

## ВЛИЯНИЕ ФУНКЦИИ ФЕРМИ НА СЕЧЕНИЕ ЗАХВАТА НЕЙТРИНО

А. Н. Фазлиахметов<sup>1,2,3,\*</sup>, Ю. С. Лютостанский<sup>1</sup>,  
Г. А. Коротеев<sup>1,2,3</sup>, А. П. Осипенко<sup>1</sup>, В. Н. Тихонов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва

<sup>2</sup> Московский физико-технический институт  
(государственный университет), Москва

<sup>3</sup> Институт ядерных исследований РАН, Москва

Проведено сравнение разных вариантов расчета функции Ферми, и рассматривается ее влияние на сечение захвата нейтрино на примере ядра <sup>127</sup>I. В частности, обсуждаются оценки влияния размера ядра и распределения заряда. Проведены расчеты сечений захвата  $\sigma(E_\nu)$  для солнечных нейтрино, и проанализирован вклад всех компонентов солнечного нейтринного спектра в скорость захвата нейтрино  $R$  для пяти различных вариантов функции Ферми. Показано, что в приведенных подходах расчета функции Ферми достигается расхождение в скоростях захвата нейтрино до  $R \sim 15\%$ .

In this paper, we present a comparison of different variants of the Fermi-function calculation and its influence on the neutrino capture cross section on the example of <sup>127</sup>I. In particular, we discuss the effects of the nuclear size and charge distribution. We calculate the neutrino capture cross sections  $\sigma(E_\nu)$  and analyze the contributions of all components of the solar neutrino spectrum to the neutrino capture rate  $R$  for five versions of the Fermi function. It is shown that different approaches to calculate the Fermi function give a difference in neutrino capture rates up to  $R \sim 15\%$ .

PACS: 26.65.+t; 21.90.+f

### ВВЕДЕНИЕ

Теория  $\beta$ -распада была изложена в основополагающей работе Ферми [1]. В случае разрешенных переходов распределение по энергии вылетевших  $\beta$ -частиц имеет вид

$$P(W) dW = \left( \frac{G_F^2}{2\pi} \right) C_0 F(Z, A, W) p W (W_0 - W)^2 dW, \quad (1)$$

где  $W$  — энергия электрона;  $p = \sqrt{W^2 - 1}$  — его импульс;  $W_0$  — максимальная энергия  $\beta$ -распада;  $G_F$  — константа слабого взаимодействия;

---

\* E-mail: fazliakhmetov@phystech.edu

$C_0$  — матричный элемент перехода. Кулоновское взаимодействие вылетающего электрона с ядром задается функцией Ферми  $F(Z, A, W)$ .

На вероятность и форму спектра  $\beta$ -распада оказывают влияние не только ядерные матричные элементы, характеризующие волновые функции нуклонов, но и волновые функции образующихся лептонов — электронов и нейтрино. Волновую функцию нейтрино с хорошей точностью можно принять как волновую функцию свободной частицы. Электрон же взаимодействует с полем атома. Функция Ферми характеризует искажение волновой функции полем дочернего ядра. Решать задачу о влиянии поля атома на волновую функцию электрона можно как с помощью уравнения Дирака с соответствующим потенциалом, так и с использованием различных приближений.

В большинстве современных работ по тематике взаимодействия нейтрино с веществом специально не обсуждается проблематика, связанная с функцией Ферми. Несмотря на активную проработку различных вариантов расчета функции Ферми в предыдущие десятилетия, до сих пор нет «стандартного», общепризнанного ее варианта. Это сильно усложняет сравнение сечений захвата нейтрино, рассчитанных разными авторами. В данной работе представлено сравнение разных вариантов расчета функции Ферми и его влияния на сечения захвата нейтрино на примере ядра  $^{127}\text{I}$ .

