpha_k], \\
 \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv [\xi_+^2 - \xi_-^2 \alpha_{k'}^\dagger \alpha_k], & \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv \xi_+ \xi_- [-\alpha_{k'}^\dagger + \alpha_k].
 \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.1.3. Явный вид десяти нуклонных токовых матриц. Прямая подстановка в формулы (2.14) матриц α_p и $\alpha_{p'}$ из формул (2.10), которые фактически зависят только от угла θ , определяющего направление конечного импульса \mathbf{k}' , позволяет найти явный вид всех 10 токовых матриц для нуклона** в терминах

* Например, $\mathbf{V}_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') (\lambda_- \alpha_{p'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} + \lambda_+ \boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} \lambda_+ \\ \lambda_- \alpha_p \end{pmatrix} \chi_r(\mathbf{p}) = \lambda_- \lambda_+ \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \times (\alpha_{p'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \alpha_p) \chi_r(\mathbf{p})$.

** Подробнее представлены в прил. 5.

4-спинорных параметров λ_{\pm} :

$$\begin{aligned}\hat{V}^0(\mathbf{p}') &= \begin{pmatrix} \lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta & -\lambda_-^2 e^{-i\phi} \sin \theta \\ \lambda_-^2 e^{i\phi} \sin \theta & \lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta \end{pmatrix}, \\ \hat{V}^1(\mathbf{p}') &= \lambda_+ \lambda_- \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \\ -1 + \cos \theta & -e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, \\ \hat{V}^2(\mathbf{p}') &= i \lambda_+ \lambda_- \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & -1 + \cos \theta \\ -1 + \cos \theta & e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, \\ \hat{V}^3(\mathbf{p}') &= \lambda_+ \lambda_- \begin{pmatrix} -(1 + \cos \theta) & e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & -(1 + \cos \theta) \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}\hat{A}^0(\mathbf{p}') &= \lambda_+ \lambda_- \begin{pmatrix} -(1 + \cos \theta) & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & (1 + \cos \theta) \end{pmatrix}, \\ \hat{A}^1(\mathbf{p}') &= \begin{pmatrix} \lambda_-^2 e^{-i\phi} \sin \theta & \lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta \\ \lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta & -\lambda_-^2 e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, \\ \hat{A}^2(\mathbf{p}') &= i \begin{pmatrix} \lambda_-^2 e^{-i\phi} \sin \theta & -\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta \\ \lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta & \lambda_-^2 e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, \\ \hat{A}^3(\mathbf{p}') &= \begin{pmatrix} \lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta & \lambda_-^2 e^{-i\phi} \sin \theta \\ \lambda_-^2 e^{i\phi} \sin \theta & -\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}\hat{S}(\mathbf{p}') &= \begin{pmatrix} \lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta & +\lambda_-^2 e^{-i\phi} \sin \theta \\ -\lambda_-^2 e^{i\phi} \sin \theta & \lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta \end{pmatrix}, \\ \hat{P}(\mathbf{p}') &= \lambda_+ \lambda_- \begin{pmatrix} -1 + \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.19}$$

2.1.4. Явный вид десяти токовых матриц для массивного нейтрального лептона. Поскольку в с. ц. м. двух частиц (см. рисунок) направления прилета (вылета) начального (конечного) лептона и нуклона строго противоположны, то из условия (2.6) видно, что $\mathbf{n}_k = -\mathbf{n}_p$, $\mathbf{n}_{k'} = -\mathbf{n}_{p'}$. Отсюда вытекает (2.10), т. е. $\alpha_k = -\alpha_p$ и $\alpha_{k'} = -\alpha_{p'}$. Поэтому в формулах (2.16) можно заменить $\alpha_k \rightarrow -\alpha_p$, $\alpha_{k'} \rightarrow -\alpha_{p'}$ и записать их в виде

$$\begin{aligned}\hat{V}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \xi_+^2 + \xi_-^2 \alpha_{p'}^\dagger \alpha_p, & \hat{V}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= -\xi_- \xi_+ [\alpha_{p'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \alpha_p], \\ \hat{A}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \xi_+^2 \boldsymbol{\sigma} + \xi_-^2 \alpha_{p'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \alpha_p, & \hat{A}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= -\xi_+ \xi_- [\alpha_{p'}^\dagger + \alpha_p], \\ \hat{S}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \xi_+^2 - \xi_-^2 \alpha_{p'}^\dagger \alpha_p, & \hat{P}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= -\xi_+ \xi_- [-\alpha_{p'}^\dagger + \alpha_p].\end{aligned}\tag{2.20}$$

Тогда из «нуклонных» выражений (2.17)–(2.19) с учетом изменения знаков по (2.20) путем замены

$$\lambda_{\pm}^2 \rightarrow \xi_{\pm}^2 \quad \text{и} \quad \lambda_+ \lambda_- \rightarrow \xi_+ \xi_-$$

можно получить выражения для всех лептонных токовых матриц в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \hat{V}^0(\mathbf{k}') &= \begin{pmatrix} \xi_+^2 + \xi_-^2 \cos \theta & -\xi_-^2 e^{-i\phi} \sin \theta \\ \xi_-^2 e^{i\phi} \sin \theta & \xi_+^2 + \xi_-^2 \cos \theta \end{pmatrix}, \\
 \hat{V}^1(\mathbf{k}') &= -\xi_- \xi_+ \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \\ -1 + \cos \theta & -e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, \\
 \hat{V}^2(\mathbf{k}') &= -i \xi_- \xi_+ \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & -1 + \cos \theta \\ -1 + \cos \theta & e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, \\
 \hat{V}^3(\mathbf{k}') &= -\xi_- \xi_+ \begin{pmatrix} -(1 + \cos \theta) & e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & -(1 + \cos \theta) \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{A}^0(\mathbf{k}') &= -\xi_- \xi_+ \begin{pmatrix} -(1 + \cos \theta) & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & (1 + \cos \theta) \end{pmatrix}, \\
 \hat{A}^1(\mathbf{k}') &= \begin{pmatrix} \xi_-^2 e^{-i\phi} \sin \theta & \xi_+^2 - \xi_-^2 \cos \theta \\ \xi_+^2 - \xi_-^2 \cos \theta & -\xi_-^2 e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, \\
 \hat{A}^2(\mathbf{k}') &= i \begin{pmatrix} \xi_-^2 e^{-i\phi} \sin \theta & -\xi_+^2 + \xi_-^2 \cos \theta \\ \xi_+^2 - \xi_-^2 \cos \theta & \xi_-^2 e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, \\
 \hat{A}^3(\mathbf{k}') &= \begin{pmatrix} \xi_+^2 + \xi_-^2 \cos \theta & \xi_-^2 e^{-i\phi} \sin \theta \\ \xi_-^2 e^{i\phi} \sin \theta & -\xi_+^2 - \xi_-^2 \cos \theta \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{S}(\mathbf{k}') &= \begin{pmatrix} \xi_+^2 - \xi_-^2 \cos \theta & +\xi_-^2 e^{-i\phi} \sin \theta \\ -\xi_-^2 e^{i\phi} \sin \theta & \xi_+^2 - \xi_-^2 \cos \theta \end{pmatrix}, \\
 \hat{P}(\mathbf{k}') &= -\xi_- \xi_+ \begin{pmatrix} -1 + \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Конкретные выражения для нуклонных и лептонных токов согласно формулам (2.13) и (2.15) получаются из этой матрицы путем «обкладки» их биспинорами — собственными состояниями операторов спиральности (или σ_z -оператора) начального и конечного лептона и нуклона.

2.2. Два базиса биспиноров. Вид дираковских 4-спиноров $u(\mathbf{p}, r)$ и $u(\mathbf{k}, s)$ определяется, соответственно, формулами (2.8) и (2.9). В этих формулах, представляющих собой решения уравнения Дирака, которое фактически является условием сохранения энергии-импульса и определяет энергии фермионов $E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ и $E_\chi = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_\chi^2}$, остался произвол в выборе явного вида биспиноров $\chi_r(\mathbf{p})$ и $\chi_s(\mathbf{k})$. Последний не нужен для удовлетворения собственно уравнению Дирака. Однако явный вид этих биспиноров нужен для полного определения состояний фермионов, участвующих в процессе рассеяния. Он необходим для вычисления нуклонного и лептонного токов согласно выражениям (2.13) и (2.15).

Поскольку спин фермиона равен $s = 1/2$, то имеется всего два различных (квантовых) состояния $(2s + 1)$ для фермиона. Фактически это означает, что у фермиона есть только две возможности: либо его спин совпадает по направлению с некоторым, вообще говоря, произвольно выбранным вектором \mathbf{r} (параллелен ему), либо его спин направлен противоположно этому вектору (антипараллелен ему). Первый случай маркируется индексом $+1$ (проекция спина фермиона на вектор \mathbf{r} равна $+1/2$), второй — индексом -1 (проекция спина фермиона на вектор \mathbf{r} равна $-1/2$). Произвол в выборе вектора \mathbf{r} снимается, как уже упоминалось во введении, теми условиями, которые задаются и контролируются в конкретном эксперименте по рассеянию фермионов.

Например, при рассеянии нейтрино (безмассового фермиона) его спиральность — проекция спина нейтрино на направление его импульса — строго сохраняется. По этой причине вектор \mathbf{r} , относительно которого измеряется проекция спина нейтрино, всегда совпадает (точнее, антисовпадает) по направлению с 3-вектором импульса самого нейтрино \mathbf{k} . Это означает, что для нейтрино биспиноры $\chi_s(\mathbf{k})$ и $\chi_{s'}(\mathbf{k}')$ — собственные состояния операторов спиральности начального $\alpha_k = \mathbf{n}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}$ и $\alpha_{k'} = \mathbf{n}_{k'} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ и конечного состояний нейтрино. В данном случае можно говорить о том, что для нейтрино биспиноры $\chi_s(\mathbf{k})$ и $\chi_{s'}(\mathbf{k}')$ формируют два (для начального и конечного состояний) полных базиса (спиральности) волновых функций. По этим базисам, в принципе, можно разложить любую волновую функцию нейтрино.

Отметим, что волновые функции, заданные в базисе спиральности (собственные состояния этого базиса), не позволяют контролировать проекцию спина массивного фермиона на выделенное (не совпадающее с импульсом самого фермиона) направление. Проекция спина такого фермиона, заданная в базисе спиральности, меняется вместе с изменением его импульса, который вовсе не обязан удерживать заранее выделенное направление.

С другой стороны, условие когерентности требует, чтобы состояние ядра не менялось после взаимодействия. При этом акт когерентного взаимодействия рассматривается в таком приближении, когда активный нуклон после взаимодействия не меняет проекции своего спина на некоторое заранее выбранное начальное направление (например, импульс падающего на ядро нейтрино), при этом все остальные нуклоны-спектаторы также сохраняют имевшиеся у них до взаимодействия проекции спина (скажем, также на выбранное направление). Иными словами, биспиноры $\chi_r(\mathbf{p})$ и $\chi_{r'}(\mathbf{p}')$, описывающие активный нуклон, должны быть собственными состояниями оператора импульса налетающей частицы, т. е. описывать состояния с проекцией спина нуклона по направлению этого \mathbf{k} -импульса и против него. Тогда условие неизменности проекции спина активного нуклона выполняется путем выбора пары собственных векторов «оператора направления по

k -импульсу», имеющих одно и то же собственное значение до и после взаимодействия.

Заключая эту вводную часть, отметим, что фактически для решения интересующих нас задач достаточно рассмотреть лишь два варианта квантования биспиноров волновых функций нуклона ($\chi_r(\mathbf{p})$ и $\chi_{r'}(\mathbf{p}')$) и лептона ($\chi_s(\mathbf{k})$ и $\chi_{s'}(\mathbf{k}')$). Назовем первый вариант базисом спиральности (и обозначим его индексом χ), а второй — базисом σ_3 -матрицы (обозначим индексом η), которая отвечает направлению прилета начального лептона по z -оси. Отметим также, что в зависимости от поставленной задачи (каков физический смысл индексов s', s, r', r) возможны «пересечения» базисов, например, в смешанном $\chi\eta$ -базисе нуклонные биспиноры $\chi_r(\mathbf{p})$ и $\chi_{r'}(\mathbf{p}')$ — это η -базис (и квантование спина нуклона идет по оси начального импульса), а лептонные биспиноры $\chi_s(\mathbf{k})$ и $\chi_{s'}(\mathbf{k}')$ представляют собой χ -базис (спиральности), когда спин лептона направлен вдоль (против) его импульса.

2.2.1. *Базис спиральности. Собственные векторы.* По определению базис спиральности (или χ -базис) составляют биспиноры, являющиеся собственными векторами (состояниями) операторов спиральности начальных и конечных фермионов (χ -частицы и нуклона).

Напомним, что операторы спиральности частиц с импульсами k/k' и p/p' , или единичными векторами $\mathbf{n}_{k/k'}$ и $\mathbf{n}_{p/p'}$, направленными вдоль этих импульсов, определяются выражениями

$$\hat{H}_{p/p'} \equiv \mathbf{n}_{p/p'} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad \text{и} \quad \hat{H}_{k/k'} \equiv \mathbf{n}_{k/k'} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.24)$$

Собственные (базисные) векторы операторов спиральности χ -частицы и нуклона находятся путем решения задачи на собственные значения этих операторов:

$$\begin{aligned} \hat{H}_p \chi_r(\mathbf{n}_p) &= r \chi_r(\mathbf{n}_p), & \hat{H}_{p'} \chi_{r'}(\mathbf{n}_{p'}) &= r' \chi_{r'}(\mathbf{n}_{p'}), \\ \hat{H}_k \chi_s(\mathbf{n}_k) &= s \chi_s(\mathbf{n}_k), & \hat{H}_{k'} \chi_{s'}(\mathbf{n}_{k'}) &= s' \chi_{s'}(\mathbf{n}_{k'}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Как известно, двухкомпонентный биспинор $\chi_r(\mathbf{n})$ является собственным вектором оператора такого типа с собственным значением $r = \pm 1$, известным как спиральность или удвоенная проекция спина фермиона на его 3-импульс.

Согласно выбору (2.6) единичных векторов в с. ц. м. вдоль направления движения начального χ -лептона, т. е. вдоль z -оси, оператор спиральности начальной χ -частицы имеет простой вид:

$$\hat{H}_k = \mathbf{n}_k \cdot \boldsymbol{\sigma} = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому задача на собственные значения оператора спиральности начального χ -лептона

$$\hat{H}_k \chi_{\mp}(\mathbf{n}_k) \equiv \sigma_3 \chi_{\mp}(\mathbf{n}_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \chi_{\mp}(\mathbf{n}_k) = \mp \chi_{\mp}(\mathbf{n}_k)$$

имеет решение в виде

$$\begin{aligned}\chi_{-}(\mathbf{k}) &\equiv \chi_{-}(\mathbf{n}_k) = \chi_{-1}(\mathbf{n}_k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \chi_{+}(\mathbf{k}) &\equiv \chi_{+}(\mathbf{n}_k) = \chi_{+1}(\mathbf{n}_k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (2.26)$$

Здесь собственные значения $s = -1$ и $+1$ соответствуют случаю, когда спин антипараллелен ($s \downarrow \mathbf{k}$) и параллелен ($s \uparrow \mathbf{k}$) начальному импульсу \mathbf{k} .

Далее, поскольку направление движения начального нуклона в с.ц.м. строго противоположно направлению движения начального лептона, т. е. импульс начального нуклона направлен вдоль $-z$ -оси, то оператор спиральности начального нуклона имеет вид

$$\hat{H}_p = \mathbf{n}_p \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{n}_k \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\sigma_3 = -\hat{H}_k.$$

В результате задача на собственные значения оператора спиральности начального нуклона

$$\hat{H}_p \chi_{\mp}(\mathbf{n}_p) \equiv [-\sigma_3] \chi_{\mp}(\mathbf{n}_p) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \chi_{\mp}(\mathbf{n}_p) = \mp \chi_{\mp}(\mathbf{n}_p) \quad (2.27)$$

для собственных значений $r = -1$ и $+1$, отвечающих случаю, когда спин нуклона антипараллелен ($r \downarrow \mathbf{p}$) и параллелен ($r \uparrow \mathbf{p}$) его импульсу, имеет решение в виде

$$\begin{aligned}\chi_{-}(\mathbf{p}) &\equiv \chi_{-}(\mathbf{n}_p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \chi_{+}(\mathbf{p}) &\equiv \chi_{+}(\mathbf{n}_p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ или } \chi_{+}(\mathbf{n}_p) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (2.28)$$

В последнем случае можно выбрать любой из эквивалентных вариантов, т. е. со знаком $+1$ или -1 .

Согласно выбору единичных векторов (2.6) оператор спиральности конечного χ -лептона, улетающего в направлении $\mathbf{n}_{k'}$, имеет вид

$$\hat{H}_{k'} = \mathbf{n}_{k'} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Тогда задача на собственные значения оператора спиральности конечного χ -лептона

$$\hat{H}_{k'} \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{k'}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{k'}) = \mp \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{k'})$$

для собственных значений $s' = -1$ и $+1$, когда спин антипараллелен ($s' \downarrow \uparrow \mathbf{k}'$) и параллелен ($s' \uparrow \uparrow \mathbf{k}'$) импульсу лептона, имеет решения в виде*

$$\chi_{-}(\mathbf{k}') \equiv \chi_{-}(\mathbf{n}_{k'}) = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \tan \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_{+}(\mathbf{k}') \equiv \chi_{+}(\mathbf{n}_{k'}) = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cot \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Поскольку направление вылета конечного нуклона строго противоположно направлению вылета конечного лептона, то матрица оператора спиральности конечного нуклона имеет противоположный общий знак:

$$H_{p'} = -H_{k'}.$$

Решение соответствующей задачи на собственные значения для конечного нуклона

$$\hat{H}_{p'} \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{p'}) \equiv \begin{pmatrix} -\cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{p'}) = \mp \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{p'}) \quad (2.30)$$

при $r' = -1$ (когда ($r' \downarrow \uparrow \mathbf{p}'$)) и $+1$ (когда ($r' \uparrow \uparrow \mathbf{p}'$)) имеет вид

$$\chi_{-}(\mathbf{p}') \equiv \chi_{-}(\mathbf{n}_{p'}) = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cot \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_{+}(\mathbf{p}') \equiv \chi_{+}(\mathbf{n}_{p'}) = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \tan \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Выражения (2.26), (2.28), (2.29), (2.31) содержат полный набор собственных состояний операторов спиральности. При этом очевидно, что собственные состояния оператора спиральности начальных фермионов (2.26) и (2.28) уже нормированы на единицу, $|\chi_{\pm}(\mathbf{p}/\mathbf{k})|^2 = 1$, в то время как собственные состояния операторов спиральности конечных фермионов в виде (2.29) и (2.31) таким свойством не обладают, т. е. $|\chi_{\pm}(\mathbf{p}'/\mathbf{k}')|^2 \neq 1$. Действительно,

$$\begin{aligned} \chi_{-}^{\dagger}(\mathbf{k}') \chi_{-}(\mathbf{k}') &= \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \tan \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \tan \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -e^{+i\phi} \tan \frac{\theta}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \tan \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \cos^{-2} \frac{\theta}{2}; \\ \chi_{+}^{\dagger}(\mathbf{k}') \chi_{+}(\mathbf{k}') &= \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cot \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cot \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \cot^2 \frac{\theta}{2} + 1 = \sin^{-2} \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

*Это проверяется прямой подстановкой, выполненной в прил. 5.

Из постановки задачи на собственное значение видно, что если $\chi_+(\mathbf{p}')$ — собственный вектор оператора спиральности для собственного значения $+1$, то $\tilde{\chi}_+(\mathbf{p}') = a\chi_+(\mathbf{p}')$ также собственный вектор для собственного значения $+1$, где a — произвольный множитель. Поэтому, учитывая, что согласно (2.29) и (2.31) справедливы выражения $\chi_-^\dagger(\mathbf{k}')\chi_-(\mathbf{k}') = \chi_+^\dagger(\mathbf{p}')\chi_+(\mathbf{p}')$ и $\chi_+^\dagger(\mathbf{k}')\chi_+(\mathbf{k}') = \chi_-^\dagger(\mathbf{p}')\chi_-(\mathbf{p}')$, а также переопределяя биспиноры, например, в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_-(\mathbf{k}') &= \cos \frac{\theta}{2} \chi_-(\mathbf{k}'), & \tilde{\chi}_+(\mathbf{k}') &= e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \chi_+(\mathbf{k}'), \\ \tilde{\chi}_-(\mathbf{p}') &= \sin \frac{\theta}{2} \chi_-(\mathbf{p}'), & \tilde{\chi}_+(\mathbf{p}') &= -e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \chi_+(\mathbf{p}').\end{aligned}$$

и опуская знак тильды, получаем их удовлетворяющими условию $|\chi_\pm(\mathbf{p}'/\mathbf{k}')|^2 = 1$.

Итак, нормированные на единицу собственные векторы (2-компонентные биспиноры) операторов спиральности начальных и конечных частиц в их с. ц. м. имеют вид

$$\begin{aligned}\chi_-(\mathbf{k}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \chi_-(\mathbf{k}') &= \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \tan \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ \chi_+(\mathbf{k}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \chi_+(\mathbf{k}') &= e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cot \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ \chi_-(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \chi_-(\mathbf{p}') &= \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cot \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ \chi_+(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \chi_+(\mathbf{p}') &= -e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \tan \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.32}$$

2.2.2. Базис σ_3 . Собственные векторы. По определению σ_3 -базис (или η -базис) составляют биспиноры, являющиеся собственными векторами (состояниями) σ_3 -оператора. Поскольку без потери общности считается, что (в с. ц. м., см. рисунок) нуклон и χ -лептон сталкиваются вдоль z -оси, заданной единичным вектором $\mathbf{n}_k = (0, 0, 1)$, то σ_3 -оператор фактически определяет (положительное) направление импульса χ -лептона, падающего на нук-

лон. При этом, как и ранее, в с. ц. м. направление движения конечной χ -частицы (противоположное движению конечного нуклона) задается вектором $\mathbf{n}_{k'}$ из (2.6).

Поскольку матричный вид σ_3 -оператора совпадает с явным видом оператора спиральности начальной χ -частицы $\alpha_k = \mathbf{n}_k \cdot \boldsymbol{\sigma} = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, то согласно (2.26) нормированные на единицу собственные векторы σ_3 -оператора, отвечающие собственным значениям -1 и $+1$, имеют вид

$$\eta_-(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \eta_+(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Индекс $+(-)$ означает, что спин начальной χ -частицы направлен вдоль (против) z -оси или, иными словами, против (вдоль) импульса начального нуклона (в с. ц. м.).

У массивных фермионов — нуклона и χ -лептона — спиральность не сохраняется*. Поэтому возможно «квантовать» спины нуклона и χ -лептона не по направлению их собственного движения (базис спиральности), как это было для безмассовых нейтрино в работе [1], а вдоль их общей оси столкновения \mathbf{n}_k или направления движения налетающей χ -частицы в с. ц. м.

Это означает, что все биспиноры — начального $\eta_r(\mathbf{p})$ и конечного $\eta_{r'}(\mathbf{p}')$ нуклона, начального $\eta_s(\mathbf{k})$ и конечного $\eta_{s'}(\mathbf{k})$ χ -лептона — являются собственными векторами оператора «направления по z -оси», т. е. $\mathbf{n}_k \cdot \boldsymbol{\sigma} = \sigma_3$ (отсюда σ_3 -базис):

$$\begin{aligned} \sigma_3 \eta_s(\mathbf{k}) &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \eta_s(\mathbf{k}) = s \eta_s(\mathbf{k}), \\ \sigma_3 \eta_{s'}(\mathbf{k}') &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \eta_{s'}(\mathbf{k}') = s' \eta_{s'}(\mathbf{k}'), \\ \sigma_3 \eta_r(\mathbf{p}) &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \eta_r(\mathbf{p}) = r \eta_r(\mathbf{p}), \\ \sigma_3 \eta_{r'}(\mathbf{p}') &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \eta_{r'}(\mathbf{p}') = r' \eta_{r'}(\mathbf{p}'). \end{aligned} \quad (2.34)$$

В результате для начального нуклона собственные векторы $\eta_{\mp}(\mathbf{p})$ отвечают собственным значениям $r = \mp 1$. Поскольку спин как начального, так и конечного нуклона «квантуется» по одной и той же оси (заданной направлением падающего лептона \mathbf{n}_k), т. е. имеет всего две возможности (либо сохраняет

*В нерелятивистском случае сохраняется полный спин системы до и после взаимодействия.

значение своей проекции на эту ось, либо меняет ее строго на противоположную), то для собственных значений проекции спина конечного нуклона $r' = \mp 1$ (на эту же ось) имеются собственные векторы $\eta_{\mp}(\mathbf{p}')$, совпадающие с $\eta_{\mp}(\mathbf{p})$:

$$\eta_{+}(\mathbf{p}) = \eta_{+}(\mathbf{p}') = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_{-}(\mathbf{p}) = \eta_{-}(\mathbf{p}') = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Поскольку спин начального и конечного χ -лептона «ведет себя» строго так же, как и спин нуклона, т. е. направлен либо вдоль направления \mathbf{n}_{k_i} , либо против него, то аналогично имеем

$$\eta_{+}(\mathbf{k}) = \eta_{+}(\mathbf{k}') = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_{-}(\mathbf{k}) = \eta_{-}(\mathbf{k}') = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Итак, нормированные на единицу собственные векторы (2-компонентные биспиноры) «оператора направления по z -оси» (т. е. $\mathbf{n}_{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \sigma_3$) для начальных и конечных частиц в их с. ц. м. имеют (одинаково простой) вид:

$$\begin{aligned} \eta_{+} &\equiv \eta_{+}(\mathbf{k}) = \eta_{+}(\mathbf{k}') = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \eta_{+}(\mathbf{p}) = \eta_{+}(\mathbf{p}') = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \eta_{-} &\equiv \eta_{-}(\mathbf{p}) = \eta_{-}(\mathbf{p}') = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \eta_{-}(\mathbf{k}) = \eta_{-}(\mathbf{k}') = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Полученные выше биспиноры необходимы для нахождения явных выражений нуклонных и лептонных токов (в различных сочетаниях биспинорных базисов) на базе токовых матриц.

2.3. Токи массивных фермионов в разных базисах. Для нахождения явного вида лептонных и нуклонных токов согласно формулам (2.13) и (2.15) необходимы биспиноры в виде формул (2.32) и (2.37) и токовые матрицы нуклона и лептона, заданные выражениями (2.17)–(2.19) и (2.21)–(2.23). С помощью соотношений*

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm}^2 &= E_p \pm m, \quad \xi_{\pm}^2 = E_{\chi} \pm m_{\chi}, \\ \lambda_{+}\lambda_{-} &= |\mathbf{p}| = \xi_{+}\xi_{-} = |\mathbf{k}| = \frac{\lambda(s, m^2, m_{\chi}^2)}{2\sqrt{s}} \end{aligned} \quad (2.38)$$

*Подробнее представлены в прил. 5.

в инвариантных переменных $m, m_\chi, |\mathbf{k}|$ и E_χ, E_p из (2.5) эти матрицы преобразуют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \hat{V}^0(\mathbf{p}') &= \begin{pmatrix} E_p + m + (E_p - m) \cos \theta & -e^{-i\phi}(E_p - m) \sin \theta \\ e^{i\phi}(E_p - m) \sin \theta & E_p + m + (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix}, \\
 \hat{V}^1(\mathbf{p}') &= |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \\ -1 + \cos \theta & -e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, \\
 \hat{V}^2(\mathbf{p}') &= i|\mathbf{k}| \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & -1 + \cos \theta \\ -1 + \cos \theta & e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, \\
 \hat{V}^3(\mathbf{p}') &= |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} -(1 + \cos \theta) & e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & -(1 + \cos \theta) \end{pmatrix}, \\
 \hat{P}(\mathbf{p}') &= |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} -1 + \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{A}^0(\mathbf{p}') &= |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} -(1 + \cos \theta) & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & (1 + \cos \theta) \end{pmatrix}, \\
 \hat{A}^1(\mathbf{p}') &= \begin{pmatrix} (E_p - m) e^{-i\phi} \sin \theta & (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta \\ (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta & -(E_p - m) e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, \\
 \hat{A}^2(\mathbf{p}') &= i \begin{pmatrix} (E_p - m) e^{-i\phi} \sin \theta & -(E_p + m) + (E_p - m) \cos \theta \\ (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta & (E_p - m) e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, \\
 \hat{A}^3(\mathbf{p}') &= \begin{pmatrix} (E_p + m) + (E_p - m) \cos \theta & (E_p - m) e^{-i\phi} \sin \theta \\ (E_p - m) e^{i\phi} \sin \theta & -(E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix}, \\
 \hat{S}(\mathbf{p}') &= \begin{pmatrix} E_p + m - (E_p - m) \cos \theta & e^{-i\phi}(E_p - m) \sin \theta \\ -e^{i\phi}(E_p - m) \sin \theta & E_p + m - (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{V}^0(\mathbf{k}') &= \begin{pmatrix} E_\chi + m_\chi + (E_\chi - m_\chi) \cos \theta & -e^{-i\phi}(E_\chi - m_\chi) \sin \theta \\ e^{i\phi}(E_\chi - m_\chi) \sin \theta & E_\chi + m_\chi + (E_\chi - m_\chi) \cos \theta \end{pmatrix}, \\
 \hat{V}^1(\mathbf{k}') &= |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta & -1 + \cos \theta \\ 1 - \cos \theta & e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, \\
 \hat{V}^2(\mathbf{k}') &= i|\mathbf{k}| \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \\ 1 - \cos \theta & -e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, \\
 \hat{V}^3(\mathbf{k}') &= |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 + \cos \theta \end{pmatrix}, \\
 \hat{P}(\mathbf{k}') &= -|\mathbf{k}| \begin{pmatrix} -1 + \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\hat{A}^0(\mathbf{k}') = |\mathbf{k}'| \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -(1 + \cos \theta) \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}^1(\mathbf{k}') = \begin{pmatrix} (E_\chi - m_\chi) e^{-i\phi} \sin \theta & (E_\chi + m_\chi) - (E_\chi - m_\chi) \cos \theta \\ (E_\chi + m_\chi) - (E_\chi - m_\chi) \cos \theta & -(E_\chi - m_\chi) e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}^2(\mathbf{k}') = i \begin{pmatrix} (E_\chi - m_\chi) e^{-i\phi} \sin \theta & -(E_\chi + m_\chi) + (E_\chi - m_\chi) \cos \theta \\ (E_\chi + m_\chi) - (E_\chi - m_\chi) \cos \theta & (E_\chi - m_\chi) e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}^3(\mathbf{k}') = \begin{pmatrix} (E_\chi + m_\chi) + (E_\chi - m_\chi) \cos \theta & (E_\chi - m_\chi) e^{-i\phi} \sin \theta \\ (E_\chi - m_\chi) e^{i\phi} \sin \theta & -(E_\chi + m_\chi) - (E_\chi - m_\chi) \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\hat{S}(\mathbf{k}') = \begin{pmatrix} E_\chi + m_\chi - (E_\chi - m_\chi) \cos \theta & e^{-i\phi} (E_\chi - m_\chi) \sin \theta \\ -e^{i\phi} (E_\chi - m_\chi) \sin \theta & E_\chi + m_\chi - (E_\chi - m_\chi) \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Из формул (2.39) и (2.40) видно, что

$$\hat{V}^1(\mathbf{k}') = -\hat{V}^1(\mathbf{p}'), \quad \hat{V}^2(\mathbf{k}') = -\hat{V}^2(\mathbf{p}'),$$

$$\hat{V}^3(\mathbf{k}') = -\hat{V}^3(\mathbf{p}'), \quad \hat{P}(\mathbf{k}') = -\hat{P}(\mathbf{p}').$$

Остальные лептонные токовые матрицы $\hat{V}^0(\mathbf{k}')$, $\hat{A}^{1,2,3}(\mathbf{k}')$, $\hat{S}(\mathbf{k}')$ совпадают по форме с соответствующими им нуклонными матрицами $\hat{V}^0(\mathbf{p}')$, $\hat{A}^{1,2,3}(\mathbf{p}')$, $\hat{S}(\mathbf{p}')$ после замены $\lambda_\pm^2 = E_p \pm m$ на $\xi_\pm^2 = E_\chi \pm m_\chi$. Поскольку $\lambda_+ \lambda_- = |\mathbf{p}| = \xi_+ \xi_- = |\mathbf{k}'|$, то в формулах (2.39) и (2.40) оставлена только зависимость от модуля начального импульса лептона $|\mathbf{k}'|$, который фиксирован согласно (2.38). Иными словами, как это явно видно из самих приведенных выше формул, свободными параметрами всех токовых матриц являются только углы θ и ϕ . Аргументы же матриц \mathbf{k}' и \mathbf{p}' зависят только от этих угловых переменных и в формулах (2.39) и (2.40) служат для различия нуклонных токовых матриц от лептонных токовых матриц.

Итак, все компоненты лептонных и нуклонных токов, определенные в (2.13) и (2.15), следует вычислять по формулам

$$V_{s's}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \bar{u}(\mathbf{k}', s') \gamma_0 u(\mathbf{k}, s) = \chi_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') \hat{V}^0(\mathbf{k}') \chi_s(\mathbf{k}),$$

$$V_{r'r}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \hat{V}^0(\mathbf{p}') \chi_r(\mathbf{p}),$$

$$V_{s's}^1(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \bar{u}(\mathbf{k}', s') \gamma u(\mathbf{k}, s) = \chi_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') \hat{V}^1(\mathbf{k}') \chi_s(\mathbf{k}),$$

$$V_{r'r}^1(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \hat{V}^1(\mathbf{p}') \chi_r(\mathbf{p}),$$

$$A_{s's}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \bar{u}(\mathbf{k}', s') \gamma_0 \gamma_5 u(\mathbf{k}, s) = \chi_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') \hat{A}^0(\mathbf{k}') \chi_s(\mathbf{k}),$$

$$A_{r'r}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \hat{A}^0(\mathbf{p}') \chi_r(\mathbf{p}),$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{s's}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{u}(\mathbf{k}', s') \gamma \gamma_5 u(\mathbf{k}, s) = \chi_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}') \chi_s(\mathbf{k}), \\
 \mathbf{A}_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p}') \chi_r(\mathbf{p}), \\
 \mathbf{S}_{s's}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{u}(\mathbf{k}', s') u(\mathbf{k}, s) = \chi_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{k}') \chi_s(\mathbf{k}), \\
 \mathbf{S}_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{p}') \chi_r(\mathbf{p}), \\
 \mathbf{P}_{s's}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{u}(\mathbf{k}', s') \gamma^5 u(\mathbf{k}, s) = \chi_{s'}^\dagger(\mathbf{k}') \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{k}') \chi_s(\mathbf{k}), \\
 \mathbf{P}_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{p}') \chi_r(\mathbf{p}).
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

2.3.1. *Базис σ_3 . Компоненты нуклонных и лептонных токов в η -базисе.* Для вычисления компонент нуклонных и лептонных токов используются явные выражения токовых нуклонных (2.39) и лептонных (2.40) матриц, а также явный вид биспиноров (2.37), одинаковый для нуклона и лептона. Прямая их подстановка в (2.13) и (2.15) дает* выражения для компонент нуклонного и лептонного токов при всех возможных комбинациях проекций спина начального и конечного нуклона и лептона на направление движения начального лептона. Все компоненты нуклонного и лептонного токов можно собрать в компактные выражения «4-векторного типа», например, для векторного тока нуклона в виде

$$V_{r'r}^\eta(\mathbf{p}') \equiv V_{r'r}^{\eta; \mu=0,1,2,3}(\mathbf{p}') \equiv \left\{ V_{r'r}^{\eta,0}(\mathbf{p}'), V_{r'r}^{\eta,1}(\mathbf{p}'), V_{r'r}^{\eta,2}(\mathbf{p}'), V_{r'r}^{\eta,3}(\mathbf{p}') \right\}.$$

Тогда четыре векторных тока нуклона в η -базисе таковы:

$$\begin{aligned}
 V_{++}^\eta(\mathbf{p}') &= \left\{ E_p + m + \cos \theta (E_p - m), -|\mathbf{k}| \sin \theta e^{-i\phi}, \right. \\
 &\quad \left. -i|\mathbf{k}| \sin \theta e^{-i\phi}, -|\mathbf{k}|(1 + \cos \theta) \right\}, \\
 V_{--}^\eta(\mathbf{p}') &= \left\{ E_p + m + \cos \theta (E_p - m), -|\mathbf{k}| \sin \theta e^{+i\phi}, \right. \\
 &\quad \left. +i|\mathbf{k}| \sin \theta e^{+i\phi}, -|\mathbf{k}|(1 + \cos \theta) \right\}, \\
 V_{+-}^\eta(\mathbf{p}') &= \left\{ -(E_p - m) \sin \theta e^{-i\phi}, +|\mathbf{k}|(1 - \cos \theta), \right. \\
 &\quad \left. -i|\mathbf{k}|(1 - \cos \theta), +|\mathbf{k}| \sin \theta e^{-i\phi} \right\}, \\
 V_{-+}^\eta(\mathbf{p}') &= \left\{ +(E_p - m) \sin \theta e^{+i\phi}, -|\mathbf{k}|(1 - \cos \theta), \right. \\
 &\quad \left. -i|\mathbf{k}|(1 - \cos \theta), -|\mathbf{k}| \sin \theta e^{+i\phi} \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

*Проиллюстрирована в прил. 1.

