ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2023. Т. 54, вып. 3. С. 603–620

МНОГОМЕРНЫЕ СПИНОРЫ, ИНВАРИАНТНАЯ ФОРМА И УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

В. В. Монахов *, *А. В. Кожедуб*

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Рассмотрены ограничения на инвариантную форму и матрицу обобщенного дираковского сопряжения в пространстве произвольной размерности и сигнатуры, и показано, что эта матрица соответствует фундаментальной симметрии пространства Крейна. Доказано, что выбор матрицы обобщенного дираковского сопряжения однозначно зависит от того, какие гамма-матрицы соответствуют осям времени, а какие соответствуют осям пространства.

We studied the restrictions on the invariant form and generalized Dirac conjugation matrix in a space of arbitrary dimension and signature. We have shown that this matrix corresponds to the fundamental symmetry of the Krein space. We have proved that the choice of the generalized Dirac conjugation matrix is uniquely related to which gamma matrices correspond to the time axes and which correspond to the space axes.

PACS: 11.10.Kk; 11.30.Er; 03.65.Fd

ВВЕДЕНИЕ

Дираком для четырехмерного пространства-времени сигнатуры $(p,q) = (1,3)$ было введено понятие сопряженного спинора $\overline{\Psi} = (\gamma^0\,\Psi)^+$, который сейчас принято называть дираковски сопряженным спинором. В данном сопряжении важную роль играет гамма-матрица Дирака γ^0. Обобщение дираковского сопряжения спинора на пространство с другой сигнатурой задается формулой

$$\overline{\Psi} = (M\Psi)^+, \tag{1}$$

где M — некоторая матрица. При этом встает вопрос о том, как она связана с сигнатурой пространства. Паули в знаменитой работе [1] вывел важнейшие свойства гамма-матриц и ввел эрмитову матрицу M дираковского сопряжения через соотношение

$$(\gamma^\mu)^+ = -M\gamma^\mu M. \tag{2}$$

Это соотношение выведено из требования лоренц-ковариантности преобразований 4-векторов и спиноров. В дальнейшем идеи Паули были

* E-mail: v.v.monahov@spbu.ru; v.v.monahov@mail.ru

обобщены на пространства произвольной размерности и сигнатуры с использованием формализма вещественных алгебр Клиффорда. При этом в зависимости от размерности и сигнатуры пространства для задания матрицы обобщенного дираковского сопряжения использовалась формула [2, 3] либо (2), либо

$$(\gamma^\mu)^+ = \pm A_\pm^{-1} \gamma^\mu A_\pm, \tag{3}$$

где A_+ и A_- — матрицы, соответствующие знаку в правой части формулы [2, 3]. И хотя эти матрицы были определены с точностью до комплексного множителя, не была доказана их эрмитовость и не была установлена связь этих формул с тем, соответствуют ли гамма-матрицы заданной сигнатуры осям времени или осям пространства.

В нашей работе [4] была выведена формула оператора (матрицы) M с использованием супералгебраического представления спиноров исходя из требований лоренц-ковариантности спиноров и дираковски сопряженных спиноров. Однако в ней вывод формулы не был доведен до конца, потому что не были учтены все ограничения.

В данной работе свойства матрицы обобщенного дираковского сопряжения выводятся из свойств массового члена лагранжиана спинора. Поскольку безмассовые спиноры, по-видимому, отсутствуют в природе, этот подход позволяет выяснить наиболее общие свойства данной матрицы.

1. ОГРАНИЧЕНИЯ НА МАТРИЦУ ОБОБЩЕННОГО ДИРАКОВСКОГО СОПРЯЖЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ИНВАРИАНТНОЙ ФОРМОЙ

Рассмотрим инвариантность массового члена лагранжиана для спинора Ψ, имеющего массу m:

$$L_m = m\overline{\Psi}\Psi, \tag{4}$$

при его преобразованиях.

Далее удобнее использовать запись формулы (4) через скалярное произведение

$$L_m = m(M\Psi, \Psi) = m\, f(\Psi, \Psi), \tag{5}$$

где f — форма, заданная скалярным произведением и матрицей M. При этом для спиноров Φ и Ψ форма имеет вид

$$f(\Phi, \Psi) = (M\Phi, \Psi) = (\Phi, M^+\Psi). \tag{6}$$

Как будет показано ниже, для однозначного нахождения матрицы M недостаточно условия инвариантности (5) при преобразованиях спиноров. Для этого необходима инвариантность при преобразованиях спиноров формы (6). Отметим, что формула (6) имеет одинаковый вид при использовании как матричного формализма Дирака, так и супералгебраического представления спиноров [4].

Обозначим многомерные аналоги гамма-матриц Дирака как γ^μ. Они являются образующими алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}(p,q)$ и обладают антикоммутационными соотношениями

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = g^{\mu\nu}, \tag{7}$$

где метрика $g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1,\dots,1,-1,\dots,-1)$ с p единицами и q минус единицами, а размерность пространства-времени равна $n = p+q$. Также обозначим $\gamma^{\mu\nu} = 1/2(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = \gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$.

Если сигнатура гамма-матриц не имеет значения, будем использовать обозначение γ^μ. Если же их сигнатура имеет значение, то гамма-матрицы с положительной сигнатурой будем обозначать как γ_+^μ, а с отрицательной — как γ_-^μ.

Общий вид матрицы M такой:

$$M = k_0 + k_\mu\gamma_+^\mu + \ldots + k_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}\gamma_+^{\mu_1}\gamma_+^{\mu_2}\cdots\gamma_+^{\mu_k}\gamma_-^{\nu_1}\gamma_-^{\nu_2}\cdots\gamma_-^{\nu_l} + \ldots + \\ + k_{12\cdots p12\cdots q}\gamma_+^1\gamma_+^2\cdots\gamma_+^p\gamma_-^1\gamma_-^2\cdots\gamma_-^q, \tag{8}$$

где $k_0, k_\mu\gamma, \ldots, k_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k\nu_1\nu_2\cdots\nu_l}\cdots k_{12\cdots p12\cdots q}$ — числовые коэффициенты. Будем рассматривать комплексные алгебры Клиффорда, поэтому коэффициенты перед гамма-матрицами в общем случае — комплексные числа. Далее получим ограничения на эти коэффициенты при преобразованиях спиноров, в связи с чем возникнут чисто вещественные или чисто мнимые коэффициенты и вещественные алгебры Клиффорда. В случае нечетной размерности центр вещественной алгебры Клиффорда нетривиальный, при этом его генераторами являются 1 и $\gamma = \gamma_+^1\gamma_+^2\ldots\gamma_+^p\gamma_-^1\gamma_-^2\ldots\gamma_-^q$ [2, 5, 6]. Однако в матричном представлении элемент γ является числом (матрицей, пропорциональной единичной) и равен $\pm\,1$ или $\pm\,i$ [2, 5, 6].

Инфинитезимальное активное преобразование Лоренца задается оператором

$$S = \exp\left(\gamma^{\mu\nu}d\omega_{\mu\nu}\right) = 1 + \gamma^{\mu\nu}d\omega_{\mu\nu}, \tag{9}$$

где $d\omega_{\mu\nu}$ — инфинитезимальные вещественные параметры псевдоортогональных вращений.

При преобразовании Лоренца (9) произвольный спинор Ψ преобразуется как

$$\Psi' = S\,\Psi = \left(1 + \gamma^{\mu\nu}d\omega_{\mu\nu}\right)\Psi,$$

а произвольный вектор $V = \gamma^\mu V_\mu$ преобразуется как $V' = SVS^{-1}$.