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ФЕРМИ И НЕКОТОРЫЕ ПОПРАВКИ К НЕЙ

Общее выражение для определения функции  $F(Z, A, W)$  впервые было дано в работе Ферми 1934 г. [1] по теории  $\beta$ -распада:

$$F_0(Z, A, W) = 4(2pR)^{2(\gamma-1)} \frac{|\Gamma(\gamma + iy)|^2}{(\Gamma(1 + 2\gamma))^2} e^{\pi y}, \quad (2)$$

$$\gamma = \sqrt{1 - (\alpha Z)^2}, \quad y = \pm \alpha ZW/p.$$

Формула (2) выведена в приближении точечного заряда ядра. Если вместо точечного ядра рассматривать ядро конечного размера, то необходимо ввести поправочный коэффициент  $L_0$ :

$$F(Z, A, W) = F_0 L_0.$$

Ядро в этом случае представляется равномерно заряженной сферой с конечным радиусом  $R$ . Явное выражение для  $L_0$  модельно-зависимо. В работе [2] поправка на конечный размер ядра получена через численное решение уравнения Дирака:

$$L_0 = 1 \mp \frac{13}{15} \alpha ZWR + \dots \quad (3)$$

Более тщательные расчеты, сделанные Вилкинсоном [3], дают следующее выражение для  $L_0$ :

$$L_0 = 1 + \frac{13}{60}(\alpha Z)^2 \mp \frac{\alpha ZWR(41 - 26\gamma)}{[15(2\gamma - 1)]} \mp \frac{\alpha ZR\gamma(17 - 2\gamma)}{[30W(2\gamma - 1)]} + \Omega. \quad (4)$$

В работах Джеллепова и Зыряновой [5], Суслова [6] также был рассмотрен вопрос о влиянии конечного размера ядра на значение функции Ферми. Кроме того, в работах Суслова [6] и Янеки [2] была описана еще и поправка, характеризующая влияние орбитальных электронов (экранировку). Подробный обзор поправок к функции Ферми дан в работе [4].

На рис. 1 приведены значения разных вариантов расчетов функции Ферми. Видно, что с ростом энергии расхождение между ними увеличивается до  $\sim 15\%$ .

Отдельной темой является вопрос описания радиуса ядра для расчета поправок. Формула для  $F_0$  и поправочный член  $L_0$  явно зависят от значения радиуса ядра  $R$ , которое выбрано при расчетах, а также от предположений о распределении заряда в ядре. В среднем диапазоне масс изотопов ( $A \approx 100$ ) при предположении равномерного распределения заряда радиус ядра принято определять как  $R = r_0 A^{1/3} = 1,20A^{1/3}$  фм [7]. Вид формулы для  $R$  зависит от распределения  $\rho(r)$  заряда в ядре. Так, отходя от равномерного распределения и полагая

$$\rho(r) = \rho_0[1 + \exp[(r - R)/a]]^{-1} \quad (5)$$

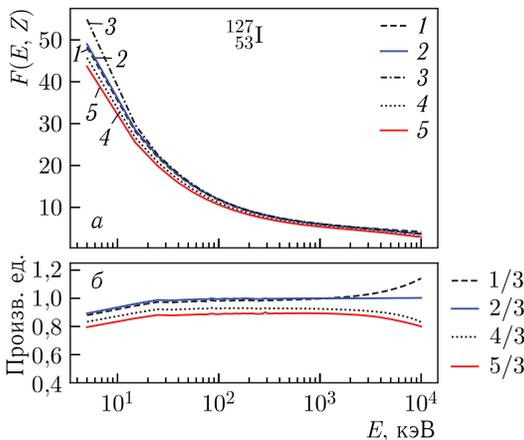


Рис. 1. а) Значения функций Ферми в зависимости от энергии: 1 — из [1]; 2 — функция Ферми с поправками  $L_0$  и фермиевским распределением заряда в ядре из [4]; 3 — из [2]; 4 — из [5]; 5 — из [6]. б) Отношения значений функций Ферми взяты из [2]