Аналогично четыре векторных тока лептона в η -базисе имеют вид

$$\begin{aligned}
 V_{++}^\eta(\mathbf{k}') &= \{E_\chi + m_\chi + (E_\chi - m_\chi) \cos \theta, |\mathbf{k}| \sin \theta e^{-i\phi}, \\
 &\quad + i|\mathbf{k}| \sin \theta e^{-i\phi}, |\mathbf{k}|(1 + \cos \theta)\}, \\
 V_{--}^\eta(\mathbf{k}') &= \{E_\chi + m_\chi + (E_\chi - m_\chi) \cos \theta, |\mathbf{k}| \sin \theta e^{+i\phi}, \\
 &\quad - i|\mathbf{k}| \sin \theta e^{+i\phi}, |\mathbf{k}|(1 + \cos \theta)\}, \\
 V_{+-}^\eta(\mathbf{k}') &= \{- (E_\chi - m_\chi) \sin \theta e^{-i\phi}, -|\mathbf{k}|(1 - \cos \theta), \\
 &\quad i|\mathbf{k}|(1 - \cos \theta), -|\mathbf{k}| \sin \theta e^{-i\phi}\}, \\
 V_{-+}^\eta(\mathbf{k}') &= \{+ (E_\chi - m_\chi) \sin \theta e^{+i\phi}, +|\mathbf{k}|(1 - \cos \theta), \\
 &\quad i|\mathbf{k}|(1 - \cos \theta), +|\mathbf{k}| \sin \theta e^{+i\phi}\}.
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Аксиально-векторные нуклонные токи в η -базисе таковы (временно $A_{r'r}^\eta \equiv A_{r'r}^\eta(\mathbf{p}')$):

$$\begin{aligned}
 A_{++}^\eta &= \{-|\mathbf{k}|(1 + \cos \theta), + (E_p - m) \sin \theta e^{-i\phi}, \\
 &\quad i(E_p - m) \sin \theta e^{-i\phi}, + (E_p + m + \cos \theta(E_p - m))\}, \\
 A_{--}^\eta &= \{+|\mathbf{k}|(1 + \cos \theta), - (E_p - m) \sin \theta e^{+i\phi}, \\
 &\quad i(E_p - m) \sin \theta e^{+i\phi}, - (E_p + m + \cos \theta(E_p - m))\}, \\
 A_{+-}^\eta &= \{-|\mathbf{k}| \sin \theta e^{-i\phi}, E_p + m - \cos \theta(E_p - m), \\
 &\quad - i(E_p + m - \cos \theta(E_p - m)), (E_p - m) \sin \theta e^{-i\phi}\}, \\
 A_{-+}^\eta &= \{-|\mathbf{k}| \sin \theta e^{+i\phi}, E_p + m - \cos \theta(E_p - m), \\
 &\quad + i(E_p + m - \cos \theta(E_p - m)), (E_p - m) \sin \theta e^{+i\phi}\}.
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Для аксиально-векторных лептонных токов в η -базисе имеется (временно $A_{s's}^\eta \equiv A_{s's}^\eta(\mathbf{k}')$):

$$\begin{aligned}
 A_{++}^\eta &= \{+|\mathbf{k}|(1 + \cos \theta), + (E_\chi - m_\chi) \sin \theta e^{-i\phi}, \\
 &\quad i(E_\chi - m_\chi) \sin \theta e^{-i\phi}, + (E_\chi + m_\chi) + (E_\chi - m_\chi) \cos \theta\}, \\
 A_{--}^\eta &= \{-|\mathbf{k}|(1 + \cos \theta), - (E_\chi - m_\chi) \sin \theta e^{+i\phi}, \\
 &\quad i(E_\chi - m_\chi) \sin \theta e^{+i\phi}, - (E_\chi + m_\chi) - (E_\chi - m_\chi) \cos \theta\}, \\
 A_{+-}^\eta &= \{|\mathbf{k}| \sin \theta e^{-i\phi}, (E_\chi + m_\chi) - (E_\chi - m_\chi) \cos \theta, \\
 &\quad - i(E_\chi + m_\chi) + i(E_\chi - m_\chi) \cos \theta, (E_\chi - m_\chi) \sin \theta e^{-i\phi}\}, \\
 A_{-+}^\eta &= \{|\mathbf{k}| \sin \theta e^{+i\phi}, (E_\chi + m_\chi) - (E_\chi - m_\chi) \cos \theta, \\
 &\quad + i(E_\chi + m_\chi) - i(E_\chi - m_\chi) \cos \theta, (E_\chi - m_\chi) \sin \theta e^{+i\phi}\}.
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Наконец, нуклонные и лептонные скалярный и псевдоскалярный токи в η -базисе имеют вид

$$\begin{aligned}
 S_{--}^{\eta}(\mathbf{p}') &= E_p + m - (E_p - m) \cos \theta, & S_{-+}^{\eta}(\mathbf{p}') &= -(E_p - m) \sin \theta e^{+i\phi}, \\
 S_{++}^{\eta}(\mathbf{p}') &= E_p + m - (E_p - m) \cos \theta, & S_{+-}^{\eta}(\mathbf{p}') &= +(E_p - m) \sin \theta e^{-i\phi}, \\
 P_{--}^{\eta}(\mathbf{p}') &= +|\mathbf{k}|(1 - \cos \theta), & P_{-+}^{\eta}(\mathbf{p}') &= |\mathbf{k}| \sin \theta e^{+i\phi}, \\
 P_{++}^{\eta}(\mathbf{p}') &= -|\mathbf{k}|(1 - \cos \theta), & P_{+-}^{\eta}(\mathbf{p}') &= |\mathbf{k}| \sin \theta e^{-i\phi};
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}
 S_{--}^{\eta}(\mathbf{k}') &= E_{\chi} + m_{\chi} - (E_{\chi} - m_{\chi}) \cos \theta, & S_{-+}^{\eta}(\mathbf{k}') &= -(E_{\chi} - m_{\chi}) \sin \theta e^{+i\phi}, \\
 S_{++}^{\eta}(\mathbf{k}') &= E_{\chi} + m_{\chi} - (E_{\chi} - m_{\chi}) \cos \theta, & S_{+-}^{\eta}(\mathbf{k}') &= +(E_{\chi} - m_{\chi}) \sin \theta e^{-i\phi}, \\
 P_{--}^{\eta}(\mathbf{k}') &= -|\mathbf{k}|(1 - \cos \theta), & P_{-+}^{\eta}(\mathbf{k}') &= -|\mathbf{k}| \sin \theta e^{+i\phi}, \\
 P_{++}^{\eta}(\mathbf{k}') &= +|\mathbf{k}|(1 - \cos \theta), & P_{+-}^{\eta}(\mathbf{k}') &= -|\mathbf{k}| \sin \theta e^{-i\phi}.
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Здесь первый индекс $s'(r') = \mp 1$ отвечает значению проекции (удвоенного) спина конечного лептона (нуклона) на направление движения начального лептона, второй индекс $s(r) = \mp 1$ отвечает значению проекции (удвоенного) спина начального лептона (нуклона) на то же самое направление.

Выражения (2.42), (2.44), (2.46) и (2.43), (2.45), (2.47) дают вид нуклонных и лептонных токов для всех допустимых значений проекций спина начального и конечного нуклона и лептона на направление импульса начального лептона.

Все компоненты токов в другом виде. Приведем также вид всех компонент токов в переменных λ_{\pm} и ξ_{\pm} . Для векторного лептонного и нуклонного токов получается следующее:

$$\begin{aligned}
 V_{\pm\pm}^{\eta}(\mathbf{k}') &= \\
 &= \left\{ \xi_+^2 + \xi_-^2 \cos \theta, \xi_+ \xi_- \sin \theta e^{\mp i\phi}, \pm i \xi_+ \xi_- \sin \theta e^{\mp i\phi}, \xi_+ \xi_- (1 + \cos \theta) \right\}, \\
 V_{\pm\mp}^{\eta}(\mathbf{k}') &= \\
 &= \left\{ \mp \xi_-^2 \sin \theta e^{\mp i\phi}, \mp \xi_+ \xi_- (1 - \cos \theta), i \xi_+ \xi_- (1 - \cos \theta), \mp \xi_+ \xi_- \sin \theta e^{\mp i\phi} \right\}, \\
 V_{\pm\pm}^{\eta}(\mathbf{p}') &= \\
 &= \left\{ \lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta, -\lambda_+ \lambda_- \sin \theta e^{\mp i\phi}, \mp i \lambda_+ \lambda_- \sin \theta e^{\mp i\phi}, -\lambda_+ \lambda_- (1 + \cos \theta) \right\}, \\
 V_{\pm\mp}^{\eta}(\mathbf{p}') &= \left\{ \mp \lambda_-^2 \sin \theta e^{\mp i\phi}, \pm \lambda_+ \lambda_- (1 - \cos \theta), \right. \\
 &\quad \left. - i \lambda_+ \lambda_- (1 - \cos \theta), \pm \lambda_+ \lambda_- \sin \theta e^{\mp i\phi} \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Для аксиально-векторных лептонного и нуклонного токов получаем

$$\begin{aligned}
 A_{\pm\pm}^{\eta}(\mathbf{k}') &= \\
 &= \left\{ \pm \xi_+ \xi_- (1 + \cos \theta), \pm \xi_-^2 \sin \theta e^{\mp i\phi}, i \xi_-^2 \sin \theta e^{\mp i\phi}, \pm (\xi_+^2 + \xi_-^2 \cos \theta) \right\}, \\
 A_{\pm\mp}^{\eta}(\mathbf{k}') &= \\
 &= \left\{ + \xi_+ \xi_- e^{\mp i\phi} \sin \theta, \xi_+^2 - \xi_-^2 \cos \theta, \mp i (\xi_+^2 - \xi_-^2 \cos \theta), \xi_-^2 \sin \theta e^{\mp i\phi} \right\}, \\
 A_{\pm\pm}^{\eta}(\mathbf{p}') &= \\
 &= \left\{ \mp \lambda_+ \lambda_- (1 + \cos \theta), \pm \lambda_-^2 \sin \theta e^{\mp i\phi}, i \lambda_-^2 \sin \theta e^{\mp i\phi}, \pm (\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta) \right\}, \\
 A_{\pm\mp}^{\eta}(\mathbf{p}') &= \\
 &= \left\{ - \lambda_+ \lambda_- \sin \theta e^{\mp i\phi}, \lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta, \mp i (\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta), \lambda_-^2 \sin \theta e^{\mp i\phi} \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Нуклонные (2.46) и лептонные (2.47) скалярные и псевдоскалярные токи в η -базисе имеют вид

$$\begin{aligned}
 S_{\mp\mp}^{\eta}(\mathbf{p}') &= \lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta, & S_{\mp\mp}^{\eta}(\mathbf{k}') &= \xi_+^2 - \xi_-^2 \cos \theta, \\
 S_{\mp\pm}^{\eta}(\mathbf{p}') &= \mp \lambda_-^2 \sin \theta e^{\pm i\phi}, & S_{\mp\pm}^{\eta}(\mathbf{k}') &= \mp \xi_-^2 \sin \theta e^{\pm i\phi}, \\
 P_{\mp\mp}^{\eta}(\mathbf{p}') &= \pm \lambda_+ \lambda_- (1 - \cos \theta), & P_{\mp\pm}^{\eta}(\mathbf{p}') &= + \lambda_+ \lambda_- \sin \theta e^{\pm i\phi}, \\
 P_{\mp\mp}^{\eta}(\mathbf{k}') &= \mp \xi_+ \xi_- (1 - \cos \theta), & P_{\mp\pm}^{\eta}(\mathbf{k}') &= - \xi_+ \xi_- \sin \theta e^{\pm i\phi}.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

2.3.2. Базис спиральности. Компоненты нуклонных и лептонных токов в χ -базисе. Для вычисления компонент нуклонных и лептонных токов в χ -базисе используются явные выражения для токовых нуклонных матриц (2.39) и (2.40) и явные выражения для нуклонных и лептонных χ -спиноров (2.32). Подставляя эти выражения в формулы для нуклонных и лептонных (2.41) токов и учитывая явный вид нуклонных (2.39) и лептонных (2.40) токовых матриц, можно получить (в с. ц. м. лептон–нуклон) выражения для 4-векторных, 4-аксиально-векторных, 1-скалярных и 1-псевдоскалярных нуклонных и лептонных токов*. Они даны ниже в виде фактической зависимости от импульсов конечных фермионов.

Векторные токи для нуклона и лептона в χ -базисе имеют вид

$$\begin{aligned}
 V_{--}^{\chi, \mu=0,1,2,3}(\mathbf{p}') &= \\
 &= 2 \left\{ + E_p \cos \frac{\theta}{2} e^{+i\phi}, - |\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2}, - i |\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2}, - |\mathbf{k}| \cos \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} \right\},
 \end{aligned}$$

*Подробнее представлены в прил. 1.

$$\begin{aligned}
 V_{-+}^{\chi, \mu=0,1,2,3}(\mathbf{p}') &= 2m \left\{ \sin \frac{\theta}{2}, 0, 0, 0 \right\}, \\
 V_{+-}^{\chi, \mu=0,1,2,3}(\mathbf{p}') &= 2m \left\{ \sin \frac{\theta}{2}, 0, 0, 0 \right\}, \\
 V_{++}^{\chi, \mu=0,1,2,3}(\mathbf{p}') &= \\
 &= 2 \left\{ -E_p \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, +|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2}, -i|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2}, +|\mathbf{k}| \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \right\}, \\
 V_{--}^{\chi, \mu=0,1,2,3}(\mathbf{k}') &= \\
 &= 2 \left\{ +E_\chi \cos \frac{\theta}{2}, +|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} e^{+i\phi}, -i|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} e^{+i\phi}, +|\mathbf{k}| \cos \frac{\theta}{2} \right\}, \\
 V_{-+}^{\chi, \mu=0,1,2,3}(\mathbf{k}') &= -2m_\chi e^{+i\phi} \left\{ \sin \frac{\theta}{2}, 0, 0, 0 \right\}, \\
 V_{+-}^{\chi, \mu=0,1,2,3}(\mathbf{k}') &= +2m_\chi e^{-i\phi} \left\{ \sin \frac{\theta}{2}, 0, 0, 0 \right\}, \\
 V_{++}^{\chi, \mu=0,1,2,3}(\mathbf{k}') &= \\
 &= 2 \left\{ +E_\chi \cos \frac{\theta}{2}, +|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, +i|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, +|\mathbf{k}| \cos \frac{\theta}{2} \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Аксиально-векторные токи для нуклона и лептона в χ -базисе имеют вид

$$\begin{aligned}
 A_{--}^{\chi, \mu=0,1,2,3}(\mathbf{p}') &= \\
 &= 2 \left\{ -|\mathbf{k}| \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi}, +E_p \sin \frac{\theta}{2}, +iE_p \sin \frac{\theta}{2}, +E_p \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \right\}, \\
 A_{-+}^{\chi, \mu=0,1,2,3}(\mathbf{p}') &= 2m \left\{ 0, +\cos \frac{\theta}{2} e^{+i\phi}, -i \cos \frac{\theta}{2} e^{+i\phi}, -\sin \frac{\theta}{2} \right\}, \\
 A_{+-}^{\chi, \mu=0,1,2,3}(\mathbf{p}') &= 2m \left\{ 0, -\cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, -i \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, +\sin \frac{\theta}{2} \right\}, \\
 A_{++}^{\chi, \mu=0,1,2,3}(\mathbf{p}') &= \\
 &= 2 \left\{ -|\mathbf{k}| \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, +E_p \sin \frac{\theta}{2}, -iE_p \sin \frac{\theta}{2}, +E_p \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \right\},
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}
A_{--}^{\chi, \mu=0,1,2,3}(\mathbf{k}') &= \\
&= 2 \left\{ -|\mathbf{k}| \cos \frac{\theta}{2}, -E_\chi \sin \frac{\theta}{2} e^{+i\phi}, +iE_\chi \sin \frac{\theta}{2} e^{+i\phi}, -E_\chi \cos \frac{\theta}{2} \right\}, \\
A_{-+}^{\chi, \mu=0,1,2,3}(\mathbf{k}') &= 2m_\chi \left\{ 0, +\cos \frac{\theta}{2}, +i \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} \right\}, \\
A_{+-}^{\chi, \mu=0,1,2,3}(\mathbf{k}') &= 2m_\chi \left\{ 0, +\cos \frac{\theta}{2}, -i \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \right\}, \\
A_{++}^{\chi, \mu=0,1,2,3}(\mathbf{k}') &= \\
&= 2 \left\{ +|\mathbf{k}| \cos \frac{\theta}{2}, +E_\chi \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, +iE_\chi \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, +E_\chi \cos \frac{\theta}{2} \right\}.
\end{aligned}$$

Скалярные и псевдоскалярные токи для нуклона и лептона в χ -базисе имеют вид

$$\begin{aligned}
S_{--}^X(\mathbf{p}') &= +2m \cos \frac{\theta}{2} e^{+i\phi}, & S_{--}^X(\mathbf{k}') &= +2m_\chi \cos \frac{\theta}{2}, \\
S_{-+}^X(\mathbf{p}') &= +2E_p \sin \frac{\theta}{2}, & S_{-+}^X(\mathbf{k}') &= -2E_\chi \sin \frac{\theta}{2} e^{+i\phi}, \\
S_{+-}^X(\mathbf{p}') &= +2E_p \sin \frac{\theta}{2}, & S_{+-}^X(\mathbf{k}') &= +2E_\chi \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, \\
S_{++}^X(\mathbf{p}') &= -2m \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, & S_{++}^X(\mathbf{k}') &= +2m_\chi \cos \frac{\theta}{2}, \\
P_{--}^X(\mathbf{p}') &= P_{++}^X(\mathbf{p}') = 0, & P_{--}^X(\mathbf{k}') &= P_{++}^X(\mathbf{k}') = 0, \\
P_{-+}^X(\mathbf{p}') &= +2|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2}, & P_{-+}^X(\mathbf{k}') &= -2|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} e^{+i\phi}, \\
P_{+-}^X(\mathbf{p}') &= -2|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2}, & P_{+-}^X(\mathbf{k}') &= -2|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Отметим, что полученная «асимметрия знаков» между приведенными выше псевдоскалярными лептонными токами $P_{-+}^X(\mathbf{k}')$ и $P_{+-}^X(\mathbf{k}')$ и соответственно нуклонными токами

$$P_{+-}^X(\mathbf{p}') = -2|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2}, \quad P_{-+}^X(\mathbf{p}') = +2|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2}$$

объясняется первоначальным определением биспиноров в базисе спиральности, где введен «дополнительный множитель» $-e^{i\phi}$ у $\chi_+(\mathbf{p}')$.

Все компоненты токов в другом виде. Все приведенные выше токи согласно (2.38) можно выразить через переменные λ_\pm и ξ_\pm . Тогда векторные

токи для нуклона и лептона в χ -базисе таковы:

$$\begin{aligned}
 V_{\mp\mp}^{X,\mu=0,1,2,3}(\mathbf{p}') &= \\
 &= 2 \left\{ \pm (\lambda_-^2 + m) \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \mp \lambda_+ \lambda_- \sin \frac{\theta}{2}, -i \lambda_+ \lambda_- \sin \frac{\theta}{2}, \mp \lambda_+ \lambda_- \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi} \right\}, \\
 V_{\mp\pm}^{X,\mu=0,1,2,3}(\mathbf{p}') &= 2m \left\{ \sin \frac{\theta}{2}, 0, 0, 0 \right\},
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned}
 V_{\mp\mp}^{X,\mu=0,1,2,3}(\mathbf{k}') &= \\
 &= 2 \left\{ + (\xi_-^2 + m_\chi) \cos \frac{\theta}{2}, + \xi_+ \xi_- \sin \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \mp i \xi_+ \xi_- \sin \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, + \xi_+ \xi_- \cos \frac{\theta}{2} \right\}, \\
 V_{\mp\pm}^{X,\mu=0,1,2,3}(\mathbf{k}') &= \mp 2m_\chi e^{\pm i\phi} \left\{ \sin \frac{\theta}{2}, 0, 0, 0 \right\}.
 \end{aligned}$$

Аксиально-векторные токи для нуклона и лептона в χ -базисе имеют вид

$$\begin{aligned}
 A_{\mp\mp}^{X,\mu=0,1,2,3}(\mathbf{p}') &= 2 \left\{ - \lambda_+ \lambda_- \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, (\lambda_-^2 + m) \sin \frac{\theta}{2}, \right. \\
 &\quad \left. \pm i (\lambda_-^2 + m) \sin \frac{\theta}{2}, (\lambda_-^2 + m) \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi} \right\}, \\
 A_{\mp\pm}^{X,\mu=0,1,2,3}(\mathbf{p}') &= 2m \left\{ 0, \pm \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, -i \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \mp \sin \frac{\theta}{2} \right\}, \\
 A_{\mp\mp}^{X,\mu=0,1,2,3}(\mathbf{k}') &= 2 \left\{ \mp \xi_+ \xi_- \cos \frac{\theta}{2}, \mp (\xi_-^2 + m_\chi) \sin \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \right. \\
 &\quad \left. i (\xi_-^2 + m_\chi) \sin \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \mp (\xi_-^2 + m_\chi) \cos \frac{\theta}{2} \right\}, \\
 A_{\mp\pm}^{X,\mu=0,1,2,3}(\mathbf{k}') &= 2m_\chi \left\{ 0, + \cos \frac{\theta}{2}, \pm i \cos \frac{\theta}{2}, - \sin \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi} \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Скалярные и псевдоскалярные токи для нуклона и лептона в χ -базисе имеют вид

$$\begin{aligned}
 S_{\mp\mp}^X(\mathbf{p}') &= \pm 2m \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, & S_{\mp\mp}^X(\mathbf{k}') &= +2m_\chi \cos \frac{\theta}{2}, \\
 S_{\mp\pm}^X(\mathbf{p}') &= +2(\lambda_-^2 + m) \sin \frac{\theta}{2}, & S_{\mp\pm}^X(\mathbf{k}') &= \mp 2(\xi_-^2 + m_\chi) \sin \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{--}^X(\mathbf{p}') &= P_{++}^X(\mathbf{p}') = 0, & P_{--}^X(\mathbf{k}') &= P_{++}^X(\mathbf{k}') = 0, \\
 P_{\mp\pm}^X(\mathbf{p}') &= \pm 2\lambda_+\lambda_- \sin \frac{\theta}{2}, & P_{\mp\pm}^X(\mathbf{k}') &= -2\xi_+\xi_- \sin \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}.
 \end{aligned}
 \tag{2.56}$$

Все приведенные выше компоненты фермионных токов (в с. с. м.) не зависят от импульса \mathbf{k} , а зависят только от направления импульса \mathbf{k}' рассеянного лептона, т. е. от переменных θ и ϕ . Кроме того, среди четырех лоренц-компонент любых токов никогда не встречаются одновременно компоненты с фазовыми факторами $e^{-i\phi}$ и $e^{+i\phi}$. Если ни один из четырех элементов тока не равен нулю, то имеется альтернатива: либо два элемента с фактором $e^{-i\phi}$ и два вообще без такого фазового фактора, либо два элемента с фактором $e^{+i\phi}$ и опять два без фазового фактора.

2.3.3. Свойства токов в разных базисах. Отметим, что выражения для (нуклонных слабых) токов, полученные в базисе спиральности и имеющие вид (2.51)–(2.53), существенным образом отличаются от аналогичных выражений в σ_3 -базисе, заданных формулами (2.42)–(2.47). Это обусловлено разницей в физическом и математическом смысле собственных значений r, r' (и s', s) в разных базисах.

Так, в выражениях (2.51)–(2.53) величины r, r' (s', s) — это (удвоенные) проекции спина нуклона (лептона) на начальное и конечное направление импульса самого нуклона (лептона), в то время как в выражениях (2.42)–(2.47) величины r, r' (s', s) — (удвоенные) проекции спина нуклона (лептона) на некоторую заранее фиксированную ось, которая в данном случае выбрана вдоль направления движения (3-импульса \mathbf{k}) начального лептона.

Действительно, если предположить, что в результате взаимодействия, скажем, нуклон рассеивается назад ($\cos \theta = -1$), то в базисе спиральности обозначение в виде индексов $(++)$ имеет такой смысл, что направление спина нуклона меняется строго на противоположное (вместе с направлением его импульса). Аналогичное свойство справедливо и для лептона.

В базисе, где спин нуклона квантуется («насиленно удерживается») вдоль фиксированной оси (σ_3 -базис), индексы $(++)$ в той же ситуации, когда нуклон рассеивается назад, означает, что спин нуклона вообще не меняет своей ориентации относительно этой выбранной оси, хотя нуклон «летит» в обратную сторону. Такая возможность необходима для правильного рассмотрения понятия когерентности при рассеянии частиц на связанной системе многих частиц-рассеивателей, которой является атомное ядро.

Обсудим несколько подробнее результаты, представленные в выражениях (2.42) и (2.44). Для этой цели обратимся к наиболее интересным случаям: а) когда нуклон рассеивается вперед ($\cos \theta = 1$); б) когда нуклон рассеивается назад ($\cos \theta = -1$); в) нерелятивистский режим, когда $\sqrt{s} \rightarrow m + m_\chi$.

а) При $\cos \theta = 1$ (и $\sin \theta = 0$) согласно (2.42) нуклонный векторный ток принимает вид

$$\lim_{\cos \theta \rightarrow 1} V_{++}^{\eta}(\mathbf{p}') = \lim_{\cos \theta \rightarrow 1} V_{--}^{\eta}(\mathbf{p}') = 2\{E_p, 0, 0, -|\mathbf{p}'|\},$$

поскольку $|\mathbf{p}| = |\mathbf{k}|$, и сводится к 4-импульсу нуклона, движущемуся вдоль (точнее, против) направления начального лептона. Переворот спина нуклона за счет такого тока невозможен, поскольку остальные две компоненты векторного тока обращаются в нуль:

$$\lim_{\cos \theta \rightarrow 1} V_{+-}^{\eta}(\mathbf{p}') = \lim_{\cos \theta \rightarrow 1} V_{-+}^{\eta}(\mathbf{p}') = 0.$$

Ровно то же самое при $\cos \theta = 1$ происходит и в случае лептонного (2.43) массивного тока:

$$V_{++}^{\eta}(\mathbf{k}') = V_{--}^{\eta}(\mathbf{k}') = 2\{E_{\chi}, 0, 0, -|\mathbf{k}'|\} \quad \text{и} \quad V_{+-}^{\eta}(\mathbf{k}') = V_{-+}^{\eta}(\mathbf{k}') = 0.$$

Наоборот, (полный) переворот спина нуклона становится возможным в случае рассеяния вперед благодаря аксиальному току, поскольку возникают ненулевые компоненты аксиального тока в перпендикулярной (движению лептона) плоскости:

$$\lim_{\cos \theta \rightarrow 1} A_{+-}^{\eta}(\mathbf{p}') = 2m(0, 1, -i, 0), \quad \lim_{\cos \theta \rightarrow 1} A_{-+}^{\eta}(\mathbf{p}') = 2m(0, 1, i, 0).$$

Интересно, что в отличие от безмассовых нейтрино и антинейтрино для массивного лептона также возможен полный переворот спина при $\cos \theta = 1$:

$$\lim_{\cos \theta \rightarrow 1} A_{+-}^{\eta}(\mathbf{k}') = 2m_{\chi}(0, 1, -i, 0), \quad \lim_{\cos \theta \rightarrow 1} A_{-+}^{\eta}(\mathbf{k}') = 2m_{\chi}(0, 1, i, 0).$$

Это подтверждает общее правило, согласно которому переворот спина «обязан» исключительно ненулевым значениям масс частиц.

Когда $\cos \theta = 1$ как для нуклона (2.44), так и для лептона (2.45), происходит полная компенсация аксиальных токов с противоположными проекциями спина:

$$\lim_{\cos \theta \rightarrow 1} (A_{++}^{\eta}(\mathbf{p}') + A_{--}^{\eta}(\mathbf{p}')) = \lim_{\cos \theta \rightarrow 1} (A_{++}^{\eta}(\mathbf{k}') + A_{--}^{\eta}(\mathbf{k}')) = 0. \quad (2.57)$$

Это сокращение можно понять с учетом того, что аксиальный ток фермиона, обладающего одним и тем же начальным и конечным импульсом p и одной и той же проекцией спина r , пропорционален вектору 4-спина s^{μ} , т. е. $\bar{u}(p, r)\gamma^{\mu}\gamma^5 u(p, r) = 2mr s^{\mu}$. Поэтому

$$\bar{u}(p, +1)\gamma^{\mu}\gamma^5 u(p, +1) + \bar{u}(p, -1)\gamma^{\mu}\gamma^5 u(p, -1) = 2m(+1)s^{\mu} + 2m(-1)s^{\mu} = 0,$$

что в точности соответствует выражению (2.57) в случае рассеяния нуклона вперед.

б) При рассеянии нуклона назад, т. е. когда $\cos \theta = -1$ (и $\sin \theta = 0$), сохраняющие проекции спина нуклона и лептона векторные и аксиальные токи (2.44) и (2.45) сводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} \lim_{\cos \theta \rightarrow -1} V_{++}^\eta(\mathbf{p}') &= \lim_{\cos \theta \rightarrow -1} V_{--}^\eta(\mathbf{p}') = 2m(1, 0, 0, 0), \\ \lim_{\cos \theta \rightarrow -1} V_{++}^\eta(\mathbf{k}') &= \lim_{\cos \theta \rightarrow -1} V_{--}^\eta(\mathbf{k}') = 2m_\chi(1, 0, 0, 0), \\ \lim_{\cos \theta \rightarrow -1} A_{++}^\eta(\mathbf{p}') &= 2m(0, 0, 0, 1), & \lim_{\cos \theta \rightarrow -1} A_{--}^\eta(\mathbf{p}') &= 2m(0, 0, 0, -1), \\ \lim_{\cos \theta \rightarrow -1} A_{++}^\eta(\mathbf{k}') &= 2m_\chi(0, 0, 0, 1), & \lim_{\cos \theta \rightarrow -1} A_{--}^\eta(\mathbf{p}') &= 2m_\chi(0, 0, 0, -1). \end{aligned}$$

Переворот спина нуклона и лептона возможен за счет следующих ненулевых компонент:

$$\begin{aligned} \lim_{\cos \theta \rightarrow -1} V_{+-}^\eta(\mathbf{p}') &= 2|\mathbf{p}|(0, +1, -i, 0), & \lim_{\cos \theta \rightarrow -1} V_{-+}^\eta(\mathbf{p}') &= 2|\mathbf{p}|(0, -1, -i, 0), \\ \lim_{\cos \theta \rightarrow -1} V_{+-}^\eta(\mathbf{k}') &= 2|\mathbf{k}|(0, -1, +i, 0), & \lim_{\cos \theta \rightarrow -1} V_{-+}^\eta(\mathbf{k}') &= 2|\mathbf{k}|(0, +1, +i, 0), \\ \lim_{\cos \theta \rightarrow -1} A_{+-}^\eta(\mathbf{p}') &= 2E_p(0, +1, -i, 0), & \lim_{\cos \theta \rightarrow -1} A_{-+}^\eta(\mathbf{p}') &= 2E_p(0, +1, +i, 0), \\ \lim_{\cos \theta \rightarrow -1} A_{+-}^\eta(\mathbf{k}') &= 2E_\chi(0, +1, -i, 0), & \lim_{\cos \theta \rightarrow -1} A_{-+}^\eta(\mathbf{k}') &= 2E_\chi(0, +1, +i, 0). \end{aligned}$$

в) В нерелятивистском случае (т. е. когда $|\mathbf{k}| \simeq E_p - m \simeq E_\chi - m_\chi \simeq 0$) векторные токи сохраняют направление спина нуклона и лептона, поскольку

$$\begin{aligned} \lim_{\sqrt{s} \rightarrow \{m\}} V_{++}^\eta(\mathbf{p}') &= \lim_{\sqrt{s} \rightarrow \{m\}} V_{--}^\eta(\mathbf{p}') = 2m\{1, 0, 0, 0\}, \\ \lim_{\sqrt{s} \rightarrow \{m\}} V_{+-}^\eta(\mathbf{p}') &= V_{-+}^\eta(\mathbf{p}') = \{0, 0, 0, 0\}, \\ \lim_{\sqrt{s} \rightarrow \{m\}} V_{++}^\eta(\mathbf{k}') &= \lim_{\sqrt{s} \rightarrow \{m\}} V_{--}^\eta(\mathbf{k}') = 2m_\chi\{1, 0, 0, 0\}, \\ \lim_{\sqrt{s} \rightarrow \{m\}} V_{+-}^\eta(\mathbf{k}') &= V_{-+}^\eta(\mathbf{k}') = \{0, 0, 0, 0\}. \end{aligned}$$

Аксиальные токи могут как сохранять проекцию спина нуклона и лептона за счет членов

$$\begin{aligned} \lim_{\sqrt{s} \rightarrow \{m\}} A_{++}^\eta(\mathbf{p}') &= +2m\{0, 0, 0, 1\}, & \lim_{\sqrt{s} \rightarrow \{m\}} A_{--}^\eta(\mathbf{p}') &= -2m\{0, 0, 0, 1\}, \\ \lim_{\sqrt{s} \rightarrow \{m\}} A_{++}^\eta(\mathbf{k}') &= +2m_\chi\{0, 0, 0, 1\}, & \lim_{\sqrt{s} \rightarrow \{m\}} A_{--}^\eta(\mathbf{k}') &= -2m_\chi\{0, 0, 0, 1\}, \end{aligned}$$

так и менять их проекции спина на противоположные:

$$\begin{aligned} \lim_{\sqrt{s} \rightarrow \{m\}} A_{+-}^\eta(\mathbf{p}') &= 2m\{0, 1, -i, 0\}, & \lim_{\sqrt{s} \rightarrow \{m\}} A_{-+}^\eta(\mathbf{p}') &= 2m\{0, 1, i, 0\}, \\ \lim_{\sqrt{s} \rightarrow \{m\}} A_{+-}^\eta(\mathbf{k}') &= 2m_\chi\{0, 1, -i, 0\}, & \lim_{\sqrt{s} \rightarrow \{m\}} A_{-+}^\eta(\mathbf{k}') &= 2m_\chi\{0, 1, i, 0\}. \end{aligned}$$

Можно отметить, что в этом пределе аналогично (2.57) имеется сокращение:

$$\lim_{\sqrt{s} \rightarrow \{m\}} (A_{++}^{\eta}(\mathbf{p}') + A_{--}^{\eta}(\mathbf{p}')) = \lim_{\sqrt{s} \rightarrow \{m\}} (A_{++}^{\eta}(\mathbf{k}') + A_{--}^{\eta}(\mathbf{k}')) = 0. \quad (2.58)$$

3. СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Формально (для иллюстрации) нуклонный ток при всех значениях проекции спина начального (второй индекс $r = \pm 1$) и конечного (первый индекс $r' = \pm 1$) нуклона можно представить как разложение по «базисным» токам (с оговорками из п. 2.1):

$$\begin{aligned} h_{r',r}^{\mu}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \bar{u}(\mathbf{p}', r') O_f^{\mu} u(\mathbf{p}, r) = \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}', r') \{h_V^f \gamma^{\mu} + h_A^f \gamma^{\mu} \gamma_5 + h_P^f \gamma_5 + h_S^f\} u(\mathbf{p}, r) = \\ &= h_V^f V_{r'r}^{\mu}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) + h_A^f A_{r'r}^{\mu}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) + h_S^f S_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) + h_P^f P_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Индекс нуклона f , равный n или p , временно оставлен только у констант связи. Аналогично лептонный ток при всех возможных значениях спиральности (проекция спина) начальной (индекс $s = \pm 1$) и конечной (индекс $s' = \pm 1$) χ -частицы можно записать формально в виде

$$\begin{aligned} l_{s',s}^{\mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv \bar{u}(\mathbf{k}', s') O_{\chi}^{\mu} u(\mathbf{k}, s) = \\ &= \bar{u}(\mathbf{k}', s') \{\chi_V \gamma^{\mu} + \chi_A \gamma^{\mu} \gamma_5 + \chi_P \gamma_5 + \chi_S\} u(\mathbf{k}, s) = \\ &= \chi_V V_{s's}^{\mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + \chi_A A_{s's}^{\mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + \chi_S S_{s's}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + \chi_P P_{s's}(\mathbf{k}', \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Векторные, аксиально-векторные, скалярные и псевдоскалярные нуклонные и лептонные токи определены формулами (2.2). В результате видно, что скалярные произведения лептонного (3.2) и нуклонного (3.1) токов, формально (для иллюстрации) записанные в виде*

$$\begin{aligned} (l_{s's}^{\mu} h_{r'r}^f) &= \bar{u}(\mathbf{k}', s') O_{\chi}^{\mu} u(\mathbf{k}, s) g_{\mu\nu} \bar{u}(\mathbf{p}', r') O_f^{\nu} u(\mathbf{p}, r) = \\ &= \left\{ \chi_V V_{s's}^{\mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + \chi_A A_{s's}^{\mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + \chi_S S_{s's}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + \chi_P P_{s's}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \right\} g_{\mu\nu} \times \\ &\times \left\{ h_V^f V_{r'r}^{\nu}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) + h_A^f A_{r'r}^{\nu}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) + h_S^f S_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) + h_P^f P_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \right\}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

* Возникающие в качестве иллюстрации в (3.3) нефизические произведения типа $V_{s's}^{\mu}(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} S_{r'r}(\mathbf{p}')$ опущены.

будут выглядеть как разложение по восьми «базисным» скалярным произведениям*

$$\begin{aligned}
 (l_{s's}^v h_{r'r}^v) &\equiv V_{s's}^\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) g_{\mu\nu} V_{r'r}^\nu(\mathbf{p}', \mathbf{p}), \\
 (l_{s's}^a h_{r'r}^a) &\equiv A_{s's}^\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) g_{\mu\nu} A_{r'r}^\nu(\mathbf{p}', \mathbf{p}), \\
 (l_{s's}^v h_{r'r}^a) &\equiv V_{s's}^\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) g_{\mu\nu} A_{r'r}^\nu(\mathbf{p}', \mathbf{p}), \\
 (l_{s's}^a h_{r'r}^v) &\equiv A_{s's}^\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) g_{\mu\nu} V_{r'r}^\nu(\mathbf{p}', \mathbf{p}), \\
 (l_{s's}^s h_{r'r}^p) &\equiv S_{s's}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) P_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}), \\
 (l_{s's}^p h_{r'r}^s) &\equiv P_{s's}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) S_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}), \\
 (l_{s's}^s h_{r'r}^s) &\equiv S_{s's}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) S_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}), \\
 (l_{s's}^p h_{r'r}^p) &\equiv P_{s's}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) P_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p})
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

с коэффициентами $c_{ij} = \chi_i h_j^f$, пропорциональными соответствующим эффективным константам взаимодействия.

Здесь все «базисные» скалярные произведения токов (3.4) вычислены в трех различных вариантах биспинорных базисов (базисе спиральности, σ_3 - и смешанном базисе) для всех комбинаций проекций спина начальных и конечных лептона и нуклона. Помимо собственного интереса они оказываются необходимыми для вычислений когерентных (упругих) вкладов в сечения рассеяния массивного нейтрального лептона на ядрах $\chi A \rightarrow \chi A$.

Все скалярные произведения представлены в виде двух основных параметризаций. Они выражены либо через массы нуклона и χ -частицы (согласно (2.38))

$$m, \quad m_\chi \quad \text{и параметры} \quad \lambda_\pm = \sqrt{E_p \pm m}, \quad \xi_\pm = \sqrt{E_\chi \pm m_\chi}, \tag{3.5}$$

либо через энергетические переменные E_χ и E_p из (2.5), заданные в с. ц. м. (2.4), а также через приведенные ниже параметры:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{k}| &= \sqrt{E_\chi^2 - m_\chi^2} = \xi_+ \xi_- = |\mathbf{p}| = \sqrt{E_p^2 - m^2} = \lambda_+ \lambda_- = \frac{\lambda(s, m^2, m_\chi^2)}{2\sqrt{s}}, \\
 |\mathbf{k}|^2 &\equiv \xi_-^2 \xi_+^2 = \xi_-^2 (\xi_-^2 + 2m_\chi) = \lambda_-^2 \lambda_+^2 = \lambda_-^2 (\lambda_-^2 + 2m) = \lambda_+ \lambda_- \xi_+ \xi_-, \\
 E_p &= \lambda_-^2 + m, \quad E_\chi = \xi_-^2 + m_\chi, \quad \lambda_-^2 + \xi_-^2 = \sqrt{s} - m - m_\chi, \\
 \Omega^2 &\equiv \xi_-^2 \lambda_-^2, \quad |\mathbf{k}|^2 + \Omega^2 = \xi_-^2 (\lambda_-^2 + \xi_-^2) = \xi_-^2 (\sqrt{s} - m + m_\chi).
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Когда нуклон покоится, т. е. $p_l = (m, \mathbf{p}_l = \mathbf{0})$, а кинетическая энергия налетающего лептона равна $T_0 = |\mathbf{k}_\chi^l|^2 / (2m_\chi)$, инвариантный квадрат полной

*Для простоты изложения скалярными произведениями будем называть все выражения в (3.4).

энергии нуклона и χ -частицы имеет вид

$$s = (k_l + p_l)^2 = m_\chi^2 + m^2 + 2m\sqrt{m_\chi^2 + [\mathbf{k}_\chi^l]^2} = m_\chi^2 + m^2 + 2mm_\chi \left(1 + \frac{2T_0}{m_\chi}\right)^{1/2}.$$

Поскольку упругое рассеяние $\chi + p \rightarrow \chi + p$ рассматривается в с. ц. м. сталкивающихся частиц, то при фиксированном значении полной энергии s свободными параметрами являются только углы рассеяния θ и ϕ . В ряде случаев путем стандартной тригонометрии* удобно перейти во всех выражениях от угла θ к углу $\theta/2$.

Помимо формул (3.6) имеются следующие полезные соотношения:

$$\begin{aligned}\lambda_+^2 &= E_p + m = \frac{(\sqrt{s} + m)^2 - m_\chi^2}{2\sqrt{s}}, \\ \lambda_-^2 &= E_p - m = \frac{(\sqrt{s} - m)^2 - m_\chi^2}{2\sqrt{s}}, \\ \xi_+^2 &= E_\chi + m_\chi = \frac{(\sqrt{s} + m_\chi)^2 - m^2}{2\sqrt{s}}, \\ \xi_-^2 &= E_\chi - m_\chi = \frac{(\sqrt{s} - m_\chi)^2 - m^2}{2\sqrt{s}};\end{aligned}\tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\xi_+^2 - \xi_-^2 \cos \theta &= 2m_\chi + \xi_-^2(1 - \cos \theta) = 2\left(m + \xi_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right), \\ \xi_+^2 + \xi_-^2 \cos \theta &= 2m_\chi + \xi_-^2(1 + \cos \theta) = 2\left(m + \xi_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right), \\ \lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta &= 2\left(m + \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right), \quad \lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta = 2\left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}\right).\end{aligned}\tag{3.8}$$

Переменные без ξ_+^2 и λ_+^2 удобны при переходе к нерелятивистскому приближению, когда кинетические энергии частиц намного меньше их масс, т. е. когда $\xi_-^2 = E_\chi - m_\chi \simeq |\mathbf{k}|^2/(2m_\chi) \ll m_\chi$ и $\lambda_-^2 = E_p - m \simeq |\mathbf{k}|^2/(2m) \ll m$, что фактически означает, что $\xi_-^2 \simeq 0$ и $\lambda_-^2 \simeq 0$. Остальные подробности представлены в прил. 5.

* $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$, $\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$, $1 + \cos \theta = 2 \cos^2(\theta/2)$.

3.1. Скалярные произведения токов в $\chi\chi$ -базисе. Здесь приведены скалярные произведения для комбинаций лептонных и нуклонных токов, отвечающие всем возможным значениям спиральности начального (второй, или s' -, r' -индекс) и конечного (первый, или s -, r -индекс) лептона и нуклона. Они вычислены в с. ц. м., когда токи для χ -частицы и нуклона взяты в базисе спиральности (п. 2.3), т. е. когда (по аналогии с нейтрино) спины всех частиц направлены вдоль (+1) или против (-1) их импульсов. Скалярные произведения отмечены одним верхним индексом χ , который говорит о базисе спиральности. Для удобства во всех полученных результатах удержаны определения соответствующих скалярных произведений*.