Массовый член (5) лагранжиана должен оставаться инвариантным при преобразовании Лоренца (9). Это накладывает ограничения на матрицу M. Слагаемое M_{kl} общего вида в (8) представлено как произведение

$$M_{kl} = k_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}\gamma_+^{\mu_1}\gamma_+^{\mu_2}\ldots\gamma_+^{\mu_k}\gamma_-^{\nu_1}\gamma_-^{\nu_2}\ldots\gamma_-^{\nu_l}. \tag{10}$$

Слагаемые вида (10) в (8) линейно независимы, однако для соответствующих им слагаемых в скалярном произведении (5) это не так, поскольку имеются $2^{[n/2]}$ независимых компонента спинора Ψ, а в матрице M имеются $2^{[n/2]} \cdot 2^{[n/2]} = 2^{2[n/2]}$ независимых элемента. Тут и далее $[n/2]$ обозначает целую часть от $n/2$.

Зато значения формы (6) для $2^{[n/2]}$ ортонормированных спиноров Ψ_j однозначно задают $2^{2[n/2]}$ элемента M^+_{ij} матрицы M^+, следовательно, элементы матрицы M такие:

$$M^+_{ij} = f(\Psi_i, \Psi_j). \tag{11}$$

Рассмотрим, как преобразуется часть формы $(M\Phi, \Psi)$, соответствующая слагаемому (10), при преобразовании Лоренца (9) спиноров Φ и Ψ:

$$\begin{aligned}(M_{kl}\Phi', \Psi') = \big(M_{kl}(1+\gamma^{\alpha\beta}d\omega_{\alpha\beta})\Phi, (1+\gamma^{\mu\nu}d\omega_{\mu\nu})\Psi\big) = (M_{kl}\Phi, \Psi) + \\ + (M_{kl}\gamma^{\alpha\beta}d\omega_{\alpha\beta}\Phi, \Psi) + (M_{kl}\Phi, \gamma^{\mu\nu}d\omega_{\mu\nu}\Psi) = (M_{kl}\Phi, \Psi) + \\ + (M_{kl}\gamma^{\mu\nu}d\omega_{\mu\nu}\Phi + (\gamma^\nu)^+(\gamma^\mu)^+d\omega_{\mu\nu}M_{kl}\Phi, \Psi) = \\ = (M_{kl}\Phi, \Psi) + \big((M_{kl}\gamma^{\mu\nu} - (\gamma^\mu)^+(\gamma^\nu)^+M_{kl})\Phi, \Psi\big)\, d\omega_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{12}$$

В силу линейной независимости каждое из таких слагаемых должно быть инвариантно, т. е. необходимо выполнение условия

$$(M_{kl}\Phi', \Psi') = (M_{kl}\Phi, \Psi). \tag{13}$$

Из (12), (13) и произвольности параметров $d\omega_{\mu\nu}$ и спиноров Φ и Ψ следует, что

$$M_{kl}\gamma^{\mu\nu} - (\gamma^\mu)^+(\gamma^\nu)^+M_{kl} = 0 \tag{14}$$

для всех значений μ и ν. Поскольку $(\gamma^\mu_+)^+ = \gamma^\mu_+$ и $(\gamma^\mu_-)^+ = -\gamma^\mu_-$, из (7), (10) и (14) при ненулевом коэффициенте $k_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k\nu_1\nu_2\ldots\nu_l}$ следует

$$\gamma_+^{\mu_1}\gamma_+^{\mu_2}\ldots\gamma_+^{\mu_k}\gamma_-^{\nu_1}\gamma_-^{\nu_2}\ldots\gamma_-^{\nu_l}\gamma^\mu\gamma^\nu = (\gamma^\mu)^+(\gamma^\nu)^+\gamma_+^{\mu_1}\gamma_+^{\mu_2}\ldots\gamma_+^{\mu_k}\gamma_-^{\nu_1}\gamma_-^{\nu_2}\ldots\gamma_-^{\nu_l}. \tag{15}$$

Рассмотрим три возможных случая сигнатур матриц γ^μ и γ^ν, если $p \neq n$ и $q \neq n$.

1. Выберем в качестве плоскости поворота γ^μ_+, γ^ν_+.

При этом $(\gamma^\mu_+)^+ = \gamma^\mu_+$, $(\gamma^\nu_+)^+ = \gamma^\nu_+$ и уравнение (15) принимает вид

$$\gamma_+^{\mu_1}\gamma_+^{\mu_2}\ldots\gamma_+^{\mu_k}\gamma_-^{\nu_1}\gamma_-^{\nu_2}\ldots\gamma_-^{\nu_l}\gamma^\mu\gamma^\nu = \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_+^{\mu_1}\gamma_+^{\mu_2}\ldots\gamma_+^{\mu_k}\gamma_-^{\nu_1}\gamma_-^{\nu_2}\ldots\gamma_-^{\nu_l}. \tag{16}$$

Уравнение (16) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}(-1)^{s1+s2}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_+^{\mu_1}\gamma_+^{\mu_2}\ldots\gamma_+^{\mu_k}\gamma_-^{\nu_1}\gamma_-^{\nu_2}\ldots\gamma_-^{\nu_l}\gamma^\mu\gamma^\nu = \\ = \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_+^{\mu_1}\gamma_+^{\mu_2}\ldots\gamma_+^{\mu_k}\gamma_-^{\nu_1}\gamma_-^{\nu_2}\ldots\gamma_-^{\nu_l},\end{aligned} \tag{17}$$

где $s1 = 1$, если в произведении $\gamma_+^{\mu_1}\gamma_+^{\mu_2}\ldots\gamma_+^{\mu_k}$ присутствует γ^μ, и $s1 = 0$ в противном случае. Аналогично $s2 = 1$, если в произведении $\gamma_+^{\mu_1}\gamma_+^{\mu_2}\ldots\gamma_+^{\mu_k}$ присутствует γ^ν, и $s2 = 0$ в противном случае.

Условие (17) выполняется либо при $s1 = s2 = 0$, либо при $s1 = s2 = 1$. Поскольку μ и ν произвольны, это означает, что либо в произведении

$\gamma_+^{\mu_1}\gamma_+^{\mu_2}\ldots\gamma_+^{\mu_k}$ присутствуют все возможные γ_+^{μ}, т.е. либо $k=p$, либо $k=0$ и в матрице M_{kl} множители γ_+^{μ} вообще не присутствуют.

2. Выберем в качестве плоскости поворота γ_-^{μ}, γ_-^{ν}.

В этом случае $(\gamma_-^{\mu})^+ = -\gamma_-^{\mu}$, $(\gamma_-^{\nu})^+ = -\gamma_-^{\nu}$, поэтому уравнение (15) также превращается в уравнение (16). И аналогично получаем, что либо $l=q$, либо $l=0$ и в M_{kl} множители γ_-^{ν} вообще не присутствуют. Следовательно,

$$M = k_+\gamma_+^1\gamma_+^2\ldots\gamma_+^p + k_-\gamma_-^1\gamma_-^2\ldots\gamma_-^q = k_+\gamma_+ + k_-\gamma_- = M_+ + M_-. \tag{18}$$

3. Выберем в качестве плоскости поворота γ_+^{μ}, γ_-^{ν}.