при  $\rho_0 = 0,17$  нуклон  $\cdot$  фм $^{-3}$  и  $a = 0,54$  фм, можно получить [7]

$$R \approx (1,12A^{1/3} - 0,86A^{-1/3} + \dots) \text{ фм.} \quad (6)$$

В неявном виде зарядовые распределения входят в расчеты  $R$ , что видно из анализа данных по энергиям изобарических аналоговых состояний (см., например, [8–10]). Таким образом, получено для зарядового радиуса (для ядер  $A \geq 40$ ) значение  $R_C = 1,25A^{1/3}$  фм.

В микроскопическом подходе отметим расчеты зарядовых радиусов в рамках теории конечных ферми-систем (ТКФС) с функционалом плотности Фаянса [11]. Расчеты проводились в основном для нейтронно-дефицитных сферических ядер, и была выявлена лучшая точность при микроскопических подходах. Для подобных ядер отклонения от зависимости  $R \sim A^{1/3}$  относительно велики и приближаются к ней вблизи линии стабильности.

Недавно исследовалась изотопическая зависимость зарядовых радиусов в длинной цепочке изотопов меди [12]. Использовался тот же подход, что и в работе [11]: самосогласованная ТКФС с функционалом плотности Фаянса. Наблюдалось систематическое отклонение от зависимости  $R \sim A^{1/3}$  в сторону уменьшения с ростом нейтронного избытка. Проведенный нами фитинг экспериментальных данных, используемых в работе [12], показал, что для нейтронно-дефицитных изотопов меди отклонения от зависимости  $R = 0,96A^{1/3}$  фм составляют  $\delta R \approx -2,2\%$  ( $^{58}\text{Cu}$ ),

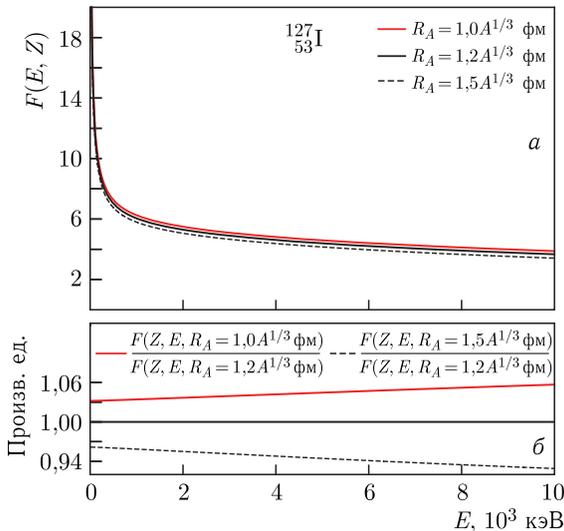


Рис. 2. а) Функция Ферми с поправками  $L_0$  и фермиевским распределением заряда в ядре из [4], рассчитанная для трех значений параметра  $r_0$  по формуле  $R = r_0 A^{1/3}$ :  $r_0 = 1,0, 1,2$  и  $1,5$ . б) Отношения значений функции Ферми

а для нейтронно-избыточных ядер —  $\delta R \approx +3,1\%$  ( $^{78}\text{Cu}$ ). Отметим, что в области стабильных ядер отклонения незначительные ( $\delta R \approx 1,0\%$ ). Наблюдаются также и четно-нечетные осцилляции, которые зависят от оболочечной структуры.

Расчеты с использованием функционала плотности проводились недавно для цепочек изотопов калия ( $^{36-52}\text{K}$ ,  $Z = 19$ ) [13] и более тяжелых ядер (Ca, Sn, Pb) [14]. Так, для изотопов  $^{36-52}\text{K}$  [13] фитинг дает отклонения от зависимости  $R = 0,98A^{1/3}$  фм,  $\delta R \leq \pm 4,0\%$ , а для изотопов  $^{108-134}\text{Sn}$  [15] —  $R = 0,94A^{1/3}$  фм,  $\delta R \leq \pm 2,0\%$ .