Итак, для скалярных произведений *векторных* лептонных и нуклонных токов, $(l_{s',s}^v h_{r',r}^v)^\chi$, получены результаты, которые приведены ниже. Когда нуклон сохраняет свою спиральность, они таковы:

$$\begin{aligned} (l_{\mp\mp}^v h_{\mp\mp}^v)^\chi &\equiv V_{\mp\mp}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{\mp\mp}^\nu(\mathbf{p}') = \\ &= \pm 4 \left[E_\chi E_p \cos^2 \frac{\theta}{2} + |\mathbf{k}|^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] e^{\pm i\phi}, \\ (l_{\pm\pm}^v h_{\mp\mp}^v)^\chi &\equiv V_{\pm\pm}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{\mp\mp}^\nu(\mathbf{p}') = \pm 4 \left[E_\chi E_p + |\mathbf{k}|^2 \right] \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\ (l_{\pm\mp}^v h_{\mp\mp}^v)^\chi &\equiv V_{\pm\mp}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{\mp\mp}^\nu(\mathbf{p}') = +4m_\chi E_p \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\ (l_{\mp\pm}^v h_{\mp\mp}^v)^\chi &\equiv V_{\mp\pm}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{\mp\mp}^\nu(\mathbf{p}') = -4m_\chi E_p \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm 2i\phi}. \end{aligned}$$

Когда нуклон меняет свою спиральность, они принимают вид

$$\begin{aligned} (l_{\mp\mp}^v h_{\mp\pm}^v)^\chi &\equiv V_{\mp\mp}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{\mp\pm}^\nu(\mathbf{p}') = +4E_\chi m \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\ (l_{\pm\pm}^v h_{\mp\pm}^v)^\chi &\equiv V_{\pm\pm}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{\mp\pm}^\nu(\mathbf{p}') = +4E_\chi m \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\ (l_{\mp\pm}^v h_{\mp\pm}^v)^\chi &\equiv V_{\mp\pm}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{\mp\pm}^\nu(\mathbf{p}') = \mp 4m_\chi m \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\ (l_{\mp\pm}^v h_{\mp\mp}^v)^\chi &\equiv V_{\mp\pm}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{\pm\mp}^\nu(\mathbf{p}') = \mp 4m_\chi m \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}. \end{aligned}$$

Для скалярных произведений *аксиально-векторных* лептонных и нуклонных токов, $(l_{s',s}^a h_{r',r}^a)^\chi$, когда нуклон не меняет своей спиральности, результаты

*Подробности вычислений можно найти в прил. 2.

ВЫЧИСЛЕНИЙ ТАКОВЫ:

$$\begin{aligned}
 (l_{\mp\mp}^a h_{\mp\mp}^a)^X &\equiv A_{\mp\mp}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{\mp\mp}^\nu(\mathbf{p}') = \\
 &= \pm 4 \left[|\mathbf{k}|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\chi E_p \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] e^{\pm i\phi}, \\
 (l_{\pm\pm}^a h_{\mp\mp}^a)^X &\equiv A_{\pm\pm}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{\mp\mp}^\nu(\mathbf{p}') = \mp 4 \left[|\mathbf{k}|^2 + E_\chi E_p \right] \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\
 (l_{\pm\mp}^a h_{\mp\mp}^a)^X &\equiv A_{\pm\mp}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{\mp\mp}^\nu(\mathbf{p}') = -4m_\chi E_p \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\
 (l_{\mp\pm}^a h_{\mp\mp}^a)^X &\equiv A_{\mp\pm}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{\mp\mp}^\nu(\mathbf{p}') = +4m_\chi E_p \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm 2i\phi}.
 \end{aligned}$$

Когда нуклон меняет свою спиральность, для аксиальных произведений вычисления дают следующие результаты:

$$\begin{aligned}
 (l_{\mp\mp}^a h_{\mp\pm}^a)^X &\equiv A_{\mp\mp}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{\mp\pm}^\nu(\mathbf{p}') = -4E_\chi m \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\
 (l_{\pm\pm}^a h_{\mp\pm}^a)^X &\equiv A_{\pm\pm}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{\mp\pm}^\nu(\mathbf{p}') = -4E_\chi m \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\
 (l_{\pm\mp}^a h_{\mp\pm}^a)^X &\equiv A_{\pm\mp}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{\mp\pm}^\nu(\mathbf{p}') = \mp 4m_\chi m \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi}, \\
 (l_{\mp\pm}^a h_{\mp\pm}^a)^X &\equiv A_{\mp\pm}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{\mp\pm}^\nu(\mathbf{p}') = \mp 4m_\chi m \left(1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) e^{\pm i\phi}.
 \end{aligned}$$

Далее, для скалярных произведений *векторного* лептонного и *аксиально-векторного* нуклонного токов, $(l_{s's'}^v h_{r'r'}^a)^X$, когда нуклон не меняет своей спиральности, получаются следующие результаты:

$$\begin{aligned}
 (l_{\mp\mp}^v h_{\mp\mp}^a)^X &\equiv V_{\mp\mp}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{\mp\mp}^\nu(\mathbf{p}') = \\
 &= -4|\mathbf{k}| \left[E_\chi \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_p \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] e^{\pm i\phi}, \\
 (l_{\pm\pm}^v h_{\mp\mp}^a)^X &\equiv V_{\pm\pm}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{\mp\mp}^\nu(\mathbf{p}') = -4|\mathbf{k}| [E_\chi + E_p] \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\
 (l_{\pm\mp}^v h_{\mp\mp}^a)^X &\equiv V_{\pm\mp}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{\mp\mp}^\nu(\mathbf{p}') = \mp 4m_\chi |\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\
 (l_{\mp\pm}^v h_{\mp\mp}^a)^X &\equiv V_{\mp\pm}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{\mp\mp}^\nu(\mathbf{p}') = \pm 4m_\chi |\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm 2i\phi}.
 \end{aligned}$$

Если нуклон меняет свою спиральность, то выражения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}(l_{--}^v h_{\mp\pm}^a)^\chi &\equiv V_{--}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{\mp\pm}^\nu(\mathbf{p}') = +4m|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\(l_{++}^v h_{\mp\pm}^a)^\chi &\equiv V_{++}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{\mp\pm}^\nu(\mathbf{p}') = -4m|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\(l_{-+}^v h_{\pm\mp}^a)^\chi &\equiv V_{-+}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{\pm\mp}^\nu(\mathbf{p}') = (l_{+-}^v h_{\pm\mp}^a)^\chi \equiv \\ &\equiv V_{+-}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{\pm\mp}^\nu(\mathbf{p}') = 0.\end{aligned}$$

Для скалярных произведений *аксиально-векторного* лептонного и *векторного* нуклонного токов, $(l_{s's}^a h_{r'r}^v)^\chi$, когда нуклон не меняет своей спиральности, имеются следующие формулы:

$$\begin{aligned}(l_{\mp\mp}^a h_{\mp\mp}^v)^\chi &\equiv A_{\mp\mp}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{\mp\mp}^\nu(\mathbf{p}') = \\ &= -4|\mathbf{k}| \left[E_p \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\chi \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] e^{\pm i\phi}, \\(l_{\pm\pm}^a h_{\mp\mp}^v)^\chi &\equiv A_{\pm\pm}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{\mp\mp}^\nu(\mathbf{p}') = +4|\mathbf{k}| [E_p + E_\chi] \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\(l_{\pm\mp}^a h_{\mp\mp}^v)^\chi &\equiv A_{\pm\mp}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{\mp\mp}^\nu(\mathbf{p}') = \pm 4m_\chi |\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\(l_{\mp\pm}^a h_{\mp\mp}^v)^\chi &\equiv A_{\mp\pm}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{\mp\mp}^\nu(\mathbf{p}') = \mp 4m_\chi |\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm 2i\phi}.\end{aligned}$$

Когда нуклон меняет свою спиральность, то формулы приобретают такой вид:

$$\begin{aligned}(l_{--}^a h_{\mp\pm}^v)^\chi &\equiv A_{--}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{\mp\pm}^\nu(\mathbf{p}') = -4m|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\(l_{++}^a h_{\mp\pm}^v)^\chi &\equiv A_{++}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{\mp\pm}^\nu(\mathbf{p}') = +4m|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\(l_{-+}^a h_{\pm\mp}^v)^\chi &\equiv A_{-+}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{\pm\mp}^\nu(\mathbf{p}') = (l_{+-}^a h_{\pm\mp}^v)^\chi \equiv \\ &\equiv A_{+-}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{\pm\mp}^\nu(\mathbf{p}') = 0.\end{aligned}$$

Соответственно, для скалярных произведений *скалярных* лептонных и нуклонных токов $(l_{s's}^s h_{r'r}^s)^\chi$, когда нуклон не меняет своей спиральности, вычисления дают следующие результаты:

$$\begin{aligned}(l_{\mp\mp}^s h_{\mp\mp}^s)^\chi &\equiv S_{\mp\mp}(\mathbf{k}') S_{\mp\mp}(\mathbf{p}') = (l_{\pm\pm}^s h_{\mp\mp}^s)^\chi \equiv \\ &\equiv S_{\pm\pm}(\mathbf{k}') S_{\mp\mp}(\mathbf{p}') = \pm 4m_\chi m \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\(l_{\mp\pm}^s h_{\pm\pm}^s)^\chi &\equiv S_{\mp\pm}(\mathbf{k}') S_{\pm\pm}(\mathbf{p}') = +4E_\chi m \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\(l_{\mp\pm}^s h_{\mp\mp}^s)^\chi &\equiv S_{\mp\pm}(\mathbf{k}') S_{\mp\mp}(\mathbf{p}') = -4E_\chi m \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm 2i\phi}.\end{aligned}$$

Когда нуклон меняет свою спиральность, «скалярные скаляры» таковы:

$$\begin{aligned}
 (l_{\mp\mp}^s h_{\mp\mp}^s)^\chi &\equiv S_{\mp\mp}(\mathbf{k}')S_{\mp\mp}(\mathbf{p}') = (l_{\pm\pm}^s h_{\pm\pm}^s)^\chi \equiv \\
 &\equiv S_{\pm\pm}(\mathbf{k}')S_{\pm\pm}(\mathbf{p}') = +4m_\chi E_p \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\
 (l_{\mp\pm}^s h_{\mp\pm}^s)^\chi &\equiv S_{\mp\pm}(\mathbf{k}')S_{\mp\pm}(\mathbf{p}') = (l_{\pm\mp}^s h_{\pm\mp}^s)^\chi \equiv \\
 &\equiv S_{\pm\mp}(\mathbf{k}')S_{\pm\mp}(\mathbf{p}') = \mp 4E_\chi E_p \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}.
 \end{aligned}$$

Следующие скалярные произведения (*псевдо*)скалярного лептонного и (*псевдо*)скалярного нуклонного токов, когда хотя бы одна из частиц сохраняет спиральность, равны нулю:

$$\begin{aligned}
 (l_{r'r}^s h_{\mp\mp}^p) &\equiv S_{r'r}(\mathbf{k}')P_{\mp\mp}(\mathbf{p}') = (l_{-}^s h_{\mp\mp}^p) = \\
 &= (l_{\mp+}^s h_{\mp\mp}^p) = (l_{+-}^s h_{\mp\mp}^p) = (l_{++}^s h_{\mp\mp}^p) = 0, \\
 (l_{\mp\mp}^p h_{r'r}^s) &\equiv P_{\mp\mp}(\mathbf{k}')S_{r'r}(\mathbf{p}') = (l_{\mp\mp}^p h_{++}^s) = \\
 &= (l_{\mp\mp}^p h_{-+}^s) = (l_{\mp\mp}^p h_{+-}^s) = (l_{\mp\mp}^p h_{--}^s) = 0.
 \end{aligned}$$

Для остальных скалярных произведений (*псевдо*)скалярного лептонного и (*псевдо*)скалярного нуклонного токов имеются выражения

$$\begin{aligned}
 (l_{\mp\pm}^p h_{\mp+}^s) &\equiv P_{\mp\pm}(\mathbf{k}')S_{\mp+}(\mathbf{p}') = (l_{\mp\pm}^p h_{\mp+}^s) \equiv \\
 &\equiv P_{\mp\pm}(\mathbf{k}')S_{\mp+}(\mathbf{p}') = -4|\mathbf{k}|E_p \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\
 (l_{\mp\pm}^p h_{\pm\pm}^s) &\equiv P_{\mp\pm}(\mathbf{k}')S_{\pm\pm}(\mathbf{p}') = \pm 4|\mathbf{k}|m \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\
 (l_{\pm\mp}^p h_{\pm\pm}^s) &\equiv P_{\pm\mp}(\mathbf{k}')S_{\pm\pm}(\mathbf{p}') = \pm 4|\mathbf{k}|m \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp 2i\phi}, \\
 (l_{-}^s h_{\mp\pm}^p) &\equiv S_{-}(\mathbf{k}')P_{\mp\pm}(\mathbf{p}') = (l_{++}^s h_{\mp\pm}^p) \equiv \\
 &\equiv S_{++}(\mathbf{k}')P_{\mp\pm}(\mathbf{p}') = \pm 4m_\chi |\mathbf{k}| \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \\
 (l_{\mp\pm}^s h_{\mp\pm}^p) &\equiv S_{\mp\pm}(\mathbf{k}')P_{\mp\pm}(\mathbf{p}') = -4E_\chi |\mathbf{k}| \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\
 (l_{\pm\mp}^s h_{\mp\pm}^p) &\equiv S_{\pm\mp}(\mathbf{k}')P_{\mp\pm}(\mathbf{p}') = +4E_\chi |\mathbf{k}| \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi}.
 \end{aligned}$$

Наконец, для скалярных произведений чисто *псевдоскалярных* токов, $(l_{s's}^p h_{r'r}^p)^\chi$, когда нуклон и лептон меняют свои спиральности, получаются ненулевые результаты:

$$\begin{aligned}
 (l_{\mp\pm}^p h_{\mp+}^p)^\chi &\equiv P_{\mp\pm}(\mathbf{k}')P_{\mp+}(\mathbf{p}') = -4|\mathbf{k}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\
 (l_{\mp\pm}^p h_{\mp-}^p)^\chi &\equiv P_{\mp\pm}(\mathbf{k}')P_{\mp-}(\mathbf{p}') = +4|\mathbf{k}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}.
 \end{aligned}$$

Во всех остальных случаях чисто псевдоскалярные скалярные произведения заноляются:

$$\begin{aligned}(l_{r'r}^p h_{\mp\mp}^p)^x &\equiv P_{r'r}(\mathbf{k}')P_{\mp\mp}(\mathbf{p}') = (l_{-}^p h_{\mp\mp}^p)^x = \\ &= (l_{+}^p h_{\mp\mp}^p)^x = (l_{+-}^p h_{\mp\mp}^p)^x = (l_{++}^p h_{\mp\mp}^p)^x = 0, \\ (l_{\mp\mp}^p h_{-+}^p)^x &\equiv P_{\mp\mp}(\mathbf{k}')P_{-+}(\mathbf{p}') = (l_{\pm\pm}^p h_{+-}^p)^x \equiv P_{\pm\pm}(\mathbf{k}')P_{+-}(\mathbf{p}') = 0.\end{aligned}$$

Использованное выше представление всех скалярных произведений в переменных $|\mathbf{k}|$, E_χ и E_p выглядит компактно и наглядно, однако, например, для перехода к нерелятивистскому приближению более удобна запись скалярных произведений в переменных λ_- , ξ_- .

Скалярные произведения в $\chi\chi$ -базисе в переменных λ_- и ξ_- . С учетом выражений (3.6) все приведенные выше (в $\chi\chi$ -базисе) скалярные произведения можно переписать в переменных λ_- и ξ_- .

Если нуклон и χ -частица не меняют спиральность в результате взаимодействия, то скалярные произведения для лептонных и нуклонных токов в $\chi\chi$ -базисе принимают вид

$$\begin{aligned}(l_{\mp\mp}^v h_{\mp\mp}^v)^x &= \\ &= \pm 4 \left[(\lambda_-^2 + m)(\xi_-^2 + m_\chi) \cos^2 \frac{\theta}{2} + \lambda_+ \lambda_- \xi_+ \xi_- \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] e^{\pm i\phi}, \\ (l_{\pm\pm}^v h_{\mp\mp}^v)^x &= \pm 4 \left[(\lambda_-^2 + m)(\xi_-^2 + m_\chi) + \lambda_+ \lambda_- \xi_+ \xi_- \right] \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\ (l_{\mp\mp}^a h_{\mp\mp}^a)^x &= \\ &= \pm 4 \left[(\lambda_-^2 + m)(\xi_-^2 + m_\chi) \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \lambda_+ \lambda_- \xi_+ \xi_- \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] e^{\pm i\phi}, \\ (l_{\mp\mp}^a h_{\pm\pm}^a)^x &= \\ &= \pm 4 \left[(\lambda_-^2 + m)(\xi_-^2 + m_\chi) + \lambda_+ \lambda_- \xi_+ \xi_- \right] \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi} = -(l_{\mp\mp}^v h_{\pm\pm}^v)^x, \\ (l_{\pm\pm}^v h_{\pm\pm}^a)^x &= -4\lambda_- \lambda_+ \left[(\xi_-^2 + m_\chi) \cos^2 \frac{\theta}{2} + (\lambda_-^2 + m) \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] e^{\mp i\phi}, \\ (l_{\pm\pm}^a h_{\pm\pm}^v)^x &= -4\lambda_+ \lambda_- \left[(\lambda_-^2 + m) \cos^2 \frac{\theta}{2} + (\xi_-^2 + m_\chi) \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] e^{\mp i\phi}, \\ (l_{\pm\pm}^v h_{\mp\mp}^a)^x &= -4\lambda_- \lambda_+ \sqrt{s} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\ (l_{\pm\pm}^a h_{\mp\mp}^v)^x &= +4\lambda_+ \lambda_- \sqrt{s} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\ (l_{--}^s h_{\mp\mp}^s)^x &= (l_{++}^s h_{\mp\mp}^s)^x = \pm 4m_\chi m \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}.\end{aligned}$$

Если нуклон *не* меняет спиральность, а χ -частица *меняет* спиральность, то все такие скалярные произведения токов приведены ниже:

$$\begin{aligned}
 (l_{+-}^v h_{--}^v)^x &= (l_{-+}^v h_{++}^v)^x = -(l_{+-}^a h_{--}^a)^x = -(l_{-+}^a h_{++}^a)^x = \\
 &= +4m_\chi(\lambda_-^2 + m) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\
 (l_{-+}^a h_{--}^a)^x &= -(l_{-+}^v h_{--}^v)^x = +4m_\chi(\lambda_-^2 + m) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{+2i\phi} = \\
 &= (l_{+-}^v h_{--}^v)^x e^{+2i\phi}, \\
 (l_{+-}^a h_{++}^a)^x &= -(l_{+-}^v h_{++}^v)^x = +4m_\chi(\lambda_-^2 + m) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-2i\phi} = \\
 &= (l_{+-}^v h_{--}^v)^x e^{-2i\phi}, \\
 (l_{-+}^v h_{++}^v)^x &= (l_{-+}^a h_{--}^a)^x = -(l_{-+}^v h_{--}^v)^x = -(l_{-+}^a h_{++}^a)^x = \\
 &= +4m_\chi \lambda_- \lambda_+ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\
 (l_{-+}^v h_{--}^a)^x &= -(l_{-+}^a h_{--}^v)^x = +4m_\chi \lambda_- \lambda_+ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{+2i\phi} = \\
 &= (l_{-+}^a h_{++}^a)^x e^{+2i\phi}, \\
 (l_{+-}^a h_{++}^v)^x &= -(l_{+-}^v h_{++}^a)^x = +4m_\chi \lambda_+ \lambda_- \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-2i\phi} = \\
 &= (l_{+-}^a h_{--}^a)^x e^{-2i\phi}, \\
 (l_{+-}^s h_{++}^s)^x &= -4m(\xi_-^2 + m_\chi) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-2i\phi} = (l_{-+}^s h_{++}^s)^x e^{-2i\phi}, \\
 (l_{-+}^s h_{--}^s)^x &= -4m(\xi_-^2 + m_\chi) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{+2i\phi}, \\
 (l_{+-}^s h_{--}^s)^x &= (l_{-+}^s h_{++}^s)^x = +4m(\xi_-^2 + m_\chi) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\
 (l_{+-}^p h_{++}^s)^x &= +4\xi_+ \xi_- m \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-2i\phi}, \\
 (l_{-+}^p h_{--}^s)^x &= -4\xi_+ \xi_- m \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{+2i\phi}, \\
 (l_{+-}^p h_{--}^s)^x &= -(l_{-+}^p h_{++}^s)^x = -4\xi_+ \xi_- m \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}.
 \end{aligned}$$

Когда нуклон не меняет спиральность, все скалярные произведения за счет псевдоскалярного взаимодействия равны нулю:

$$(l_{r,r}^p h_{\pm\pm}^p)^x = (l_{--}^p h_{\pm\pm}^p)^x = (l_{-+}^p h_{\pm\pm}^p)^x = (l_{+-}^p h_{\pm\pm}^p)^x = (l_{++}^p h_{\pm\pm}^p)^x = 0.$$

Если теперь нуклон *меняет* спиральность, а χ -частица *не меняет* спиральность, то скалярные произведения таковы:

$$\begin{aligned}
 (l_{\mp\mp}^v h_{-+}^v)^{\chi} &= (l_{\mp\mp}^v h_{+-}^v)^{\chi} = +4m(\xi_-^2 + m_{\chi}) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\
 (l_{\mp\mp}^a h_{-+}^a)^{\chi} &= (l_{\mp\mp}^a h_{+-}^a)^{\chi} = -4m(\xi_-^2 + m_{\chi}) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = -(l_{\mp\mp}^v h_{-+}^v)^{\chi}, \\
 (l_{--}^v h_{\pm\mp}^a)^{\chi} &= -(l_{++}^v h_{\pm\mp}^a)^{\chi} = +4m\xi_+\xi_- \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\
 (l_{++}^a h_{\mp\pm}^v)^{\chi} &= -(l_{--}^a h_{\mp\pm}^v)^{\chi} = +4m\xi_+\xi_- \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = (l_{--}^v h_{\pm\mp}^a)^{\chi}, \\
 (l_{--}^s h_{\mp\pm}^s)^{\chi} &= (l_{++}^s h_{\mp\pm}^s)^{\chi} = +4m_{\chi}(\lambda_-^2 + m) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\
 (l_{\mp\mp}^s h_{-+}^p)^{\chi} &= -(l_{\mp\mp}^s h_{+-}^p)^{\chi} = +4m_{\chi}\lambda_+\lambda_- \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \\
 (l_{\mp\mp}^p h_{-+}^p)^{\chi} &= (l_{\mp\mp}^p h_{+-}^p)^{\chi} = 0.
 \end{aligned}$$

Наконец, когда обе частицы *меняют спиральность*, для скалярных произведений вида $(l_{s' \neq s} h_{r' \neq r})^{\chi}$ получаем следующее:

$$\begin{aligned}
 (l_{+-}^v h_{\mp\pm}^v)^{\chi} &= -(l_{+-}^a h_{-+}^a)^{\chi} = +4m_{\chi}m \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, \\
 (l_{-+}^v h_{\mp\pm}^v)^{\chi} &= -(l_{-+}^a h_{+-}^a)^{\chi} = -4m_{\chi}m \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{+i\phi}, \\
 (l_{\pm\mp}^a h_{\pm\mp}^a)^{\chi} &= \pm 4m_{\chi}m \left(1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) e^{\mp i\phi}, \\
 (l_{\pm\mp}^s h_{\pm\mp}^s)^{\chi} &= (l_{\pm\mp}^s h_{\mp\pm}^s)^{\chi} = \pm 4(\lambda_-^2 + m)(\xi_-^2 + m_{\chi}) \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi}, \\
 (l_{\mp\pm}^v h_{\mp\pm}^a)^{\chi} &= (l_{\pm\mp}^v h_{\mp\pm}^a)^{\chi} = (l_{\mp\pm}^a h_{\mp\pm}^v)^{\chi} = (l_{\pm\mp}^a h_{\mp\pm}^v)^{\chi} = 0, \\
 (l_{\mp\pm}^p h_{\mp\pm}^p)^{\chi} &= -(l_{\mp\pm}^p h_{-+}^p)^{\chi} = +4\lambda_+\lambda_-\xi_+\xi_- \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\
 (l_{\mp\pm}^p h_{-+}^s)^{\chi} &= (l_{\mp\pm}^p h_{+-}^s)^{\chi} = -4\xi_+\xi_-(\lambda_-^2 + m) \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\
 (l_{\mp\pm}^s h_{-+}^p)^{\chi} &= -(l_{\mp\pm}^s h_{+-}^p)^{\chi} = \mp 4\lambda_+\lambda_-(\xi_-^2 + m_{\chi}) \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}.
 \end{aligned}$$

Удобство такого (λ_-, ξ_-) -представления для скалярных произведений видно из перехода в *нерелятивистский предел*, когда можно считать, что $\lambda_- \simeq \xi_- \ll m_{\chi}$, поэтому вкладками, пропорциональными λ_- и ξ_- , можно пренебречь. Тогда «выживают» только скалярные произведения, пропорциональные произведению масс частиц, при этом возникает достаточно большое

число скалярных произведений, очень похожих друг на друга:

$$\begin{aligned}
 (l_{\mp\mp}^v h_{\mp\mp}^v)^x &= (l_{\mp\mp}^v h_{\mp\mp}^v)^x = (l_{\pm\pm}^v h_{\mp\mp}^v)^x = +4m_\chi m \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\
 (l_{\mp\mp}^s h_{\mp\mp}^s)^x &= (l_{\mp\mp}^s h_{\mp\mp}^s)^x = (l_{\pm\pm}^s h_{\mp\mp}^s)^x = +4m_\chi m \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\
 (l_{\mp\mp}^a h_{\mp\mp}^a)^x &= (l_{\mp\mp}^a h_{\mp\mp}^a)^x = (l_{\pm\pm}^a h_{\mp\mp}^a)^x = \\
 &= -4m_\chi m \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = -(l_{\mp\mp}^v h_{\mp\mp}^v)^x, \\
 (l_{\mp\pm}^v h_{\mp\mp}^v)^x &= (l_{\mp\pm}^s h_{\mp\mp}^s)^x = -4m_\chi m \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm 2i\phi}, \\
 (l_{\mp\pm}^a h_{\mp\mp}^a)^x &= +4m_\chi m \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm 2i\phi}, \\
 (l_{\mp\pm}^s h_{\pm\pm}^s)^x &= (l_{\pm\pm}^s h_{\pm\pm}^s)^x = \mp 4m_\chi m \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi}, \\
 (l_{\pm\pm}^v h_{\pm\pm}^v)^x &= (l_{\mp\mp}^v h_{\pm\pm}^v)^x = -(l_{\mp\mp}^a h_{\pm\pm}^a)^x = \mp 4m_\chi m \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi}, \\
 (l_{\mp\pm}^v h_{\mp\pm}^v)^x &= (l_{\mp\pm}^v h_{\mp\pm}^v)^x = -(l_{\pm\pm}^a h_{\mp\pm}^a)^x = \pm 4m_\chi m \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi}, \\
 (l_{\mp\pm}^s h_{\pm\pm}^s)^x &= (l_{\mp\pm}^s h_{\mp\pm}^s)^x = \pm 4m_\chi m \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi}, \\
 (l_{\mp\mp}^a h_{\mp\mp}^a)^x &= \pm 4m_\chi m \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) e^{\pm i\phi}, \\
 (l_{\pm\pm}^a h_{\pm\pm}^a)^x &= \pm 4m_\chi m \left(1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) e^{\mp i\phi}.
 \end{aligned}$$

Остальные скалярные произведения в нерелятивистском приближении обращаются в нуль:

$$\begin{aligned}
 (l_{\mp\pm}^p h_{\mp\mp}^p)^x &= (l_{\mp\pm}^p h_{\mp\mp}^p)^x = (l_{\mp\pm}^p h_{\mp\mp}^p)^x = (l_{\mp\pm}^p h_{\mp\mp}^p)^x = 0, \\
 (l_{\mp\pm}^p h_{\mp\pm}^p)^x &= (l_{\mp\pm}^p h_{\mp\pm}^p)^x = (l_{\mp\pm}^p h_{\mp\pm}^p)^x = (l_{\mp\pm}^p h_{\mp\pm}^p)^x = 0, \\
 (l_{\mp\pm}^v h_{\mp\pm}^a)^x &= (l_{\mp\pm}^v h_{\mp\pm}^a)^x = (l_{\pm\pm}^v h_{\pm\pm}^a)^x = (l_{\pm\pm}^v h_{\mp\mp}^a)^x = 0, \\
 (l_{\mp\mp}^v h_{\mp\pm}^a)^x &= (l_{\mp\mp}^v h_{\mp\pm}^a)^x = (l_{\pm\pm}^v h_{\pm\pm}^a)^x = (l_{\pm\pm}^v h_{\mp\mp}^a)^x = 0, \\
 (l_{\mp\pm}^v h_{\pm\pm}^a)^x &= (l_{\mp\pm}^v h_{\mp\mp}^a)^x = (l_{\mp\pm}^v h_{\mp\mp}^a)^x = (l_{\mp\pm}^v h_{\mp\mp}^a)^x = 0, \\
 (l_{\mp\pm}^a h_{\mp\pm}^v)^x &= (l_{\mp\pm}^a h_{\mp\pm}^v)^x = (l_{\pm\pm}^a h_{\mp\mp}^v)^x = (l_{\pm\pm}^a h_{\mp\mp}^v)^x = 0.
 \end{aligned}$$

3.2. Скалярные произведения токов в $\eta\eta$ -базисе. Здесь приведены скалярные произведения для комбинаций лептонных и нуклонных токов, отвечающие всем возможным проекциям спина лептона и нуклона на заданное

направление (z -ось). Они обозначены верхним индексом η и вычислены в $\eta\eta$ -базисе (см. п. 2.3 и прил. 3), где все токи χ -частицы и нуклона выражены через биспиноры, являющиеся собственными состояниями σ_3 -оператора.

Для скалярных произведений *аксиально-векторных* лептонных и нуклонных токов, $(l_{s's}^a h_{r'r}^a)$, когда нуклон *не меняет проекцию спина* на выделенное направление, получаем

$$\begin{aligned} (l_{--}^a h_{--}^a)^\eta &= (l_{++}^a h_{++}^a)^\eta = -\xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_-(1 + \cos\theta)^2 - \\ &\quad - (\xi_+^2 + \xi_-^2 \cos\theta)(\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos\theta), \\ (l_{\pm\pm}^a h_{\mp\mp}^a)^\eta &= \xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_-(1 + \cos\theta)^2 + \\ &\quad + (\xi_+^2 + \xi_-^2 \cos\theta)(\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos\theta) + 2\xi_-^2 \lambda_-^2 \sin^2\theta, \\ (l_{\mp\pm}^a h_{\mp\mp}^a)^\eta &= \pm[\xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_-(1 + \cos\theta) + \\ &\quad + 2(\xi_+^2 - \xi_-^2 \cos\theta)\lambda_-^2 + \xi_-^2(\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos\theta)] \sin\theta e^{\pm i\phi}, \\ (l_{\pm\mp}^a h_{\mp\mp}^a)^\eta &= \pm[\xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_-(1 + \cos\theta) + \xi_-^2(\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos\theta)] \sin\theta e^{\mp i\phi}. \end{aligned}$$

Если нуклон *меняет проекцию своего спина* на выделенное направление, то соответствующие скалярные произведения принимают такой вид:

$$\begin{aligned} (l_{+-}^a h_{+-}^a)^\eta &= (l_{-+}^a h_{-+}^a)^\eta = -[\xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_- + \xi_-^2 \lambda_-^2] \sin^2\theta - \\ &\quad - 2(\xi_+^2 - \xi_-^2 \cos\theta)(\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos\theta), \\ (l_{\mp\mp}^a h_{\mp\pm}^a)^\eta &= \pm[\xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_-(1 + \cos\theta) + 2\xi_-^2(\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos\theta) + \\ &\quad + (\xi_+^2 + \xi_-^2 \cos\theta)\lambda_-^2] \sin\theta e^{\pm i\phi}, \\ (l_{\mp\pm}^a h_{\mp\pm}^a)^\eta &= -[\xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_- + \xi_-^2 \lambda_-^2] \sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}, \\ (l_{\pm\pm}^a h_{\mp\pm}^a)^\eta &= \mp[\xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_-(1 + \cos\theta) + (\xi_+^2 + \xi_-^2 \cos\theta)\lambda_-^2] \sin\theta e^{\pm i\phi}. \end{aligned}$$

Для скалярных произведений *векторных* лептонных и нуклонных токов, $(l_{s's}^v h_{r'r}^v)$, когда нуклон *не меняет проекцию спина* на выделенное направление, получаем

$$\begin{aligned} (l_{--}^v h_{--}^v)^\eta &= (l_{++}^v h_{++}^v)^\eta = (\xi_+^2 + \xi_-^2 \cos\theta)(\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos\theta) + \\ &\quad + \xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_-(1 + \cos\theta)^2, \\ (l_{\pm\pm}^v h_{\mp\mp}^v)^\eta &= (\xi_+^2 + \xi_-^2 \cos\theta)(\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos\theta) + \\ &\quad + \xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_-[(1 + \cos\theta)^2 + 2\sin^2\theta], \\ (l_{\mp\mp}^v h_{\mp\pm}^v)^\eta &= \mp[\xi_-^2(\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos\theta) + \xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_-(1 + \cos\theta) + \\ &\quad + 2\xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_-(1 - \cos\theta)] \sin\theta e^{\mp i\phi}, \\ (l_{\mp\pm}^v h_{\mp\mp}^v)^\eta &= \mp[\xi_-^2(\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos\theta) + \xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_-(1 + \cos\theta)] \sin\theta e^{\mp i\phi}. \end{aligned}$$

Когда нуклон *меняет проекцию спина* на выделенное направление, векторные скалярные произведения принимают вид

$$\begin{aligned}
 (l_{\pm\pm}^v h_{\pm\mp}^v)^\eta &= \mp [(\xi_+^2 + \xi_-^2 \cos \theta) \lambda_-^2 + \xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- (1 + \cos \theta) + \\
 &\quad + 2\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- (1 - \cos \theta)] \sin \theta e^{\mp i\phi}, \\
 (l_{\mp\mp}^v h_{\pm\mp}^v)^\eta &= \mp [(\xi_+^2 + \xi_-^2 \cos \theta) \lambda_-^2 + \xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- (1 + \cos \theta)] \sin \theta e^{\mp i\phi}, \\
 (l_{+-}^v h_{-+}^v)^\eta &= (l_{-+}^v h_{+-}^v)^\eta = -[\xi_-^2 \lambda_-^2 \sin^2 \theta + \xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \sin^2 \theta + \\
 &\quad + 2\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- (1 - \cos \theta)^2], \\
 (l_{\mp\pm}^v h_{\mp\pm}^v)^\eta &= +[\xi_-^2 \lambda_-^2 + \xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_-] \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}.
 \end{aligned}$$

Для скалярных произведений *векторного* лептонного и *аксиально-векторного* нуклонного токов в случае, когда нуклон *не меняет проекцию спина* на выделенное направление, имеются следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 (l_{\mp\mp}^v h_{\mp\mp}^a)^\eta &= \pm [(\xi_+^2 + \xi_-^2 \cos \theta) \lambda_+ \lambda_- + \xi_+ \xi_- (\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta)] (1 + \cos \theta), \\
 (l_{\mp\mp}^v h_{\pm\pm}^a)^\eta &= \mp [(\xi_+^2 + \xi_-^2 \cos \theta) \lambda_+ \lambda_- (1 + \cos \theta) + \\
 &\quad + \xi_+ \xi_- (1 + \cos \theta) (\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta) + 2\xi_+ \xi_- \lambda_-^2 \sin^2 \theta], \\
 (l_{\pm\mp}^v h_{\pm\pm}^a)^\eta &= +[\xi_-^2 \lambda_+ \lambda_- (1 + \cos \theta) + \xi_+ \xi_- (\lambda_+^2 + \\
 &\quad + \lambda_-^2 \cos \theta) + 2\xi_+ \xi_- \lambda_-^2 (1 - \cos \theta)] \sin \theta e^{\mp i\phi}, \\
 (l_{\pm\mp}^v h_{\mp\mp}^a)^\eta &= -[\xi_-^2 \lambda_+ \lambda_- (1 + \cos \theta) + \xi_+ \xi_- (\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta)] \sin \theta e^{\mp i\phi}.
 \end{aligned}$$

Если нуклон *меняет проекцию* своего спина на выделенное направление, то *векторно-аксиальные* скалярные произведения принимают вид

$$\begin{aligned}
 (l_{\mp\mp}^v h_{\mp\pm}^a)^\eta &= -[(\xi_+^2 + \xi_-^2 \cos \theta) \lambda_+ \lambda_- + \xi_+ \xi_- \lambda_-^2 (1 + \cos \theta) + \\
 &\quad + 2\xi_+ \xi_- (\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta)] \sin \theta e^{\pm i\phi}, \\
 (l_{\pm\pm}^v h_{\mp\pm}^a)^\eta &= -[(\xi_+^2 + \xi_-^2 \cos \theta) \lambda_+ \lambda_- + \xi_+ \xi_- \lambda_-^2 (1 + \cos \theta)] \sin \theta e^{\pm i\phi}, \\
 (l_{\pm\mp}^v h_{\mp\pm}^a)^\eta &= \pm [\xi_-^2 \lambda_+ \lambda_- \sin^2 \theta + \xi_+ \xi_- \lambda_-^2 \sin^2 \theta + \\
 &\quad + 2\xi_+ \xi_- (\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta) (1 - \cos \theta)], \\
 (l_{\mp\pm}^v h_{\mp\pm}^a)^\eta &= \mp [\xi_-^2 \lambda_+ \lambda_- + \xi_+ \xi_- \lambda_-^2] \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}.
 \end{aligned}$$

Для скалярных произведений *аксиально-векторного* лептонного и *векторного* нуклонного токов, когда нуклон *не меняет проекцию своего спина* на выде-

ленное направление, получаем

$$\begin{aligned}
 (l_{\mp\mp}^a h_{\mp\mp}^v)^\eta &= \mp [\xi_+ \xi_- (\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta) + (\xi_+^2 + \xi_-^2 \cos \theta) \lambda_+ \lambda_-] (1 + \cos \theta), \\
 (l_{\pm\pm}^a h_{\mp\mp}^v)^\eta &= \pm [\xi_+ \xi_- (\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta) (1 + \cos \theta) + \\
 &\quad + (\xi_+^2 + \xi_-^2 \cos \theta) \lambda_+ \lambda_- (1 + \cos \theta) + 2\xi_-^2 \lambda_+ \lambda_- \sin^2 \theta], \\
 (l_{\mp\pm}^a h_{\mp\mp}^v)^\eta &= [\xi_+ \xi_- (\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta) + \xi_-^2 \lambda_+ \lambda_- (1 + \cos \theta) + \\
 &\quad + 2(\xi_+^2 - \xi_-^2 \cos \theta) \lambda_+ \lambda_-] \sin \theta e^{\pm i\phi}, \\
 (l_{\pm\mp}^a h_{\mp\mp}^v)^\eta &= [\xi_+ \xi_- (\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta) + \xi_-^2 \lambda_+ \lambda_- (1 + \cos \theta)] \sin \theta e^{\mp i\phi}.
 \end{aligned}$$

Когда нуклон *меняет проекцию* своего спина на выделенное направление, эти *аксиально-векторные* скалярные произведения преобразуются к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 (l_{\mp\mp}^a h_{\pm\pm}^v)^\eta &= + [\xi_+ \xi_- \lambda_-^2 (1 + \cos \theta) + (\xi_+^2 + \xi_-^2 \cos \theta) \lambda_+ \lambda_-] \sin \theta e^{\mp i\phi}, \\
 (l_{\mp\mp}^a h_{\mp\pm}^v)^\eta &= - [\xi_+ \xi_- \lambda_-^2 (1 + \cos \theta) + (\xi_+^2 + \xi_-^2 \cos \theta) \lambda_+ \lambda_- + \\
 &\quad + 2\xi_-^2 \lambda_+ \lambda_- (1 - \cos \theta)] \sin \theta e^{\pm i\phi}, \\
 (l_{\pm\mp}^a h_{\mp\pm}^v)^\eta &= \pm [\xi_+ \xi_- \lambda_-^2 \sin^2 \theta + \xi_-^2 \lambda_+ \lambda_- \sin^2 \theta + \\
 &\quad + 2(\xi_+^2 - \xi_-^2 \cos \theta) \lambda_+ \lambda_- (1 - \cos \theta)], \\
 (l_{\mp\pm}^a h_{\mp\pm}^v)^\eta &= \pm [\xi_+ \xi_- \lambda_-^2 + \xi_-^2 \lambda_+ \lambda_-] \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}.
 \end{aligned}$$