В этом случае $(\gamma_+^{\mu})^+ = \gamma_+^{\mu}$, $(\gamma_-^{\nu})^+ = -\gamma_-^{\nu}$, поэтому уравнение (14) с учетом (18) превращается в уравнения

$$k_+\gamma_+\gamma_+^{\mu}\gamma_-^{\nu} = -k_+\gamma_+^{\mu}\gamma_-^{\nu}\gamma_+, \quad k_-\gamma_-\gamma_+^{\mu}\gamma_-^{\nu} = -k_-\gamma_+^{\mu}\gamma_-^{\nu}\gamma_-.$$

Они выполняются при любых p и q, поэтому не возникает дополнительных ограничений на элементы матрицы M.

2. ОГРАНИЧЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ВЕЩЕСТВЕННОСТЬЮ МАССОВОГО ЧЛЕНА ЛАГРАНЖИАНА И СВОЙСТВАМИ ОПЕРАТОРОВ РОЖДЕНИЯ И УНИЧТОЖЕНИЯ

Таким образом, требование инвариантности формы (6) при преобразованиях Лоренца (9) приводит к условию (18) для матрицы M оператора (1) обобщенного дираковского сопряжения. Это условие уже было нами получено в работе [4]. Однако вывод этой формулы основывался на специфике супералгебраического представления спиноров (представления вторичного квантования). А проделанный выше вывод годится как для матричного представления, так и для супералгебраического.

Продолжим более общий анализ, который подходит для обоих этих представлений спиноров. Независимые слагаемые лагранжиана должны быть вещественными, в частности, массовый член (4) лагранжиана тоже. Это означает, что

$$(m\overline{\Psi}\Psi)^+ = m\overline{\Psi}\Psi. \tag{19}$$

Предполагая массу вещественной ненулевой, сокращаем на нее обе части и получаем из (19) и (1)

$$\Psi^+ M\Psi = \Psi^+ M^+\Psi. \tag{20}$$

Из (20), вообще говоря, нельзя сделать вывод об эрмитовости матрицы M по тем же причинам, из-за которых ранее нам пришлось рассматривать инвариантность формы (6), а не массового члена (4) лагранжиана. Однако в квантовой теории поля необходимо, чтобы матрица M была диагонализируемой. Только если в случае диагональности M оператор Ψ является оператором уничтожения спинора, то оператор $\overline{\Psi}$ является оператором рождения спинора, и наоборот. Далее мы будем рассматривать матричное представление, в котором матрица M диагональная. В этом случае условие (20) гарантирует эрмитовость матрицы (оператора) M:

$$M^+ = M. \tag{21}$$

Из (21) и (18) следует

$$\begin{aligned}(k_+\gamma_+)^+ &= k_+^*(\gamma_+^p)^+ \dots (\gamma_+^2)^+(\gamma_+^1)^+ = k_+^*(-1)^{[p/2]}\gamma_+ = k_+\gamma_+,\\ (k_-\gamma_-)^+ &= k_-^*(\gamma_-^q)^+ \dots (\gamma_-^2)^+(\gamma_-^1)^+ = k_-^*(-1)^q(-1)^{[q/2]}\gamma_- = k_-\gamma_-.\end{aligned} \tag{22}$$

Из (22) получаем

$$k_+^* = (-1)^{-[p/2]}k_+,\ k_-^* = (-1)^{q-[q/2]}k_-. \tag{23}$$

Требование, чтобы дираковски сопряженный спинор $\overline{\Psi}$ имел такую же нормировку, как и спинор Ψ, приводит к уравнению

$$\overline{\Psi\Psi}^+ = \Psi^+\Psi,$$

откуда получаем

$$\Psi^+M^+M\Psi = \Psi^+\Psi.$$

В силу диагональности матрицы M это эквивалентно условию

$$M^+M = 1. \tag{24}$$

Следовательно, матрица M унитарна. С учетом (21) получаем из (24)

$$(M)^2 = 1. \tag{25}$$

Подставляя (18) в (25), получаем

$$(k_+\gamma_+ + k_-\gamma_-)^2 = (k_+\gamma_+)^2 + (k_-\gamma_-)^2 + k_+k_-\{\gamma_+,\gamma_-\} = 1. \tag{26}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}(\gamma_+)^2 &= \gamma_+^1\gamma_+^2 \cdots \gamma_+^p\gamma_+^1\gamma_+^2 \cdots \gamma_+^p = \gamma_+^1\gamma_+^2 \cdots \gamma_+^p(-1)^{[p/2]}\gamma_+^p \cdots \gamma_+^2\gamma_+^1 = \\ &= (-1)^{[p/2]},\\ (\gamma_-)^2 &= \gamma_-^1\gamma_-^2 \dots \gamma_-^q\gamma_-^1\gamma_-^2 \dots \gamma_-^q = \gamma_-^1\gamma_-^2 \dots \gamma_-^q(-1)^{[q/2]}\gamma_-^q \dots \gamma_-^2\gamma_-^1 = \\ &= (-1)^{[q/2]-q},\\ \{\gamma_+,\gamma_-\} &= \gamma_+\gamma_- + (-1)^{pq}\gamma_+\gamma_- = (1+(-1)^{pq})\gamma_+\gamma_-,\end{aligned}$$

уравнение (26) может быть переписано в виде

$$(k_+)^2(-1)^{[p/2]} + (k_-)^2(-1)^{[q/2]-q} + k_+k_-(1+(-1)^{pq})\gamma_+\gamma_- = 1. \tag{27}$$

Для пространств с четной размерностью в силу линейной независимости слагаемых, пропорциональных 1 и $\gamma_+\gamma_-$, уравнение (27) приводит к двум уравнениям:

$$(k_+)^2(-1)^{[p/2]} + (k_-)^2(-1)^{[q/2]-q} = 1, \tag{28}$$

$$k_+k_-(1+(-1)^{pq}) = 0. \tag{29}$$

При четных p и q получаем $k_+k_- = 0$. Следовательно, либо $k_+ = 0$, либо $k_- = 0$.

При нечетных p и q матрицы γ_+ и γ_- антикоммутируют, поэтому не могут быть одновременно диагонализированы. Однако матрица $M = k_+\gamma_+ + k_-\gamma_-$ должна быть диагональной. Следовательно, и в этом случае $k_+ = 0$ или $k_- = 0$.

В результате для любых p и q получаем из (28), (29) альтернативные возможности

$$\left[\begin{array}{l} (k_+)^2 = (-1)^{-[p/2]},\ k_- = 0; \\ k_+ = 0,\ \ (k_-)^2 = (-1)^{[q/2]-q}, \end{array}\right.$$

что означает

$$\left[\begin{array}{l} k_+ = \pm(-1)^{-[p/2]/2} = \pm i^{[p/2]},\ k_- = 0,\ \ M = M_+ = \pm i^{[p/2]}\gamma_+^1\gamma_+^2\ldots\gamma_+^p; \\ k_+ = 0,\ k_- = \pm(-1)^{([q/2]-q)/2} = \pm i^{q-[q/2]},\ \ M = M_- = \\ = \pm i^{q-[q/2]}\gamma_-^1\gamma_-^2\ldots\gamma_-^q. \end{array}\right. \tag{30}$$

Условия (30), полученные нами для пространств с четной размерностью, можно переписать в виде

$$\left[\begin{array}{l} p \bmod 4 = 0,1\ \ \Rightarrow k_+ = \pm 1,\ k_- = 0; \\ p \bmod 4 = 2,3\ \ \Rightarrow k_+ = \pm i,\ k_- = 0; \\ q \bmod 4 = 0,3\ \ \Rightarrow k_+ = 0,\ \ k_- = \pm 1; \\ q \bmod 4 = 1,2\ \ \Rightarrow k_+ = 0,\ \ k_- = \pm i. \end{array}\right. \tag{31}$$

Легко проверить, что для условий (31) выполняются соотношения (23), и мы не получаем противоречий.