Насколько существенна зависимость функции Ферми от радиуса, видно из рис. 2. Так, при увеличении параметра  $r_0$  на 25% (от 1,2 до 1,5) значение функции Ферми уменьшается линейно на 4% при энергии  $E = 10$  МэВ.

### ВЛИЯНИЕ ФУНКЦИИ ФЕРМИ НА СЕЧЕНИЕ ЗАХВАТА НЕЙТРИНО

Формула сечения захвата нейтрино на ядре в зависимости от энергии налетающего нейтрино  $E_\nu$  имеет вид [16]

$$\sigma(E_\nu) = \frac{(G_F g_A)^2}{\pi c^3 \hbar^4} \int_0^{W-Q} W p_e F(Z, A, W) S(E) dE, \quad (7)$$

$$W = E_\nu - Q - x - m_e c^2, \quad c p_e = \sqrt{W^2 - (m_e c^2)^2},$$

где  $F(Z, A, W)$  — функция Ферми;  $S(E)$  — силовая зарядово-обменная функция ядра;  $G_F/(\hbar c)^3 = 1,1663787(6) \cdot 10^{-5}$  ГэВ $^{-2}$  — константа слабого взаимодействия и  $g_A = -1,2723(23)$  — аксиально-векторная константа [17].

На рис. 3 показаны в сравнении сечения захвата нейтрино ядром  $^{127}\text{I}$ , рассчитанные с использованием разных функций Ферми. В качестве силовой функции  $S(E)$  взяты экспериментальные данные из работы [18] (подробнее про функцию  $S(E)$  см. в работе [19]). Начиная с энергии 10 МэВ, разница между сечениями достигает 10% и далее увеличивается с ростом энергии.

В таблице даны значения скорости захвата солнечных нейтрино  $R$  в реакции  $^{127}\text{I}(\nu_e, e^-)^{127}\text{Xe}$  в единицах SNU (количество событий в секунду на  $10^{36}$  ядер мишени). Скорость захвата  $R$  вычислялась по формуле

$$R = \int_0^{E_{\max}} \rho_{\text{Solar}}(E_\nu) \sigma_{\text{tot}}(E_\nu) dE_\nu, \quad (8)$$

где  $E_{\max} = 16,36$  МэВ для борных нейтрино (реакция  $^8\text{B} \rightarrow ^8\text{Be}^* + e^+ + \nu_e$ ) и  $E_{\max} = 18,79$  МэВ для *hep*-нейтрино (реакция  $^3\text{He} + p \rightarrow ^4\text{He} +$

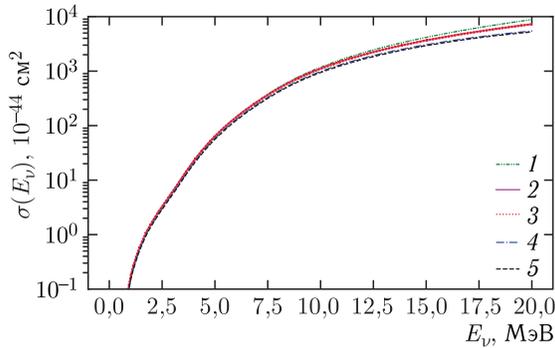


Рис. 3. Сечение захвата нейтрино ядром  $^{127}\text{I}$ , рассчитанное с использованием разных функций Ферми. Нумерация функций Ферми соответствует обозначениям на рис. 1

**Значения скорости захвата  $R$  солнечных нейтрино (в SNU) ядром  $^{127}\text{I}$ , рассчитанные с использованием разных функций Ферми. Нумерация функций Ферми соответствует обозначениям на рис. 1**