Аналогично скалярные произведения *скалярных* и *псевдоскалярных* лептонных и нуклонных токов для *не меняющего проекции спина* нуклона на выделенное направление таковы:

$$\begin{aligned}
 (l_{\mp\mp}^s h_{\mp\mp}^s)^\eta &= (l_{\pm\pm}^s h_{\mp\mp}^s)^\eta = + [\xi_+^2 - \xi_-^2 \cos \theta] [\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta], \\
 (l_{\pm\mp}^s h_{s-}^s)^\eta &= (l_{\pm\mp}^s h_{s+}^s)^\eta = \pm \xi_-^2 [\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta] \sin \theta e^{\mp i\phi}, \\
 (l_{\mp\mp}^p h_{p-}^p)^\eta &= (l_{\pm\pm}^p h_{p+}^p)^\eta = \mp \xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- (1 - \cos \theta)^2, \\
 (l_{\mp\pm}^p h_{p-}^p)^\eta &= -\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- (1 - \cos \theta) \sin \theta e^{\pm i\phi}, \\
 (l_{\mp\pm}^p h_{p+}^p)^\eta &= +\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- (1 - \cos \theta) \sin \theta e^{\pm i\phi}.
 \end{aligned}$$

Когда нуклон *меняет проекцию* своего спина на выделенное направление, эти скалярные произведения приобретают такой вид:

$$\begin{aligned}
 (l_{\mp\pm}^s h_{\mp\pm}^s)^\eta &= -\xi_-^2 \lambda_-^2 \sin^2 \theta, \\
 (l_{\mp\pm}^s h_{\mp\pm}^s)^\eta &= +\xi_-^2 \lambda_-^2 \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi}, \\
 (l_{s-}^s h_{\mp\pm}^s)^\eta &= (l_{s+}^s h_{\mp\pm}^s)^\eta = \mp \lambda_-^2 [\xi_+^2 - \xi_-^2 \cos \theta] \sin \theta e^{\pm i\phi},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (l_{\pm\mp}^p h_{\mp\pm}^p)^\eta &= -\xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_-\sin^2\theta, \\
 (l_{\pm\mp}^p h_{\pm\mp}^p)^\eta &= -\xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_-\sin^2\theta e^{\mp 2i\phi}, \\
 (l_{--}^p h_{\mp\pm}^p)^\eta &= -\xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_-(1-\cos\theta)\sin\theta e^{\pm i\phi}, \\
 (l_{++}^p h_{\mp\pm}^p)^\eta &= +\xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_-(1-\cos\theta)\sin\theta e^{\pm i\phi}.
 \end{aligned}$$

Наконец, для скалярных произведений типа *скаляр–псевдоскаляр* и *псевдоскаляр–скаляр* в случае неизменности проекции спина нуклона на выделенное направление получаем

$$\begin{aligned}
 (l_{\mp\mp}^s h_{\mp\mp}^p)^\eta &= (l_{\pm\pm}^s h_{\mp\mp}^p)^\eta = \pm[\xi_+^2 - \xi_-^2 \cos\theta]\lambda_+\lambda_-(1-\cos\theta), \\
 (l_{-+}^s h_{\mp\mp}^p)^\eta &= \mp\xi_-^2\lambda_+\lambda_-(1-\cos\theta)\sin\theta e^{+i\phi}, \\
 (l_{+-}^s h_{\mp\mp}^p)^\eta &= \pm\xi_-^2\lambda_+\lambda_-(1-\cos\theta)\sin\theta e^{-i\phi}, \\
 (l_{\mp\mp}^p h_{\mp\mp}^s)^\eta &= (l_{\mp\mp}^p h_{\pm\pm}^s)^\eta = \mp\xi_+\xi_-[\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos\theta](1-\cos\theta), \\
 (l_{-+}^p h_{\mp\mp}^s)^\eta &= -\xi_+\xi_-[\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos\theta]\sin\theta e^{+i\phi}, \\
 (l_{+-}^p h_{\mp\mp}^s)^\eta &= -\xi_+\xi_-[\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos\theta]\sin\theta e^{-i\phi}.
 \end{aligned}$$

Когда спин нуклона *меняет свою проекцию* на выделенное направление, эти скалярные произведения превращаются в следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 (l_{--}^s h_{\mp\pm}^p)^\eta &= (l_{++}^s h_{\mp\pm}^p)^\eta = [\xi_+^2 - \xi_-^2 \cos\theta]\lambda_+\lambda_-\sin\theta e^{\mp i\phi}, \\
 (l_{\pm\mp}^s h_{\mp\pm}^p)^\eta &= \pm\xi_-^2\lambda_+\lambda_-\sin^2\theta, \\
 (l_{\mp\pm}^s h_{\mp\pm}^p)^\eta &= \mp\xi_-^2\lambda_+\lambda_-\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}, \\
 (l_{--}^p h_{\mp\pm}^s)^\eta &= \pm\xi_+\xi_-\lambda_-^2(1-\cos\theta)\sin\theta e^{\pm i\phi}, \\
 (l_{++}^p h_{\mp\pm}^s)^\eta &= \mp\xi_+\xi_-\lambda_-^2(1-\cos\theta)\sin\theta e^{\pm i\phi}, \\
 (l_{\pm\mp}^p h_{\mp\pm}^s)^\eta &= \pm\xi_+\xi_-\lambda_-^2\sin^2\theta, \\
 (l_{\mp\pm}^p h_{\mp\pm}^s)^\eta &= \mp\xi_+\xi_-\lambda_-^2\sin^2\theta e^{\mp 2i\phi}.
 \end{aligned}$$

Полезно переписать все приведенные выше скалярные произведения через параметры λ_- и ξ_- . С учетом соотношений* (3.6) и (3.8) набор скалярных произведений в $\eta\eta$ -базисе для векторных и аксиально-векторных скалярных произведений, когда нуклон *не меняет* проекцию своего спина на выделенное

*Напомним, что $\Omega^2 \equiv \xi_-^2 \lambda_-^2$, $|\mathbf{k}|^2 = \xi_-^2 \xi_+^2 = \lambda_-^2 \lambda_+^2$, $|\mathbf{k}|^2 + \Omega^2 = \xi_-^2(\sqrt{s} - m + m_\chi)$, $\lambda_-^2 + \xi_-^2 = \sqrt{s} - m - m_\chi$.

направление, можно переписать следующим образом:

$$(l_{--}^v h_{--}^v)^\eta = (l_{++}^v h_{++}^v)^\eta = \\ = +4 \left[mm_\chi + (m_\chi \lambda_-^2 + m\xi_-^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + [|\mathbf{k}|^2 + \Omega^2] \cos^4 \frac{\theta}{2} \right],$$

$$(l_{\pm\pm}^v h_{\mp\mp}^v)^\eta = +4 \left[mm_\chi + (m_\chi \lambda_-^2 + m\xi_-^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\ \left. + [|\mathbf{k}|^2 + \Omega^2] \cos^4 \frac{\theta}{2} + 2|\mathbf{k}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right],$$

$$(l_{\mp\pm}^v h_{\pm\pm}^v)^\eta = \pm 4 \left[m\xi_-^2 + [|\mathbf{k}|^2 + \Omega^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^v h_{\pm\pm}^v)^\eta = \mp 4 \left[m\xi_-^2 + [|\mathbf{k}|^2 + \Omega^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2|\mathbf{k}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\mp\mp}^a h_{\mp\mp}^a)^\eta = -4 \left[mm_\chi + (m\xi_-^2 + m_\chi \lambda_-^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\ \left. + [|\mathbf{k}|^2 + \Omega^2] \cos^4 \frac{\theta}{2} \right] = -(l_{--}^v h_{--}^v)^\eta,$$

$$(l_{\pm\pm}^a h_{\mp\mp}^a)^\eta = +4 \left[mm_\chi + (m\xi_-^2 + m_\chi \lambda_-^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\ \left. + [|\mathbf{k}|^2 + \Omega^2] \cos^4 \frac{\theta}{2} + 2\Omega^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right],$$

$$(l_{\mp\pm}^a h_{\pm\pm}^a)^\eta = \mp 4 \left[m\xi_-^2 + [|\mathbf{k}|^2 + \Omega^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\mp\pm}^a h_{\mp\mp}^a)^\eta = \pm 4 \left[m\xi_-^2 + [|\mathbf{k}|^2 + \Omega^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\ \left. + 2m_\chi \lambda_-^2 + 2\Omega^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{--}^v h_{--}^a)^\eta = -(l_{++}^v h_{++}^a)^\eta = +4|\mathbf{k}| \left[m + m_\chi + [\xi_-^2 + \lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{--}^v h_{++}^a)^\eta = -(l_{++}^v h_{--}^a)^\eta = \\ = -4|\mathbf{k}| \left[m + m_\chi + [\xi_-^2 + \lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{\pm\mp}^v h_{\mp\mp}^a)^\eta = -4|\mathbf{k}| \left[m + [\xi_-^2 + \lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\mp\pm}^v h_{\mp\mp}^a)^\eta = +4|\mathbf{k}| \left[m + [\xi_-^2 + \lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi},$$

$$\begin{aligned} (l_{--}^a h_{--}^v)^\eta &= -(l_{++}^a h_{++}^v)^\eta = \\ &= -4|\mathbf{k}| \left[m + m_\chi + [\xi_-^2 + \lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \cos^2 \frac{\theta}{2} = -(l_{--}^v h_{--}^a)^\eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (l_{++}^a h_{--}^v)^\eta &= -(l_{--}^a h_{++}^v)^\eta = \\ &= +4|\mathbf{k}| \left[m + m_\chi + [\xi_-^2 + \lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\xi_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \cos^2 \frac{\theta}{2}, \end{aligned}$$

$$(l_{\pm\mp}^a h_{\mp\mp}^v)^\eta = +4|\mathbf{k}| \left[m + [\xi_-^2 + \lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi} = -(l_{\mp\pm}^v h_{\mp\mp}^a)^\eta,$$

$$\begin{aligned} (l_{\pm\mp}^a h_{\pm\pm}^v)^\eta &= \\ &= +4|\mathbf{k}| \left[m + [\xi_-^2 + \lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2m_\chi + 2\xi_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi}. \end{aligned}$$

Когда нуклон *меняет* проекцию своего спина на выделенное направление, векторные и аксиально-векторные скалярные произведения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} (l_{\pm\mp}^a h_{\mp\pm}^a)^\eta &= -4 \left[2mm_\chi + 2(m\xi_-^2 + m_\chi\lambda_-^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\ &\quad \left. + [|\mathbf{k}|^2 + \Omega^2] \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\Omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right], \end{aligned}$$

$$(l_{\pm\pm}^a h_{\mp\pm}^a)^\eta = \mp 4 \left[m_\chi\lambda_-^2 + [|\mathbf{k}|^2 + \Omega^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\mp\pm}^a h_{\mp\pm}^a)^\eta = -4[|\mathbf{k}|^2 + \Omega^2] \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm 2i\phi},$$

$$\begin{aligned} (l_{\mp\mp}^a h_{\mp\pm}^a)^\eta &= \pm 4 \left[m_\chi\lambda_-^2 + [|\mathbf{k}|^2 + \Omega^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\ &\quad \left. + 2m\xi_-^2 + 2\Omega^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(l_{+-}^v h_{-+}^v)^\eta &= (l_{-+}^v h_{+-}^v)^\eta = -4 \left[[|\mathbf{k}|^2 + \Omega^2] \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2|\mathbf{k}|^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right], \\
(l_{\pm\pm}^v h_{\mp\pm}^v)^\eta &= \\
&= \pm 4 \left[m_\chi \lambda_-^2 + [|\mathbf{k}|^2 + \Omega^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi} = -(l_{\pm\pm}^a h_{\mp\pm}^a)^\eta, \\
(l_{\mp\pm}^v h_{\mp\pm}^v)^\eta &= +4 [|\mathbf{k}|^2 + \Omega^2] \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm 2i\phi} = -(l_{\mp\pm}^a h_{\mp\pm}^a)^\eta, \\
(l_{\mp\mp}^v h_{\mp\mp}^v)^\eta &= \pm 4 \left[m_\chi \lambda_-^2 + [|\mathbf{k}|^2 + \Omega^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2|\mathbf{k}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}; \\
(l_{+-}^v h_{-+}^a)^\eta &= -(l_{-+}^v h_{+-}^a)^\eta = \\
&= +4|\mathbf{k}| \left[2m + [\xi_-^2 + \lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\
(l_{\pm\pm}^v h_{\mp\pm}^a)^\eta &= -4|\mathbf{k}| \left[m_\chi + [\xi_-^2 + \lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\
(l_{\mp\pm}^v h_{\mp\pm}^a)^\eta &= \mp 4|\mathbf{k}| [\xi_-^2 + \lambda_-^2] \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm 2i\phi}, \\
(l_{\mp\mp}^v h_{\mp\mp}^a)^\eta &= \\
&= -4|\mathbf{k}| \left[m_\chi + [\xi_-^2 + \lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2m + 2\lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}; \\
(l_{+-}^a h_{-+}^v)^\eta &= -(l_{-+}^a h_{+-}^v)^\eta = \\
&= +4|\mathbf{k}| \left[[\xi_-^2 + \lambda_-^2] \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2m_\chi \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2\xi_-^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right], \\
(l_{\pm\pm}^a h_{\mp\pm}^v)^\eta &= +4|\mathbf{k}| \left[m_\chi + [\xi_-^2 + \lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi} = -(l_{\pm\pm}^v h_{\mp\pm}^a)^\eta, \\
(l_{\mp\pm}^a h_{\mp\pm}^v)^\eta &= \pm 4|\mathbf{k}| [\xi_-^2 + \lambda_-^2] \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm 2i\phi} = -(l_{\mp\pm}^v h_{\mp\pm}^a)^\eta, \\
(l_{\pm\pm}^a h_{\pm\mp}^v)^\eta &= -4|\mathbf{k}| \left[m_\chi + [\xi_-^2 + \lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\xi_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi}.
\end{aligned}$$

Аналогично для (псевдо)скалярных лептонных и нуклонных токов, когда нуклон *не* меняет проекцию своего спина на выделенное направление, скаляр-

ные произведения имеют вид

$$(l_{\mp\mp}^s h_{\mp\mp}^s)^\eta = (l_{\pm\pm}^s h_{\mp\mp}^s)^\eta = 4 \left[mm_\chi + (m_\chi \lambda_-^2 + m\xi_-^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} + \Omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right],$$

$$(l_{\pm\mp}^s h_{\pm\pm}^s)^\eta = (l_{\pm\mp}^s h_{\mp\mp}^s)^\eta = \pm 4 \left[m\xi_-^2 + \Omega^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\mp\mp}^p h_{\mp\mp}^p)^\eta = -(l_{\pm\pm}^p h_{\mp\mp}^p)^\eta = -4|\mathbf{k}|^2 \sin^4 \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{\pm\mp}^p h_{\pm\pm}^p)^\eta = -(l_{\pm\mp}^p h_{\mp\mp}^p)^\eta = +4|\mathbf{k}|^2 \sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{++}^p h_{\pm\pm}^s)^\eta = -(l_{--}^p h_{\mp\mp}^s)^\eta = +4|\mathbf{k}| \left[m + \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{\mp\pm}^p h_{\pm\pm}^s)^\eta = (l_{\mp\pm}^p h_{\pm\pm}^s)^\eta = -4|\mathbf{k}| \left[m + \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\pm\pm}^s h_{\pm\pm}^p)^\eta = -(l_{\mp\mp}^s h_{\mp\mp}^p)^\eta = -4|\mathbf{k}| \left[m_\chi + \xi_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{\mp\pm}^s h_{\pm\pm}^p)^\eta = -(l_{\mp\pm}^s h_{\mp\mp}^p)^\eta = +4\xi_-^2 |\mathbf{k}| \sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}.$$

Наконец, когда нуклон *меняет* проекцию своего спина на выделенное направление, оставшиеся (псевдо)скалярные скалярные произведения становятся в виде

$$(l_{--}^s h_{\mp\mp}^s)^\eta = (l_{++}^s h_{\mp\mp}^s)^\eta = \pm 4 \left[m_\chi \lambda_-^2 + \Omega^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\mp\pm}^s h_{\mp\mp}^s)^\eta = -4\Omega^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{\mp\pm}^s h_{\mp\pm}^s)^\eta = +4\Omega^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm 2i\phi},$$

$$(l_{++}^p h_{\mp\mp}^p)^\eta = -(l_{--}^p h_{\mp\mp}^p)^\eta = +4|\mathbf{k}|^2 \sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^p h_{\mp\pm}^p)^\eta = -4|\mathbf{k}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{\pm\mp}^p h_{\mp\mp}^p)^\eta = -4|\mathbf{k}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp 2i\phi},$$

$$\begin{aligned}
(l_{--}^s h_{\pm\mp}^p)^\eta &= (l_{++}^s h_{\pm\mp}^p)^\eta = +4|\mathbf{k}| \left[m_\chi + \xi_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi}, \\
(l_{+-}^s h_{-+}^p)^\eta &= -(l_{-+}^s h_{+-}^p)^\eta = +4|\mathbf{k}| \xi_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}, \\
(l_{\mp\mp}^p h_{\pm\pm}^s)^\eta &= -(l_{\pm\pm}^p h_{\mp\mp}^s)^\eta = +4|\mathbf{k}| \lambda_-^2 \sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\
(l_{+-}^p h_{-+}^s)^\eta &= -(l_{-+}^p h_{+-}^s)^\eta = +4|\mathbf{k}| \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}, \\
(l_{\pm\mp}^p h_{\pm\mp}^s)^\eta &= \mp 4|\mathbf{k}| \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp 2i\phi}, \\
(l_{\pm\mp}^s h_{\pm\mp}^p)^\eta &= \pm 4|\mathbf{k}| \xi_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp 2i\phi}.
\end{aligned}$$

3.3. Скалярные произведения токов в смешанном $\chi\eta$ -базисе. Здесь приведены скалярные произведения для комбинаций лептонных и нуклонных токов, отвечающие всем возможным спиральностям лептона и всем возможным проекциям спина нуклона на заданное направление. Они вычислены в с. ц. м. (лептона и нуклона) в смешанном базисе (см. п. 2.2 и прил. 4), где токи для χ -частицы взяты в базисе спиральности (по аналогии с нейтрино), а нуклонные токи — в η -базисе. Для простоты представления скалярных произведений здесь не используются индексы χ и η , маркирующие базисы происхождения лептонных и нуклонных токов. Все скалярные произведения приведены в инвариантных переменных m , m_χ , λ_- , ξ_- и половине угла рассеяния лептона $\theta/2$ согласно формулам (3.6) и (3.8).

Итак, набор из 16 скалярных произведений *аксиально-векторных* лептонных и нуклонных токов, полученный в $\chi\eta$ -базисе согласно общему определению из (2.1) и (2.2), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
(l_{s's}^a h_{r'r}^a)^{\chi\eta} &\equiv \sum_{\mu,\nu}^4 (A_{s's}^{\chi}(\mathbf{k}'))^\mu g_{\mu\nu} (A_{r'r}^{\eta}(\mathbf{p}'))^\nu, \\
(l_{\pm\pm}^a h_{\pm\pm}^a) &= -4 \cos \frac{\theta}{2} \left[\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + (m_\chi + \xi_-^2) \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right], \\
(l_{\pm\pm}^a h_{\mp\mp}^a) &= \\
&= +4 \cos \frac{\theta}{2} \left[\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + (m_\chi + \xi_-^2) \left(m + \lambda_-^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right) \right], \\
(l_{\pm\pm}^a h_{\pm\mp}^a) &= \\
&= \mp 4 \sin \frac{\theta}{2} \left[\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + (m_\chi + \xi_-^2) \left(2m + \lambda_-^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right) \right] e^{\mp i\phi},
\end{aligned}$$

$$(l_{\pm\pm}^a h_{\mp\pm}^a) = \mp 4 \sin \frac{\theta}{2} \left[\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + (m_\chi + \xi_-^2) \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^a h_{\mp\pm}^a) = -4m_\chi \cos \frac{\theta}{2} \left[2m + \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right],$$

$$(l_{\pm\mp}^a h_{\pm\mp}^a) = +4m_\chi \lambda_-^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp 2i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^a h_{\pm\pm}^a) = \mp 4m_\chi \sin \frac{\theta}{2} \left[\lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - m \right] e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^a h_{\mp\mp}^a) = \mp 4m_\chi \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi}.$$

Набор из 16 скалярных произведений *векторных* лептонных и нуклонных токов в смешанном базисе записывается следующим образом:

$$(l_{\pm\pm}^v h_{\pm\pm}^v) = 4 \cos \frac{\theta}{2} \left[\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + (\xi_-^2 + m_\chi) \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right],$$

$$(l_{\pm\pm}^v h_{\mp\mp}^v) = 4 \cos \frac{\theta}{2} \left[\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + (\xi_-^2 + m_\chi) \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right],$$

$$(l_{\pm\pm}^v h_{\pm\mp}^v) = \mp 4 \sin \frac{\theta}{2} \left[\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + (\xi_-^2 + m_\chi) \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\pm\pm}^v h_{\mp\pm}^v) = \pm 4 \sin \frac{\theta}{2} \left[\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + (\xi_-^2 + m_\chi) \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^v h_{--}^v) = (l_{\pm\mp}^v h_{++}^v) = \pm 4m_\chi \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^v h_{\mp\pm}^v) = +4m_\chi \lambda_-^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{\pm\mp}^v h_{\pm\mp}^v) = -4m_\chi \lambda_-^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp 2i\phi}.$$

Набор из 16 скалярных произведений *векторных* лептонных и *аксиально-векторных* нуклонных токов в смешанном базисе таков:

$$\begin{aligned} (l_{++}^v h_{++}^a) &= -(l_{--}^v h_{--}^a) = \\ &= -4 \cos \frac{\theta}{2} \lambda_+ \lambda_- \left[(\xi_-^2 + m_\chi) \cos^2 \frac{\theta}{2} + m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(l_{++}^v h_{--}^a) &= -(l_{--}^v h_{++}^a) = \\
&= +4 \cos \frac{\theta}{2} \lambda_+ \lambda_- \left[(\xi_-^2 + m_\chi) \cos^2 \frac{\theta}{2} + m + \lambda_-^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right], \\
(l_{\pm\pm}^v h_{\mp\mp}^a) &= -4 \sin \frac{\theta}{2} \lambda_+ \lambda_- \left[(\xi_-^2 + m_\chi) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2m + \lambda_-^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] e^{\mp i\phi}, \\
(l_{\pm\pm}^v h_{\mp\pm}^a) &= -4 \sin \frac{\theta}{2} \lambda_+ \lambda_- \left[m_\chi + \xi_-^2 + \lambda_-^2 \right] \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\
(l_{\pm\mp}^v h_{--}^a) &= -(l_{\pm\mp}^v h_{++}^a) = \pm 4m_\chi \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi}, \\
(l_{\pm\mp}^v h_{\mp\pm}^a) &= \mp 4m_\chi \lambda_+ \lambda_- \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\
(l_{\pm\mp}^v h_{\pm\mp}^a) &= \mp 4m_\chi \lambda_+ \lambda_- \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp 2i\phi}.
\end{aligned}$$

Набор из 16 скалярных произведений *аксиально-векторного* лептонного и *векторного* нуклонного токов выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
(l_{++}^a h_{++}^v) &= -(l_{--}^a h_{--}^v) = \\
&= +4 \cos \frac{\theta}{2} \lambda_+ \lambda_- \left[(\xi_-^2 + m_\chi) \cos^2 \frac{\theta}{2} + m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right], \\
(l_{++}^a h_{--}^v) &= -(l_{--}^a h_{++}^v) = \\
&= +4 \cos \frac{\theta}{2} \lambda_+ \lambda_- \left[(\xi_-^2 + m_\chi) \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right], \\
(l_{\pm\pm}^a h_{\mp\mp}^v) &= -4 \sin \frac{\theta}{2} \lambda_+ \lambda_- \left[(\xi_-^2 + m_\chi) \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] e^{\mp i\phi}, \\
(l_{\pm\pm}^a h_{\mp\pm}^v) &= +4 \sin \frac{\theta}{2} \lambda_+ \lambda_- \left[m_\chi + \lambda_-^2 + \xi_-^2 \right] \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\
(l_{\pm\mp}^a h_{--}^v) &= -(l_{\pm\mp}^a h_{++}^v) = \mp 4m_\chi \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi}, \\
(l_{\pm\mp}^a h_{\mp\pm}^v) &= \pm 4m_\chi \lambda_+ \lambda_- \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\
(l_{\pm\mp}^a h_{\pm\mp}^v) &= \pm 4m_\chi \lambda_+ \lambda_- \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp 2i\phi}.
\end{aligned}$$

В смешанном базисе наборы скалярных произведений всех возможных комбинаций *скалярных* и *псевдоскалярных* лептонных и нуклонных токов собраны ниже. Так, скалярные произведения $(l_{s's'}^s h_{r'r}^s) = S_{s's}(\mathbf{k}') S_{r'r}(\mathbf{p}')$

можно записать через четыре функции

$$\begin{aligned}
 S_{00} &= 4m_\chi \left(m + \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2}, \\
 S_{10} &= 4(m_\chi + \xi_-^2) \left(m + \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2}, \\
 S_{01} &= 4m_\chi \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \\
 S_{11} &= 4(m_\chi + \xi_-^2) \lambda_-^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}
 \end{aligned}$$

в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 (l_{\mp\mp}^s h_{\mp\mp}^s) &= (l_{\pm\pm}^s h_{\mp\mp}^s) = S_{00}, \\
 (l_{\pm\mp}^s h_{\mp\mp}^s) &= (l_{\pm\mp}^s h_{\pm\pm}^s) = \pm S_{10} e^{\mp i\phi}, \\
 (l_{\mp\mp}^s h_{\pm\mp}^s) &= (l_{\pm\pm}^s h_{\pm\mp}^s) = \pm S_{01} e^{\mp i\phi}, \\
 (l_{\mp\pm}^s h_{\pm\mp}^s) &= -S_{11}, \quad (l_{\mp\pm}^s h_{\mp\pm}^s) = S_{11} e^{\pm 2i\phi}.
 \end{aligned}$$

Произведения скалярного лептонного и псевдоскалярного нуклонного токов таковы:

$$\begin{aligned}
 (l_{\pm\pm}^s h_{\pm\pm}^p) &= (l_{\mp\mp}^s h_{\pm\pm}^p) = \pm R_{00}, \quad (l_{\pm\mp}^s h_{\mp\pm}^p) = \pm R_{11}, \\
 (l_{\pm\mp}^s h_{\pm\mp}^p) &= \pm R_{11} e^{\mp 2i\phi}, \\
 (l_{-}^s h_{\pm\mp}^p) &= (l_{+}^s h_{\pm\mp}^p) = R_{01} e^{\mp i\phi}, \quad (l_{-}^s h_{\pm\pm}^p) = \pm R_{10} e^{-i\phi}, \\
 (l_{-+}^s h_{\mp\mp}^p) &= \pm R_{10} e^{+i\phi}.
 \end{aligned}$$

Здесь также введены четыре функции:

$$\begin{aligned}
 R_{00} &\equiv -4m_\chi \lambda_+ \lambda_- \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad R_{01} \equiv +4m_\chi \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \\
 R_{10} &\equiv -4(\xi_-^2 + m_\chi) \lambda_+ \lambda_- \sin^3 \frac{\theta}{2}, \quad R_{11} \equiv +4(\xi_-^2 + m_\chi) \lambda_+ \lambda_- \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}.
 \end{aligned}$$

Скалярные произведения псевдоскалярного лептонного и скалярного нуклонного токов в смешанном базисе выражаются через две вспомогательные функции

$$T_{10} \equiv -4\xi_+ \xi_- \left(m + \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} \quad \text{и} \quad T_{11} \equiv -4\xi_+ \xi_- \lambda_-^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

в таком виде:

$$\begin{aligned}
 (l_{\mp\mp}^p h_{\mp\mp}^s) &= (l_{\pm\pm}^p h_{\mp\mp}^s) = (l_{\mp\mp}^p h_{+}^s) = (l_{\mp\mp}^p h_{-}^s) = 0, \quad (l_{\mp\pm}^p h_{\pm\mp}^s) = \pm T_{11}, \\
 (l_{\mp\pm}^p h_{-}^s) &= (l_{\mp\pm}^p h_{+}^s) = \pm T_{10} e^{\mp i\phi}, \quad (l_{\mp\pm}^p h_{\pm\mp}^s) = \pm T_{11} e^{\mp 2i\phi}.
 \end{aligned}$$

Наконец, 16 скалярных произведений псевдоскалярных токов выглядят так:

$$(l_{\mp\mp}^p h_{\mp\mp}^p) = (l_{\pm\pm}^p h_{\mp\mp}^p) = (l_{\mp\mp}^p h_{+-}^p) = (l_{\mp\mp}^p h_{-+}^p) = 0, \quad (l_{\mp\pm}^p h_{\pm\mp}^p) = P_{11},$$

$$(l_{+-}^p h_{\mp\mp}^p) = \mp P_{10} e^{-i\phi}, \quad (l_{-+}^p h_{\mp\mp}^p) = \mp P_{10} e^{+i\phi}, \quad (l_{\mp\pm}^p h_{\mp\pm}^p) = +P_{11} e^{\pm 2i\phi},$$

где $P_{10} \equiv 4\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \sin^3 \theta / 2$ и $P_{11} \equiv -4\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \sin^2 \theta / 2 \cos \theta / 2$.

В практических целях (см., например, [14]) полезно иметь набор скалярных произведений для так называемого *слабого нейтрального тока массивной частицы* (п. 2.1). Для любых значений проекций спинов нуклона ($r', r = \pm 1$) и χ -частицы ($s', s = \pm 1$) такие скалярные произведения лептонного (χ -частицы) и нуклонного токов были определены формулой (2.3) в виде $(l_{s's}^w h_{r'r}^{w,f}) = \alpha(l_{s's}^v h_{r'r}^{v,f}) + \beta(l_{s's}^v h_{r'r}^{a,f}) + \gamma(l_{s's}^a h_{r'r}^{v,f}) + \delta(l_{s's}^a h_{r'r}^{a,f})$, где индекс f обозначает нейтрон или протон.

Используя приведенные выше результаты для «базисных» скалярных произведений лептонных и нуклонных токов, можно построить выражения для скалярных произведений типа $(l_{s's}^w h_{r'r}^{w,f})$. В результате такого построения* получены следующие выражения для случая, когда *сохраняются спиральность лептона и проекция спина нуклона*:

$$(l_{\pm\pm}^w h_{\pm\pm}^w) =$$

$$= 4 \cos \frac{\theta}{2} \left[(\alpha - \delta) \xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + (\alpha - \delta) (m_\chi + \xi_-^2) \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \pm \right.$$

$$\left. \pm (\gamma - \beta) \lambda_+ \lambda_- \left((\xi_-^2 + m_\chi) \cos^2 \frac{\theta}{2} + m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right],$$

$$(l_{\pm\pm}^w h_{\mp\mp}^w) =$$

$$= 4 \cos \frac{\theta}{2} \left[(\alpha + \delta) (m_\chi + \xi_-^2) m + \xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \left(\alpha + \alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} + \delta \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + \right.$$

$$+ (m_\chi + \xi_-^2) \lambda_-^2 \left(\delta + \delta \sin^2 \frac{\theta}{2} + \alpha \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \pm \lambda_+ \lambda_- \left\{ (\beta + \gamma) m + \right.$$

$$\left. + (m_\chi + \xi_-^2) \left(\gamma + \gamma \sin^2 \frac{\theta}{2} + \beta \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + \lambda_-^2 \left(\beta + \beta \sin^2 \frac{\theta}{2} + \gamma \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} \right].$$

*Подробнее приведено в прил. 4.

Когда *сохраняется спиральность* лептона, но *меняется проекция спина* нуклона, эти скалярные произведения имеют вид

$$\begin{aligned}
 (l_{\pm\pm}^w h_{\pm\mp}^w) &= \\
 &= \mp 4 \sin \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi} \left[2m\delta(m_\chi + \xi_-^2) + \xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \left[\alpha + \alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} + \delta \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + \right. \\
 &+ (\xi_-^2 + m_\chi) \lambda_-^2 \left[\delta + \delta \sin^2 \frac{\theta}{2} + \alpha \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \pm \lambda_+ \lambda_- \left\{ 2m\beta + \right. \\
 &+ (\xi_-^2 + m_\chi) \left[\gamma + \gamma \sin^2 \frac{\theta}{2} + \beta \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + \lambda_-^2 \left[\beta + \beta \sin^2 \frac{\theta}{2} + \gamma \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \left. \right\} \left. \right], \\
 (l_{\pm\pm}^w h_{\mp\pm}^w) &= 4 \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi} \left[(\gamma - \beta) \lambda_+ \lambda_- [m_\chi + \lambda_-^2 + \xi_-^2] \pm \right. \\
 &\quad \left. \pm (\alpha - \delta) [\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- + (\xi_-^2 + m_\chi) \lambda_-^2] \right].
 \end{aligned}$$

Далее, если *меняется спиральность* лептона, но *сохраняется проекция спина* нуклона, выражения для скалярных произведений таковы:

$$\begin{aligned}
 (l_{\pm\mp}^w h_{\mp\mp}^w) &= \\
 &= 4m_\chi \sin \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi} \left[\pm (\alpha - \delta) \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + (\beta - \gamma) \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} \right], \\
 (l_{\pm\mp}^w h_{\pm\pm}^w) &= \\
 &= 4m_\chi \sin \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi} \left[\pm (\alpha + \delta) m \pm (\alpha - \delta) \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + (\gamma - \beta) \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} \right].
 \end{aligned}$$

Когда *меняются спиральность* лептона и *проекция спина*, получается следующее:

$$\begin{aligned}
 (l_{\pm\mp}^w h_{\mp\pm}^w) &= 4m_\chi \cos \frac{\theta}{2} \left[(\alpha - \delta) \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2\delta m \pm (\gamma - \beta) \lambda_+ \lambda_- \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \\
 (l_{\pm\mp}^w h_{\pm\mp}^w) &= 4m_\chi \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp 2i\phi} \left[-(\alpha - \delta) \lambda_-^2 \pm (\gamma - \beta) \lambda_+ \lambda_- \right].
 \end{aligned}$$

Как показано в прил. 4, когда спиральность массивного лептона не меняется, эти выражения в приближении $m_\chi \rightarrow 0$ совпадают с формулами для скалярных произведений, отвечающими взаимодействию безмассовых нейтрино с нуклонами в Стандартной модели [1].

Для полноты картины (и потребностей работы [14]) приведем скалярные произведения $(l_{s'r}^f h_{r's}^f)$ в *нерелятивистском* приближении, где они сильно

упрощаются*. С точностью до фазового множителя все ненулевые величины выражаются через две переменные

$$m_c^2 \equiv 4m_\chi m \cos \frac{\theta}{2}, \quad m_s^2 \equiv 4m_\chi m \sin \frac{\theta}{2} \quad (3.9)$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} (l_{\pm\pm}^v h_{\pm\pm}^v) &= (l_{\pm\pm}^v h_{\mp\mp}^v) = (l_{\pm\pm}^s h_{\pm\pm}^s) = (l_{\pm\pm}^s h_{\mp\mp}^s) = m_c^2, \\ (l_{\pm\pm}^a h_{\pm\pm}^a) &= -(l_{\pm\pm}^a h_{\mp\mp}^a) = -m_c^2, \quad (l_{\pm\mp}^a h_{\mp\pm}^a) = -2m_c^2, \\ (l_{+-}^v h_{\mp\mp}^v) &= (l_{+-}^s h_{\mp\mp}^s) = +m_s^2 e^{-i\phi}, \quad (l_{-+}^v h_{\mp\mp}^v) = (l_{-+}^s h_{\mp\mp}^s) = -m_s^2 e^{+i\phi}, \\ (l_{\pm\mp}^a h_{-+}^a) &= -(l_{\pm\mp}^a h_{++}^a) = -m_s^2 e^{\mp i\phi}, \quad (l_{\pm\pm}^a h_{\pm\mp}^a) = \mp 2m_s^2 e^{\mp i\phi}. \end{aligned}$$

В нерелятивистском приближении все остальные «диагональные» скалярные произведения обращаются в нуль: $(l_{s'r}^p h_{r'r}^p)_{\text{nonrel}} = 0$ и

$$\begin{aligned} (l_{\pm\pm}^a h_{\mp\pm}^a) &= (l_{\pm\mp}^a h_{\pm\mp}^a) = 0, \\ (l_{\pm\pm}^v h_{-+}^v) &= (l_{\mp\mp}^v h_{+-}^v) = (l_{\pm\mp}^v h_{\mp\pm}^v) = (l_{\mp\pm}^v h_{\pm\mp}^v) = 0, \\ (l_{\pm\pm}^s h_{-+}^s) &= (l_{\mp\mp}^s h_{+-}^s) = (l_{\pm\mp}^s h_{\mp\pm}^s) = (l_{\mp\pm}^s h_{\pm\mp}^s) = 0. \end{aligned}$$

Все «недиагональные» скалярные произведения также равны нулю:

$$(l_{s'r}^v h_{r'r}^a)_{\text{nonrel}} \simeq (l_{s'r}^a h_{r'r}^v)_{\text{nonrel}} \simeq (l_{s'r}^s h_{r'r}^p)_{\text{nonrel}} \simeq (l_{s'r}^p h_{r'r}^s)_{\text{nonrel}} \simeq 0.$$

Нерелятивистские выражения для скалярных произведений *слабого нейтрального тока массивной частицы* и тока нуклона имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} (l_{\pm\pm}^w h_{\pm\pm}^w) &= m_c^2(\alpha - \delta), \quad (l_{\pm\pm}^w h_{\mp\mp}^w) = m_c^2(\alpha + \delta), \\ (l_{\pm\pm}^w h_{\mp\pm}^w) &= (l_{\mp\pm}^w h_{\pm\mp}^w) = 0, \\ (l_{\pm\mp}^w h_{\mp\pm}^w) &= -2m_c^2\delta, \quad (l_{\pm\pm}^w h_{\pm\mp}^w) = \mp 2m_s^2 e^{\mp i\phi}\delta, \\ (l_{\pm\mp}^w h_{\mp\mp}^w) &= \pm m_s^2 e^{\mp i\phi}(\alpha - \delta), \quad (l_{\mp\pm}^w h_{\pm\pm}^w) = \pm m_s^2 e^{\mp i\phi}(\alpha + \delta). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Приведенный здесь полный набор всех скалярных произведений векторных, аксиально-векторных, скалярных и псевдоскалярных токов взаимодействующих χ -частицы и нуклона представляет собой *наиболее адекватную* основу для вычисления когерентных (упругих) и некогерентных (неупругих) сечений взаимодействия χ -частицы с ядром как в релятивистском случае, так и в нерелятивистском приближении (подробности см. в работе [14]).

Видно, что в нерелятивистском приближении ненулевыми являются те скалярные произведения, которые содержат слагаемые, пропорциональные произведению масс частиц $m_\chi m$.

* Формально за счет условия, что $\xi_-^2 = E_\chi - m_\chi \rightarrow 0$ и $\lambda_-^2 = E - m \rightarrow 0$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Здесь обсуждаются свойства скалярных произведений лептонных и нуклонных токов в различных базисах. Эти свойства и соотношения как между базисами, так и между скалярными произведениями и их квадратами полезны в конкретных расчетах сечений, а также могут быть использованы, например, для кросс-проверки правильности полученных результатов.