Для пространств с нечетной размерностью

$$k_+ = \pm i^{[p/2]},\ \ k_- = \pm i^{q-[q/2]}.$$

Но в этом случае $\gamma = \gamma_+\gamma_-$ принадлежит центру алгебры Клиффорда, из-за чего γ_+ и γ_- линейно зависимы. В случае, если $q-p$ по модулю 8 равно 1 или 5, γ коммутирует со всеми элементами алгебры, $(\gamma)^2 = -1$ и можно принять $\gamma = \pm i$. Поэтому элемент центра алгебры в матричном представлении является комплексным числом. Если же $q-p$ по модулю 8 равно 3 или 7, то $(\gamma)^2 = 1$ и алгебра является приводимой. Она является прямой суммой алгебр Cl_+ и Cl_-, порождаемых ортогональными идемпотентами $(1+\gamma)/2$ и $(1-\gamma)/2$ [6]. Для них собственные числа γ равны 1 и -1 соответственно. Но элементы Cl_+ и Cl_- преобразуются независимо, а матрица M задана с точностью до знака. Поэтому формула (18) может быть переписана в виде

$$M = M_+ = \pm i^{[p/2]}\gamma_+^1\gamma_+^2\ldots\gamma_+^p = M_- = \pm i^{q-[q/2]}\gamma_-^1\gamma_-^2\ldots\gamma_-^q. \tag{32}$$

Числовые множители в (32) получены исходя из условия (25).

Таким образом, при любой сигнатуре $(p,\ q)$

$$M_+ = \pm i^{[p/2]}\gamma_+^1\gamma_+^2\ldots\gamma_+^p,\ \ \ M_- = \pm i^{q-[q/2]}\gamma_-^1\gamma_-^2\ldots\gamma_-^q,$$

и для пространств с четной размерностью можно выбирать в качестве матрицы обобщенного дираковского сопряжения либо M_+, либо M_-. Для пространств с нечетной размерностью выбор однозначен (с точностью до знака), поскольку $M_+ = M_-$.

Отметим, что предполагавшаяся в ряде работ антиэрмитовость матрицы M гарантированно нарушает условие (20). В частности, нельзя использовать $M = i\gamma^0$, где $\gamma^0 = \gamma^1_+$, как предлагалось в работах [7, 8].

3. РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПО БАЗИСУ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА И ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ИМПУЛЬСАМ

Комплексные алгебры Клиффорда могут быть изоморфно представлены комплексными матричными алгебрами [2, 5, 6]. При этом гамма-матрицы являются генераторами этих алгебр, поэтому наиболее общий оператор инфинитезимального преобразования спинора

$$\Psi' = \mathrm{e}^{1+dG}\,\Psi = (1 + dG)\Psi \tag{33}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} 1 + dG &= 1 + dG_0 + dG_1 + \ldots = \\ &= 1 + dk_0 + \gamma^{a_1} dk_{a_1} + \gamma^{a_1 a_2} dk_{a_1 a_2} + \ldots + \gamma^{a_1 \ldots a_n} dk_{a_1 \ldots a_n}, \end{aligned} \tag{34}$$

где $\gamma^{a_1 \ldots a_i} = \gamma^{a_1}\gamma^{a_2}\ldots\gamma^{a_i}$, а dk_0, dk_{a_1}, … , $dk_{a_1 \ldots a_n}$ — комплексные коэффициенты, антисимметричные по всем индексам. Индексы a_i пробегают все n возможных значений для базисных клиффордовых векторов.

Рассмотрим ограничения, которые накладывает на оператор (34) требование инвариантности формы (6):

$$(M(1 + dG)\,\Phi, (1 + dG)\Psi) = (M\Phi, \Psi).$$

Следовательно,

$$((1 + dG^+)M(1 + dG)\Phi, \Psi) = (M\Phi, \Psi).$$

Отсюда в связи с произвольностью Φ и Ψ следует требование

$$(1 + dG^+)M(1 + dG) = M,$$

из которого с учетом (25) получается

$$dG^+ = -M\,dG\,M, \tag{35}$$

откуда следует

$$M\,dG = -dG^+ M.$$

Подставляя в (35) значение из (34), получаем

$$dk_0^* + (\gamma^{a_1})^+ dk_{a_1}^* + (\gamma^{a_1 a_2})^+ dk_{a_1 a_2}^* + \ldots + (\gamma^{a_1 \ldots a_n})^+ dk_{a_1 a_2 \ldots a_n}^* = \\ = -MM\,dk_0 - M\gamma^{a_1}M\,dk_{a_1} - M\gamma^{a_1 a_2}M\,dk_{a_1 a_2} - \ldots - \\ - M\gamma^{a_1 \ldots a_n}M\,dk_{a_1 \ldots a_n}. \quad (36)$$

Так как в соответствии с (30) либо $M = M_+$, либо $M = M_-$, матрица M либо коммутирует, либо антикоммутирует с каждым из мономов в (36). При этом в соответствии с (25) $(M)^2 = 1$. Следовательно, можно приравнивать мономы и их суммы одинаковых порядков в левой и правой частях уравнения (35). Следовательно,

$$\begin{aligned} &dk_0^* = -dk_0, \\ &(\gamma^{a_1})^+ dk_{a_1}^* = -M\gamma^{a_1}M\,dk_{a_1}, \\ &(\gamma^{a_1 a_2})^+ dk_{a_1 a_2}^* = -M\gamma^{a_1 a_2}M\,dk_{a_1 a_2}, \\ &\quad\ldots \\ &(\gamma^{a_1 \ldots a_n})^+ dk_{a_1 a_2 \ldots a_n}^* = -M\gamma^{a_1 \ldots a_n}M\,dk_{a_1 \ldots a_n}. \end{aligned} \quad (37)$$

Физический смысл величин, входящих в разложение (34), разберем на примере физического пространства-времени с сигнатурой $(p, q) = (1, 3)$ и гамма-матрицами γ^{a_1} в представлении Дирака. В этом случае $\gamma^0 = \gamma_+^1$, $\gamma^1 = \gamma_-^1, \gamma^2 = \gamma_-^2, \gamma^3 = \gamma_-^3$, поэтому $M_+ = \gamma^0$, $M\gamma^{a_1}M = (\gamma^{a_1})^+$, а уравнения (37) принимают вид

$$dk_0^* = -dk_0,\ dk_\mu^* = -\,dk_\mu,\ dk_{\mu\nu}^* = dk_{\mu\nu},\ dk_{\mu\nu\lambda}^* = dk_{\mu\nu\lambda},\ dk_{\mu\nu\lambda\delta}^* = -dk_{\mu\nu\lambda\delta},$$

где $\mu, \nu, \lambda, \delta = 0, 1, 2, 3$. Эти уравнения можно переписать в виде

$$dk_0 = i\,q\,d\varphi,\ dk_\mu = i\ d\omega_\mu,\ dk_{\mu\nu} = d\omega_{\mu\nu},\ dk_{\mu\nu\lambda} = d\omega_{\mu\nu\lambda},\ dk_{\mu\nu\lambda\delta} = i\,d\omega_{\mu\nu\lambda\delta}, \quad (38)$$

где q, $d\varphi$, $d\omega_\mu$, $d\omega_{\mu\nu}$, $d\omega_{\mu\nu\lambda}$, $d\omega_{\mu\nu\lambda\delta}$ — вещественные параметры. Поскольку $\gamma^{0123} = -i\gamma^5$ и $\gamma^{\mu\nu\lambda} = \pm i\gamma^5\gamma^\delta$, можно ввести гамма-матрицу $\gamma^4 = i\gamma^5$, с использованием которой уравнения (38) примут вид

$$dk_0 = iq\,d\varphi,\ dk_a = i\,d\omega_a,\ dk_{ab} = d\omega_{ab},$$

где $a, b = 0, 1, 2, 3, 4$.