Функция Ферми	$^8\text{B}$	$^7\text{Be}$ -нейтрино	$^{13}\text{N}$	$^{15}\text{O}$	$^{17}\text{F}$	$^8\text{B}$ -нейтрино	$^7\text{Be}$	Итого
1	27,286	0,120	0,161	0,543	0,013	0,818	2,850	31,795
2	25,735	0,108	0,163	0,549	0,013	0,826	2,890	30,287
3	25,706	0,108	0,164	0,551	0,013	0,828	2,923	30,29
4	22,853	0,093	0,152	0,510	0,012	0,767	2,695	27,085
5	21,881	0,089	0,145	0,490	0,012	0,738	2,562	25,920

+  $e^- + \nu_e$ ). В расчетах использовалась солнечная модель BS05(OP) [20]. Разница скоростей захвата между расчетами, выполненными с использованием функции Ферми из таблиц Янеки [2] (№3 в таблице — наиболее популярная функция Ферми для расчетов фона от солнечных нейтрино) и для примера с использованием функции Ферми из таблиц Суслова [6] (№5 в таблице), достигает 15%.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано влияние функции Ферми на сечение захвата нейтрино ядром  $^{127}\text{I}$ . Проведено сравнение вариантов расчета функции Ферми разными авторами [1, 2, 4–6] с учетом различных поправок к ней.

Особое внимание уделено влиянию значения радиуса ядра  $R$ , которое выбрано при расчетах, а также предположений о распределении заряда в ядре. Изменение параметра  $r_0$  в формуле расчета радиуса на 25% (от 1,2 до 1,5) линейно уменьшает значение функции Ферми на 4% при энергии  $E = 10$  МэВ. Дан краткий обзор недавно экспериментально

полученных результатов изотопной зависимости зарядовых радиусов для К, Си, Sn с теоретическими расчетами на основе самосогласованной ТКФС с функционалом плотности Фаянса [11, 12].

Проведены расчеты сечений захвата  $\sigma(E_\nu)$  для солнечных нейтрино, а также проанализирован вклад всех компонентов солнечного нейтринного спектра в скорость захвата нейтрино  $R$ . Показано, что в разных вариантах расчета функции Ферми достигается разница в скоростях захвата нейтрино до  $R \sim 15\%$ . Наиболее критично точное определение функции Ферми для изучения спектра борных нейтрино. Также крайне важным является вопрос точного поведения функции Ферми применительно к области низких энергий налетающего нейтрино, что соответствует области с доминированием дискретных возбуждений атомного ядра и  $pp$ -солнечным нейтрино.

Авторы приносят благодарность И. Н. Борзову, М. Д. Скорохватову, А. К. Выборову, Л. В. Инжечуку и Н. В. Клочковой за стимулирующие дискуссии и помощь в работе.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке НИЦ «Курчатовский институт»: внутренний грант (приказ № 2767 от 28.10.2021) (разд. 1 и 2) и грант Отделения нейтринных процессов (разд. 3).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fermi E.* An Attempt of a Theory of Beta Radiation. 1 // *Z. Phys.* 1934. V. 88. P. 161–177.
2. *Behrens H., Jänecke J.* Numerical Tables for Beta Decay and Electron Capture (Numerische Tabellen für Beta-Zerfall und Elektronen-Einfang) / Ed. by H. Schopper. Springer, 1969. V. 4 of Landolt–Boernstein — Group I Elementary Particles, Nuclei and Atoms; <https://doi.org/10.1007/b19939>.
3. *Wilkinson D.* Evaluation of Beta Decay. II. Finite Mass and Size Effects // *Nucl. Instr. Meth. A.* 1990. V. 290, No. 2. P. 509–515; <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016890029090570V>.
4. *Hayen L., Severijns N., Bodek K., Rozpedzik D., Mougeot X.* High Precision Analytical Description of the Allowed  $\beta$  Spectrum Shape // *Rev. Mod. Phys.* 2018. V. 90. P. 015008; <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.90.015008>.
5. *Джелепов Б. С., Зырянова Л. Н.* Влияние электрического поля атома на бета-распад. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. 312 с.
6. *Суслов Ю. П.* // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1968. Т. 32. С. 213–219.
7. *Bohr A., Mottelson B. R.* Nuclear Structure. V. 1. W. A. Benjamin Inc., 1969.
8. *Lutostansky Yu. S., Tikhonov V. N.* Phenomenological Description of the Coulomb Energies of Medium-Heavy and Superheavy Nuclei // *Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys.* 2015. V. 79, No. 4. P. 425–430.
9. *Anderson J. D., Wong C., McClure J. W.* Coulomb Displacement Energies Derived from the  $p, n$  Isobaric Reaction // *Phys. Rev.* 1965. V. 138. P. B615–B618; <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.138.B615>.