4.1. Соотношение между σ_3 -базисом и базисом спиральности. Собственные векторы (биспиноры), определенные для начального и конечного нуклона в базисе спиральности формулами (2.32)

$$\chi_{-}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{+}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\chi_{-}(\mathbf{p}') = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \chi_{+}(\mathbf{p}') = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

и в σ_3 -базисе как η_{\pm} формулами (2.37), связаны между собой линейными преобразованиями

$$\begin{pmatrix} \eta_{+}(\mathbf{p}) \\ \eta_{-}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{+}(\mathbf{p}) \\ \chi_{-}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\begin{pmatrix} \eta_{+}(\mathbf{p}') \\ \eta_{-}(\mathbf{p}') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{+}(\mathbf{p}') \\ \chi_{-}(\mathbf{p}') \end{pmatrix}.$$

Преобразования, аналогичные (4.1), с учетом явного вида лептонных биспиноров в обоих базисах согласно (2.37) и (2.32)

$$\chi_{-}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_{+}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\chi_{-}(\mathbf{k}') = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \chi_{+}(\mathbf{k}') = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

справедливы и для массивного лептона в виде

$$\begin{pmatrix} \eta_{+}(\mathbf{k}) \\ \eta_{-}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{+}(\mathbf{k}) \\ \chi_{-}(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

$$\begin{pmatrix} \eta_{+}(\mathbf{k}') \\ \eta_{-}(\mathbf{k}') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{+}(\mathbf{k}') \\ \chi_{-}(\mathbf{k}') \end{pmatrix}.$$

Выражения (4.1) и (4.2) можно получить прямой подстановкой*, а также записать компактно, когда вид матриц $U(\mathbf{p})$ и $U(\mathbf{k})$ ясен из (4.1) и (4.2):

$$\begin{aligned}\eta_r(\mathbf{p}) &= U_{rt}(\mathbf{p})\chi_t(\mathbf{p}), & \eta_{r'}(\mathbf{p}') &= U_{r't'}(\mathbf{p}')\chi_{t'}(\mathbf{p}'), \\ \eta_s(\mathbf{k}) &= U_{sq}(\mathbf{k})\chi_q(\mathbf{k}), & \eta_{s'}(\mathbf{k}') &= U_{s'q'}(\mathbf{k}')\chi_{q'}(\mathbf{k}').\end{aligned}$$

4.2. Взаимосвязь токов из разных базисов. Формулы перехода от одного базиса к другому в виде (4.1) и (4.2) позволяют связать полученные в разных базисах выражения для нуклонных и лептонных токов. Например, для любой структуры в η -базисе типа $Q_{+-}^\eta(\mathbf{p}') = \eta_+^\dagger(\mathbf{p}')\hat{Q}\eta_-(\mathbf{p})$ согласно матрицам преобразования нуклонных биспиноров (4.1) в базисе спиральности можно записать так:

$$\begin{aligned}Q_{+-}^\eta(\mathbf{p}') &\equiv \eta_+^\dagger(\mathbf{p}')\hat{Q}\eta_-(\mathbf{p}) = \left[\sin\frac{\theta}{2}\chi_+(\mathbf{p}') + e^{+i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\chi_-(\mathbf{p}') \right]^\dagger \hat{Q}\chi_+(\mathbf{p}) = \\ &= \sin\frac{\theta}{2}\chi_+^\dagger(\mathbf{p}')\hat{Q}\chi_+(\mathbf{p}) + e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\chi_-^\dagger(\mathbf{p}')\hat{Q}\chi_+(\mathbf{p}) \equiv \\ &\equiv \sin\frac{\theta}{2}Q_{++}^\chi + e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2}Q_{-+}^\chi.\end{aligned}$$

В более общем виде с учетом $U_{sq}(\mathbf{k}) = \delta_{sq}$ можно получить следующее:

$$\begin{aligned}Q_{s's}^\eta(\mathbf{k}') &\equiv \eta_{s'}^\dagger(\mathbf{k}')\hat{Q}\eta_s(\mathbf{k}) = [\chi_{q'}^\dagger(\mathbf{k}')U_{q's'}^*(\mathbf{k}')]_{ij}\hat{Q}_{jk}[U_{sq}(\mathbf{k})\chi_q(\mathbf{k})]_{ki} = \\ &= [U_{q's'}^*(\mathbf{k}')\chi_{q'}^\dagger(\mathbf{k}')]_{ij}\hat{Q}_{jk}[\chi_s(\mathbf{k})]_{ki} = \\ &= [U_{+s'}^*(\mathbf{k}')\chi_+^\dagger(\mathbf{k}') + U_{-s'}^*(\mathbf{k}')\chi_-^\dagger(\mathbf{k}')]_{ij}[\hat{Q}\chi_s(\mathbf{k})]_{ji} = \\ &= U_{+s'}^*(\mathbf{k}')\chi_+^\dagger(\mathbf{k}')\hat{Q}\chi_s(\mathbf{k}) + U_{-s'}^*(\mathbf{k}')\chi_-^\dagger(\mathbf{k}')\hat{Q}\chi_s(\mathbf{k}) = \\ &= U_{+s'}^*(\mathbf{k}')Q_{+s}^\chi + U_{-s'}^*(\mathbf{k}')Q_{-s}^\chi.\end{aligned}$$

Это преобразование не зависит от явного вида матрицы \hat{Q} . Так, для нуклонных скалярных токов с учетом их явного вида в обоих базисах была проверена справедливость их преобразования из базиса спиральности в η -базис:

$$\begin{aligned}S_{--}^\eta(\mathbf{p}') &= S_{+-}^\chi(\mathbf{p}')\sin\frac{\theta}{2} - S_{++}^\chi(\mathbf{p}')\cos\frac{\theta}{2}e^{+i\phi}, \\ S_{++}^\eta(\mathbf{p}') &= S_{+-}^\chi(\mathbf{p}')\sin\frac{\theta}{2} + S_{--}^\chi(\mathbf{p}')\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}, \\ S_{-+}^\eta(\mathbf{p}') &= S_{--}^\chi(\mathbf{p}')\sin\frac{\theta}{2} - S_{+-}^\chi(\mathbf{p}')\cos\frac{\theta}{2}e^{+i\phi}, \\ S_{+-}^\eta(\mathbf{p}') &= S_{++}^\chi(\mathbf{p}')\sin\frac{\theta}{2} + S_{-+}^\chi(\mathbf{p}')\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

*Подробнее представлены в прил. 5.

Из процедуры вывода* преобразования (4.3) следует, что оно справедливо для любых нуклонных токов, заданных формулами (2.42), (2.44) и (2.46).

Аналогично преобразованию (4.3) с учетом (4.2) для лептонных токов имеем

$$\begin{aligned} S_{\mp\mp}^n(\mathbf{k}') &= S_{\mp\mp}^x(\mathbf{k}') \cos \frac{\theta}{2} \pm S_{\mp\mp}^x(\mathbf{k}') \sin \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\ S_{\mp\pm}^n(\mathbf{k}') &= S_{\mp\pm}^x(\mathbf{k}') \cos \frac{\theta}{2} \pm S_{\pm\pm}^x(\mathbf{k}') \sin \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

что также справедливо для любых лептонных токов, заданных формулами (2.43), (2.45) и (2.47). В матричном виде преобразование (4.4) для лептонных токов можно записать так:

$$\begin{pmatrix} Q_{--}^n(\mathbf{k}') \\ Q_{+-}^n(\mathbf{k}') \\ Q_{-+}^n(\mathbf{k}') \\ Q_{++}^n(\mathbf{k}') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^\dagger(\mathbf{k}') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U^\dagger(\mathbf{k}') \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{--}^x(\mathbf{k}') \\ Q_{+-}^x(\mathbf{k}') \\ Q_{-+}^x(\mathbf{k}') \\ Q_{++}^x(\mathbf{k}') \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

поскольку из (4.2) имеем

$$U^\dagger(\mathbf{k}') = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Аналогично для преобразования всех нуклонных токов (4.3) получаем выражение

$$\begin{pmatrix} Q_{--}^n(\mathbf{p}') \\ Q_{+-}^n(\mathbf{p}') \\ Q_{-+}^n(\mathbf{p}') \\ Q_{++}^n(\mathbf{p}') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & U^\dagger(\mathbf{p}') \\ 0 & 0 & 0 \\ U^\dagger(\mathbf{p}') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{--}^x(\mathbf{p}') \\ Q_{+-}^x(\mathbf{p}') \\ Q_{-+}^x(\mathbf{p}') \\ Q_{++}^x(\mathbf{p}') \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

где согласно (4.1) матрица преобразования такова:

$$U^\dagger(\mathbf{p}') = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} & -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Иными словами, формулы (4.1) и (4.2) позволяют получить явные выражения для нуклонных и лептонных токов (4.6) и (4.5) в одном из выбранных базисов на основе соответствующих выражений в другом базисе.

*Приведен в прил. 5.

4.3. Скалярные произведения в $\chi\eta$ -базисе и $\chi\chi$ -базисе. Формула перехода от одного базиса к другому (4.1) и (4.2) не только позволяет связать выражения для токов из разных базисов с помощью линейных преобразований (4.6) и (4.5), но и устанавливает связь между скалярными произведениями из разных базисов. Действительно, поскольку скалярные произведения представляют собой линейную конфигурацию (произведений) токов вида $(l_{s's}^s h_{r'r}^s)^{\chi\eta} \equiv S_{s's}^{\chi}(\mathbf{k}') S_{r'r}^{\eta}(\mathbf{p}')$ и

$$(l_{s's}^v h_{r'r}^v)^{\chi\eta} = V_{s's}^{\chi;\mu}(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{r'r}^{\eta;\nu}(\mathbf{p}') \equiv \\ \equiv V_{s's}^{\chi;0}(\mathbf{k}') V_{r'r}^{\eta;0}(\mathbf{p}') - V_{s's}^{\chi;1}(\mathbf{k}') V_{r'r}^{\eta;1}(\mathbf{p}') - V_{s's}^{\chi;2}(\mathbf{k}') V_{r'r}^{\eta;2}(\mathbf{p}') - V_{s's}^{\chi;3}(\mathbf{k}') V_{r'r}^{\eta;3}(\mathbf{p}'),$$

то, применяя преобразование перехода между базисами для одного из токов, например, в виде формулы (4.3) для нуклонного тока, можно получить выражение для преобразованного скалярного произведения в другом базисе. Действительно, для скалярного произведения скаляров $(l_{s's}^s h_{r'r}^s)^{\chi\eta} \equiv S_{s's}^{\chi}(\mathbf{k}') S_{r'r}^{\eta}(\mathbf{p}')$ преобразование из $\chi\chi$ -базиса в $\chi\eta$ -базис для каждой из возможных комбинаций спиральности лептона s', s имеет вид

$$(l_{s's}^s h_{\mp\mp}^s)^{\chi\eta} = (l_{s's}^s h_{\pm\pm}^s)^{\chi\chi} \sin \frac{\theta}{2} \mp (l_{s's}^s h_{\pm\pm}^s)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\ (l_{s's}^s h_{\pm\pm}^s)^{\chi\eta} = (l_{s's}^s h_{\mp\mp}^s)^{\chi\chi} \sin \frac{\theta}{2} \mp (l_{s's}^s h_{\mp\mp}^s)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}.$$

Совершенно аналогично можно записать такого типа преобразования для любых скалярных произведений. Например, для приведенных выше скалярных произведений векторных токов в силу линейности этих преобразований сразу получается

$$(l_{s's}^v h_{\mp\mp}^v)^{\chi\eta} = (l_{s's}^v h_{\pm\pm}^v)^{\chi\chi} \sin \frac{\theta}{2} \mp (l_{s's}^v h_{\pm\pm}^v)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\ (l_{s's}^v h_{\pm\pm}^v)^{\chi\eta} = (l_{s's}^v h_{\mp\mp}^v)^{\chi\chi} \sin \frac{\theta}{2} \pm (l_{s's}^v h_{\mp\mp}^v)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi}. \quad (4.7)$$

Преобразования скалярных произведений типа (4.7) можно записать в матричной форме вида (4.6). В данном случае, т. е. при переходе от $\chi\chi$ -базиса в $\chi\eta$ -базис, подвергается преобразованию только выражение для нуклонного тока, входящее в скалярное произведение выражение для лептонного тока не преобразуется и остается в изначальном χ -базисе.

4.4. Скалярные произведения в $\eta\eta$ -базисе и $\chi\chi$ -базисе. На основе приведенных выше преобразований токов (4.3) и (4.4) можно получить преобразования для перевода скалярных произведений из $\chi\chi$ -базиса в $\eta\eta$ -базис. В этом случае подвергаются преобразованию оба тока, поэтому результирующие

формулы* выглядят более громоздко, хотя и не намного сложнее:

$$(l_{-s}^i h_{--}^k)^{\eta\eta} = (l_{-s}^i h_{-+}^k)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} - (l_{-s}^i h_{++}^k)^{\chi\chi} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} + \\ + (l_{+s}^i h_{-+}^k)^{\chi\chi} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} - (l_{+s}^i h_{++}^k)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{+2i\phi},$$

$$(l_{-s}^i h_{++}^k)^{\eta\eta} = (l_{-s}^i h_{-+}^k)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + (l_{-s}^i h_{--}^k)^{\chi\chi} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} + \\ + (l_{+s}^i h_{-+}^k)^{\chi\chi} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} + (l_{+s}^i h_{--}^k)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{-s}^i h_{+-}^k)^{\eta\eta} = (l_{-s}^i h_{++}^k)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + (l_{-s}^i h_{-+}^k)^{\chi\chi} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} + \\ + (l_{+s}^i h_{++}^k)^{\chi\chi} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} + (l_{+s}^i h_{-+}^k)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{-s}^i h_{-+}^k)^{\eta\eta} = (l_{-s}^i h_{--}^k)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} - (l_{-s}^i h_{+-}^k)^{\chi\chi} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} + \\ + (l_{+s}^i h_{--}^k)^{\chi\chi} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} - (l_{+s}^i h_{+-}^k)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{+2i\phi},$$

$$(l_{+s}^i h_{--}^k)^{\eta\eta} = (l_{+s}^i h_{-+}^k)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} - (l_{+s}^i h_{++}^k)^{\chi\chi} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} - \\ - (l_{-s}^i h_{-+}^k)^{\chi\chi} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} + (l_{-s}^i h_{++}^k)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{+s}^i h_{+-}^k)^{\eta\eta} = (l_{+s}^i h_{++}^k)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + (l_{+s}^i h_{-+}^k)^{\chi\chi} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} - \\ - (l_{-s}^i h_{++}^k)^{\chi\chi} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} - (l_{-s}^i h_{-+}^k)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{-2i\phi},$$

$$(l_{+s}^i h_{-+}^k)^{\eta\eta} = (l_{+s}^i h_{--}^k)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} - (l_{+s}^i h_{+-}^k)^{\chi\chi} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} - \\ - (l_{-s}^i h_{--}^k)^{\chi\chi} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} + (l_{-s}^i h_{+-}^k)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{+s}^i h_{++}^k)^{\eta\eta} = (l_{+s}^i h_{-+}^k)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + (l_{+s}^i h_{--}^k)^{\chi\chi} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} - \\ - (l_{-s}^i h_{-+}^k)^{\chi\chi} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} - (l_{-s}^i h_{--}^k)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{-2i\phi}.$$

Здесь нижний индекс у лептонного тока $s = \pm$ означает проекцию спина начального лептона, а верхние индексы i, k маркируют различные типы токов, как в формуле (2.1).

*Подробнее представлены в прил. 5.

Обобщение на все другие возможные переводы скалярных произведений из одного базиса в другой можно сделать аналогично с помощью формул (4.3) и (4.4).

4.5. Квадраты скалярных произведений в $\chi\eta$ -базисе и $\chi\chi$ -базисе спиральности. Из соотношений типа (4.7) можно получить связь между квадратами скалярных произведений в разных базисах. Действительно, используя квадрат модуля правой и левой частей первых двух формул (4.7), имеем* (опустив для удобства вниз базисные индексы) следующее:

$$\begin{aligned} |(l_{s's}^v h_{-}^v)_{\chi\eta}|^2 &= |(l_{s's}^v h_{-}^v)_{\chi\chi}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + |(l_{s's}^v h_{++}^v)_{\chi\chi}|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - \\ &- \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} [(l_{s's}^v h_{-}^v)_{\chi\chi} (l_{s's}^v h_{++}^v)_{\chi\chi}^\dagger e^{-i\phi} + (l_{s's}^v h_{++}^v)_{\chi\chi} (l_{s's}^v h_{-}^v)_{\chi\chi}^\dagger e^{+i\phi}], \\ |(l_{s's}^v h_{+}^v)_{\chi\eta}|^2 &= |(l_{s's}^v h_{++}^v)_{\chi\chi}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + |(l_{s's}^v h_{-}^v)_{\chi\chi}|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \\ &+ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} [(l_{s's}^v h_{-}^v)_{\chi\chi} (l_{s's}^v h_{++}^v)_{\chi\chi}^\dagger e^{-i\phi} + (l_{s's}^v h_{++}^v)_{\chi\chi} (l_{s's}^v h_{-}^v)_{\chi\chi}^\dagger e^{+i\phi}]. \end{aligned}$$

Далее, складывая правые и левые части этих выражений, получим для квадратов:

$$|(l_{s's}^v h_{-}^v)_{\chi\eta}|^2 + |(l_{s's}^v h_{+}^v)_{\chi\eta}|^2 = |(l_{s's}^v h_{-}^v)_{\chi\chi}|^2 + |(l_{s's}^v h_{++}^v)_{\chi\chi}|^2.$$

Аналогично, quadriруя и складывая две нижние формулы из (4.7), получаем

$$|(l_{s's}^v h_{++}^v)_{\chi\eta}|^2 + |(l_{s's}^v h_{-}^v)_{\chi\eta}|^2 = |(l_{s's}^v h_{+-}^v)_{\chi\chi}|^2 + |(l_{s's}^v h_{--}^v)_{\chi\chi}|^2.$$

Таким образом, в совершенно общем виде можно записать (т. е. для любых токов, в данном случае используется обозначение слабого массивного тока) так:

$$\begin{aligned} |(l_{s's}^w h_{-}^w)_{\chi\eta}|^2 + |(l_{s's}^w h_{+}^w)_{\chi\eta}|^2 &= |(l_{s's}^w h_{-}^w)_{\chi\chi}|^2 + |(l_{s's}^w h_{++}^w)_{\chi\chi}|^2, \\ |(l_{s's}^w h_{++}^w)_{\chi\eta}|^2 + |(l_{s's}^w h_{-}^w)_{\chi\eta}|^2 &= |(l_{s's}^w h_{+-}^w)_{\chi\chi}|^2 + |(l_{s's}^w h_{--}^w)_{\chi\chi}|^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Отсюда видно, что для любых комбинаций s', s спиральности лептона суммирование по конечным спиральностям нуклона при фиксированной его начальной спиральности $r = +1$ (верхняя строка в (4.8) справа) и $r = -1$ (нижняя строка справа) можно провести раздельно посредством соответствующего суммирования квадратов скалярных произведений, полученных в $\chi\eta$ -базисе. Действительно, если спиральность начального нуклона, скажем, положительна ($r = +1$), то сумма квадратов скалярных произведений по

*Так как $|(l_{s's}^v h_{-}^v)_{\chi\eta}|^2 \equiv [(l_{s's}^v h_{-}^v)_{\chi\chi} \sin \theta/2 - (l_{s's}^v h_{++}^v)_{\chi\chi} \cos \theta/2 e^{+i\phi}] \times [(l_{s's}^v h_{-}^v)_{\chi\chi}^\dagger \sin \theta/2 - (l_{s's}^v h_{++}^v)_{\chi\chi}^\dagger \cos \theta/2 e^{-i\phi}]$.

спиральностям конечного нуклона, т. е. $r' = -1, +1$ (верхняя строка в (4.8) справа, первый индекс), равна аналогичной сумме по проекциям спина конечного нуклона на выделенное направление $r' = -1, +1$ (верхняя строка слева, первый индекс) при отрицательной $r = -1$ (верхняя строка слева, второй индекс) проекции спина начального нуклона на это же направление. Если спиральность начального нуклона отрицательна (нижняя строка в (4.8) справа), то та же процедура полностью применима для второй строки (4.8), только при положительной начальной проекции спина нуклона на выделенное направление. Иными словами, формулы (4.8) можно переписать в виде

$$\sum_{r'=\pm} |(l_{s's}^{w,\chi} h_{r'-}^{w,\eta})|^2 = \sum_{r'=\pm} |(l_{s's}^{w,\chi} h_{r'+}^{w,\chi})|^2,$$

$$\sum_{r'=\pm} |(l_{s's}^{w,\chi} h_{r'+}^{w,\eta})|^2 = \sum_{r'=\pm} |(l_{s's}^{w,\chi} h_{r'-}^{w,\chi})|^2.$$

Обобщение на суммирование по всем возможным проекциям спина нуклона очевидно:

$$\sum_{r',r=\pm} |(l_{s's}^{w,\chi} h_{r'r}^{w,\eta})|^2 = \sum_{r',r=\pm} |(l_{s's}^{w,\chi} h_{r'r}^{w,\chi})|^2.$$

Это соотношение, с одной стороны, является отражением общего свойства независимости конечного результата от выбора базиса, с другой — позволяет проводить вычисления как когерентного вклада в полное сечение лептон-ядерного рассеяния (в σ_3 -базисе, когда ось квантования спина нуклона фиксирована), так и некогерентного вклада, который обычно рассматривается в базисе спиральности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе содержатся полные наборы скалярных произведений токов двух массивных фермионов (лептона и нуклона)*, определенных выражением (2.1):

$$(l_{s's}^i h_{r'r}^k) \equiv \sum_{\mu,\nu} J_{s's}^{i,\mu}(k', k) g_{\mu\nu} J_{r'r}^{k,\nu}(p', p). \quad (3.1)$$

Здесь 3-импульс k (k') и спиновый индекс s (s') относятся к начальному (конечному) лептону, а 3-импульс p (p') и спиновый индекс r (r') относятся к начальному (конечному) нуклону соответственно. Верхними индексами i и k

*В качестве нуклона может быть любой другой бесструктурный фермион, отличный от «нашего» лептона.

обозначены векторные, аксиально-векторные, скалярные и псевдоскалярные лептонные и адронные токи:

$$\begin{aligned}
 J_{s's}^{v,\mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv \bar{u}(\mathbf{k}', s') \gamma^\mu u(\mathbf{k}, s), & J_{r'r}^{v,\nu}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^\nu u(\mathbf{p}, r), \\
 J_{s's}^{a,\mu}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv \bar{u}(\mathbf{k}', s') \gamma^\mu \gamma^5 u(\mathbf{k}, s), & J_{r'r}^{a,\nu}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^\nu \gamma^5 u(\mathbf{p}, r), \\
 J_{s's}^s(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv \bar{u}(\mathbf{k}', s') u(\mathbf{k}, s), & J_{r'r}^s(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \bar{u}(\mathbf{p}', r') u(\mathbf{p}, r), \\
 J_{s's}^p(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv \bar{u}(\mathbf{k}', s') \gamma^5 u(\mathbf{k}, s), & J_{r'r}^p(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^5 u(\mathbf{p}, r).
 \end{aligned}$$

Из скалярных произведений (3.1) как из «фундаментальных» блоков для любых возможных значений проекций спина нуклона ($r', r = \pm 1$) и лептона ($s', s = \pm 1$) можно построить «реальные» скалярные произведения, отвечающие, например, взаимодействию массивного лептона с нуклоном за счет векторной и аксиально-векторной компонент (слабого тока):

$$(l_{s's}^w h_{r'r}^w) = \alpha(l_{s's}^v h_{r'r}^v) + \beta(l_{s's}^a h_{r'r}^a) + \gamma(l_{s's}^s h_{r'r}^s) + \delta(l_{s's}^p h_{r'r}^p),$$

где α , β , γ и δ — эффективные константы связи.

Скалярные произведения (3.1) получены для трех физически различных случаев ориентации спина лептона и спина нуклона (в с. п. м. их упругого рассеяния). Эти три набора обусловлены выбором базисов (п. 2.2) 2-компонентных фермионных спиноров (биспиноров), которые отличаются по физическому смыслу. Так, базис спиральности (или χ -базис) сформирован из собственных векторов оператора спиральности, где r, r' (и s', s) — собственные значения оператора спиральности, т. е. когда спин фермиона параллелен или антипараллелен его импульсу. Другой базис (σ_3 - или η -базис) составляют собственные векторы (состояния) оператора $\sigma_3 = (\mathbf{n}_k \cdot \boldsymbol{\sigma})$, задающего определенное направление (квантования) в пространстве. В данном случае — это направление вдоль z -оси, параллельное направлению импульса начального лептона. Собственные значения σ_3 -оператора r, r' (и s', s) — это теперь проекции спина обоих фермионов на заданное направление (прилета лептона). Таким образом, выбор базиса для вычисления скалярных произведений обусловлен физическим смыслом спиновых индексов s', s, r', r и, следовательно, постановкой решаемой физической задачи.

Полученные в настоящей работе наборы скалярных произведений как минимум необходимы для самосогласованного вычисления сечений когерентного (упругого) и некогерентного (неупругого) взаимодействия массивных нейтральных слабовзаимодействующих частиц (например, частиц темной материи) с ядерными мишенями соответствующих детекторов.

Действительно, в работах [1–3] было дано единое описание взаимодействий $\nu A \rightarrow \nu A^{(*)}$ и $\bar{\nu} A \rightarrow \bar{\nu} A^{(*)}$, когда ядро-мишень A , сохраняя свою целостность, остается в своем первоначальном состоянии (когерентный процесс) и/или переходит в возбужденное состояние A^* . Как уже упоминалось,

важную роль при этом играла нейтрино-ядерная амплитуда (1.1), которая представима схематически в виде двух слагаемых, когда $r' = r$ и $r' \neq r$:

$$i\mathcal{M}_{mn}(\chi A \rightarrow \chi A^{(*)}) \propto \propto i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^A \sum_{r',r} \left[f_{mn}^k \lambda_{r',r}^{mn} (l_{\mp\mp}^k h_{r' \neq r}^k) + f_{mn}^k \lambda_{r,r}^{mn} (l_{\mp\mp}^k h_{r'=r}^k) \right].$$

Поскольку условием когерентности является неизменность внутреннего состояния ядра после взаимодействия, то для «обеспечения» режима когерентного рассеяния необходимо быть уверенным в неизменности спинового состояния активного нуклона (и, следовательно, всего ядра) после взаимодействия. Поэтому нужно иметь возможность вычислять входящие в эту амплитуду скалярные произведения при любых значениях проекций спина конечного r' и начального r нуклона на некоторое выбранное направление. В «когерентном» случае эти проекции должны совпадать, т.е. $r' \equiv r$. В результате все скалярные произведения надо вычислять «напрямую» путем перемножения двух 4-векторов токов (см., например, [15]) с конкретными значениями проекций спина нуклона. Использование общепринятой эффективной техники (см., например, [16, 17]) взятия шпуров γ -матриц (за счет первоначального суммирования по всем проекциям спина участвующих частиц) и явного вида фермионных матриц плотности здесь неприменимо, поскольку нуклон не свободен в ядре, вследствие этого невозможно зафиксировать ни начальную, ни конечную ориентацию спина нуклона. Важно, однако, что использование скалярных произведений позволяет четко различать и контролировать ситуации, когда нуклон изменяет ($r' \neq r$) и когда не изменяет ($r' = r$) ориентацию своего спина внутри ядра после взаимодействия.

Подход [1–3] может быть обобщен на случай, когда вместо безмассового (анти)нейтрино рассматривается массивная нейтральная частица и когда достаточно слабое взаимодействие этой частицы с нуклонами ядра описывается феноменологическим лагранжианом, учитывающим возможные лоренц-структуры (скаляр, псевдоскаляр, вектор и аксиальный вектор). Важный пример — это процесс прямого детектирования массивных слабозадействующих нейтральных частиц темной материи за счет их упругого (и, вообще говоря, неупругого) рассеяния на ядрах. В этом случае вид амплитуды рассеяния сильно усложняется, поскольку частица темной материи, как правило, обладает большой массой и спиральность ее, в отличие от нейтрино и антинейтрино, может легко меняться в процессе взаимодействия с нуклонами ядра. Поэтому корректное вычисление когерентного сечения такого рассеяния требует существенно большего числа скалярных произведений (для каждой из возможных лоренц-структур). Решение именно этой задачи — нахождение всех необходимых скалярных произведений — цель данной работы.

В определенном смысле она является важной вспомогательной основой для работы [14], в которой вычисление сечения когерентного рассеяния массивного лептона на ядре обсуждается подробно.

Использованный подход, безусловно, давно известен (см., например, [15]), однако применение и обсуждение его в таком масштабе и таком контексте в современной литературе автору найти не удалось. Кроме того, достаточно подробно изложенная процедура получения формул может быть полезна в образовательных целях.

Автор выражает глубокую благодарность Д. В. Наумову, совместная работа и тесное общение с которым послужили стимулом к написанию обзора. Также автор искренне благодарит А. А. Владимирова за полезные комментарии и сотрудников ЛЯП ОИЯИ за терпение.

Приложение 1

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОМПОНЕНТ ТОКОВ МАССИВНЫХ ФЕРМИОНОВ

Компоненты нуклонных и лептонных токов определены формулами (2.13) и (2.15). Для их вычисления необходимо иметь явный вид нуклонных и лептонных токовых матриц, заданных формулами (2.17)–(2.19) и (2.21)–(2.23), а также явный вид нуклонных $\chi_r^\dagger(\mathbf{p}')$, $\chi_r(\mathbf{p})$ и лептонных $\chi_{s'}^\dagger(\mathbf{k}')$, $\chi_s(\mathbf{k})$ биспиноров (2.32) и (2.37).

П.1.1. Базис σ_3 . Вычисление компонент нуклонных и лептонных токов. Для вычисления компонент нуклонных токов используются явные выражения для токовых нуклонных матриц (2.17)–(2.19) и явный вид нуклонных биспиноров (2.37):

$$\eta_-^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_+^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{так как} \quad \eta_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.1})$$

Прямая подстановка согласно формулам (2.13) дает выражения для всех компонент нуклонного тока при всех возможных проекциях спина нуклона на направление движения начального лептона. Например, четыре компоненты векторного нуклонного тока, отвечающие сохранению отрицательной проекции спина нуклона на выбранную ось $V_{--}^\mu(\mathbf{p}')$, получаются следующим образом:

$$\begin{aligned} V_{--}^0(\mathbf{p}') &= \eta_-^\dagger \hat{V}^0(\mathbf{p}') \eta_- = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_p + m + (E_p - m) \cos \theta & -e^{-i\phi} (E_p - m) \sin \theta \\ e^{i\phi} (E_p - m) \sin \theta & E_p + m + (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} (E_p - m) \sin \theta \\ E_p + m + (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix} = E_p + m + (E_p - m) \cos \theta, \end{aligned}$$

$$V_{--}^1(\mathbf{p}') = \eta_-^\dagger \hat{V}^1(\mathbf{p}') \eta_- =$$

$$= (0 \ 1) |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \\ -1 + \cos \theta & \underline{-e^{i\phi} \sin \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -|\mathbf{k}| e^{i\phi} \sin \theta,$$

$$V_{--}^2(\mathbf{p}') = \eta_-^\dagger \hat{V}^2(\mathbf{p}') \eta_- =$$

$$= (0 \ 1) i |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & -1 + \cos \theta \\ -1 + \cos \theta & \underline{e^{i\phi} \sin \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i |\mathbf{k}| e^{i\phi} \sin \theta,$$

$$V_{--}^3(\mathbf{p}') = \eta_-^\dagger \hat{V}^3(\mathbf{p}') \eta_- =$$

$$= (0 \ 1) |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} -(1 + \cos \theta) & e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & \underline{-(1 + \cos \theta)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -|\mathbf{k}| (1 + \cos \theta).$$

Компоненты векторного нуклонного тока, отвечающие изменению отрицательной проекции спина нуклона на положительную проекцию спина $V_{+-}^\mu(\mathbf{p}')$, получаются аналогично:

$$V_{+-}^0(\mathbf{p}') = \eta_+^\dagger \hat{V}^0(\mathbf{p}') \eta_- =$$

$$= (1 \ 0) \begin{pmatrix} E_p + m + (E_p - m) \cos \theta & -e^{-i\phi} (E_p - m) \sin \theta \\ e^{i\phi} (E_p - m) \sin \theta & E_p + m + (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (1 \ 0) \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} (E_p - m) \sin \theta \\ E_p + m + (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix} = -e^{-i\phi} (E_p - m) \sin \theta,$$

$$V_{+-}^1(\mathbf{p}') = \eta_+^\dagger \hat{V}^1(\mathbf{p}') \eta_- =$$

$$= (1 \ 0) |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \\ -1 + \cos \theta & -e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\mathbf{k}| (1 - \cos \theta),$$

$$V_{+-}^2(\mathbf{p}') = \eta_+^\dagger \hat{V}^2(\mathbf{p}') \eta_- =$$

$$= (1 \ 0) i |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & -1 + \cos \theta \\ -1 + \cos \theta & e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i |\mathbf{k}| (-1 + \cos \theta),$$

$$V_{+-}^3(\mathbf{p}') = \eta_+^\dagger \hat{V}^3(\mathbf{p}') \eta_- =$$

$$= (1 \ 0) |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} -(1 + \cos \theta) & e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & -(1 + \cos \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\mathbf{k}| e^{-i\phi} \sin \theta.$$

Для скалярного и псевдоскалярного нуклонных токов в силу простого явного вида биспиноров вычисление также сводится к простому последовательному перебору всех четырех элементов матриц $\hat{S}(\mathbf{p}')$ и $\hat{P}(\mathbf{p}')$,

например, в виде*

$$\begin{aligned}
 P_{--}(\mathbf{p}') &= \eta_-^\dagger \hat{P}(\mathbf{p}') \chi_- = (0 \ 1) |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} -1 + \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= (0 \ 1) |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta \\ 1 - \cos \theta \end{pmatrix} = |\mathbf{k}| (1 - \cos \theta), \\
 P_{++}(\mathbf{p}') &= \eta_+^\dagger \hat{P}(\mathbf{p}') \chi_+ = \\
 &= (1 \ 0) |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} -1 + \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\mathbf{k}| (-1 + \cos \theta), \\
 P_{+-}(\mathbf{p}') &= \eta_+^\dagger \hat{P}(\mathbf{p}') \chi_- = (1 \ 0) |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} -1 + \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= (1 \ 0) |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta \\ 1 - \cos \theta \end{pmatrix} = |\mathbf{k}| e^{-i\phi} \sin \theta, \\
 P_{-+}(\mathbf{p}') &= \eta_-^\dagger \hat{P}(\mathbf{p}') \chi_+ = \\
 &= (0 \ 1) |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} -1 + \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\mathbf{k}| e^{i\phi} \sin \theta.
 \end{aligned}$$

Действуя совершенно аналогично, можно получить компоненты всех ну-клонных токов для всех возможных значений проекций спина начального и конечного нуклона на направление движения начального лептона (σ_3 -базис).

Для вычисления компонент лептонных токов используются явные выражения для токовых лептонных матриц (2.21)–(2.23) и явный вид лептонных биспиноров (2.37) или (П.1).

Так же, как и в случае вычисления компонент нуклонных токов, прямая подстановка в формулы (2.15) дает выражения для всех компонент лептонных токов при всех возможных проекциях спина лептона на направление движения начального лептона. Например, четыре компоненты векторного лептонного тока, отвечающие сохранению отрицательной проекции спина лептона на выбранную ось $V_{--}^\mu(\mathbf{k}')$, получаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 V_{--}^0 &= \eta_-^\dagger(\mathbf{k}') V^0(k') \eta_-(\mathbf{k}) = \\
 &= (0, 1) \begin{pmatrix} E_\chi + m_\chi + (E_\chi - m_\chi) \cos \theta & -e^{-i\phi} (E_\chi - m_\chi) \sin \theta \\ e^{i\phi} (E_\chi - m_\chi) \sin \theta & \underline{E_\chi + m_\chi + (E_\chi - m_\chi) \cos \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= (0, 1) \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} (E_\chi - m_\chi) \sin \theta \\ \underline{E_\chi + m_\chi + (E_\chi - m_\chi) \cos \theta} \end{pmatrix} = E_\chi + m_\chi + (E_\chi - m_\chi) \cos \theta,
 \end{aligned}$$

*Здесь для наглядности подчеркнуты элементы токовых матриц, которые определяют конечный результат.

$$V_{--}^1 = \eta_-^\dagger V^1(k') \eta_- = (0, 1) |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta & -1 + \cos \theta \\ 1 - \cos \theta & e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\mathbf{k}| e^{i\phi} \sin \theta,$$

$$V_{--}^2 = \eta_-^\dagger V^2(k') \eta_- = (0, 1) i |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \\ 1 - \cos \theta & -e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -i |\mathbf{k}| e^{i\phi} \sin \theta,$$

$$V_{--}^3 = \eta_-^\dagger V^3(k') \eta_- = (0, 1) |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 + \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\mathbf{k}| (1 + \cos \theta).$$

Действуя совершенно аналогично, можно получить компоненты лептонных токов для всех возможных значений проекций спина начального и конечного лептона на направление движения начального лептона (σ_3 -базис).

Все компоненты токов удобно записать в виде «тока-строки». Например, для векторного лептонного тока $V_{s's}^\eta(k') \equiv V_{s's}^{\eta, \mu=0,1,2,3}(k')$ они имеют вид (2.43). Остальные лептонные и нуклонные токи в σ_3 -базисе приведены в п. 2.3 в виде формул (2.42), (2.44)–(2.47).