Тогда преобразование спинора будет иметь вид

$$\Psi' = (1 + iq\,d\varphi + i\,\gamma^a d\omega_a + \gamma^{ab} d\omega_{ab})\Psi, \quad (39)$$

где $a, b = 0, 1, 2, 3, 4$.

В матричной теории Дирака слагаемое $iq\,d\varphi$ произвольно. Однако в алгебраической теории поля оператор должен иметь один и тот же вид при действии на любой элемент алгебры. В лагранжиан помимо спинора Ψ входит дираковски сопряженный спинор $\overline{\Psi}$. Поэтому, если

$$\Psi' = (1 + iq\,d\varphi)\Psi,$$

для дираковски сопряженного спинора должно выполняться условие

$$\overline{\Psi'} = (M(1 + iq\,d\varphi)\Psi)^{+} = (1 + iq\,d\varphi)\overline{\Psi}.$$

Следовательно,

$$(1 - iq\,d\varphi)\overline{\Psi} = (1 + iq\,d\varphi)\overline{\Psi}.$$

В силу произвольности $\overline{\Psi}$ это означает

$$q\,d\varphi = 0.$$

В результате уравнение (39) можно переписать в виде

$$\Psi' = (1 + i\,\gamma^{a} d\omega_{a} + \gamma^{ab} d\omega_{ab})\Psi, \tag{40}$$

где $a, b = 0, 1, 2, 3, 4$.

Аналогичным образом в случае $M_{+} = \gamma^{0}$ для произвольной размерности n находим

$$\Psi' = \big(1 + i\,\gamma^{\mu} d\omega_{\mu} + \gamma^{\mu\nu} d\omega_{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu\lambda} d\omega_{\mu\nu\lambda} + i\gamma^{\mu\nu\lambda\delta} d\omega_{\mu\nu\lambda\delta} + \\ + i\gamma^{\mu\nu\lambda\delta\rho} d\omega_{\mu\nu\lambda\delta\rho} + \ldots\big)\,\Psi. \tag{41}$$

Уравнение (40) соответствует уравнению, полученному нами в работе [4]. Из уравнения более общего вида (41) понятно, почему гамма-матрица $\gamma^{4} = i\gamma^{5}$ входит в уравнение (40) наряду с гамма-матрицами γ^{μ}.

Будем, как принято в квантовой релятивистской теории поля, использовать представление вторичного квантования (представление Гейзенберга), в котором $\widehat{p}_{\mu} = i\partial_{\mu}$. Тогда в собственной системе отсчета покоящегося спинора в отсутствие внешних полей, т. е. при $d\omega_{\mu\nu} = d\omega_{\mu\nu\lambda} = \ldots = 0$,

$$m\,\gamma^{0}\,\Psi|_{p=0} = i\partial^{0}\,\Psi|_{p=0} = \widehat{p}^{0}\,\Psi|_{p=0}, \tag{42}$$

поэтому

$$m\,\gamma^{0} dx_{0}\,\Psi|_{p=0} = i\partial^{0} dx_{0}\,\Psi|_{p=0} = \widehat{p}^{0} dx_{0} \Psi|_{p=0},$$

где $\widehat{p}_{0}$ — оператор импульса вдоль оси γ^{0}. Лоренцев поворот переводит это уравнение в уравнение вида

$$m\,\gamma^{\mu} dx_{\mu}\,\Psi = i\partial^{\mu} dx_{\mu}\,\Psi| = \widehat{p}^{\mu} dx_{\mu} \Psi = \widehat{p}_{\mu} dx^{\mu}\,\Psi,$$

справедливое для произвольного импульса. В результате этого с учетом (40) уравнение (39) можно переписать так:

$$\Psi' = (1 - i\,\widehat{p}_{\mu} dx^{\mu} + \gamma^{\mu\nu} d\omega_{\mu\nu})\,\Psi, \tag{43}$$

где $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4$.

Естественно считать, что dx_{μ} — изменение координат спинора, $d\omega_{\mu\nu}$ — параметры лоренцевых поворотов и для четырехмерного пространства $dx_{4} = d\omega_{\mu 4} = 0$. При изменении координаты спинора $d\omega_{\mu\nu}$ и другие параметры должны меняться гладко, т. е. пропорционально изменению координат спинора. Поэтому $d\omega_{\mu\nu} = A_{\mu\nu\lambda}\, dx^\lambda$, а формулу (43) можно записать в виде

$$\Psi' = (1 - i\,(\widehat{p}_\mu dx^\mu + i\gamma^{\lambda\nu} A_{\lambda\nu\mu}\, dx^\mu + \ldots))\,\Psi. \tag{44}$$

В формуле (44) в разложении по импульсам ось времени соответствует эрмитовой матрице γ^0, так как переход в систему отсчета покоящегося спинора и уравнение (42) возможны только для эрмитовой матрицы. При нулевых внешних полях получаем

$$\Psi' = (1 - i\,\widehat{p}_\mu dx^\mu)\,\Psi. \tag{45}$$

Интегрируя (45), находим обычное разложение оператора поля по импульсам с положительно-частотной и отрицательно-частотной частями:

$$\Psi(x) = \int dp\,(\Psi_+(p)\ \mathrm{e}^{-ip_\mu x^\mu} + \Psi_-(p)\ \mathrm{e}^{ip_\mu x^\mu}).$$

При умножении обеих частей уравнения (42) на γ^0 с учетом того, что $\widehat{p}^0 = \widehat{p}_0 = i\partial_0$, имеем

$$m\ \Psi|_{p=0} = \gamma^0 i\partial_0\, \Psi|_{p=0}.$$

Отсюда с помощью лоренцевых поворотов получаем уравнение Дирака

$$\gamma^\mu i\partial_\mu\, \Psi = m\ \Psi. \tag{46}$$

При наличии внешних полей в соответствии с (44) частную производную ∂_μ в (46) необходимо заменить на ковариантную

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \gamma^{\lambda\nu} A_{\lambda\nu\mu}\ + \ldots, \tag{47}$$

тогда уравнение Дирака примет вид

$$\gamma^\mu i\nabla_\mu\, \Psi = m\ \Psi. \tag{48}$$

Слагаемое $\Gamma_\mu = \gamma^{\lambda\nu} A_{\lambda\nu\mu}$ в (47) является спиновой связностью [8, 9]. Уравнение (48) при учете в (47) только членов $\partial_\mu + \Gamma_\mu$ — это уравнение Дирака–Фока в римановом пространстве [9, 10]. Для четырехмерного пространства-времени в (47) больше нет слагаемых, однако в случае больших размерностей они имеются, поэтому уравнение Дирака–Фока необходимо модифицировать. Также отметим, что в уравнении Дирака–Фока слагаемое, связанное с электромагнитным полем, автоматически получается в (47) при наличии гамма-матриц γ^6 и γ^7[11].