10. *Batty C., Gilmore R., Stafford G.* Isobaric States Excited in  $(p, n)$  Reactions at 30 and 50 MeV // Nucl. Phys. 1966. V.75, No.3. P.599–608; <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0029558266909813>.
11. *Saperstein E.E., Tolokonnikov S.V.* Self-Consistent Theory of Finite Fermi Systems and Skyrme–Hartree–Fock Method // Phys. At. Nucl. 2016. V.79, No.6. P.1030–1066; <https://doi.org/10.1134/S1063778816060211>.
12. *Borzov I.N., Tolokonnikov S.V.* Self-Consistent Calculation of the Charge Radii in a Long  $^{58-82}\text{Cu}$  Isotopic Chain // Phys. At. Nucl. 2020. V.83, No.6. P.828–840; <https://doi.org/10.1134/S1063778820060101>.
13. *Koszorús Á., Yang X.F., Jiang W.G. et al.* Charge Radii of Exotic Potassium Isotopes Challenge Nuclear Theory and the Magic Character of  $N = 32$  // Nature Phys. 2021. V.17, No.4. P.439–443; <https://doi.org/10.1038/s41567-020-01136-5>.
14. *Reinhard P.G., Nazarewicz W., Garcia Ruiz R.F.* Beyond the Charge Radius: The Information Content of the Fourth Radial Moment // Phys. Rev. C. 2020. V.101. P.021301; <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.101.021301>.
15. *Gorges C., Rodriguez L.V., Balabanski D.L. et al.* Laser Spectroscopy of Neutron-Rich Tin Isotopes: A Discontinuity in Charge Radii across the  $N = 82$  Shell Closure // Phys. Rev. Lett. 2019. V.122. P.192502; <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.122.192502>.
16. *Lutostansky Yu.S., Shul'gina N.B.* Strength Function of  $^{127}\text{Xe}$  and Iodine–Xenon Neutrino Detector // Phys. Rev. Lett. 1991. V.67. P.430–432; <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.67.430>.
17. *Zyla P.A., Barnett R.M., Beringer J. et al.* Review of Particle Physics // Prog. Theor. Exp. Phys. 2020. V.2020, No.8. 083C01; <https://academic.oup.com/ptep/article-pdf/2020/8/083C01/34673722/ptaa104.pdf>.
18. *Palarczyk M., Rapaport J., Hautala C. et al.* Measurement of Gamow–Teller Strength for  $^{127}\text{I}$  as a Solar Neutrino Detector // Phys. Rev. C. 1999. V.59. P.500–509; <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.59.500>.
19. *Lutostansky Yu.S., Koroteev G.A., Klochkova N.V., Osipenko A.P., Tikhonov V.N., Fazliakhmetov A.N.* New Capabilities of an Iodine Detector for Solar Neutrinos // JETP Lett. 2020. V.111, No.11. P.603–607.
20. *Bahcall J.N., Serenelli A.M., Basu S.* New Solar Opacities, Abundances, Helioseismology, and Neutrino Fluxes // Astrophys. J. 2005. V.621, No.1. P.L85–L88; <https://doi.org/10.1086/428929>.