В терминах дираковских 4-спиноров начальных и конечных нуклонов компоненты слабого нуклонного ($V-A$) тока Стандартной модели определяются, как известно, в виде

$$\begin{aligned} h_{\pm\pm}^\mu(\mathbf{p}') &= g_V \bar{u}(\mathbf{p}', \pm) \gamma^\mu u(\mathbf{p}_i, \pm) - g_A \bar{u}(\mathbf{p}', \pm) \gamma^\mu \gamma_5 u(\mathbf{p}_i, \pm) = \\ &= g_V V_{\pm\pm}^{\eta, \mu}(\mathbf{p}') - g_A A_{\pm\pm}^{\eta, \mu}(\mathbf{p}'). \end{aligned}$$

Для четырех возможных комбинаций проекций спина конечного и начального нуклона на направление 3-импульса начального лептона (η -базис) согласно формулам (2.42) и (2.44) имеются следующие явные выражения для компонент слабого нуклонного тока:

$$\begin{aligned} h_{++}^\mu &= \left\{ g_A |\mathbf{k}| (1 + \cos \theta) + g_V (E_p + m + (E_p - m) \cos \theta), \right. \\ &\quad - (E_p g_A + |\mathbf{k}| g_V - g_A m) e^{-i\phi} \sin \theta, -i (E_p g_A + |\mathbf{k}| g_V - g_A m) e^{-i\phi} \sin \theta, \\ &\quad \left. - |\mathbf{k}| g_V (1 + \cos \theta) - g_A (E_p + m + (E_p - m) \cos \theta) \right\}, \\ h_{--}^\mu &= \left\{ -g_A |\mathbf{k}| (1 + \cos \theta) + g_V (E_p + m + (E_p - m) \cos \theta), \right. \\ &\quad (E_p g_A - |\mathbf{k}| g_V - g_A m) e^{+i\phi} \sin \theta, i (-E_p g_A + |\mathbf{k}| g_V + g_A m) e^{+i\phi} \sin \theta, \\ &\quad \left. - |\mathbf{k}| g_V + g_A (E_p + m) + (E_p g_A - |\mathbf{k}| g_V - g_A m) \cos \theta \right\}, \\ h_{+-}^\mu &= \left\{ (|\mathbf{k}| g_A + g_V (-E_p + m)) e^{-i\phi} \sin \theta, g_V (|\mathbf{k}| - |\mathbf{k}| \cos \theta) - \right. \\ &\quad - g_A (E_p + m + (-E_p + m) \cos \theta), i (|\mathbf{k}| g_V (-1 + \cos \theta) + \\ &\quad \left. + g_A (E_p + m + (-E_p + m) \cos \theta)), (-E_p g_A + |\mathbf{k}| g_V + g_A m) e^{-i\phi} \sin \theta \right\}, \end{aligned}$$

$$h_{-+}^{\mu} = \left\{ (|\mathbf{k}|g_A + g_V(E_p - m)) e^{+i\phi} \sin \theta, |\mathbf{k}|g_V(-1 + \cos \theta) - \right. \\ \left. - g_A(E_p + m + (-E_p + m) \cos \theta), i(|\mathbf{k}|g_V(-1 + \cos \theta) - \right. \\ \left. - g_A(E_p + m + (-E_p + m) \cos \theta)), -(E_p g_A + |\mathbf{k}|g_V - g_A m) e^{+i\phi} \sin \theta \right\}.$$

П.1.2. Базис спиральности. Вычисление компонент нуклонных и лептонных токов. Для вычисления компонент нуклонных токов в χ -базисе используются выражения для токовых нуклонных матриц (2.17)–(2.19) и для нуклонных биспиноров (2.32):

$$\chi_{-}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \chi_{-}^{\dagger}(\mathbf{p}') = \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} e^{+i\phi} \cot \frac{\theta}{2}, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{+i\phi} \cos \frac{\theta}{2}, & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ \chi_{+}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \chi_{+}^{\dagger}(\mathbf{p}') = -e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -e^{+i\phi} \tan \frac{\theta}{2}, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2}, & -e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти выражения в формулы для нуклонных токов (2.13) и учитывая явный вид нуклонных токовых матриц (2.17)–(2.19) $\hat{V}^{\mu}(\mathbf{p}')$, $\hat{A}^{\mu}(\mathbf{p}')$ и $\hat{S}(\mathbf{p}')$, $\hat{P}(\mathbf{p}')$, можно получить (в с. п. м.) выражения для всех возможных компонент нуклонных токов. Например, первые две компоненты нуклонного скалярного тока вычисляются следующим образом*:

$$S_{--}^X = \chi_{-}^{\dagger}(\mathbf{p}') \hat{S}(\mathbf{p}') \chi_{-}(\mathbf{p}) = \\ = \chi_{-}^{\dagger}(\mathbf{p}') \begin{pmatrix} E_p + m - (E_p - m) \cos \theta & e^{-i\phi} (E_p - m) \sin \theta \\ -e^{i\phi} (E_p - m) \sin \theta & E_p + m - (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix} \chi_{-}(\mathbf{p}) = \\ = \begin{pmatrix} e^{+i\phi} \cos \frac{\theta}{2}, & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} E_p + m - (E_p - m) \cos \theta & e^{-i\phi} (E_p - m) \sin \theta \\ -e^{i\phi} (E_p - m) \sin \theta & E_p + m - (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} e^{+i\phi} \cos \frac{\theta}{2}, & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_p + m - (E_p - m) \cos \theta \\ -e^{i\phi} (E_p - m) \sin \theta \end{pmatrix} =$$

*С учетом того, что $\cos \theta + \tan \theta/2 \sin \theta = \cot \theta/2 \sin \theta - \cos \theta = 1$.

$$\begin{aligned}
 &= e^{+i\phi} \left[(E_p + m) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} (E_p - m) \cos \theta - \sin \frac{\theta}{2} (E_p - m) \sin \theta \right] = \\
 &= e^{+i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \left[(E_p + m) - (E_p - m) \left(\cos \theta + \tan \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) \right] = 2m e^{+i\phi} \cos \frac{\theta}{2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{-+}^X &= \left(e^{+i\phi} \cos \frac{\theta}{2}, \quad \sin \frac{\theta}{2} \right) \times \\
 &\times \begin{pmatrix} E_p + m - (E_p - m) \cos \theta & e^{-i\phi} (E_p - m) \sin \theta \\ -e^{i\phi} (E_p - m) \sin \theta & E_p + m - (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \left(e^{+i\phi} \cos \frac{\theta}{2}, \quad \sin \frac{\theta}{2} \right) \begin{pmatrix} e^{-i\phi} (E_p - m) \sin \theta \\ E_p + m - (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix} = \\
 &= e^{+i\phi} \cos \frac{\theta}{2} [e^{-i\phi} (E_p - m) \sin \theta] + \sin \frac{\theta}{2} [E_p + m - (E_p - m) \cos \theta] = \\
 &= \sin \frac{\theta}{2} \left[E_p + m + (E_p - m) \left(-\cos \theta + \cot \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) \right] = 2E_p \sin \frac{\theta}{2}.
 \end{aligned}$$

Остальные компоненты нуклонных токов можно получить таким же образом или с использованием пакета Mathematica. Например, для нулевой и первой компонент векторного тока имеем

$$\begin{aligned}
 V_{--}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', -1) \gamma_0 u(\mathbf{p}, -1) = \chi_-^\dagger(\mathbf{p}') V_0(\mathbf{p}') \chi_-(\mathbf{p}) = 2 e^{i\phi} E_p \cos \frac{\theta}{2}, \\
 V_{-+}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', -1) \gamma_0 u(\mathbf{p}, +1) = \chi_-^\dagger(\mathbf{p}') V_0(\mathbf{p}') \chi_+(\mathbf{p}) = 2m \sin \frac{\theta}{2}, \\
 V_{+-}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', +1) \gamma_0 u(\mathbf{p}, -1) = \chi_+^\dagger(\mathbf{p}') V_0(\mathbf{p}') \chi_-(\mathbf{p}) = 2m \sin \frac{\theta}{2}, \\
 V_{++}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', +1) \gamma_0 u(\mathbf{p}, +1) = \chi_+^\dagger(\mathbf{p}') V_0(\mathbf{p}') \chi_+(\mathbf{p}) = -2E_p e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2}, \\
 V_{--}^1(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', -1) \gamma_1 u(\mathbf{p}, -1) = \chi_-^\dagger(\mathbf{p}') V_1(\mathbf{p}') \chi_-(\mathbf{p}) = -2|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2}, \\
 V_{-+}^1(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', -1) \gamma_1 u(\mathbf{p}, +1) = \chi_-^\dagger(\mathbf{p}') V_1(\mathbf{p}') \chi_+(\mathbf{p}) = 0, \\
 V_{+-}^1(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', +1) \gamma_1 u(\mathbf{p}, -1) = \chi_+^\dagger(\mathbf{p}') V_1(\mathbf{p}') \chi_-(\mathbf{p}) = 0, \\
 V_{++}^1(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', +1) \gamma_1 u(\mathbf{p}, +1) = \chi_+^\dagger(\mathbf{p}') V_1(\mathbf{p}') \chi_+(\mathbf{p}) = 2|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2}.
 \end{aligned}$$

Для вычисления компонент лептонных токов в χ -базисе используются явные выражения для токовых лептонных матриц (2.21)–(2.23) и лептонных

биспиноров (2.32):

$$\chi_{-}^{\dagger}(\mathbf{k}') = \cos \frac{\theta}{2} \left(-e^{i\phi} \tan \frac{\theta}{2}, 1 \right), \quad \chi_{-}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\chi_{+}^{\dagger}(\mathbf{k}') = e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \left(e^{i\phi} \cot \frac{\theta}{2}, 1 \right), \quad \chi_{+}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя их в формулы для лептонных токов (2.15) и учитывая явный вид лептонных токовых матриц (2.21)–(2.23), $\hat{V}^{\mu}(\mathbf{k}')$, $\hat{A}^{\mu}(\mathbf{k}')$ и $\hat{S}(\mathbf{k}')$, $\hat{P}(\mathbf{k}')$, можно получить выражения для всех возможных компонент лептонных токов. Прямые выкладки, например, для первой компоненты $A_{\pm\pm}^{\mu=1}(\mathbf{k}')$ аксиального лептонного тока без изменения спиральности таковы*:

$$\begin{aligned} A_{--}^1 &= \chi_{-}^{\dagger}(\mathbf{k}') A^1(\mathbf{k}') \chi_{-}(\mathbf{k}) = \chi_{-}^{\dagger}(\mathbf{k}') \times \\ &\times \begin{bmatrix} (E_{\chi} - m_{\chi}) e^{-i\phi} \sin \theta & (E_{\chi} + m_{\chi}) - (E_{\chi} - m_{\chi}) \cos \theta \\ (E_{\chi} + m_{\chi}) - (E_{\chi} - m_{\chi}) \cos \theta & -(E_{\chi} - m_{\chi}) e^{i\phi} \sin \theta \end{bmatrix} \chi_{-}(\mathbf{k}) = \\ &= \cos \frac{\theta}{2} \left(-e^{i\phi} \tan \frac{\theta}{2}, 1 \right) \times \\ &\times \begin{bmatrix} (E_{\chi} - m_{\chi}) e^{-i\phi} \sin \theta & (E_{\chi} + m_{\chi}) - (E_{\chi} - m_{\chi}) \cos \theta \\ (E_{\chi} + m_{\chi}) - (E_{\chi} - m_{\chi}) \cos \theta & -(E_{\chi} - m_{\chi}) e^{i\phi} \sin \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \cos \frac{\theta}{2} \left(-e^{i\phi} \tan \frac{\theta}{2}, 1 \right) \begin{pmatrix} (E_{\chi} + m_{\chi}) - (E_{\chi} - m_{\chi}) \cos \theta \\ -(E_{\chi} - m_{\chi}) e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} = \\ &= -e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \tan \frac{\theta}{2} \left\{ (E_{\chi} + m_{\chi}) + (E_{\chi} - m_{\chi}) \left[-\cos \theta + \sin \theta \cot \frac{\theta}{2} \right] \right\} = \\ &= -2E_{\chi} e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, \\ A_{++}^1 &= \chi_{+}^{\dagger}(\mathbf{k}') \times \\ &\times \begin{bmatrix} (E_{\chi} - m_{\chi}) e^{-i\phi} \sin \theta & (E_{\chi} + m_{\chi}) - (E_{\chi} - m_{\chi}) \cos \theta \\ (E_{\chi} + m_{\chi}) - (E_{\chi} - m_{\chi}) \cos \theta & -(E_{\chi} - m_{\chi}) e^{i\phi} \sin \theta \end{bmatrix} \chi_{+}(\mathbf{k}) = \\ &= e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \left(e^{i\phi} \cot \frac{\theta}{2}, 1 \right) \begin{pmatrix} (E_{\chi} - m_{\chi}) e^{-i\phi} \sin \theta \\ (E_{\chi} + m_{\chi}) - (E_{\chi} - m_{\chi}) \cos \theta \end{pmatrix} = \\ &= e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \left\{ e^{i\phi} \cot \frac{\theta}{2} (E_{\chi} - m_{\chi}) e^{-i\phi} \sin \theta + (E_{\chi} + m_{\chi}) - (E_{\chi} - m_{\chi}) \cos \theta \right\} = \\ &= e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \left\{ E_{\chi} + m_{\chi} + (E_{\chi} - m_{\chi}) \left[\cot \frac{\theta}{2} \sin \theta - \cos \theta \right] \right\} = 2e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} E_{\chi}. \end{aligned}$$

*Учтено, что $\cot \theta/2 \sin \theta - \cos \theta - 1 = 1 + \cos \theta - \cot \theta/2 \sin \theta = 0$.

Аналогичным образом вычислены все остальные компоненты лептонных токов в χ -базисе. В частности, для сохраняющих спиральность лептонных токов получаются такие выражения:

$$V_{--}^{\chi, \mu=0,1,2,3}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = 2 \left\{ + E_\chi \cos \frac{\theta}{2}, + |\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} e^{+i\phi}, -i |\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} e^{+i\phi}, + |\mathbf{k}| \cos \frac{\theta}{2} \right\},$$

$$V_{++}^{\chi, \mu=0,1,2,3}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = 2 \left\{ + E_\chi \cos \frac{\theta}{2}, + |\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, +i |\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, + |\mathbf{k}| \cos \frac{\theta}{2} \right\},$$

$$A_{--}^{\chi, \mu=0,1,2,3}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = 2 \left\{ - |\mathbf{k}| \cos \frac{\theta}{2}, - E_\chi \sin \frac{\theta}{2} e^{+i\phi}, i E_\chi \sin \frac{\theta}{2} e^{+i\phi}, - E_\chi \cos \frac{\theta}{2} \right\},$$

$$A_{++}^{\chi, \mu=0,1,2,3}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = 2 \left\{ + |\mathbf{k}| \cos \frac{\theta}{2}, + E_\chi \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, +i E_\chi \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, + E_\chi \cos \frac{\theta}{2} \right\}.$$

Сравнение этих выражений с (анти)нейтринными токами из работ [1, 2]

$$V_{--}^\chi(\mathbf{k}') = 2E_\nu \left\{ + \cos \frac{\theta}{2}, + \sin \frac{\theta}{2} e^{+i\phi}, -i \sin \frac{\theta}{2} e^{+i\phi}, + \cos \frac{\theta}{2} \right\} \equiv -A_{--}^\chi(\mathbf{k}'),$$

$$\bar{V}_{++}^\chi(\mathbf{k}') = 2E_\nu \left\{ + \cos \frac{\theta}{2}, + \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, +i \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, + \cos \frac{\theta}{2} \right\} \equiv \bar{A}_{++}^\chi(\mathbf{k}')$$

демонстрирует полное совпадение, если принять, что для безмассовых фермионов $E_\nu = |\mathbf{k}| = E_\chi$ и в случае нейтрино спиральность $--$, а в случае антинейтрино спиральность $++$.

После сборки всех вычисленных компонент токов в компактные записи 4-векторный, 4-аксиально-векторный, 1-скалярный и 1-псевдоскалярный токи нуклона и лептона в базисе спиральности принимают вид, представленный формулами (2.51)–(2.53) (см. п. 2.3).

Приложение 2

ВЫЧИСЛЕНИЕ СКАЛЯРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ В $\chi\chi$ -БАЗИСЕ СПИРАЛЬНОСТИ

Покомпонентный вид всех необходимых здесь лептонных и нуклонных токов в базисе спиральности (χ -базисе) представлен в п. 2.3 формулами (2.51)–

(2.53). С помощью этих формул и метрического тензора* $g_{\mu\nu}$ можно вычислить все скалярные произведения лептонных и нуклонных токов в $\chi\chi$ -базисе (см. п. 3.1), используя общие определения (3.4). При вычислении ниже скалярных произведений типа $(l_{s's}^a h_{r'r}^a)^{\chi\chi} = A_{s's}^{\mu,\chi}(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{r'r}^{\nu,\chi}(\mathbf{p}')$ индексы χ и $\chi\chi$ временно опущены.

В качестве примера более или менее подробно вычислим скалярные произведения векторного лептонного тока $V_{-s}^\mu(\mathbf{k}')$ и векторного нуклонного тока $V_{-}^\nu(\mathbf{p}')$, когда (отрицательная) спиральность нуклона не меняется, а спиральность конечного лептона отрицательная:

$$\begin{aligned}
 (l_{--}^v h_{--}^v) &\equiv V_{--}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{--}^\nu(\mathbf{p}') = \\
 &= 2 \left(E_\chi \cos \frac{\theta}{2}, |\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi}, -i|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi}, |\mathbf{k}| \cos \frac{\theta}{2} \right) \times \\
 &\times [g_{\mu\nu}] 2 \left(e^{i\phi} E_p \cos \frac{\theta}{2}, -|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2}, -i|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2}, -e^{i\phi} |\mathbf{k}| \cos \frac{\theta}{2} \right) = \\
 &= 4 \left\{ E_\chi \cos \frac{\theta}{2} [+1] e^{i\phi} E_p \cos \frac{\theta}{2} + |\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} [-1] \left(-|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} \right) + \right. \\
 &+ \left. \left(-i|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \right) [-1] \left(-i|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} \right) + |\mathbf{k}| \cos \frac{\theta}{2} [-1] \left(-e^{i\phi} |\mathbf{k}| \cos \frac{\theta}{2} \right) \right\} = \\
 &= 4 \left\{ E_\chi E_p \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{i\phi} + |\mathbf{k}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{i\phi} + [-1] (-i)^2 |\mathbf{k}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{i\phi} + \right. \\
 &\quad \left. + |\mathbf{k}|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \right\} = 4 e^{i\phi} \left\{ E_\chi E_p \cos^2 \frac{\theta}{2} + |\mathbf{k}|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + |\mathbf{k}|^2 \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (l_{-+}^v h_{--}^v) &\equiv V_{-+}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{--}^\nu(\mathbf{p}') = -2m_\chi e^{i\phi} \left(\sin \frac{\theta}{2}, 0, 0, 0 \right) \times \\
 &\times [g_{\mu\nu}] 2 \left(e^{i\phi} E_p \cos \frac{\theta}{2}, -|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2}, -i|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2}, -e^{i\phi} |\mathbf{k}| \cos \frac{\theta}{2} \right) = \\
 &= \left[-2m_\chi e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \right] [+1] \left[2 e^{i\phi} E_p \cos \frac{\theta}{2} \right] = \\
 &= -2m_\chi E_p 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{2i\phi} = -2m_\chi E_p \sin \theta e^{2i\phi}.
 \end{aligned}$$

* $g_{00} = 1, g_{11} = -1, g_{22} = -1, g_{33} = -1$.

Аналогично для скалярных произведений аксиально-векторного лептонного тока $A_{-s}^{\mu}(\mathbf{k}')$ и векторного нуклонного тока $V_{+-}^{\nu}(\mathbf{p}')$, когда (отрицательная) спиральность нуклона меняется (на положительную), имеем

$$\begin{aligned} (l_{--}^a h_{+-}^v) &\equiv A_{--}^{\mu}(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{+-}^{\nu}(\mathbf{p}') = \\ &= 2 \left(-|\mathbf{k}| \cos \frac{\theta}{2}, -E_{\chi} e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, i e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} E_{\chi}, -\cos \frac{\theta}{2} E_{\chi} \right) \times \\ &\times [g_{\mu\nu}] 2m \left(\sin \frac{\theta}{2}, 0, 0, 0 \right) = -2|\mathbf{k}| \cos \frac{\theta}{2} 2m \sin \frac{\theta}{2} = -2m|\mathbf{k}| \sin \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (l_{-+}^a h_{+-}^v) &\equiv A_{-+}^{\mu}(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{+-}^{\nu}(\mathbf{p}') = \\ &= 2m_{\chi} \left(0, \cos \frac{\theta}{2}, i \cos \frac{\theta}{2}, -e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \right) g_{\mu\nu} 2m \left(\sin \frac{\theta}{2}, 0, 0, 0 \right) = 0. \end{aligned}$$

Вычисление скалярных произведений скалярных и псевдоскалярных токов выглядит наиболее просто, например:

$$\begin{aligned} (l_{--}^s h_{--}^s) &\equiv S_{--}(\mathbf{k}') S_{--}(\mathbf{p}') = \\ &= 2m_{\chi} \cos \frac{\theta}{2} 2m \cos \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} = 4m_{\chi} m \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{+i\phi}, \\ (l_{-+}^s h_{--}^s) &\equiv S_{-+}(\mathbf{k}') S_{--}(\mathbf{p}') = \\ &= -2E_{\chi} \sin \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} 2m \cos \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} = -2E_{\chi} m \sin \theta e^{+2i\phi}, \\ (l_{+-}^s h_{-+}^s) &\equiv S_{+-}(\mathbf{k}') S_{-+}(\mathbf{p}') = \\ &= 2E_{\chi} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} 2E_p \sin \frac{\theta}{2} = +4E_{\chi} E_p \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, \\ (l_{-+}^p h_{-+}^s) &\equiv P_{-+}(\mathbf{k}') S_{-+}(\mathbf{p}') = \\ &= -2|\mathbf{k}| e^{+i\phi} \sin \frac{\theta}{2} 2E_p \sin \frac{\theta}{2} = -4|\mathbf{k}| E_p \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{+i\phi}, \\ (l_{+-}^p h_{--}^s) &\equiv P_{+-}(\mathbf{k}') S_{--}(\mathbf{p}') = \\ &= -2|\mathbf{k}| e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} 2m \cos \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} = -4|\mathbf{k}| m \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\ (l_{-+}^p h_{--}^s) &\equiv P_{-+}(\mathbf{k}') S_{--}(\mathbf{p}') = \\ &= -2|\mathbf{k}| e^{+i\phi} \sin \frac{\theta}{2} 2m \cos \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} = -4|\mathbf{k}| m \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{+2i\phi}. \end{aligned}$$

Действуя аналогичным образом, можно вычислить в $\chi\chi$ -базисе все скалярные произведения токов, которые полностью приведены в п. 3.1.

Проверка скалярных произведений по нейтрино в $\chi\chi$ -базисе. Когда χ -частица безмассовая ($m_\chi = 0$), ее можно считать нейтрино (начальная и конечная спиральность $s', s = -1$) или антинейтрино (тогда $s', s = +1$). В результате такого приближения получается, что ненулевые значения имеют только скалярные произведения векторных и аксиально-векторных токов без изменения спиральности лептона, т. е. $(l_{\pm\pm}^v h_{r'r}^v)$ и $(l_{\pm\pm}^a h_{r'r}^a)$. Они приведены ниже:

$$\begin{aligned} (l_{--}^v h_{--}^v) &= 4 \left[E_\chi E_p \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\nu^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] e^{+i\phi} = \\ &= 2 \left[s - m^2 - m_\chi^2 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \left[\frac{(m_\chi^2 - m^2)^2}{s} - m^2 - m_\chi^2 \right] \right] e^{+i\phi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (l_{--}^a h_{--}^a) &= 4 \left[E_\nu^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\chi E_p \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] e^{+i\phi} = \\ &= 2 \left[s - m^2 - m_\chi^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \left[\frac{(m_\chi^2 - m^2)^2}{s} - m^2 - m_\chi^2 \right] \right] e^{+i\phi}, \end{aligned}$$

$$(l_{++}^v h_{++}^v) = -4 \left[E_\chi E_p \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\nu^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] e^{-i\phi} = -|(l_{--}^v h_{--}^v)| e^{-i\phi},$$

$$(l_{++}^a h_{++}^a) = -4 \left[E_\nu^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\chi E_p \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] e^{-i\phi} = -|(l_{--}^a h_{--}^a)| e^{-i\phi},$$

$$\begin{aligned} (l_{--}^v h_{--}^a) &= -4 \left[E_\chi E_\nu \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\nu E_p \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] e^{+i\phi} = \\ &= -2\lambda(s, m^2, m_\chi^2) \left[1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{m_\chi^2 - m^2}{s} \right] e^{+i\phi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (l_{--}^a h_{--}^v) &= -4 \left[E_\nu E_p \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\chi E_\nu \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] e^{+i\phi} = \\ &= -2\lambda(s, m^2, m_\chi^2) \left[1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{m_\chi^2 - m^2}{s} \right] e^{+i\phi}, \end{aligned}$$

$$(l_{++}^v h_{++}^a) = -4 \left[E_\chi E_\nu \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\nu E_p \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] e^{-i\phi} = |(l_{--}^v h_{--}^a)| e^{-i\phi},$$

$$\begin{aligned} (l_{++}^a h_{++}^v) &= -4 \left[E_\nu E_p \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\chi E_\nu \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] e^{-i\phi} = \\ &= -|(l_{--}^a h_{--}^v)| e^{-i\phi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (l_{--}^a h_{++}^a) &= +4 \left[E_\chi E_p + E_\nu^2 \right] \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} = +2(s - m^2 - m_\chi^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, \\
 (l_{--}^v h_{++}^v) &= -4 \left[E_\chi E_p + E_\nu^2 \right] \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} = \\
 &= -2(s - m^2 - m_\chi^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} = -(l_{--}^a h_{++}^a), \\
 (l_{++}^v h_{--}^v) &= +4 \left[E_\chi E_p + E_\nu^2 \right] \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} = \\
 &= +2(s - m^2 - m_\chi^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} = |(l_{--}^a h_{++}^a)| e^{+i\phi}, \\
 (l_{++}^a h_{--}^a) &= -4 \left[E_\chi E_p + E_\nu^2 \right] \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} = \\
 &= -(l_{++}^v h_{--}^v) = -|(l_{--}^a h_{++}^a)| e^{+i\phi}, \\
 (l_{--}^a h_{++}^v) &= +4E_\nu \left[E_\chi + E_p \right] \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} = +2\lambda(s, m^2, m_\chi^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, \\
 (l_{--}^v h_{++}^a) &= -4E_\nu \left[E_\chi + E_p \right] \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} = \\
 &= -2\lambda(s, m^2, m_\chi^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} = -(l_{--}^a h_{++}^v), \\
 (l_{++}^a h_{--}^v) &= +4E_\nu \left[E_\chi + E_p \right] \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} = \\
 &= +2\lambda(s, m^2, m_\chi^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} = |(l_{--}^a h_{++}^v)| e^{+i\phi}, \\
 (l_{++}^v h_{--}^a) &= -4E_\nu \left[E_\chi + E_p \right] \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} = -(l_{++}^a h_{--}^v) = -|(l_{--}^a h_{++}^v)| e^{+i\phi}, \\
 (l_{--}^v h_{+-}^v) &= (l_{--}^v h_{+-}^v) = (l_{++}^v h_{+-}^v) = (l_{++}^v h_{+-}^v) = \\
 &= +2E_\chi m \sin \theta = +(s + m_\chi^2 - m^2) \frac{m}{\sqrt{s}} \sin \theta, \\
 (l_{--}^a h_{+-}^a) &= (l_{--}^a h_{+-}^a) = (l_{++}^a h_{+-}^a) = (l_{++}^a h_{+-}^a) = \\
 &= -2E_\chi m \sin \theta = -(s + m_\chi^2 - m^2) \frac{m}{\sqrt{s}} \sin \theta, \\
 (l_{--}^v h_{+-}^a) &= (l_{--}^v h_{+-}^a) = (l_{++}^a h_{+-}^v) = (l_{++}^a h_{+-}^v) = \\
 &= +2E_\nu m \sin \theta = +\lambda(s, m^2, m_\chi^2) \frac{m}{\sqrt{s}} \sin \theta, \\
 (l_{--}^a h_{+-}^v) &= (l_{--}^a h_{+-}^v) = (l_{++}^v h_{+-}^a) = (l_{++}^v h_{+-}^a) = \\
 &= -2E_\nu m \sin \theta = -\lambda(s, m^2, m_\chi^2) \frac{m}{\sqrt{s}} \sin \theta.
 \end{aligned}$$

Правые части этих формул выражены через инвариантные переменные s , m и m_χ и угол рассеяния $\theta/2$ в с.ц.м. Справедливость этого «перехода»

проверяется прямыми выкладками*, например в виде

$$\begin{aligned}
 4s \left[E_\chi E_p \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\nu^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] &= \cos^2 \frac{\theta}{2} [s^2 - (m_\chi^2 - m^2)^2] + \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \times \\
 &\times [s^2 + m^4 + m_\chi^4 - 2sm^2 - 2sm_\chi^2 - 2m^2 m_\chi^2] = \\
 &= s^2 \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) - 2m_\chi^2 m^2 \left(-\cos^2 \frac{\theta}{2} + 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \\
 &+ (m^4 + m_\chi^4) \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) 2s(m^2 + m_\chi^2) = \\
 &= 2s^2 + 2\sin^2 \frac{\theta}{2} (m^4 + m_\chi^4 - 2m_\chi^2 m^2) - \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) 2s(m^2 + m_\chi^2) = \\
 &= 2s \left\{ s - (m^2 + m_\chi^2) + \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{(m_\chi^2 - m^2)^2 - s(m_\chi^2 + m^2)}{s} \right\},
 \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}
 4s \left[E_\chi E_\nu \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + E_\nu E_p \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] &= \\
 &= \lambda(s, m^2, m_\chi^2) \left\{ \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) (s + m_\chi^2 - m^2) + \cos^2 \frac{\theta}{2} (s - m_\chi^2 + m^2) \right\} = \\
 &= \lambda(s, m^2, m_\chi^2) \left\{ 2s + m_\chi^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - m^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} = \\
 &= 2\lambda(s, m^2, m_\chi^2) \left\{ s + \sin^2 \frac{\theta}{2} (m_\chi^2 - m^2) \right\}.
 \end{aligned}$$

При переходе к «нейтринному» случаю, отмеченному ниже индексом ν у скалярных произведений, который напоминает о том, что $m_\chi = 0$ и $s', s = -1$, а также что $\lambda(s, m^2, 0) = (s - m^2)$, формулы из начала данного раздела приобретают достаточно простой вид**:

$$(l_{--}^v h_{-+}^v)_\nu = (l_{--}^v h_{+-}^v)_\nu = (l_{--}^v h_{++}^v)_\nu = (l_{--}^v h_{+-}^v)_\nu = +(s - m^2) \frac{m}{\sqrt{s}} \sin \theta,$$

*С учетом формул (2.5), (3.6) и $E_\nu \equiv (\lambda(s, m^2, m_\chi^2))/(2\sqrt{s}) = |\mathbf{k}|$.

**Так как $s - m^2 \pm \sin^2(\theta/2)[(m^4/s) - m^2] = (s - m^2) \pm \sin^2(\theta/2)(m^2/s)(m^2 - s) = (s - m^2)[1 \mp \sin^2(\theta/2)(m^2/s)]$.

$$\begin{aligned}
 (l_{--}^a h_{+-}^a)_\nu &= (l_{--}^a h_{+-}^a)_\nu = (l_{--}^a h_{-+}^v)_\nu = (l_{--}^a h_{+-}^v)_\nu = \\
 &= -(s - m^2) \frac{m}{\sqrt{s}} \sin \theta = -(l_{--}^v h_{-+}^v)_\nu, \\
 (l_{--}^a h_{++}^a)_\nu &= (l_{--}^a h_{++}^v)_\nu = -(l_{--}^v h_{++}^v)_\nu = \\
 &= -(l_{--}^v h_{++}^a)_\nu = +2(s - m^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, \quad (\text{П.2}) \\
 (l_{--}^v h_{--}^v)_\nu &= -(l_{--}^a h_{--}^v)_\nu = +2(s - m^2) \left[1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{m^2}{s} \right] e^{+i\phi}, \\
 (l_{--}^a h_{--}^a)_\nu &= -(l_{--}^v h_{--}^a)_\nu = +2(s - m^2) \left[1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{m^2}{s} \right] e^{+i\phi}.
 \end{aligned}$$

В Стандартной модели (СМ) нейтринный аксиальный ток равен минус нейтринному векторному току: $(l_{--}^v)_\nu = -(l_{--}^a)_\nu$, поэтому справедливы соотношения для полного нейтринного тока и полного слабого тока нуклона в χ -базисе*:

$$\begin{aligned}
 l_\nu &= V_{--}^\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) - A_{--}^\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = 2V_{--}^\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \equiv 2l_{--}^v = -2l_{--}^a, \\
 h_{r'r}^v &= g_V V_{r'r}^\nu(\mathbf{p}', \mathbf{p}), \text{ и } h_{r'r}^a = -g_A A_{r'r}^\nu(\mathbf{p}', \mathbf{p}), \\
 h_{--}^X &= h_{--}^v + h_{--}^a \equiv (V - A)_{--}.
 \end{aligned}$$

В СМ для нейтрино с учетом явного вида адронного тока h_{--}^X в базисе спиральности имеем

$$\begin{aligned}
 (l_\nu \cdot h_{--}^X) &\equiv 2V_{--}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} [g_V V_{--}^\nu(\mathbf{p}') - g_A A_{--}^\nu(\mathbf{p}')] = \\
 &= 2[g_V (l_{--}^v h_{--}^v) - g_A (l_{--}^v h_{--}^a)] = \sum_{\mu, \nu}^4 l_\nu^\mu g_{\mu\nu} h_{--}^{\chi, \nu} = \\
 &= 4E_\nu \left\{ \cos \frac{\theta}{2}, e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, -i e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right\} g_{\mu\nu} \times \\
 &\times 2 \left\{ e^{i\phi} (E_\nu g_A + E_p g_V) \cos \frac{\theta}{2}, -(E_p g_A + E_\nu g_V) \sin \frac{\theta}{2}, \right. \\
 &\quad \left. -i (E_p g_A + E_\nu g_V) \sin \frac{\theta}{2}, -e^{i\phi} (E_p g_A + E_\nu g_V) \cos \frac{\theta}{2} \right\} =
 \end{aligned}$$

*Для антинейтрино «наоборот» $l_\nu = V_{++}^\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) + A_{++}^\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = 2V_{++}^\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \equiv 2l_{++}^v = 2l_{++}^a$.

$$\begin{aligned}
&= 8E_\nu e^{i\phi} \left\{ (E_\nu g_A + E_p g_V) \cos^2 \frac{\theta}{2} + (E_p g_A + E_\nu g_V) \sin^2 \frac{\theta}{2} + (E_p g_A + E_\nu g_V) \right\} = \\
&= 8g_V e^{i\phi} \left\{ E_p E_\nu \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\nu^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} + \\
&\quad + 8g_A e^{i\phi} \left\{ E_\nu^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_p E_\nu \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Отсюда для скалярных произведений нейтринного тока и векторного (пропорционального g_V) и аксиально-векторного (пропорционального $-g_A$) ну-клонного токов в СМ получаем

$$\begin{aligned}
(l_{--}^v h_{--}^v)_\nu &\equiv \left. \frac{(l_\nu \cdot h_{--}^X)}{2g_V} \right|_{g_A=0} = \\
&= +4 e^{i\phi} \left\{ E_p E_\nu \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\nu^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} = -(l_{--}^a h_{--}^v)_\nu, \\
(l_{--}^v h_{--}^a)_\nu &\equiv \left. \frac{(l_\nu \cdot h_{--}^a)}{-2g_A} \right|_{g_V=0} = \\
&= -4 e^{i\phi} \left\{ E_\nu^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_p E_\nu \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} = -(l_{--}^a h_{--}^a)_\nu.
\end{aligned}$$

Для массивного χ -лептона аналогичные скалярные произведения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
(l_{--}^v h_{--}^v) &= +4 e^{i\phi} \left\{ E_p E_\chi \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\nu^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} \rightarrow \\
&\quad \rightarrow +4 e^{i\phi} \left\{ E_p E_\nu \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\nu^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\}, \\
(l_{--}^a h_{--}^v) &= -4 e^{i\phi} \left\{ E_\nu E_p \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\chi E_\nu \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} \rightarrow \\
&\quad \rightarrow -4 e^{i\phi} \left\{ E_p E_\nu \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\nu^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\}, \\
(l_{--}^a h_{--}^a) &= +4 e^{i\phi} \left\{ E_\nu^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\chi E_p \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} \rightarrow \\
&\quad \rightarrow +4 e^{i\phi} \left\{ E_\nu^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_p E_\nu \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (l_{--}^v h_{--}^a) &= -4e^{i\phi} \left\{ E_\chi E_\nu \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\nu E_p \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} \rightarrow \\
 &\rightarrow -4e^{i\phi} \left\{ E_\nu^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\nu E_p \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Они переходят в «нейтринные» (приведенные выше), если везде заменить E_χ на E_ν , как показано справа после стрелок. Таким образом, имеется согласие между общими формулами и соответствующими им формулами, полученными ранее для нейтрино.

С другой стороны, в СМ для нейтринных скалярных произведений в работе [1] были получены выражения, приведенные ниже до стрелки. Их необходимо сравнить с формулами, приведенными ниже после стрелки, которые следуют из рассмотренных выше общих выражений для χ -частицы (П.2) в предельном переходе $m_\chi \rightarrow 0$ (к случаю нейтрино):

$$\begin{aligned}
 (l_\nu \cdot h_{++}^\chi) &= -8e^{-i\phi} g_R (s - m^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} \rightarrow 2[g_V(l_{--}^v h_{++}^v)_\nu - g_A(l_{--}^v h_{++}^a)_\nu], \\
 (l_\nu \cdot h_{--}^\chi) &= 8e^{i\phi} (s - m^2) \left[g_L - g_R \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{m^2}{s} \right] \rightarrow \\
 &\rightarrow 2[g_V(l_{--}^v h_{--}^v)_\nu - g_A(l_{--}^v h_{--}^a)_\nu], \quad (\text{П.3}) \\
 (l_\nu \cdot h_{+-}^\chi) &= 8g_R (s - m^2) \frac{m}{\sqrt{s}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \rightarrow 2[g_V(l_{--}^v h_{+-}^v)_\nu - g_A(l_{--}^v h_{+-}^a)_\nu], \\
 (l_\nu \cdot h_{-+}^\chi) &= 8g_R (s - m^2) \frac{m}{\sqrt{s}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \rightarrow 2[g_V(l_{--}^v h_{-+}^v)_\nu - g_A(l_{--}^v h_{-+}^a)_\nu].
 \end{aligned}$$

Действительно, поскольку из (П.2) следует $(l_{--}^v h_{++}^v)_\nu = (l_{--}^v h_{++}^a)_\nu = -2 \cos^2(\theta/2) e^{-i\phi} (s - m^2)$, то имеем совпадение для первой строки:

$$\begin{aligned}
 &2g_V(l_{--}^v h_{++}^v)_\nu - 2g_A(l_{--}^v h_{++}^a)_\nu = \\
 &= 2g_V \left(-2 \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} (s - m^2) \right) - 2g_A \left(-2 \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} (s - m^2) \right) = \\
 &= -4 \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} (s - m^2) [g_V - g_A] = -8 \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} (s - m^2) g_R \equiv (l_\nu \cdot h_{++}^\chi).
 \end{aligned}$$

Далее, так как $(l_{--}^v h_{+-}^v)_\nu = (l_{--}^v h_{+-}^a)_\nu = (l_{--}^v h_{-+}^v)_\nu = (l_{--}^v h_{-+}^a)_\nu = + (s - m^2) (m/\sqrt{s}) \sin \theta$, то получаем совпадение для последних двух строк:

$$\begin{aligned}
 &2g_V(l_{--}^v h_{+-}^v)_\nu - 2g_A(l_{--}^v h_{+-}^a)_\nu = 2g_V(l_{--}^v h_{-+}^v)_\nu - 2g_A(l_{--}^v h_{-+}^a)_\nu = \\
 &= 2 \frac{m}{\sqrt{s}} \sin \theta (s - m^2) (g_V - g_A) = 4g_R \frac{m}{\sqrt{s}} \sin \theta (s - m^2) \equiv (l_\nu \cdot h_{+-}^\chi) = (l_\nu \cdot h_{-+}^\chi).
 \end{aligned}$$

Так как $(l_{--}^v h_{--}^v)_\nu = +2 e^{i\phi} (s - m^2) [1 - \sin^2(\theta/2)(m^2/s)]$ и $(l_{--}^v h_{--}^a)_\nu = -2 e^{i\phi} (s - m^2) [1 + \sin^2(\theta/2)(m^2/s)]$, то имеем совпадение и во второй строке:

$$\begin{aligned} 2g_V(l_{--}^v h_{--}^v)_\nu - 2g_A(l_{--}^v h_{--}^a)_\nu &= 2g_V \left(+2 e^{i\phi} (s - m^2) \left\{ 1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{m^2}{s} \right\} \right) - \\ &- 2g_A \left(-2 e^{i\phi} (s - m^2) \left\{ 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{m^2}{s} \right\} \right) = \\ &= 4 e^{i\phi} (s - m^2) \left\{ g_V + g_A - [g_V - g_A] \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{m^2}{s} \right\} = \\ &= 8 e^{i\phi} (s - m^2) \left\{ g_L - g_R \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{m^2}{s} \right\} \equiv (l_\nu \cdot h_{--}^\chi). \end{aligned}$$

Иными словами, получено искомое в (П.3) совпадение скалярных произведений. Таким образом, редукция общих формул (полученных в $\chi\chi$ -базисе) для скалярных произведений векторных и аксиальных токов на случай нейтрино ($m_\chi = 0$) дает совпадение выражений с полученными ранее в работе [1].

Приложение 3

ВЫЧИСЛЕНИЕ СКАЛЯРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ В $\eta\eta$ -БАЗИСЕ

Покомпонентный вид всех необходимых лептонных и нуклонных токов в η -базисе представлен в п. 2.3 формулами (2.42)–(2.47). В переменных* λ_\pm и ξ_\pm этот набор токов дан формулами (2.48)–(2.50). С помощью этих выражений для токов и метрического тензора $g_{\mu\nu}$ вычисляются все скалярные произведения лептонных и нуклонных токов, заданные общими выражениями (3.4). Приведем несколько примеров вычисления скалярных произведений в $\eta\eta$ -базисе. Скалярные произведения аксиальных токов в $\eta\eta$ -базисе (с. ц. м.) вычисляются по формуле $(l_{s's}^a h_{r'r}^a)^\eta = \sum_{\mu,\nu}^4 A_{s's}^{\eta,\mu}(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{r'r}^{\eta,\nu}(\mathbf{p}')$. Для удобства везде у скалярных произведений оставлен только один верхний индекс η . Итак, например, для адронного тока, не меняющего (отрицательной) проекции спина на выделенное направление, если спин конечного лептона

*Подробнее приведены в прил. 5 и выражениях (2.5), (3.6).