Теперь рассмотрим случай $M_- = \gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\gamma^0\gamma^5$, $M\gamma^{a_1}M = -(\gamma^{a_1})^+$, тогда уравнения (37) принимают вид

$$\begin{aligned} dk_0^* &= -dk_0,\\ dk_{a_1}^* &= dk_{a_1},\\ dk_{a_1a_2}^* &= dk_{a_1a_2},\\ &\ldots, \end{aligned}$$

что можно переписать в виде

$$\begin{aligned}&dk_0 = iq\,d\varphi,\\&dk_\mu = -m\,dx_\mu,\\&dk_{\mu\nu} = -d\omega_{\mu\nu},\\&\quad\ldots,\end{aligned}$$

где q, $d\varphi$, dx_μ, $d\omega_{\mu\nu}$ — вещественные параметры.

Тогда преобразование спинора будет иметь вид

$$\Psi' = (1 + iq\,d\varphi - m\gamma^\mu dx_\mu - \gamma^{\mu\nu} d\omega_{\mu\nu} + \ldots)\Psi. \tag{49}$$

Слагаемое $iq\,d\varphi$ в (49) равно нулю по той же причине, что и в предыдущем случае, и уравнение (49) можно переписать в виде

$$\Psi' = (1 - im\,(-i\gamma^\mu)\,dx_\mu + (-i\gamma^\mu)(-i\gamma^\nu)\,d\omega_{\mu\nu} + \ldots)\Psi. \tag{50}$$

Таким образом, в разложении по импульсам (50), аналогичном (40), во всех местах должны использоваться гамма-матрицы $-i\gamma^\mu$ вместо γ^μ. При этом роль образующих временинодобных осей играют гамма-матрицы с отрицательной сигнатурой, а пространственноподобных — с положительной сигнатурой. В этом случае уравнение Дирака примет вид

$$\gamma^\mu \nabla_\mu \Psi = m\ \Psi. \tag{51}$$

4. ОБЩИЕ СЛУЧАИ РАЗЛОЖЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПО БАЗИСУ АЛГЕБРЫ КЛИФФОРДА И РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ИМПУЛЬСАМ

Рассмотрим разложение, аналогичное (41), когда $M_+ = k_+\gamma^1_+\gamma^2_+\ldots\gamma^p_+$ для произвольной размерности n и сигнатуры (p,q). В этом случае

$$M\gamma^a M = M^2(-1)^{p-1}(\gamma^a)^+ = (-1)^{p-1}(\gamma^a)^+.$$

Поэтому уравнения (37) с учетом $dk_0 = 0$ приобретают вид

$$\begin{aligned}(\gamma^{a_1})^+ dk^*_{a_1} &= -(-1)^{(p-1)}(\gamma^{a_1})^+\,dk_{a_1},\\(\gamma^{a_2})^+(\gamma^{a_1})^+ dk^*_{a_1a_2} &= -(-1)^{2(p-1)}(\gamma^{a_1})^+(\gamma^{a_2})^+\,dk_{a_1a_2},\\(\gamma^{a_3})^+(\gamma^{a_2})^+(\gamma^{a_1})^+ dk^*_{a_1a_2a_3} &= -(-1)^{3(p-1)}(\gamma^{a_1})^+(\gamma^{a_2})^+(\gamma^{a_2})^+\,dk_{a_1a_2a_3},\\&\ldots\\(\gamma^{a_n})^+\ldots(\gamma^{a_1})^+ dk^*_{a_1a_2\ldots a_n} &= -(-1)^{n(p-1)}(\gamma^{a_1})^+\ \ldots(\gamma^{a_n})^+\,dk_{a_1\ldots a_n}.\end{aligned}$$

Отсюда следует формула

$$dG = \sum_{j=1}^{n} i^{[j/2]+j(p-1)+1}\gamma^{a_1\ldots a_j}\,d\omega_{a_1\ldots a_j}. \tag{52}$$

Поэтому (33) можно записать в виде

$$\Psi' = (1 + i^p \gamma^\mu d\omega_\mu + (-1)^p \gamma^{\mu\nu} d\omega_{\mu\nu} + i^{3p-1}\,\gamma^{\mu\nu\lambda} d\omega_{\mu\nu\lambda} + \\ + i^{-1}\gamma^{\mu\nu\lambda\delta} d\omega_{\mu\nu\lambda\delta} + \ldots)\Psi. \quad (53)$$

В алгебраической теории поля (CAR-алгебре вторичного квантования) возникают дополнительные ограничения на формулы (52), (53). В ней гамма-матрицы γ^μ должны быть заменены гамма-операторами $\widehat{\gamma}^\mu$, для которых в соответствии с работой [12] выполняются условия

$$(\widehat{\gamma}^\mu_+ \Psi)^+ = -\widehat{\gamma}^\mu_+ \Psi^+, \quad (\widehat{\gamma}^\mu_- \Psi)^+ = \widehat{\gamma}^\mu_- \Psi^+. \quad (54)$$

При этом оператор поля $\overline{\Psi}$, задаваемый формулой (1), должен преобразовываться тем же оператором — (34), что и оператор поля Ψ:

$$\overline{\Psi'} = \overline{(1 + dG)\Psi} = \overline{\Psi}' = (1 + dG)\overline{\Psi}.$$

Отсюда с учетом (52) и (54) получаем требование

$$(-1)^{j-[j/2]+1} = 1. \quad (55)$$

Оно выполняется для слагаемых в (52), для которых $j - [j/2]$ нечетно, для остальных слагаемых $d\omega_{a_1 \ldots a_j} = 0$. Поэтому в формуле (53) в скобках после единицы идут два слагаемых, не равных нулю, затем два слагаемых, потом снова два слагаемых, равных нулю, и т. д. с чередованием. Следовательно, если задать

$$r(j) = (j - [j/2]) \bmod 2,$$

то для случая $M_+ = k_+ \gamma^1_+ \gamma^2_+ \ldots \gamma^p_+$ имеем следующее уточнение формул (52) и (53):

$$dG = \sum_{j=1}^{n} r(j)\, i^{jp \mod 2} \gamma^{a_1 \ldots a_j} d\omega_{a_1 \ldots a_j}.$$

Для нечетных p

$$\Psi' = (1 + i\gamma^\mu d\omega_\mu + \gamma^{\mu\nu} d\omega_{\mu\nu} + i\gamma^{a_1 \ldots a_5} d\omega_{a_1 \ldots a_5} + \gamma^{a_1 \ldots a_6} d\omega_{a_1 \ldots a_6} + \ldots)\Psi. \quad (56)$$

Для четных p

$$\Psi' = (1 + \gamma^\mu d\omega_\mu + \gamma^{\mu\nu} d\omega_{\mu\nu} + \gamma^{a_1 \ldots a_5} d\omega_{a_1 \ldots a_5} + \gamma^{a_1 \ldots a_6} d\omega_{a_1 \ldots a_6} + \ldots)\Psi. \quad (57)$$

В случае $M_- = k_- \gamma^1_- \gamma^2_- \ldots \gamma^q_-$ с учетом (25) получаем

$$M_- \gamma^a M_- = (-1)^q (\gamma^a)^+.$$

Формула (55) не меняется, поэтому имеем два различных случая в зависимости от четности q.