«отрицательно направлен», имеем

$$\begin{aligned}
 (l_{--}^a h_{--}^a)^\eta &\equiv A_{--}^{\eta,\mu}(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{--}^{\eta,\nu}(\mathbf{p}') = \\
 &= \{ -\xi_+ \xi_- (1 + \cos \theta), -\xi_-^2 \sin \theta e^{i\phi}, i\xi_-^2 \sin \theta e^{i\phi}, -(\xi_+^2 + \xi_-^2 \cos \theta) \} \times \\
 &\times g_{\mu\nu} \{ +\lambda_+ \lambda_- (1 + \cos \theta), -\lambda_-^2 \sin \theta e^{+i\phi}, i\lambda_-^2 \sin \theta e^{+i\phi}, -(\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta) \} = \\
 &= [-\xi_+ \xi_- (1 + \cos \theta)][+1][\lambda_+ \lambda_- (1 + \cos \theta)] + [-\xi_-^2 \sin \theta e^{i\phi}][-1][-\lambda_-^2 \sin \theta e^{+i\phi}] + \\
 &+ [i\xi_-^2 \sin \theta e^{i\phi}][-1][i\lambda_-^2 \sin \theta e^{+i\phi}] + [-(\xi_+^2 + \xi_-^2 \cos \theta)][-1][-(\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta)] = \\
 &= -\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- (1 + \cos \theta)^2 - \xi_-^2 \lambda_-^2 \sin^2 \theta e^{+2i\phi} - i^2 \xi_-^2 \lambda_-^2 \sin^2 \theta e^{+2i\phi} - \\
 &\quad - (\xi_+^2 + \xi_-^2 \cos \theta)(\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta) = -\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- (1 + \cos \theta)^2 - \\
 &\quad - (\xi_+^2 + \xi_-^2 \cos \theta)(\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (l_{-+}^a h_{-+}^a)^\eta &\equiv A_{-+}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{-+}^\nu(\mathbf{p}') = \\
 &= \{ \xi_+ \xi_- e^{i\phi} \sin \theta, \xi_+^2 - \xi_-^2 \cos \theta, +i(\xi_+^2 - \xi_-^2 \cos \theta), \xi_-^2 \sin \theta e^{i\phi} \} \times \\
 &\times g_{\mu\nu} \{ +\lambda_+ \lambda_- (1 + \cos \theta), -\lambda_-^2 \sin \theta e^{+i\phi}, i\lambda_-^2 \sin \theta e^{+i\phi}, -(\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta) \} = \\
 &= [1][\xi_+ \xi_- e^{i\phi} \sin \theta][\lambda_+ \lambda_- (1 + \cos \theta)] + [-1][\xi_+^2 - \xi_-^2 \cos \theta][-\lambda_-^2 \sin \theta e^{+i\phi}] + \\
 &+ [-1][i(\xi_+^2 - \xi_-^2 \cos \theta)][i\lambda_-^2 \sin \theta e^{+i\phi}] + [-1][\xi_-^2 \sin \theta e^{i\phi}][-(\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta)] = \\
 &= \xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- (1 + \cos \theta) \sin \theta e^{i\phi} + (\xi_+^2 - \xi_-^2 \cos \theta) \lambda_-^2 \sin \theta e^{+i\phi} - \\
 &\quad - i^2 (\xi_+^2 - \xi_-^2 \cos \theta) \lambda_-^2 \sin \theta e^{+i\phi} + \xi_-^2 \sin \theta e^{i\phi} (\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta) = \\
 &= [\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- (1 + \cos \theta) + 2(\xi_+^2 - \xi_-^2 \cos \theta) \lambda_-^2 + \xi_-^2 (\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta)] \sin \theta e^{i\phi}.
 \end{aligned}$$

Действуя аналогично, можно получить все скалярные произведения аксиального лептонного и аксиального нуклонного токов при всех возможных проекциях спина лептона и нуклона в $\eta\eta$ -базисе. Они приведены в начале п. 3.2. С учетом выражений из (2.5) и (3.6) приведенный там набор скалярных произведений можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 (l_{--}^a h_{--}^a)^\eta &= (l_{++}^a h_{++}^a)^\eta = \\
 &= -4 \left[\left(m_\chi + \xi_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + \xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \cos^4 \frac{\theta}{2} \right], \\
 (l_{\pm\pm}^a h_{\mp\mp}^a)^\eta &= +4 \left[\left(m_\chi + \xi_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \cos^4 \frac{\theta}{2} + 2\xi_-^2 \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right],
 \end{aligned}$$

$$(l_{\mp\pm}^a h_{\mp\mp}^a)^\eta = \pm 4 \left[\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 \left(m_\chi + \xi_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \lambda_-^2 + \right. \\ \left. + \xi_-^2 \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^a h_{\mp\mp}^a)^\eta = \\ = \pm 4 \left[\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + \xi_-^2 \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^a h_{\mp\pm}^a)^\eta = -4 \left[2 \left(m_\chi + \xi_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \left(m + \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \right. \\ \left. + (\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- + \xi_-^2 \lambda_-^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right],$$

$$(l_{\mp\mp}^a h_{\mp\pm}^a)^\eta = \pm 4 \left[\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\xi_-^2 \left(m + \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \right. \\ \left. + \left(m_\chi + \xi_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \lambda_-^2 \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\mp\pm}^a h_{\mp\pm}^a)^\eta = -4 \left[\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- + \xi_-^2 \lambda_-^2 \right] \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm 2i\phi},$$

$$(l_{\pm\pm}^a h_{\mp\pm}^a)^\eta = \\ = \mp 4 \left[\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + \left(m_\chi + \xi_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \lambda_-^2 \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}.$$

Наконец, можно выделить множитель

$$[\lambda_+ \lambda_- \xi_+ \xi_- + \xi_-^2 \lambda_-^2] = \frac{s - (m - m_\chi)^2}{2} \left[1 - \frac{m + m_\chi}{\sqrt{s}} \right]. \quad (\text{П.4})$$

Тогда для скалярных произведений аксиальных токов в $\eta\eta$ -базисе получаем

$$(l_{\mp\mp}^a h_{\mp\mp}^a)^\eta = -4 \left[mm_\chi + (m\xi_-^2 + m_\chi \lambda_-^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\ \left. + [\xi_-^2 \lambda_-^2 + \xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_-] \cos^4 \frac{\theta}{2} \right],$$

$$(l_{\pm\pm}^a h_{\mp\mp}^a)^\eta = +4 \left[mm_\chi + (m\xi_-^2 + m_\chi \lambda_-^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + [\xi_-^2 \lambda_-^2 + \xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_-] \cos^4 \frac{\theta}{2} + 2\xi_-^2 \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right],$$

$$(l_{\mp\pm}^a h_{\mp\mp}^a)^\eta = \pm 4 \left[+ m\xi_-^2 + 2m_\chi \lambda_-^2 + [\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- + \xi_-^2 \lambda_-^2] \times \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\xi_-^2 \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^a h_{\mp\mp}^a)^\eta = \pm 4 \left[+ m\xi_-^2 + [\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- + \xi_-^2 \lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^a h_{\pm\pm}^a)^\eta = -4 \left[2mm_\chi + 2(m\xi_-^2 + m_\chi \lambda_-^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} + [\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- + \xi_-^2 \lambda_-^2] \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\xi_-^2 \lambda_-^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right],$$

$$(l_{\mp\mp}^a h_{\mp\pm}^a)^\eta = \pm 4 \left[+ m_\chi \lambda_-^2 + 2m\xi_-^2 + [\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- + \xi_-^2 \lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\xi_-^2 \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\mp\pm}^a h_{\mp\pm}^a)^\eta = -4 [\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- + \xi_-^2 \lambda_-^2] \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm 2i\phi},$$

$$(l_{\pm\pm}^a h_{\mp\pm}^a)^\eta = \mp 4 \left[+ m_\chi \lambda_-^2 + [\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- + \xi_-^2 \lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}.$$

В полной аналогии с выше рассмотренным вычислением скалярных произведений аксиальных токов с помощью формулы $(l_{s's}^v h_{r'r}^v)^\eta = \sum_{\mu,\nu} V_{s's}^{\eta,\mu} \times (k', k) g_{\mu\nu} V_{r'r}^{\eta,\nu} (p', p)$ можно провести вычисления скалярных произведений векторных токов в $\eta\eta$ -базисе. Они также в явном виде приведены в начале п. 3.2.

Вычисление скалярных произведений векторного лептонного и аксиально-векторного нуклонного токов $(l_{s's}^v h_{r'r}^a)^\eta$, а также аксиально-векторного лептонного и векторного нуклонного токов $(l_{s's}^a h_{r'r}^v)^\eta$ проводится по формулам (3.4) в полной аналогии с представленными выше примерами вычисления

векторных и аксиально-векторных скалярных произведений. Результат также приведен в первой половине п. 3.2.

Отметим, что при вычислении скалярных произведений векторных и аксиально-векторных токов в $\eta\eta$ -базисе наблюдались следующие свойства: «нулевое» (пропорциональное g_{00}) и третьи слагаемые (пропорциональное g_{33}) всегда дают вклад, причем с одинаковым фазовым множителем (типа $e^{-i\phi}$), который определяет фазу всего скалярного произведения. Далее, первое (пропорциональное g_{11}) и второе (пропорциональное g_{22} и i^2) слагаемые либо полностью сокращаются, при этом их общий фазовый множитель (типа $e^{+i\phi}$ или e^0) всегда отличен от фазового множителя суммы нулевого и третьего слагаемых, либо, наоборот, дают удвоенный вклад с тем же общим фазовым множителем, который имеется у нулевого и третьего слагаемых.

Прямая подстановка скалярных и псевдоскалярных лептонных и нуклонных токов, заданных в η -базисе, в определениях скалярных произведений (3.4) выглядит, например, следующим образом:

$$\begin{aligned}(l_{++}^s h_{--}^s)^n &\equiv S_{++}(\mathbf{k}')S_{--}(\mathbf{p}') = (\xi_+^2 - \xi_-^2 \cos\theta)(\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos\theta), \\(l_{++}^p h_{--}^p)^n &\equiv P_{++}(\mathbf{k}')P_{--}(\mathbf{p}') = \xi_+\xi_-(1 - \cos\theta)\lambda_+\lambda_-(1 - \cos\theta) = \\&= \xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_-(1 - \cos\theta)^2, \\(l_{++}^p h_{--}^s)^n &\equiv P_{++}(\mathbf{k}')S_{--}(\mathbf{p}') = \xi_+\xi_-(1 - \cos\theta)(\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos\theta), \\(l_{++}^s h_{--}^p)^n &\equiv S_{++}(\mathbf{k}')P_{--}(\mathbf{p}') = (\xi_+^2 - \xi_-^2 \cos\theta)\lambda_+\lambda_-(1 - \cos\theta)\end{aligned}$$

и дает в $\eta\eta$ -базисе результаты, также представленные в первой части п. 3.2.

С другой стороны, учет выражений из (2.5) и (3.6), а также (П.4) позволяет все приведенные в первой части п. 3.2 наборы скалярных произведений лептонных и нуклонных токов переписать в ином (в ряде случаев более удобном) виде:

$$\begin{aligned}(l_{--}^v h_{--}^v)^n &= (l_{++}^v h_{++}^v)^n = 4 \left[m_\chi m + (m_\chi \lambda_-^2 + m \xi_-^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\&\quad \left. + [\xi_-^2 \lambda_-^2 + \xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_-] \cos^4 \frac{\theta}{2} \right], \\(l_{\pm\pm}^v h_{\mp\mp}^v)^n &= 4 \left[m_\chi m + (m_\chi \lambda_-^2 + m \xi_-^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\&\quad \left. + [\xi_-^2 \lambda_-^2 + \xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_-] \cos^4 \frac{\theta}{2} + 2\xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_- \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right],\end{aligned}$$

$$(l_{\pm\mp}^v h_{\pm\pm}^v)^\eta = \mp 4 \left[m\xi_-^2 + [\xi_-^2 \lambda_-^2 + \xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_-] \cos^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\ \left. + 2\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^v h_{\mp\mp}^v)^\eta = \mp 4 \left[m\xi_-^2 + [\xi_-^2 \lambda_-^2 + \xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_-] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\pm\pm}^v h_{\pm\mp}^v)^\eta = \mp 4 \left[m_\chi \lambda_-^2 + [\xi_-^2 \lambda_-^2 + \xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_-] \cos^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\ \left. + 2\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\mp\mp}^v h_{\pm\mp}^v)^\eta = \mp 4 \left[m_\chi \lambda_-^2 + [\xi_-^2 \lambda_-^2 + \xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_-] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{+-}^v h_{-+}^v)^\eta = (l_{-+}^v h_{+-}^v)^\eta = -4 \left[[\xi_-^2 \lambda_-^2 + \xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_-] \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\ \left. + 2\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \sin^4 \frac{\theta}{2} \right],$$

$$(l_{\pm\mp}^v h_{\pm\mp}^v)^\eta = 4 [\xi_-^2 \lambda_-^2 + \xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_-] \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp 2i\phi};$$

$$(l_{\mp\mp}^v h_{\mp\mp}^a)^\eta = \pm 4 \left[m\xi_+ \xi_- + m_\chi \lambda_+ \lambda_- + [\xi_-^2 \lambda_+ \lambda_- + \xi_+ \xi_- \lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{\mp\mp}^v h_{\pm\pm}^a)^\eta = \mp 4 \left[m\xi_+ \xi_- + m_\chi \lambda_+ \lambda_- + [\xi_-^2 \lambda_+ \lambda_- + \xi_+ \xi_- \lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\ \left. + 2\xi_+ \xi_- \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{\pm\mp}^v h_{\pm\pm}^a)^\eta = +4 \left[m\xi_+ \xi_- + [\xi_-^2 \lambda_+ \lambda_- + \xi_+ \xi_- \lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\ \left. + 2\xi_+ \xi_- \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^v h_{\mp\mp}^a)^\eta = -4 \left[m\xi_+ \xi_- + [\xi_-^2 \lambda_+ \lambda_- + \xi_+ \xi_- \lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\mp\mp}^v h_{\mp\pm}^a)^\eta = -4 \left[2m\xi_+\xi_- + m_\chi\lambda_+\lambda_- + [\xi_-^2\lambda_+\lambda_- + \xi_+\xi_-\lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\xi_+\xi_-\lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\pm\pm}^v h_{\mp\pm}^a)^\eta = -4 \left[m_\chi\lambda_+\lambda_- + [\xi_-^2\lambda_+\lambda_- + \xi_+\xi_-\lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^v h_{\mp\pm}^a)^\eta = \pm 4 \left[+ 2m\xi_+\xi_- + [\xi_-^2\lambda_+\lambda_- + \xi_+\xi_-\lambda_-^2] \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\xi_+\xi_-\lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{\mp\pm}^v h_{\mp\pm}^a)^\eta = \mp 4 [\xi_-^2\lambda_+\lambda_- + \xi_+\xi_-\lambda_-^2] \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm 2i\phi};$$

$$(l_{\mp\mp}^a h_{\mp\mp}^v)^\eta = \mp 4 \left[m\xi_+\xi_- + m_\chi\lambda_+\lambda_- + [\xi_+\xi_-\lambda_-^2 + \xi_-^2\lambda_+\lambda_-] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{\pm\pm}^a h_{\mp\mp}^v)^\eta = \pm 4 \left[m\xi_+\xi_- + m_\chi\lambda_+\lambda_- + [\xi_+\xi_-\lambda_-^2 + \xi_-^2\lambda_+\lambda_-] \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\xi_-^2\lambda_+\lambda_- \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{\mp\pm}^a h_{\mp\mp}^v)^\eta = 4 \left[2m_\chi\lambda_+\lambda_- + m\xi_+\xi_- + [\xi_+\xi_-\lambda_-^2 + \xi_-^2\lambda_+\lambda_-] \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\xi_-^2\lambda_+\lambda_- \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^a h_{\mp\mp}^v)^\eta = 4 \left[m\xi_+\xi_- + [\xi_+\xi_-\lambda_-^2 + \xi_-^2\lambda_+\lambda_-] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\mp\mp}^a h_{\mp\pm}^v)^\eta = 4 \left[m_\chi\lambda_+\lambda_- + [\xi_+\xi_-\lambda_-^2 + \xi_-^2\lambda_+\lambda_-] \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\mp\mp}^a h_{\mp\pm}^v)^\eta = -4 \left[m_\chi\lambda_+\lambda_- + [\xi_+\xi_-\lambda_-^2 + \xi_-^2\lambda_+\lambda_-] \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\xi_-^2\lambda_+\lambda_- \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\mp\mp}^a h_{\mp\pm}^v)^\eta = \pm 4 \left[[\xi_+ \xi_- \lambda_-^2 + \xi_-^2 \lambda_+ \lambda_-] \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2m_\chi \lambda_+ \lambda_- \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2\xi_-^2 \lambda_+ \lambda_- \sin^4 \frac{\theta}{2} \right],$$

$$(l_{\mp\pm}^a h_{\mp\pm}^v)^\eta = \pm 4 [\xi_+ \xi_- \lambda_-^2 + \xi_-^2 \lambda_+ \lambda_-] \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm 2i\phi};$$

$$(l_{\mp\mp}^p h_{\mp\mp}^p)^\eta = -(l_{\pm\pm}^p h_{\mp\mp}^p)^\eta = -4\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \sin^4 \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{\mp\pm}^p h_{\mp\mp}^p)^\eta = (l_{\mp\mp}^p h_{\mp\pm}^p)^\eta = \mp 4\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^p h_{\mp\mp}^p)^\eta = (l_{\mp\mp}^p h_{\pm\mp}^p)^\eta = \mp 4\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^p h_{\pm\mp}^p)^\eta = -4\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp 2i\phi},$$

$$(l_{\mp\pm}^p h_{\mp\pm}^p)^\eta = -4\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2};$$

$$(l_{\mp\mp}^s h_{\mp\mp}^s)^\eta = (l_{\pm\pm}^s h_{\mp\mp}^s)^\eta = 4 \left[m_\chi m + (m_\chi \lambda_-^2 + m\xi_-^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda_-^2 \xi_-^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right],$$

$$(l_{\pm\mp}^s h_{s--}^\eta) = (l_{\mp\pm}^s h_{s++}^\eta) = \pm 4 \left[m\xi_-^2 + \lambda_-^2 \xi_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{s--}^s h_{\pm\mp}^s)^\eta = (l_{s++}^s h_{\pm\mp}^s)^\eta = \pm 4 \left[m_\chi \lambda_-^2 + \xi_-^2 \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\mp\pm}^s h_{\pm\mp}^s)^\eta = -4\xi_-^2 \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{\mp\pm}^s h_{\mp\pm}^s)^\eta = +4\xi_-^2 \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm 2i\phi};$$

$$(l_{\mp\mp}^p h_{\mp\mp}^s)^\eta = (l_{\mp\mp}^p h_{\pm\pm}^s)^\eta = \mp 4 \left[m\xi_+ \xi_- + \xi_+ \xi_- \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{\mp\pm}^p h_{s--}^\eta) = (l_{\mp\pm}^p h_{s++}^\eta) = -4 \left[m\xi_+ \xi_- + \xi_+ \xi_- \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\mp\mp}^p h_{\mp\pm}^s)^\eta = +4\xi_+ \xi_- \lambda_-^2 \sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\mp\mp}^p h_{\pm\mp}^s)^\eta = -4\xi_+ \xi_- \lambda_-^2 \sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^p h_{\mp\pm}^s)^\eta = \pm 4\xi_+\xi_-\lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{\pm\mp}^p h_{\pm\mp}^s)^\eta = \mp 4\xi_+\xi_-\lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp 2i\phi};$$

$$(l_{\mp\mp}^s h_{\mp\mp}^p)^\eta = (l_{\pm\pm}^s h_{\mp\mp}^p)^\eta = \pm 4 \left[m_\chi \lambda_+ \lambda_- + \xi_-^2 \lambda_+ \lambda_- \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{--}^s h_{\pm\mp}^p)^\eta = (l_{++}^s h_{\pm\mp}^p)^\eta = +4 \left[m_\chi \lambda_+ \lambda_- + \xi_-^2 \lambda_+ \lambda_- \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\mp\pm}^s h_{\mp\mp}^p)^\eta = -4\xi_-^2 \lambda_+ \lambda_- \sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\mp\pm}^s h_{\pm\pm}^p)^\eta = +4\xi_-^2 \lambda_+ \lambda_- \sin^3 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^s h_{\mp\pm}^p)^\eta = \pm 4\xi_-^2 \lambda_+ \lambda_- \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{\pm\mp}^s h_{\pm\mp}^p)^\eta = \pm 4\xi_-^2 \lambda_+ \lambda_- \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp 2i\phi}.$$

Приложение 4

ВЫЧИСЛЕНИЕ СКАЛЯРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ В СМЕШАННОМ $\chi\eta$ -БАЗИСЕ

Смешанный $\chi\eta$ -базис подразумевает, что токи χ -частицы взяты в χ -базисе и заданы формулами (2.51)–(2.53), а токи нуклона взяты в η -базисе и представлены формулами (2.42), (2.44) и (2.46). В переменных* λ_\pm и ξ_\pm набор нуклонных токов представлен формулами (2.48)–(2.50), а набор лептонных токов — формулами (2.54)–(2.56). Например, для вычисления скалярных произведений (псевдо)скалярных токов в $\chi\eta$ -базисе используется определение (3.4) в виде

$$(l_{s's}^s h_{r'r}^s)^{\chi\eta} = S_{s's}^\chi(\mathbf{k}') S_{r'r}^\eta(\mathbf{p}'),$$

$$(l_{s's}^s h_{r'r}^p)^{\chi\eta} = S_{s's}^\chi(\mathbf{k}') P_{r'r}^\eta(\mathbf{p}'),$$

$$(l_{s's}^p h_{r'r}^s)^{\chi\eta} = P_{s's}^\chi(\mathbf{k}') S_{r'r}^\eta(\mathbf{p}'), \dots,$$

где нуклонные токи $P_{r'r}^\eta(\mathbf{p}')$ и $S_{r'r}^\eta(\mathbf{p}')$ берутся в η -базисе, а лептонные токи $P_{s's}^\chi(\mathbf{k}')$ и $S_{s's}^\chi(\mathbf{k}')$ — в χ -базисе. С использованием явного вида скалярных токов в обоих базисах для скалярных произведений скалярных и псевдоскалярных токов были получены выражения, приведенные в п. 3.3.

*Подробнее приведены в прил. 5 и выражениях (2.5), (3.6).

С помощью явных выражений для лептонных (χ -базис) и нуклонных (η -базис) токов проводится вычисление скалярных произведений всех аксиально-векторных лептонных и аксиально-векторных нуклонных токов в $\chi\eta$ -базисе. Например, при использовании нуклонного аксиально-векторного тока $A_{r',r}^\eta(\mathbf{p}')$ из η -базиса и лептонного аксиально-векторного тока $A_{s',s}^\chi(\mathbf{k}')$ из χ -базиса для скалярных произведений аксиальных токов справедливы следующие типичные выкладки:

$$\begin{aligned}
 (l_{--}^a h_{--}^a)^{\chi\eta} &\equiv \sum_{\mu,\nu}^4 A_{--}^{\chi,\mu}(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{--}^{\eta,\nu}(\mathbf{p}') = \\
 &= \left\{ -2\xi_+\xi_- \cos \frac{\theta}{2}, -(\xi_+^2 + \xi_-^2) e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, i(\xi_+^2 + \xi_-^2) e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, -(\xi_+^2 + \xi_-^2) \cos \frac{\theta}{2} \right\} \times \\
 &\times g_{\mu\nu} \left\{ +\lambda_+\lambda_-(1 + \cos \theta), -\lambda_-^2 \sin \theta e^{+i\phi}, i\lambda_-^2 \sin \theta e^{+i\phi}, -(\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta) \right\} = \\
 &= [+1] \left[-2\xi_+\xi_- \cos \frac{\theta}{2} \right] [+ \lambda_+\lambda_-(1 + \cos \theta)] + \\
 &+ [-1] \left[-(\xi_+^2 + \xi_-^2) e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \right] [-\lambda_-^2 \sin \theta e^{+i\phi}] + \\
 &+ [-1] \left[i(\xi_+^2 + \xi_-^2) e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \right] [i\lambda_-^2 \sin \theta e^{+i\phi}] + \\
 &+ [-1] \left[-(\xi_+^2 + \xi_-^2) \cos \frac{\theta}{2} \right] [-(\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta)] = \\
 &= -2\xi_+\xi_- \lambda_+\lambda_-(1 + \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} - (\xi_+^2 + \xi_-^2) \lambda_-^2 \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta e^{+2i\phi} - \\
 &- [i]^2 (\xi_+^2 + \xi_-^2) \lambda_-^2 \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta e^{+2i\phi} - (\xi_+^2 + \xi_-^2) \cos \frac{\theta}{2} (\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta) = \\
 &= -\cos \frac{\theta}{2} \left[2\xi_+\xi_- \lambda_+\lambda_-(1 + \cos \theta) + (\xi_+^2 + \xi_-^2) (\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (l_{-+}^a h_{-+}^a)^{\chi\eta} &\equiv A_{-+}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{-+}^\nu(\mathbf{p}') = \\
 &= (\xi_+^2 - \xi_-^2) \left\{ 0, \cos \frac{\theta}{2}, i \cos \frac{\theta}{2}, -e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \right\} \times \\
 &\times g_{\mu\nu} \left\{ -\lambda_+\lambda_- \sin \theta e^{+i\phi}, \lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta, +i(\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta), \lambda_-^2 \sin \theta e^{+i\phi} \right\} = \\
 &= (\xi_+^2 - \xi_-^2) \left[[1][0] [-\lambda_+\lambda_- \sin \theta e^{+i\phi}] + [-1] \left[\cos \frac{\theta}{2} \right] (\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [-1] \left[i \cos \frac{\theta}{2} \right] [i(\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta)] + [-1] \left[-e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \right] [\lambda_-^2 \sin \theta e^{+i\phi}] = \\
& = (\xi_+^2 - \xi_-^2) \left[-\cos \frac{\theta}{2} (\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta) - [i]^2 \cos \frac{\theta}{2} (\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta) + \right. \\
& \quad \left. + \lambda_-^2 \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta e^{+2i\phi} \right] = (\xi_+^2 - \xi_-^2) \lambda_-^2 \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta e^{+2i\phi}, \\
(l_{+-}^a h_{+-}^a)^{\chi\eta} & \equiv A_{+-}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{+-}^\nu(\mathbf{p}') = \\
& = (\xi_+^2 - \xi_-^2) \left\{ 0, \cos \frac{\theta}{2}, -i \cos \frac{\theta}{2}, -e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \right\} \times \\
& \times g_{\mu\nu} \left\{ -\lambda_+ \lambda_- \sin \theta e^{-i\phi}, \lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta, -i(\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta), \lambda_-^2 \sin \theta e^{-i\phi} \right\} = \\
& = (\xi_+^2 - \xi_-^2) \left[[1][0] [-\lambda_+ \lambda_- \sin \theta e^{-i\phi}] + [-1] \left[\cos \frac{\theta}{2} \right] (\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta) + \right. \\
& + [-1] \left[-i \cos \frac{\theta}{2} \right] [-i(\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta)] + [-1] \left[-e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \right] [\lambda_-^2 \sin \theta e^{-i\phi}] \left. \right] = \\
& = (\xi_+^2 - \xi_-^2) \left[-\cos \frac{\theta}{2} (\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta) - [i]^2 \cos \frac{\theta}{2} (\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta) + \right. \\
& \quad \left. + \lambda_-^2 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} e^{-2i\phi} \right] = (\xi_+^2 - \xi_-^2) \lambda_-^2 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} e^{-2i\phi}.
\end{aligned}$$

В результате все 16 скалярных произведений аксиального лептонного (базис спиральности) и аксиального нуклонного (σ_3 -базис) токов при всех возможных проекциях спина лептона и нуклона можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
(l_{\pm\pm}^a h_{\mp\mp}^a)^{\chi\eta} & = 2\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- (1 + \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} + 2(\xi_+^2 + \xi_-^2) \lambda_-^2 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} + \\
& \quad + (\xi_+^2 + \xi_-^2) (\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2}, \\
(l_{\mp\mp}^a h_{\pm\pm}^a)^{\chi\eta} & = \pm \left[2\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} + 2(\xi_+^2 + \xi_-^2) (\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta) \sin \frac{\theta}{2} + \right. \\
& \quad \left. + (\xi_+^2 + \xi_-^2) \lambda_-^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] e^{\pm i\phi}, \quad (\text{П.5}) \\
(l_{\mp\mp}^a h_{\pm\mp}^a)^{\chi\eta} & = \pm \left[2\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- + (\xi_+^2 + \xi_-^2) \lambda_-^2 \right] \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi}, \\
(l_{\mp\mp}^a h_{\mp\mp}^a)^{\chi\eta} & = -\cos \frac{\theta}{2} \left[2\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- (1 + \cos \theta) + (\xi_+^2 + \xi_-^2) (\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta) \right],
\end{aligned}$$

$$(l_{\mp\pm}^a h_{\mp\mp}^a)^{X\eta} = \pm(\xi_+^2 - \xi_-^2) \left[2\lambda_-^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta - (\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta) \sin \frac{\theta}{2} \right] e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\mp\pm}^a h_{\pm\mp}^a)^{X\eta} = -(\xi_+^2 - \xi_-^2) \left[2(\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} - \lambda_-^2 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \right],$$

$$(l_{\pm\mp}^a h_{\pm\mp}^a)^{X\eta} = (\xi_+^2 - \xi_-^2) \lambda_-^2 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} e^{\mp 2i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^a h_{\mp\mp}^a)^{X\eta} = \mp(\xi_+^2 - \xi_-^2)(\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta) \sin \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi}.$$

Помня общие формулы (3.6), вышеприведенные скалярные произведения можно записать без ξ_+ и ξ_- в виде

$$(l_{\pm\pm}^a h_{\mp\mp}^a)^{X\eta} = 2|\mathbf{k}|^2(1 + \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} + 4E_\chi \lambda_-^2 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} + \\ + 2E_\chi(\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{\mp\mp}^a h_{\pm\pm}^a)^{X\eta} = \pm \left[2|\mathbf{k}|^2 \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} + 4E_\chi(\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta) \sin \frac{\theta}{2} + \right. \\ \left. + 2E_\chi \lambda_-^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\pm\pm}^a h_{\pm\pm}^a)^{X\eta} = -\cos \frac{\theta}{2} [2|\mathbf{k}|^2(1 + \cos \theta) + 2E_\chi(\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta)],$$

$$(l_{\mp\mp}^a h_{\mp\mp}^a)^{X\eta} = \pm [2|\mathbf{k}|^2 + 2E_\chi \lambda_-^2] \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\mp\pm}^a h_{\mp\mp}^a)^{X\eta} = \mp 2m_\chi \left[2\lambda_-^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta - (\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta) \sin \frac{\theta}{2} \right] e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\mp\pm}^a h_{\pm\mp}^a)^{X\eta} = -2m_\chi \left[2(\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} - \lambda_-^2 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \right],$$

$$(l_{\pm\mp}^a h_{\mp\mp}^a)^{X\eta} = \mp 2m_\chi(\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta) \sin \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\mp\pm}^a h_{\pm\pm}^a)^{X\eta} = 2m_\chi \lambda_-^2 \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} e^{\pm 2i\phi}.$$

Отсюда, переходя от θ к $\theta/2$, все аксиально-векторные скалярные произведения можно записать через общий импульс лептона и нуклона $|\mathbf{k}| = |\mathbf{p}|$

энергии лептона E_χ и нуклона E_p :

$$\begin{aligned}
 (l_{\pm\pm}^a h_{\mp\mp}^a)^{X\eta} &= +4 \cos \frac{\theta}{2} \left[|\mathbf{k}|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\chi E_p + E_\chi (E_p - m) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \\
 (l_{\pm\pm}^a h_{\pm\pm}^a)^{X\eta} &= -4 \cos \frac{\theta}{2} \left[|\mathbf{k}|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\chi E_p - E_\chi (E_p - m) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \\
 (l_{-+}^a h_{+-}^a)^{X\eta} &= (l_{+-}^a h_{-+}^a)^{X\eta} = -4m_\chi \cos \frac{\theta}{2} \left[2m + (E_p - m) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right], \\
 (l_{\mp\mp}^a h_{\pm\mp}^a)^{X\eta} &= \pm 4 [|\mathbf{k}|^2 + E_\chi (E_p - m)] \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi}, \\
 (l_{\mp\mp}^a h_{\mp\mp}^a)^{X\eta} &= \\
 &= \pm 4 \sin \frac{\theta}{2} \left[|\mathbf{k}|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + E_\chi (E_p + m) + E_\chi (E_p - m) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] e^{\pm i\phi}, \\
 (l_{\pm\mp}^a h_{\pm\mp}^a)^{X\eta} &= 4m_\chi (E_p - m) \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp 2i\phi}, \\
 (l_{\mp\pm}^a h_{\pm\pm}^a)^{X\eta} &= \pm 4m_\chi \sin \frac{\theta}{2} \left[E_p - (E_p - m) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] e^{\pm i\phi}, \\
 (l_{\mp\pm}^a h_{\mp\mp}^a)^{X\eta} &= \pm 4m_\chi \sin \frac{\theta}{2} \left[(E_p - m) \cos^2 \frac{\theta}{2} - m \right] e^{\pm i\phi}.
 \end{aligned}$$

Наконец, имея в виду возможный переход к нерелятивистскому пределу, выразим все скалярные произведения (П.5) посредством переменных ξ_-^2 , λ_-^2 , $|\mathbf{k}|^2$ и угла $\theta/2$. Они преобразуются к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 (l_{--}^a h_{--}^a)^{X\eta} &= (l_{++}^a h_{++}^a)^{X\eta} = \\
 &= -4 \cos \frac{\theta}{2} \left[|\mathbf{k}|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + (m_\chi + \xi_-^2) \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right], \\
 (l_{--}^a h_{++}^a)^{X\eta} &= (l_{++}^a h_{--}^a)^{X\eta} = \\
 &= +4 \cos \frac{\theta}{2} \left[|\mathbf{k}|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + (m_\chi + \xi_-^2) \left(m + \lambda_-^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right) \right], \\
 (l_{\pm\pm}^a h_{\pm\mp}^a)^{X\eta} &= \mp 4 \sin \frac{\theta}{2} \left[|\mathbf{k}|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + (m_\chi + \xi_-^2) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left(2m + \lambda_-^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right) \right] e^{\mp i\phi},
 \end{aligned}$$

$$(l_{\pm\pm}^a h_{\mp\pm}^a)^{\chi\eta} = \mp 4 \sin \frac{\theta}{2} \left[|\mathbf{k}|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + (m_\chi + \xi_-^2) \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^a h_{\mp\mp}^a)^{\chi\eta} = \mp 4 m_\chi \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^a h_{\pm\pm}^a)^{\chi\eta} = \mp 4 m_\chi \sin \frac{\theta}{2} \left[\lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - m \right] e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{-+}^a h_{+-}^a)^{\chi\eta} = (l_{+-}^a h_{-+}^a)^{\chi\eta} = -4 m_\chi \cos \frac{\theta}{2} \left[2m + \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right],$$

$$(l_{\pm\mp}^a h_{\pm\mp}^a)^{\chi\eta} = +4 m_\chi \lambda_-^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp 2i\phi}.$$

Вычисление скалярных произведений векторных токов в $\chi\eta$ -базисе согласно общей формуле (3.4) или $(l_{s's}^v h_{r'r}^v)^{\chi\eta} = \sum_{\mu,\nu}^4 V_{s's}^{\chi,\mu}(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{r'r}^{\eta,\nu}(\mathbf{p}')$, где нуклонный векторный ток $V_{r'r}^{\eta}(\mathbf{p}')$ берется в η -базисе, а лептонный векторный ток $V_{s's}^{\chi}(\mathbf{k}')$ — в χ -базисе, проводится так же, как и в «аксиальном» случае (П.5). Эти результаты приведены в п. 3.3.

Аналогичным образом для скалярных произведений векторных лептонных и аксиально-векторных нуклонных токов $(l_{s's}^v h_{r'r}^a)^{\chi\eta} = \sum_{\mu,\nu}^4 V_{s's}^{\chi,\mu}(\mathbf{k}') \times g_{\mu\nu} A_{r'r}^{\eta,\nu}(\mathbf{p}')$, а также для скалярных произведений аксиально-векторных лептонных и векторного нуклонного токов $(l_{s's}^a h_{r'r}^v)^{\chi\eta} = \sum_{\mu,\nu}^4 A_{s's}^{\chi,\mu}(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} \times V_{r'r}^{\eta,\nu}(\mathbf{p}')$ получено

$$(l_{\pm\mp}^v h_{\mp\pm}^a)^{\chi\eta} \equiv V_{\pm\mp}^{\chi,\mu}(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{\mp\pm}^{\eta,\nu}(\mathbf{p}') = \mp 4 m_\chi \lambda_+ \lambda_- \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{\mp\pm}^v h_{\mp\pm}^a)^{\chi\eta} \equiv V_{\mp\pm}^{\chi,\mu}(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{\mp\pm}^{\eta,\nu}(\mathbf{p}') = \pm 4 m_\chi \lambda_+ \lambda_- \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm 2i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^v h_{\pm\pm}^a)^{\chi\eta} \equiv V_{\pm\mp}^{\chi,\mu}(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{\pm\pm}^{\eta,\nu}(\mathbf{p}') = -4 m_\chi \lambda_+ \lambda_- \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\mp\pm}^v h_{\pm\pm}^a)^{\chi\eta} \equiv V_{\mp\pm}^{\chi,\mu}(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} a_{\pm\pm}^{\eta,\nu}(\mathbf{p}') = +4 m_\chi \lambda_+ \lambda_- \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\pm\mp}^a h_{\mp\pm}^v)^{\chi\eta} \equiv A_{\pm\mp}^{\chi,\mu}(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{\mp\pm}^{\eta,\nu}(\mathbf{p}') = \pm 4 m_\chi \lambda_+ \lambda_- \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2},$$

$$(l_{\mp\pm}^a h_{\mp\pm}^v)^{\chi\eta} \equiv A_{\mp\pm}^{\chi,\mu}(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{\mp\pm}^{\eta,\nu}(\mathbf{p}') = \mp 4 m_\chi \lambda_+ \lambda_- \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm 2i\phi},$$

$$(l_{\mp\mp}^a h_{\pm\pm}^v)^{x\eta} \equiv A_{\mp\mp}^{\chi,\mu}(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{\pm\pm}^{\eta,\nu}(\mathbf{p}') = +4m_\chi \lambda_+ \lambda_- \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\mp\pm}^a h_{\pm\pm}^v)^{x\eta} \equiv A_{\mp\pm}^{\chi,\mu}(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{\pm\pm}^{\eta,\nu}(\mathbf{p}') = -4m_\chi \lambda_+ \lambda_- \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi};$$

$$(l_{\mp\mp}^v h_{\mp\mp}^a)^{x\eta} = \pm 4 \cos \frac{\theta}{2} \left[(\xi_-^2 + m_\chi) \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + \xi_+ \xi_- \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right],$$

$$(l_{\mp\mp}^v h_{\pm\pm}^a)^{x\eta} = \mp 4 \cos \frac{\theta}{2} \times \\ \times \left[(\xi_-^2 + m_\chi) \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + m \xi_+ \xi_- + \xi_+ \xi_- \lambda_-^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right],$$

$$(l_{\mp\mp}^v h_{\mp\pm}^a)^{x\eta} = -4 \sin \frac{\theta}{2} \times \\ \times \left[(\xi_-^2 + m_\chi) \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2m \xi_+ \xi_- + \xi_+ \xi_- \lambda_-^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] e^{\pm i\phi},$$

$$(l_{\mp\mp}^v h_{\pm\mp}^a)^{x\eta} = -4 \sin \frac{\theta}{2} \left[(\xi_-^2 + m_\chi) \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + \xi_+ \xi_- \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\mp\mp}^a h_{\mp\mp}^v)^{x\eta} = \mp 4 \cos \frac{\theta}{2} \left[(\xi_-^2 + m_\chi) \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + \xi_+ \xi_- \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right],$$

$$(l_{\mp\mp}^a h_{\pm\pm}^v)^{x\eta} = \mp 4 \cos \frac{\theta}{2} \times \\ \times \left[\xi_+ \xi_- \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + (\xi_-^2 + m_\chi) \lambda_+ \lambda_- \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right],$$

$$(l_{\mp\mp}^a h_{\mp\mp}^v)^{x\eta} = +4 \sin \frac{\theta}{2} \left[\xi_+ \xi_- \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + (\xi_-^2 + m_\chi) \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] e^{\mp i\phi},$$

$$(l_{\mp\mp}^a h_{\mp\pm}^v)^{x\eta} = -4 \sin \frac{\theta}{2} \times \\ \times \left[\xi_+ \xi_- \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + (\xi_-^2 + m_\chi) \lambda_+ \lambda_- \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] e^{\pm i\phi}.$$

Так как в с. ц. м. $\lambda_+ \lambda_- = \xi_+ \xi_-$, то в последних восьми выражениях как для $(l^v h^a)^{x\eta}$, так и для $(l^a h^v)^{x\eta}$ вместо $\xi_+ \xi_-$ вполне можно использовать $\lambda_+ \lambda_-$ и получить формулы, которые приведены для этих скалярных произведений в п. 3.3.

Скалярные произведения слабого нейтрального массивного тока. Здесь, согласно принятым определениям «общего» вида (3.1) и (3.2) для нуклонного

и лептонного токов их скалярные произведения (без скаляров и псевдоскаляров) будут представлены как суммы вкладов отдельных «фундаментальных» скалярных произведений (2.3):

$$\begin{aligned}
 (l_{s's}^w, h_{r'r}^w) &= \chi_V V_{s's}^\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) g_{\mu\nu} h_V^f V_{r'r}^\mu(\mathbf{p}', \mathbf{p}) + \chi_V V_{s's}^\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) g_{\mu\nu} h_A^f A_{r'r}^\mu(\mathbf{p}', \mathbf{p}) + \\
 &+ \chi_A A_{s's}^\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) g_{\mu\nu} h_V^f V_{r'r}^\mu(\mathbf{p}', \mathbf{p}) + \chi_A A_{s's}^\mu(\mathbf{k}', \mathbf{k}) g_{\mu\nu} h_A^f A_{r'r}^\mu(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \\
 &= \alpha(l_{s's}^v h_{r'r}^v) + \beta(l_{s's}^v h_{r'r}^a) + \gamma(l_{s's}^a h_{r'r}^v) + \delta(l_{s's}^a h_{r'r}^a). \quad (\text{П.6})
 \end{aligned}$$

Используя результаты предыдущих приложений, найдем явные выражения для всех скалярных произведений «слабого тока» (П.6) в смешанном $\chi\eta$ -базисе. Ниже приведены некоторые примеры такого вида вычислений:

$$\begin{aligned}
 (l_{++}^w, h_{++}^w)^{\chi\eta} &= \\
 &= \alpha(l_{++}^v h_{++}^v)^{\chi\eta} + \beta(l_{++}^v h_{++}^a)^{\chi\eta} + \gamma(l_{++}^a h_{++}^v)^{\chi\eta} + \delta(l_{++}^a h_{++}^a)^{\chi\eta} = \\
 &= +4 \cos \frac{\theta}{2} \left[\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + (\xi_-^2 + m_\chi) \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \alpha - \\
 &\quad - 4 \cos \frac{\theta}{2} \lambda_+ \lambda_- \left[(\xi_-^2 + m_\chi) \cos^2 \frac{\theta}{2} + m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \beta + \\
 &\quad + 4 \cos \frac{\theta}{2} \lambda_+ \lambda_- \left[(\xi_-^2 + m_\chi) \cos^2 \frac{\theta}{2} + m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \gamma - \\
 &\quad - 4 \cos \frac{\theta}{2} \left[\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + (m_\chi + \xi_-^2) \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \delta = \\
 &= +4 \cos \frac{\theta}{2} \left[\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + (m_\chi + \xi_-^2) \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] (\alpha - \delta) + \\
 &\quad + 4 \cos \frac{\theta}{2} \left[\lambda_+ \lambda_- (\xi_-^2 + m_\chi) \cos^2 \frac{\theta}{2} + \lambda_+ \lambda_- \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] (\gamma - \beta) = \\
 &= (\alpha - \delta)(l_{++}^v h_{++}^v)^{\chi\eta} + (\gamma - \beta)(l_{++}^a h_{++}^v)^{\chi\eta},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (l_{+-}^w, h_{+-}^w)^{\chi\eta} &= \\
 &= \alpha(l_{+-}^v h_{+-}^v)^{\chi\eta} + \beta(l_{+-}^v h_{+-}^a)^{\chi\eta} + \gamma(l_{+-}^a h_{+-}^v)^{\chi\eta} + \delta(l_{+-}^a h_{+-}^a)^{\chi\eta} = \\
 &= +\alpha 4 m_\chi \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} - \beta 4 m_\chi \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} + \\
 &\quad + \gamma 4 m_\chi \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} - \delta 4 m_\chi \sin \frac{\theta}{2} \left[\lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - m \right] e^{-i\phi} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha + \delta)4mm_\chi \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} + (\alpha - \delta)4m_\chi \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} + \\
&\quad + (\gamma - \beta)4m_\chi \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} = \\
&= 4m_\chi \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \left[(\alpha + \delta)m + (\alpha - \delta)\lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + (\gamma - \beta)\lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} \right], \\
(l_{+-}^w, h_{+-}^w)^{x\eta} &= \\
&= \alpha(l_{--}^v h_{--}^a)^{x\eta} + \beta(l_{--}^v h_{--}^a)^{x\eta} + \gamma(l_{--}^a h_{--}^v)^{x\eta} + \delta(l_{--}^a h_{--}^v)^{x\eta} = \\
&= -\alpha 4m_\chi \lambda_-^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{-2i\phi} - \beta 4m_\chi \lambda_+ \lambda_- \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{-2i\phi} + \\
&\quad + \gamma 4m_\chi \lambda_+ \lambda_- \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{-2i\phi} + \delta 4m_\chi \lambda_-^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{-2i\phi} = \\
&= 4m_\chi \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{-2i\phi} \left[-\alpha \lambda_-^2 + \delta \lambda_-^2 + \gamma \lambda_+ \lambda_- - \beta \lambda_+ \lambda_- \right] = \\
&= 4m_\chi \lambda_- \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{-2i\phi} \left[-(\alpha - \delta)\lambda_- + (\gamma - \beta)\lambda_+ \right].
\end{aligned}$$

Полный набор из 16 скалярных произведений и нуклонного тока и слабого нейтрального массивного лептонного тока $(l_{s's}^w, h_{r'r}^w)^{x\eta}$ приведен в п. 3.3.

Проверим, как переходят в «нейтринный предел» выражения для скалярных произведений из упомянутого полного набора, обладающие отрицательной спиральностью:

$$\begin{aligned}
&(l_{--}^w, h_{--}^w)^{x\eta} = \\
&= 4 \cos \frac{\theta}{2} \left\{ (\alpha - \delta)\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + (\alpha - \delta)(m_\chi + \xi_-^2) \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - \right. \\
&\quad \left. - (\gamma - \beta)\lambda_+ \lambda_- (\xi_-^2 + m_\chi) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (\gamma - \beta)\lambda_+ \lambda_- \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\}, \\
&(l_{--}^w, h_{++}^w)^{x\eta} = 4 \cos \frac{\theta}{2} \left\{ (\alpha + \delta)(m_\chi + \xi_-^2)m - (\beta + \gamma)\lambda_+ \lambda_- m + \right. \\
&\quad + \xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \left[\alpha + \alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} + \delta \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + (m_\chi + \xi_-^2)\lambda_-^2 \left[\delta + \delta \sin^2 \frac{\theta}{2} + \alpha \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] - \\
&\quad \left. - \lambda_+ \lambda_- (m_\chi + \xi_-^2) \left[\gamma + \gamma \sin^2 \frac{\theta}{2} + \beta \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] - \lambda_+ \lambda_- \lambda_-^2 \left[\beta + \beta \sin^2 \frac{\theta}{2} + \gamma \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (l_{--}^w, h_{-+}^w)^{x\eta} &= +4 \sin \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} \left\{ 2m[\delta(m_\chi + \xi_-^2) - \beta\lambda_+\lambda_-] + \right. \\
 &+ \xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_- \left[\alpha + \alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} + \delta \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + (\xi_-^2 + m_\chi)\lambda_-^2 \left[\delta + \delta \sin^2 \frac{\theta}{2} + \alpha \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] - \\
 &- \lambda_+\lambda_- (\xi_-^2 + m_\chi) \left[\gamma + \gamma \sin^2 \frac{\theta}{2} + \beta \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] - \lambda_+\lambda_-\lambda_-^2 \left[\beta + \beta \sin^2 \frac{\theta}{2} + \gamma \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \left. \right\}, \\
 (l_{--}^w, h_{+-}^w)^{x\eta} &= 4 \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \left\{ -(\alpha - \delta)[\xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_- + (\xi_-^2 + m_\chi)\lambda_-^2] + \right. \\
 &\left. + (\gamma - \beta)\lambda_+\lambda_-[m_\chi + \xi_-^2 + \lambda_-^2] \right\}.
 \end{aligned}$$

Так как лагранжиан слабого взаимодействия нейтрино с нуклоном в СМ имеет вид

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^w &= \bar{u}(k')\gamma_\mu(1 - \gamma_5)u(k) \times \bar{u}(p')\gamma^\mu(g_V - g_A\gamma_5)u(p) = \\
 &= g_V \{ \bar{u}(k')\gamma_\mu u(k) \} \{ \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \} - g_A \{ \bar{u}(k')\gamma_\mu u(k) \} \{ \bar{u}(p')\gamma^\mu \gamma_5 u(p) \} - \\
 &- g_V \{ \bar{u}(k')\gamma_\mu \gamma_5 u(k) \} \{ \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) \} + g_A \{ \bar{u}(k')\gamma_\mu \gamma_5 u(k) \} \{ \bar{u}(p')\gamma^\mu \gamma_5 u(p) \},
 \end{aligned}$$

то для нейтрино справедливо $\chi_V = -\chi_A = 1$. Отсюда для параметров из (П.6) получается следующее:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \chi_V h_V^f = +g_V^f, \quad \beta = \chi_V h_A^f = -g_A^f, \quad \gamma = \chi_A h_V^f = -g_V^f, \quad \delta = \chi_A h_A^f = +g_A^f \\
 \text{и далее } \alpha - \delta &= g_V^f - g_A^f = 2g_R, \quad \beta - \gamma = -g_A^f + g_V^f = \alpha - \delta = 2g_R, \quad \alpha + \delta = \\
 &= 2g_L = -(\beta + \gamma).
 \end{aligned}$$

Тогда с учетом $m_\chi = 0$, $\lambda_-^2 = (s+m^2)/(2\sqrt{s})-m$, $\xi_-^2 = E_\nu = (s-m^2)/(2\sqrt{s})$, $\lambda_+\lambda_- = \xi_+\xi_- = E_\nu$, например, для $(l_{--}^w, h_{+-}^w)^{x\eta}$ такая СМ-подстановка дает следующее:

$$\begin{aligned}
 &\frac{(l_{--}^w, h_{+-}^w)^{x\eta}}{4 \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}} = \\
 &= -(\alpha - \delta)[\xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_- + (\xi_-^2 + m_\chi)\lambda_-^2] + (\gamma - \beta)\lambda_+\lambda_-[m_\chi + \xi_-^2 + \lambda_-^2] = \\
 &= -(2g_R) \frac{s-m^2}{2\sqrt{s}} \left[\left(\frac{s-m^2}{2\sqrt{s}} + \frac{s+m^2}{2\sqrt{s}} - m \right) + \left(\frac{s-m^2}{2\sqrt{s}} + \frac{s+m^2}{2\sqrt{s}} - m \right) \right] = \\
 &= -2g_R(s-m^2) \left[\frac{s-m^2}{2s} + \frac{s+m^2}{2s} - \frac{m}{\sqrt{s}} \right], \quad \text{откуда} \\
 (l_{--}^w, h_{+-}^w)^{x\eta} &= -8g_R(s-m^2) \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \equiv (l_\nu \cdot h_{+-}^\eta).
 \end{aligned}$$

Аналогично для оставшихся трех скалярных произведений получается

$$\begin{aligned}
 (l_{--}^w, h_{--}^w)^{\chi\eta} &= \\
 &= 4 \cos \frac{\theta}{2} \left[(\alpha - \delta) \xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + (\alpha - \delta) (m_\chi + \xi_-^2) \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - \right. \\
 &- (\gamma - \beta) \lambda_+ \lambda_- (\xi_-^2 + m_\chi) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (\gamma - \beta) \lambda_+ \lambda_- \left. \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] = \\
 &= 8(s - m^2) g_R \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \equiv (l_\nu \cdot h_{--}^\eta), \\
 (l_{--}^w, h_{++}^w)^{\chi\eta} &= 8(s - m^2) \cos \frac{\theta}{2} \left(g_L + g_R \frac{m}{\sqrt{s}} \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \equiv (l_\nu \cdot h_{++}^\eta), \\
 (l_{--}^w, h_{-+}^w)^{\chi\eta} &= \\
 &= 8 \sin \frac{\theta}{2} (s - m^2) e^{+i\phi} \left[g_L - g_R \frac{m}{\sqrt{s}} \left(1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \equiv (l_\nu \cdot h_{-+}^\eta).
 \end{aligned}$$

Справа приведены соответствующие скалярные произведения для нейтринного случая из работы [1]. Получено совпадение общих формул с доступными аналогами (в η -базисе) для нейтрино.

Приложение 5

ДРУГИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

П.5.1. Вспомогательные вычисления и величины. Для обоснования формул (2.17)–(2.19) достаточно получить явный вид нуклонных токовых матриц, заданных соотношениями (2.14), используя матрицы спиральности α_p и $\alpha_{p'}$ из (2.10). Прямые выкладки, например, для $\hat{S}(p')$ и $\hat{V}^2(p')$ из (2.14) дают следующее:

$$\begin{aligned}
 \hat{S}(p') &= \lambda_+^2 - \lambda_-^2 \alpha_{p'}^\dagger \alpha_p = \\
 &= \lambda_+^2 - \lambda_-^2 \begin{pmatrix} -\cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_+^2 & 0 \\ 0 & \lambda_+^2 \end{pmatrix} - \\
 &- \begin{pmatrix} \lambda_-^2 \cos \theta & -\lambda_-^2 e^{-i\phi} \sin \theta \\ \lambda_-^2 e^{i\phi} \sin \theta & \lambda_-^2 \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta & +\lambda_-^2 e^{-i\phi} \sin \theta \\ -\lambda_-^2 e^{i\phi} \sin \theta & \lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{V}^2(\mathbf{p}') &= \lambda_- \lambda_+ [\alpha_{p'} \sigma_2 + \sigma_2 \alpha_p] = \\
 &= \lambda_- \lambda_+ \left[\begin{pmatrix} -\cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \\
 &= \lambda_- \lambda_+ \left[\begin{pmatrix} -i e^{-i\phi} \sin \theta & i \cos \theta \\ i \cos \theta & i e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right] = \\
 &= i \lambda_- \lambda_+ \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & -1 + \cos \theta \\ -1 + \cos \theta & e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом получают остальные выражения (2.17)–(2.19).

П.5.2. Собственные значения оператора спиральности начального и конечного χ -лептона. Рассмотрим сначала более общий случай конечного χ -лептона. Согласно выбору единичных векторов (2.6) и данным рисунка (см. п. 2.1.1) оператор спиральности конечного χ -лептона, улетающего в направлении $\mathbf{n}_{k'}$ = $(\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$, имеет вид*

$$\hat{H}_{k'} = \mathbf{n}_{k'} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Тогда задача на собственные значения оператора спиральности конечного χ -лептона

$$\hat{H}_{k'} \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{k'}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{k'}) = \mp \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{k'})$$

для собственных значений $s' = -1$ и $+1$, когда спин антипараллелен ($s' \downarrow \uparrow \mathbf{k}'$) и параллелен ($s' \uparrow \uparrow \mathbf{k}'$) импульсу лептона, имеет решения в виде

$$\begin{aligned}
 \chi_-(\mathbf{k}') &\equiv \chi_-(\mathbf{n}_{k'}) = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \tan \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 \chi_+(\mathbf{k}') &\equiv \chi_+(\mathbf{n}_{k'}) = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cot \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

*Так как при $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$, $\mathbf{n}_{k'} \cdot \boldsymbol{\sigma} = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \times$
 $\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi \sin \theta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \sin \phi \sin \theta \\ i \sin \phi \sin \theta & 0 \end{pmatrix} +$
 $\begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$

Это проверяется прямой подстановкой:

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{k'} \chi_{-}(\mathbf{n}_{k'}) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \tan \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \tan \frac{\theta}{2} \cos \theta + e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{-i\phi} \tan \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \sin \theta - \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \left[\tan \frac{\theta}{2} \cos \theta - \sin \theta \right] \\ -\tan \frac{\theta}{2} \sin \theta - \cos \theta \end{pmatrix} = \\
 &= (-1) \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \tan \frac{\theta}{2} \left[\cos \theta - \sin \theta \cot \frac{\theta}{2} \right] \\ \tan \frac{\theta}{2} \sin \theta + \cos \theta \end{pmatrix} = (-1) \chi_{-}(\mathbf{n}_{k'}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{k'} \chi_{+}(\mathbf{n}_{k'}) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cot \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta e^{-i\phi} \cot \frac{\theta}{2} + e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta e^{-i\phi} \cot \frac{\theta}{2} - \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \left[\cos \theta \cot \frac{\theta}{2} + \sin \theta \right] \\ \sin \theta \cot \frac{\theta}{2} - \cos \theta \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cot \frac{\theta}{2} \left[\cos \theta + \sin \theta \tan \frac{\theta}{2} \right] \\ \sin \theta \cot \frac{\theta}{2} - \cos \theta \end{pmatrix} = (+1) \chi_{+}(\mathbf{n}_{k'}).
 \end{aligned}$$

Так как для начального лептона $\mathbf{n}_k = (0, 0, 1)$, то оператор спиральности начального лептона имеет вид $\hat{H}_k \equiv \mathbf{n}_k \cdot \boldsymbol{\sigma} = \sigma_3$. Тогда задача на собственные значения оператора спиральности начального χ -лептона

$$\hat{H}_k \chi_{\mp}(\mathbf{n}_k) \equiv \sigma_3 \chi_{\mp}(\mathbf{n}_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \chi_{\mp}(\mathbf{n}_k) = \mp \chi_{\mp}(\mathbf{n}_k)$$

имеет решение в виде

$$\begin{aligned}
 \chi_{-}(\mathbf{k}) &\equiv \chi_{-}(\mathbf{n}_k) = \chi_{-1}(\mathbf{n}_k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 \chi_{+}(\mathbf{k}) &\equiv \chi_{+}(\mathbf{n}_k) = \chi_{+1}(\mathbf{n}_k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Здесь собственные значения $s = -1$ и $+1$ соответствуют случаю, когда спин антипараллелен ($s \downarrow \uparrow \mathbf{k}$) и параллелен ($s \uparrow \uparrow \mathbf{k}$) начальному импульсу \mathbf{k} .

Отметим, что в случае с нейтрино в работах [1, 2] для начальных частиц были биспиноры

$$\eta_-(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \chi_-(\mathbf{k}), \quad \eta_+(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \chi_+(\mathbf{k}),$$

$$\eta_-(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \chi_+(\mathbf{p}), \quad \eta_+(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \chi_-(\mathbf{p}),$$

а для конечных частиц — другие биспиноры:

$$\eta_-(\mathbf{p}') = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \eta_-(\mathbf{p}), \quad \eta_+(\mathbf{p}') = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \eta_+(\mathbf{p}),$$

$$\eta_-(\mathbf{k}') = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \equiv \chi_-(\mathbf{k}'), \quad \eta_+(\mathbf{k}') = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \equiv \chi_+(\mathbf{k}').$$

Видно, что базисные спиноры для начальных и конечных нейтральных (безмассовых) лептонов одинаковы в обоих базисах: $\eta_{\pm}(\mathbf{k}) = \chi_{\pm}(\mathbf{k})$ и $\eta_{\pm}(\mathbf{k}') = \chi_{\pm}(\mathbf{k}')$. Для массивных нуклонов имеется различие. Так как в с. ц. м. лептона и нуклона $\mathbf{k} = -\mathbf{p}$, то η_{\mp} -спиноры начальных нуклонов в σ_3 -базисе (проекция на ось \mathbf{k}) отвечают противоположным собственным значениям χ_{\pm} -спиноров из базиса спиральности (проекция на ось \mathbf{p}).

П.5.3. Соотношения между σ_3 -базисом и базисом спиральности. Напомним, что собственные векторы (биспиноры) для начального и конечного нуклона определены в базисе спиральности как χ_{\pm} из (2.32) и в σ_3 -базисе как η_{\pm} из (2.37). То есть начальные собственные состояния (для нуклона) в этих базисах выбраны в виде

$$\eta_-(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_+(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_+(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_-(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда переход от базиса спиральности к σ_3 -базису осуществляется преобразованием

$$\begin{pmatrix} \eta_+(\mathbf{p}) \\ \eta_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+(\mathbf{p}) \\ \chi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix}.$$

Правильность этих преобразований легко можно проверить прямой подстановкой. Пусть конечные собственные векторы нуклона в этих базисах выбраны в виде

$$\eta_-(\mathbf{p}') = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_+(\mathbf{p}') = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\chi_-(\mathbf{p}') = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cot \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_+(\mathbf{p}') = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \tan \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матричное преобразование между этими базисами можно задать в виде

$$\begin{pmatrix} \eta_+(\mathbf{p}') \\ \eta_-(\mathbf{p}') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+(\mathbf{p}') \\ \chi_-(\mathbf{p}') \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{i\phi} \sin \theta & e^{i\phi} \sin \theta \\ 1 + \cos \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+(\mathbf{p}') \\ \chi_-(\mathbf{p}') \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы преобразования (явно записанные в правой части) находятся из следующих условий:

$$\begin{aligned} \eta_+(\mathbf{p}') &= a\chi_+(\mathbf{p}') + b\chi_-(\mathbf{p}') = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} a \tan \frac{\theta}{2} + e^{-i\phi} b \cot \frac{\theta}{2} \\ a + b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \eta_-(\mathbf{p}') &= c\chi_+(\mathbf{p}') + d\chi_-(\mathbf{p}') = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} c \tan \frac{\theta}{2} + e^{-i\phi} d \cot \frac{\theta}{2} \\ c + d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда получается, что $a = -b$, $b = e^{i\phi} \sin \theta/2$, $c = 1 - d$ и $c = (1 + \cos \theta)/2$. Если конечные собственные векторы нуклона выбраны в виде (2.32):

$$\begin{aligned} \eta_-(\mathbf{p}') &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_+(\mathbf{p}') = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \chi_-(\mathbf{p}') &= \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \chi_+(\mathbf{p}') = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то справедливо преобразование между базисами в виде формулы (4.1):

$$\begin{pmatrix} \eta_+(\mathbf{p}') \\ \eta_-(\mathbf{p}') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} & e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \\ -e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+(\mathbf{p}') \\ \chi_-(\mathbf{p}') \end{pmatrix}.$$

Действительно, прямая подстановка дает

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} \chi_+(\mathbf{p}') + e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \chi_-(\mathbf{p}') &= \\ &= \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} + e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ (e^{i\phi} - e^{i\phi}) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \equiv \eta_+(\mathbf{p}') = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin \frac{\theta}{2} \chi_{-}(\mathbf{p}') - e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \chi_{+}(\mathbf{p}') &= \\
 &= \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} - e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \equiv \eta_{-}(\mathbf{p}') = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Для массивного лептона ситуация аналогична. Лептонные биспиноры имеют такой вид:

$$\begin{aligned}
 \chi_{-}(\mathbf{k}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_{+}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 \chi_{-}(\mathbf{k}') &= \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad \chi_{+}(\mathbf{k}') = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\
 \eta_{-}(\mathbf{k}) &= \eta_{-}(\mathbf{k}') = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_{+}(\mathbf{k}) = \eta_{+}(\mathbf{k}') = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Тогда для начальных состояний массивного лептона, поскольку $\eta_{\pm}(\mathbf{k}) = \chi_{\pm}(\mathbf{k})$, переход между базами можно задать с помощью единичной матрицы:

$$\begin{pmatrix} \eta_{+}(\mathbf{k}) \\ \eta_{-}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{+}(\mathbf{k}) \\ \chi_{-}(\mathbf{k}) \end{pmatrix}.$$

Для конечных состояний лептона матрица преобразования базисов имеет вид (4.2):

$$\begin{pmatrix} \eta_{+}(\mathbf{k}') \\ \eta_{-}(\mathbf{k}') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{+}(\mathbf{k}') \\ \chi_{-}(\mathbf{k}') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{+}(\mathbf{k}') \\ \chi_{-}(\mathbf{k}') \end{pmatrix}.$$

Элементы этой матрицы a, b, c, d находятся из условий

$$\begin{aligned}
 \eta_{+}(\mathbf{k}') &= a\chi_{+}(\mathbf{k}') + b\chi_{-}(\mathbf{k}') = a \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} a \cos \frac{\theta}{2} - b e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ a e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} + b \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_-(\mathbf{k}') &= c\chi_+(\mathbf{k}') + d\chi_-(\mathbf{k}') = c \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c \cos \frac{\theta}{2} - d e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ c e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} + d \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

иными словами, из системы уравнений:

$$\begin{aligned}1 &= a \cos \frac{\theta}{2} - b e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, \quad a e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} = -b \cos \frac{\theta}{2} \rightarrow b = -a e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} / \cos \frac{\theta}{2}, \\ 1 &= c e^{+i\phi} \sin \frac{\theta}{2} + d \cos \frac{\theta}{2}, \quad c \cos \frac{\theta}{2} = d e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \rightarrow c = d e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} / \cos \frac{\theta}{2}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем $a = d = \cos \theta/2$, $b = -e^{i\phi} \sin \theta/2$ и $c = e^{-i\phi} \sin \theta/2$.

П.5.4. Пример преобразования нуклонных токов из базиса в базис. Для преобразования нуклонных токов из базиса спиральности в σ_3 -базис используем формулы (4.1):

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \eta_+(\mathbf{p}) \\ \eta_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+(\mathbf{p}) \\ \chi_-(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \eta_+(\mathbf{p}') \\ \eta_-(\mathbf{p}') \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+(\mathbf{p}') \\ \chi_-(\mathbf{p}') \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Подставим их в определения, например, скалярных нуклонных токов в η -базисе при всех возможных комбинациях начальных и конечных проекций спина нуклона. С учетом явных выражений для скалярных токов в базисе спиральности (2.56)

$$\begin{aligned}S_{--}^X(\mathbf{p}') &= +2m \cos \frac{\theta}{2} e^{+i\phi}, \quad S_{++}^X(\mathbf{p}') = -2m \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, \\ S_{+-}^X(\mathbf{p}') &= S_{-+}^X(\mathbf{p}') = +2(\lambda_-^2 + m) \sin \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

имеем, например, для $S_{--}^\eta(\mathbf{p}') \equiv \eta_-^\dagger(\mathbf{p}') \hat{S}(\mathbf{p}') \eta_-(\mathbf{p})$ выражение через $S_{-+}^X(\mathbf{p}')$ и $S_{++}^X(\mathbf{p}')$:

$$\begin{aligned}S_{--}^\eta(\mathbf{p}') &= \left[-e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \chi_+(\mathbf{p}') + \sin \frac{\theta}{2} \chi_-(\mathbf{p}') \right]^\dagger \hat{S}(\mathbf{p}') \chi_+(\mathbf{p}) = \\ &= \sin \frac{\theta}{2} \chi_-^\dagger(\mathbf{p}') \hat{S}(\mathbf{p}') \chi_+(\mathbf{p}) - e^{+i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \chi_+^\dagger(\mathbf{p}') \hat{S}(\mathbf{p}') \chi_+(\mathbf{p}) \equiv \\ &\equiv \sin \frac{\theta}{2} S_{-+}^X(\mathbf{p}') - e^{+i\phi} \cos \frac{\theta}{2} S_{++}^X(\mathbf{p}')\end{aligned}$$

которое далее дает правильный результат для $S_{--}^{\eta}(\mathbf{p}')$ (2.50) в σ_3 -базисе:

$$\begin{aligned} S_{--}^{\eta}(\mathbf{p}') &= \sin \frac{\theta}{2} 2(\lambda_-^2 + m) \sin \frac{\theta}{2} - e^{+i\phi} \cos \frac{\theta}{2} (-2)m \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} = \\ &= 2(\lambda_-^2 + m) \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2m \cos^2 \frac{\theta}{2} = 2 \left(m + \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

Действуя аналогично, получим преобразование (нуклонных скалярных) токов из базиса спиральности в η -базис в виде

$$\begin{aligned} S_{\mp\mp}^{\eta}(\mathbf{p}') &= S_{\mp\pm}^{\chi}(\mathbf{p}') \sin \frac{\theta}{2} \mp S_{\pm\pm}^{\chi}(\mathbf{p}') \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\ S_{\mp\pm}^{\eta}(\mathbf{p}') &= S_{\mp\mp}^{\chi}(\mathbf{p}') \sin \frac{\theta}{2} \mp S_{\pm\mp}^{\chi}(\mathbf{p}') \cos \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Видно, что проведенные преобразования не зависят от явного вида токовых матриц $\hat{S}(\mathbf{p}')$, поэтому такого типа преобразование справедливо для всех нуклонных токовых матриц.

Тем же образом получаются преобразования лептонных токов из χ -базиса в η -базис:

$$\begin{aligned} S_{\mp\mp}^{\eta}(\mathbf{k}') &= S_{\mp\mp}^{\chi}(\mathbf{k}') \cos \frac{\theta}{2} \pm S_{\pm\mp}^{\chi}(\mathbf{k}') \sin \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}, \\ S_{\mp\pm}^{\eta}(\mathbf{k}') &= S_{\mp\pm}^{\chi}(\mathbf{k}') \cos \frac{\theta}{2} \pm S_{\pm\pm}^{\chi}(\mathbf{k}') \sin \frac{\theta}{2} e^{\pm i\phi}. \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Так как (П.8) не зависят от явного вида матриц $\hat{S}(\mathbf{k}')$, то такие преобразования справедливы для всех лептонных токовых матриц.

Преобразования из одного базиса биспиноров (скажем, $\chi\chi$ -базиса) в другой базис ($\eta\eta$ -базис) можно провести также для скалярных произведений. Например, для скалярных произведений скалярных токов с помощью приведенных выше формул (П.8) и (П.7) имеем

$$\begin{aligned} (l_{++}^s h_{++}^s)^{\eta m} &= \left[S_{++}^{\chi}(\mathbf{k}') \cos \frac{\theta}{2} - S_{-+}^{\chi}(\mathbf{k}') \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \right] \times \\ &\times \left[S_{+-}^{\chi}(\mathbf{p}') \sin \frac{\theta}{2} + S_{--}^{\chi}(\mathbf{p}') \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \right] = S_{++}^{\chi}(\mathbf{k}') S_{+-}^{\chi}(\mathbf{p}') \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \\ &+ S_{++}^{\chi}(\mathbf{k}') S_{--}^{\chi}(\mathbf{p}') \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} - S_{-+}^{\chi}(\mathbf{k}') S_{+-}^{\chi}(\mathbf{p}') \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} - \\ &- S_{-+}^{\chi}(\mathbf{k}') S_{--}^{\chi}(\mathbf{p}') \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{-2i\phi}, \quad \text{откуда следует} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(l_{+++}^s h_{+++}^s)^{\eta\eta} &= (l_{+++}^s h_{+++}^s)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + (l_{+++}^s h_{+++}^s)^{\chi\chi} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} - \\
&- (l_{-+}^s h_{-+}^s)^{\chi\chi} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} - (l_{-+}^s h_{-+}^s)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{-2i\phi}. \quad (\text{П.9})
\end{aligned}$$

Проверим справедливость формулы (П.9). Из пп. 3.1 и 3.2 имеем явные выражения для входящих в нее скалярных произведений:

$$\begin{aligned}
(l_{+++}^s h_{+++}^s)^{\eta\eta} &= +[\xi_+^2 - \xi_-^2 \cos \theta][\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta] \equiv \\
&\equiv 4 \left(m_\chi + \xi_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \left(m + \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \\
(l_{+++}^s h_{+++}^s)^{\chi\chi} &= +4m_\chi(\lambda_-^2 + m) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\
(l_{+++}^s h_{+++}^s)^{\chi\chi} &= +4m_\chi m \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{+i\phi}, \\
(l_{-+}^s h_{-+}^s)^{\chi\chi} &= -4(\lambda_-^2 + m)(\xi_-^2 + m_\chi) \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{+i\phi}, \\
(l_{-+}^s h_{-+}^s)^{\chi\chi} &= -4m(\xi_-^2 + m_\chi) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{+2i\phi}.
\end{aligned}$$

Подставляя их в (П.9), получим обоснование этой формулы в виде

$$\begin{aligned}
(l_{+++}^s h_{+++}^s)^{\eta\eta} &= (l_{+++}^s h_{+++}^s)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + (l_{+++}^s h_{+++}^s)^{\chi\chi} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} - \\
&- (l_{-+}^s h_{-+}^s)^{\chi\chi} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} - (l_{-+}^s h_{-+}^s)^{\chi\chi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{-2i\phi} = \\
&= 4m_\chi(\lambda_-^2 + m) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + 4m_\chi m \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} + \\
&+ 4(\lambda_-^2 + m)(\xi_-^2 + m_\chi) \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{+i\phi} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} + \\
&+ 4m(\xi_-^2 + m_\chi) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{+2i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} e^{-2i\phi} = \\
&= 4m_\chi(\lambda_-^2 + m) \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 4m_\chi m \cos^4 \frac{\theta}{2} + \\
&+ 4(\lambda_-^2 + m)(\xi_-^2 + m_\chi) \sin^4 \frac{\theta}{2} + 4m(\xi_-^2 + m_\chi) \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = \\
&= 4m_\chi \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[(\lambda_-^2 + m) \sin^2 \frac{\theta}{2} + m \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + \\
&+ 4(\xi_-^2 + m_\chi) \sin^2 \frac{\theta}{2} \left[(\lambda_-^2 + m) \sin^2 \frac{\theta}{2} + m \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] = \\
&= 4 \left(m_\chi \cos^2 \frac{\theta}{2} + (\xi_-^2 + m_\chi) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \left(m + \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right).
\end{aligned}$$

Отметим сокращение фазовых множителей, которое может служить дополнительным фактором в пользу правильности полученных выражений.

Все полученные таким образом преобразования скалярных произведений (скалярных токов) из $\chi\chi$ -базиса в $\eta\eta$ -базис приведены в разд. 4 на с. 1081. Эти преобразования, записанные выше в частном случае скалярных токов, полностью справедливы для всех возможных комбинаций токов $(l_{+-}^v h_{-}^v)^{\chi\chi}$, $(l_{+-}^s h_{-}^p)^{\chi\chi}$ и т. д.

П.5.5. Некоторые кинематические определения и соотношения. Из определения $\lambda_{\pm} = \sqrt{E_p \pm m}$ и $\xi_{\pm} = \sqrt{E_{\chi} \pm m_{\chi}}$, а также определения лямбда-функции

$$\begin{aligned} \lambda^2(s, m^2, m_{\chi}^2) &\equiv s^2 + m^4 + m_{\chi}^4 - 2sm^2 - 2sm_{\chi}^2 - 2m^2m_{\chi}^2 = \\ &= (s - (m + m_{\chi})^2)(s - (m - m_{\chi})^2) = \\ &= (\sqrt{s} + m - m_{\chi})(\sqrt{s} + m + m_{\chi})(\sqrt{s} - m - m_{\chi})(\sqrt{s} - m + m_{\chi}) \quad (\text{П.10}) \end{aligned}$$

в с. ц. м. нуклона и лептона (2.4) получается, что

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{E_p^2 - m^2} = \lambda_+ \lambda_- = |\mathbf{k}| = \sqrt{E_{\chi}^2 - m_{\chi}^2} = \xi_+ \xi_- = \frac{\lambda(s, m^2, m_{\chi}^2)}{2\sqrt{s}}. \quad (\text{П.11})$$

Соотношения в формулах (П.11) следуют из того, что

$$\begin{aligned} \lambda_+^2 \lambda_-^2 &= E_p^2 - m^2 = \frac{[s + m^2 - m_{\chi}^2]^2}{4s} - m^2 = \\ &= \frac{s^2 + m^4 + m_{\chi}^4 + 2sm^2 - 2sm_{\chi}^2 - 2m^2m_{\chi}^2 - 4sm^2}{4s} = \\ &= \frac{s^2 + m^4 + m_{\chi}^4 - 2sm^2 - 2sm_{\chi}^2 - 2m^2m_{\chi}^2}{4s} \equiv \frac{\lambda^2(s, m^2, m_{\chi}^2)}{4s}, \\ \xi_+^2 \xi_-^2 &= E_{\chi}^2 - m_{\chi}^2 = \frac{[s - m^2 + m_{\chi}^2]^2}{4s} - m_{\chi}^2 = \\ &= \frac{s^2 + m^4 + m_{\chi}^4 - 2sm^2 + 2sm_{\chi}^2 - 2m^2m_{\chi}^2 - 4sm_{\chi}^2}{4s} = \\ &= \frac{s^2 + m^4 + m_{\chi}^4 - 2sm^2 - 2sm_{\chi}^2 - 2m^2m_{\chi}^2}{4s} \equiv \frac{\lambda^2(s, m^2, m_{\chi}^2)}{4s} = \lambda_+^2 \lambda_-^2. \end{aligned}$$

В с. ц. м. имеются инвариантные выражения для квадратов λ_{\pm}^2 и ξ_{\pm}^2 , приведенные ранее в разд. 3 из формул (3.7) и (3.8). Для их произведений также имеется набор выражений

$$\begin{aligned} \lambda_+^2 \lambda_-^2 &= \xi_+^2 \xi_-^2 = \frac{\lambda^2(s, m^2, m_{\chi}^2)}{4s} = \frac{(s - (m + m_{\chi})^2)(s - (m - m_{\chi})^2)}{4s}, \\ \xi_+^2 \lambda_+^2 &= (E_{\chi} + m_{\chi})(E_p + m) = \frac{s - (m_{\chi} - m)^2}{4s} (\sqrt{s} + m_{\chi} + m)^2, \end{aligned}$$

$$\xi_-^2 \lambda_-^2 = (E_\chi - m_\chi)(E_p - m) = \frac{s - (m_\chi - m)^2}{4s} (\sqrt{s} - m - m_\chi)^2,$$

$$\xi_+^2 \lambda_-^2 = (E_\chi + m_\chi)(E_p - m) = \frac{s - (m + m_\chi)^2}{4s} (\sqrt{s} + m_\chi - m)^2,$$

$$\xi_-^2 \lambda_+^2 = (E_\chi - m_\chi)(E_p + m) = \frac{s - (m + m_\chi)^2}{4s} (\sqrt{s} - m_\chi + m)^2.$$

С помощью этих формул и соотношений (П.11) можно получить полезные выражения типа

$$\lambda_+ \lambda_- \xi_+ \xi_- + \xi_-^2 \lambda_-^2 = \frac{s - (m - m_\chi)^2}{2} \left(1 - \frac{m + m_\chi}{\sqrt{s}}\right),$$

$$\xi_-^2 \lambda_+ \lambda_- + \xi_+ \xi_- \lambda_-^2 = \frac{\lambda(s, m^2, m_\chi^2)}{2} \left(1 - \frac{m + m_\chi}{\sqrt{s}}\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bednyakov V. A., Naumov D. V.* Coherency and Incoherency in Neutrino-Nucleus Elastic and Inelastic Scattering // *Phys. Rev. D.* 2018. V.98, No.5. P.053004; arXiv:1806.08768.
2. *Bednyakov V. A., Naumov D. V.* On Coherent Neutrino and Antineutrino Scattering off Nuclei // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2019. V. 16, No. 6. P.638–646; arXiv:1904.03119.
3. *Bednyakov V. A., Naumov D. V.* Concept of Coherency in Neutrino and Antineutrino Scattering off Nuclei // *Phys. Part. Nucl.* 2021. V. 52, No. 1. P.39–154.
4. *Freedman D. Z.* Coherent Effects of a Weak Neutral Current // *Phys. Rev. D.* 1974. V.9. P.1389–1392.
5. *Kopeliovich V. B., Frankfurt L. L.* Isotopic and Chiral Structure of Neutral Current // *JETP Lett.* 1974. V. 19. P. 145–147.
6. *Freedman D. Z., Schramm D. N., Tubbs D. L.* The Weak Neutral Current and Its Effects in Stellar Collapse // *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 1977. V. 27. P. 167–207.
7. *Gaponov Yu. V., Tikhonov V. N.* Elastic Scattering of Low-Energy Neutrinos by Atomic Systems // *Yad. Fiz.* 1977. V. 26. P. 594–600.
8. *Sehgal L. M., Wanninger M.* Atomic Effects in Coherent Neutrino Scattering // *Phys. Lett. B.* 1986. V. 171. P. 107–112.
9. *Cadeddu M., Dordei F., Giunti C., Kouzakov K. A., Picciani E., Studenikin A. I.* Potentialities of a Low-Energy Detector Based on ^4He Evaporation to Observe Atomic Effects in Coherent Neutrino Scattering and Physics Perspectives. arXiv:1907.03302.
10. *Akimov D. et al. (COHERENT Collab.).* Observation of Coherent Elastic Neutrino-Nucleus Scattering // *Science.* 2017. V.357, No.6356. P.1123–1126; arXiv:1708.01294.
11. *Bednyakov V. A.* Is It Possible to Discover a Dark Matter Particle with an Accelerator? // *Phys. Part. Nucl.* 2016. V.47, No. 5. P. 711–774; arXiv:1505.04380.

12. *Papoulias D. K., Sahu R., Kosmas T. S., Kota V. K. B., Nayak B.* Novel Neutrino-Floor and Dark Matter Searches with Deformed Shell Model Calculations // *Adv. High Energy Phys.* 2018. V. 2018. P. 6031362; arXiv:1804.11319.
13. *Bæhm C., Cerdeño D. G., Machado P. A. N., Campo A. O.-D., Reid E.* How High Is the Neutrino Floor? // *JCAP.* 2019. V. 1901. P. 043; arXiv:1809.06385.
14. *Bednyakov V. A., Titkova I. V.* Coherency in WIMP Scattering off Nuclei // *Phys. Part. Nucl.* 2021 (to be published).
15. *Peskin M. E., Schroeder D. V.* An Introduction to Quantum Field Theory. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995.
16. *Bilenky S.* Introduction to the Physics of Massive and Mixed Neutrinos // *Lect. Notes Phys.* 2018. V. 947. 273 p.
17. *Bilenky S. M.* Introduction to Feynman Diagrams and Electroweak Interactions Physics. Gif-sur-Yvette, France: Ed. Frontieres (1994), 1995. 365 p.