Для четных q

$$dG = \sum_{j=1}^{n} r(j)\, i^{j \bmod 2} \gamma^{a_1 \dots a_j} d\omega_{a_1 \dots a_j},$$

$$\Psi' = (1 + i\gamma^{\mu} d\omega_{\mu} + \gamma^{\mu\nu} d\omega_{\mu\nu} + i\gamma^{a_1 \dots a_5} d\omega_{a_1 \dots a_5} + \gamma^{a_1 \dots a_6} d\omega_{a_1 \dots a_6} + \dots)\Psi. \tag{58}$$

Для нечетных q

$$dG = \sum_{j=1}^{n} r(j)\, \gamma^{a_1 \dots a_j} d\omega_{a_1 \dots a_j},$$

$$\Psi' = (1 + \gamma^{\mu} d\omega_{\mu} + \gamma^{\mu\nu} d\omega_{\mu\nu} + \gamma^{a_1 \dots a_5} d\omega_{a_1 \dots a_5} + \gamma^{a_1 \dots a_6} d\omega_{a_1 \dots a_6} + \dots)\Psi. \tag{59}$$

Анализ формул (56)–(59), аналогичный проведенному в предыдущем разделе, показывает, что если p нечетно и используется матрица M_+, или если q четно и используется матрица M_-, то это соответствует осям времени (мы их будем обозначать t) с положительной сигнатурой и пространственным осям (мы их будем обозначать x) с отрицательной сигнатурой. При этом выполняется уравнение Дирака (48).

Если же p четно и используется матрица M_+, или если q нечетно и используется матрица M_-, то это соответствует осям времени (t) с отрицательной сигнатурой и пространственным осям (x) с положительной сигнатурой. При этом выполняется уравнение Дирака (51).

5. ПРИМЕРЫ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ РАЗЛИЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ И СИГНАТУР

В качестве примеров рассмотрим физически важные пространства размерностей 4 и 5 (табл. 1) и 6 и 7 (табл. 2). Размерности 4 и 5 возникают из-за наличия в матричном формализме Дирака пяти гамма-матриц: $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$, а также γ^5 либо $\gamma^4 = i\gamma^5$.

В соответствии с формулами (29) и (32) получаем выражения для различных сигнатур. Ограничимся случаями пяти гамма-матриц, соответствующих теории Дирака, и семи гамма-матриц, возникающих в теории супералгебраических спиноров [4, 11–15].

Выбираем базисные гамма-матрицы так, чтобы в дираковском представлении либо матрица M_+, либо матрица M_- была диагональной. При этом другая матрица не всегда оказывается диагональной, и мы указываем для нее эквивалентное выражение, для которого она в дираковском представлении оказывается диагональной. Например, для $n = 4$, $p = 1$, $q = 3$ и базиса $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ получаем $M_- = \pm\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \pm i\gamma^0\gamma^5$, и в дираковском представлении она недиагональная. Зато в базисе $i\gamma^3, \gamma^1, \gamma^2, i\gamma^0$ роль γ^0 играет $i\gamma^3$, роль γ^3 играет $i\gamma^0$, и мы получаем диагональную матрицу $M_- = \pm\gamma^3\gamma^5$. Этот выбор, конечно, неоднозначен. С таким же успехом можно было выбрать, например, базис $i\gamma^1, i\gamma^0, \gamma^3, i\gamma^5$, тогда мы получили бы $M_- = \pm i\gamma^1\gamma^2$.

Таблица 1. **Матрицы обобщенного дираковского сопряжения для пяти гамма-матриц**

n	p	q	Базис	M_+	$(p,q)_{M+}$	M_-	$(p,q)_{M-}$
4	0	4	$\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, i\gamma^5$	± 1	$-, t$	$\pm\gamma^0$	$-, x$
4	1	3	$\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$	$\pm\gamma^0$	t, x	$\pm i\gamma^0\gamma^5 \cong \pm\gamma^3\gamma^5$	x, t
4	2	2	$i\gamma^1, i\gamma^2, \gamma^3, i\gamma^5$	$\pm i\gamma^1\gamma^2 \cong \pm\gamma^3\gamma^5$	x, t	$\gamma^3\gamma^5$	t, x
4	3	1	$i\gamma^1, i\gamma^2, i\gamma^3, i\gamma^0$	$\pm i\gamma^0\gamma^5 \cong \pm\gamma^3\gamma^5$	t, x	$\pm\gamma^0$	x, t
4	4	0	$i\gamma^1, i\gamma^2, i\gamma^3, \gamma^5$	$\pm\gamma^0$	$x, -$	± 1	$t, -$
5	0	5	$i\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, i\gamma^5$	± 1	$-, t$	± 1	$-, t$
5	1	4	$\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, i\gamma^5$	$\pm\gamma^0$	t, x	$\pm\gamma^0$	t, x
5	2	3	$\gamma^0, \gamma^5, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$	$\pm i\gamma^0\gamma^5 \cong \pm\gamma^3\gamma^5$	x, t	$\pm i\gamma^0\gamma^5 \cong \pm\gamma^3\gamma^5$	x, t
5	3	2	$i\gamma^1, i\gamma^2, i\gamma^3, i\gamma^0, i\gamma^5$	$\pm i\gamma^0\gamma^5 \cong \pm\gamma^3\gamma^5$	t, x	$\pm i\gamma^0\gamma^5 \cong \pm\gamma^3\gamma^5$	t, x
5	4	1	$i\gamma^1, i\gamma^2, i\gamma^3, \gamma^5, i\gamma^0$	$\pm\gamma^0$	x, t	$\pm\gamma^0$	x, t
5	5	0	$\gamma^0, i\gamma^1, i\gamma^2, i\gamma^3, \gamma^5$	± 1	$t, -$	± 1	$t, -$

Таблица 2. **Матрицы обобщенного дираковского сопряжения для семи гамма-матриц**

n	p	q	Базис	M_+	$(p,q)_{M+}$	M_-	$(p,q)_{M-}$
6	0	6	$\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, i\gamma^5, \gamma^6, \gamma^7$	± 1	$-, t$	$\pm\gamma^0$	$-, x$
6	1	5	$\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^6, \gamma^7$	$\pm\gamma^0$	t, x	$\pm i\gamma^0\gamma^5 \cong \pm i\gamma^6\gamma^7$	x, t
6	2	4	$i\gamma^6, i\gamma^7, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, i\gamma^5$	$\pm i\gamma^6\gamma^7$	x, t	$\pm i\gamma^0\gamma^6\gamma^7$	t, x
6	3	3	$\gamma^0, i\gamma^6, i\gamma^7, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$	$\pm i\gamma^0\gamma^6\gamma^7$	t, x	$\pm\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \cong \pm i\gamma^0\gamma^6\gamma^7$	x, t
6	4	2	$i\gamma^1, i\gamma^2, i\gamma^3, \gamma^5, \gamma^6, \gamma^7$	$\pm i\gamma^0\gamma^6\gamma^7$	x, t	$\pm i\gamma^6\gamma^7$	t, x
6	5	1	$i\gamma^1, i\gamma^2, i\gamma^3, i\gamma^6, i\gamma^7, i\gamma^0$	$\pm i\gamma^0\gamma^5 \cong \pm i\gamma^6\gamma^7$	t, x	$\pm\gamma^0$	x, t
6	6	0	$i\gamma^1, i\gamma^2, i\gamma^3, i\gamma^6, i\gamma^7, \gamma^5$	$\pm\gamma^0$	$x, -$	± 1	$t, -$
7	0	7	$i\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, i\gamma^5, \gamma^6, \gamma^7$	± 1	$-, t$	± 1	$-, t$
7	1	6	$\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, i\gamma^5, \gamma^6, \gamma^7$	$\pm\gamma^0$	t, x	$\pm\gamma^0$	t, x
7	2	5	$\gamma^6, \gamma^7, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, i\gamma^0, i\gamma^5$	$\pm i\gamma^6\gamma^7$	x, t	$\pm i\gamma^6\gamma^7$	x, t
7	3	4	$\gamma^0, i\gamma^6, i\gamma^7, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, i\gamma^5$	$\pm i\gamma^0\gamma^6\gamma^7$	t, x	$\pm i\gamma^0\gamma^6\gamma^7$	t, x
7	4	3	$i\gamma^1, i\gamma^2, i\gamma^3, \gamma^5, i\gamma^0, \gamma^6, \gamma^7$	$\pm i\gamma^0\gamma^6\gamma^7$	x, t	$\pm i\gamma^0\gamma^6\gamma^7$	x, t
7	5	2	$i\gamma^1, i\gamma^2, i\gamma^3, \gamma^5, \gamma^0, \gamma^6, \gamma^7$	$\pm i\gamma^6\gamma^7$	t, x	$\pm i\gamma^6\gamma^7$	t, x
7	6	1	$i\gamma^1, i\gamma^2, i\gamma^3, \gamma^5, i\gamma^6, i\gamma^7, i\gamma^0$	$\pm\gamma^0$	x, t	$\pm\gamma^0$	x, t
7	7	0	$\gamma^0, i\gamma^1, i\gamma^2, i\gamma^3, \gamma^5, i\gamma^6, i\gamma^7$	± 1	$t, -$	± 1	$t, -$

Из табл. 1 видно, что как для $(p,q)=(1,3)$, так и для $(p,q)=(3,1)$ имеются два неэквивалентных случая: 1) когда есть одна ось времени и три пространственных оси, $M_+ = M_- = \pm i\gamma^0$, и обе сигнатуры эквивалентны; 2) когда есть три оси времени и одна пространственная ось, $M_+ = M_- = \pm i\gamma^0\gamma^5$, и обе сигнатуры также эквивалентны. Такая эквивалентность имеет общий характер для любой размерности и сигнатуры пространства-времени, поскольку при замене сигнатуры гамма-матриц путем умножения их на i матрица M_+ становится матрицей M_-, а матрица M_- становится матрицей M_+. При этом сигнатуры осей, соответствующих пространству, и осей, соответствующих времени, меняют знак.

Оператор $i\gamma^6\gamma^7 = Q$ имеет собственное число $+1$ при действии на спинор и -1 при действии на антиспинор. В случае четырех независимых грассмановых плотностей это оператор электрического заряда [11], а в случае восьми и более независимых грассмановых плотностей Q является оператором спинорного гиперзаряда [13].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, матрица обобщенного дираковского сопряжения должна быть эрмитовой, а ее квадрат должен быть равен единице. Этот результат согласуется со свойствами пространств Крейна [16]. Гильбертово пространство с инвариантной формой (6) задает пространство Крейна [17, 18]. При этом матрица обобщенного дираковского сопряжения является так называемой фундаментальной симметрией пространства Крейна [17].

Разложение инфинитезимальных матричных операторов по базису алгебры Клиффорда, образованного гамма-матрицами и их произведениями, порождает разложение операторов поля спиноров по импульсам. При этом в ковариантной производной появляются как спиновые связности, так и дополнительные слагаемые, не описанные в литературе.

При заданной сигнатуре гамма-матриц в четномерных пространствах имеются два варианта матрицы обобщенного дираковского сопряжения (M_+ и M_-), а в нечетномерных — один вариант такой матрицы ($M_+ = M_-$). Если p нечетно и используется матрица M_+, или если q четно и используется матрица M_-, то оси времени имеют положительную сигнатуру, а пространственные — отрицательную. Если p четно и используется матрица M_+, или если q нечетно и используется матрица M_-, то оси времени имеют отрицательную сигнатуру, а пространственные — положительную.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pauli W.* Contributions mathématiques à la théorie des matrices de Dirac // Ann. l'institut Henri Poincaré. 1936. V. 6, No. 2. P. 109–136.
2. *Shirokov D. S.* Clifford Algebras and Their Applications to Lie Groups and Spinors // Geom. Integrability & Quantization. 2018. V. 19. P. 11–53.

3. *Shirokov D. S.* Pauli Theorem in the Description of n-Dimensional Spinors in the Clifford Algebra Formalism // Theor. Math. Phys. 2013. V. 175, No. 1. P. 454–474.
4. *Monakhov V. V.* Generalization of Dirac Conjugation in the Superalgebraic Theory of Spinors // Theor. Math. Phys. 2019. V. 200. P. 1026–1042.
5. *Dabrowski L.* Group Actions on Spinors: Lecture Notes. Bibliopolis, 1988.
6. *Floerchinger S.* Real Clifford Algebras and Their Spinors for Relativistic Fermions // Universe. 2021. V. 7. P. 168.
7. *Berg M., DeWitt-Morette C., Gwo S., Kramer E.* The Pin Groups in Physics: C, P and T // Rev. Math. Phys. 2001. V. 13, No. 8. P. 953–1034.
8. *Lippoldt S.* Spin-Base Invariance of Fermions in Arbitrary Dimensions // Phys. Rev. D. 2015. V. 91, No. 10. P. 104006.
9. *Pollock M. D.* On the Dirac Equation in Curved Space–Time // Acta Phys. Polon. B. 2010. V. 41, No. 8. P. 1827–1846.
10. *Fock V.* Geometrisierung der Diracschen Theorie des Elektrons // Z. Phys. 1929. V. 57, No. 3. P. 261–277.
11. *Monakhov V.* Vacuum and Spacetime Signature in the Theory of Superalgebraic Spinors // Universe. 2019. V. 5. P. 162.
12. *Monakhov V. V.* Superalgebraic Structure of Lorentz Transformations // J. Phys.: Conf. Ser. 2020. V. 1051. P. 012023.
13. *Monakhov V.* Generation of Electroweak Interaction by Analogs of Dirac Gamma Matrices Constructed from Operators of the Creation and Annihilation of Spinors // Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. 2020. V. 84, No. 10. P. 1216–1220.
14. *Monakhov V.* The Dirac Sea, T and C Symmetry Breaking, and the Spinor Vacuum of the Universe // Universe. 2021. V. 7. P. 124.
15. *Monakhov V., Kozhedub A.* Algebra of Superalgebraic Spinors as Algebra of Second Quantization of Fermions // Geom. Integrability & Quantization. 2021. V. 22. P.165–187.
16. *Bizi N., Brouder C., Besnard F.* Space and Time Dimensions of Algebras with Application to Lorentzian Noncommutative Geometry and Quantum Electrodynamics // J. Math. Phys. 2018. V. 59, No. 6. P. 062303.
17. *Bognár J.* Indefinite Inner Product Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1974.
18. *Besnard F., Bizi N.* On the Definition of Spacetimes in Noncommutative Geometry: Part I // J. Geom. Phys. 2018. V. 123. P. 292–309.