

О ЛЕПТОНАХ В ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ПЛЕНКИ

*А. А. Черницкий **

Санкт-Петербургский государственный химико-фармацевтический университет
Минздрава России, Санкт-Петербург, Россия
Лаборатория теоретической физики им. А. А. Фридмана, Санкт-Петербург,
Россия

Рассматривается задача нахождения тороидальных солитонных решений уравнения пространственно-временной пленки, сопоставляемых лептонам. Введена рациональная тороидальная система координат с вращением. Получены критерии сопоставления солитонных решений реальным лептонам. Предложен итерационный метод нахождения решения с начальным приближением в виде вращающегося статического решения линеаризованного уравнения. Получены зависимости безразмерных энергии и спина от значений безразмерного параметра решения и амплитуды осциллирующей части.

The problem for finding toroidal soliton solutions of space-time film equation which can represent leptons is considered. The rational coordinate system with rotation is introduced. The criteria for the representation of real leptons with soliton solutions is obtained. The iterative method for finding a solution is proposed. The initial approximation in this method is a rotating static solution of the linearized equation. The dependence of the dimensionless energy and spin on the values of the dimensionless solution parameter and of the amplitude of the oscillating part were obtained.

PACS: 12.10.-g

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматриваются тороидальные частицеподобные решения, или частицы-солитоны, уравнения пространственно-временной пленки, которые могут быть сопоставлены элементарным частицам, в частности лептонам.

Модель пространственно-временной пленки была рассмотрена в работе [1], где были получены точные солитонные решения, которые могут быть сопоставлены фотонам. В рамках этой модели удается объединить электромагнитное и гравитационное взаимодействия [2, 3]. Таким образом, теория пространственно-временной пленки может рассматриваться как теория единого поля, или единая теория поля.

* E-mail: AACHernitskii@mail.ru

Тороидальные солитоны рассматривались ранее автором в рамках нелинейной электродинамики [4]. Некоторые результаты исследования тороидальных солитонов пространственно-временной пленки были опубликованы [5].

1. ПОЛЕВАЯ МОДЕЛЬ И УРАВНЕНИЯ

1.1. Пространственно-временная пленка. Модельное действие имеет вид [1]

$$\mathcal{A} = \int_{\bar{V}} \mathcal{L} d\bar{V}, \quad \mathcal{L} \doteq \sqrt{\left| 1 + \chi^2 m^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \right|}, \quad (1)$$

где $d\bar{V} \doteq \sqrt{|\mathbf{m}|} (dx)^4$ — четырехмерный элемент объема; $\mathbf{m} \doteq \det(\mathbf{m}_{\mu\nu})$; Φ — скалярная полевая функция; $\mathbf{m}_{\mu\nu}$, $\mathbf{m}^{\mu\nu}$ — компоненты метрического тензора произвольной системы координат плоского пространства-времени. Здесь, как и в работе [1], мы рассматриваем две сигнатуры метрики: $\{+, -, -, -\}$ и $\{-, +, +, +\}$, т. е. с $\mathbf{m}^{00} = 1$ и -1 .

Условие стационарности действия (1) дает следующее уравнение:

$$\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{m}|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\sqrt{|\mathbf{m}|} m^{\mu\nu}}{\mathcal{L}} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} = 0. \quad (2)$$

1.2. Тороидальные координаты с вращением. Введем в рассмотрение систему координат, которая может быть названа рациональной тороидальной. Эта система получается из обычной тороидальной $\{x^0, \kappa, \nu, \varphi\}$ следующей заменой переменной κ ($0 \leq \kappa \leq \infty$):

$$\bar{\kappa} = e^\kappa - 1. \quad (3)$$

Новая координатная система удобна тем, что гиперболические функции переменной κ выражаются через рациональные функции переменной $\bar{\kappa}$:

$$\operatorname{ch} \kappa = \frac{2 + \bar{\kappa}(\bar{\kappa} + 2)}{2(\bar{\kappa} + 1)}, \quad \operatorname{sh} \kappa = \frac{\bar{\kappa}(\bar{\kappa} + 2)}{2(\bar{\kappa} + 1)}. \quad (4)$$

Для этой системы ненулевые диагональные компоненты метрического тензора имеют следующий вид:

$$m_{00} = \pm 1, \quad (5a)$$

$$m_{\bar{\kappa}\bar{\kappa}} = \mp \frac{\rho_0^2}{4\bar{\kappa}^2}, \quad m_{\nu\nu} = \mp \frac{(\bar{\kappa} + 1)^2 \rho_0^2}{4\bar{\kappa}^2}, \quad m_{\varphi\varphi} = \mp \frac{\bar{\kappa}^2 (\bar{\kappa} + 2)^2 \rho_0^2}{16\bar{\kappa}^2}, \quad (5b)$$

$$\bar{\mathcal{K}} \doteq \frac{1}{4} (2 + \bar{\kappa}(\bar{\kappa} + 2) - 2(\bar{\kappa} + 1) \cos \nu) = (\bar{\kappa} + 1) \sin^2\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{\bar{\kappa}^2}{4}. \quad (5b)$$

Видно, что введенная здесь функция $\bar{\mathcal{K}} = \bar{\mathcal{K}}(\bar{\kappa}, v)$ неотрицательна ($\bar{\mathcal{K}} \geq 0$) и обращается в нуль только на пространственной бесконечности, т. е. при $\bar{\kappa} = 0$ и $v = 0$.

Трехмерный элемент объема для рациональной тороидальной системы координат имеет вид

$$dV = \frac{\rho_o^3 \bar{\kappa} (\bar{\kappa} + 1) (\bar{\kappa} + 2)}{16 \bar{\mathcal{K}}^3} d\bar{\kappa} dv d\varphi. \quad (6)$$

Введем также тороидальную рациональную систему координат с вращением $\{\bar{\theta}, \bar{\bar{\theta}}, \bar{\kappa}, v\}$, которая получается из рациональной тороидальной посредством следующей замены переменных:

$$\bar{\theta} = \varphi - \tilde{\omega} x^0, \quad \bar{\bar{\theta}} = \varphi + \tilde{\omega} x^0. \quad (7)$$

Координаты $\bar{\theta}$ и $\bar{\bar{\theta}}$ могут быть названы правой и левой фазовыми соответственно, а параметр $\tilde{\omega}$ имеет смысл угловой скорости вращения. Метрический тензор для координатной системы $\{\bar{\theta}, \bar{\bar{\theta}}, \bar{\kappa}, v\}$ не является диагональным. Четырехмерный элемент объема для этой системы координат имеет вид

$$d\bar{V} = \frac{\rho_o^3 \bar{\kappa} (\bar{\kappa} + 1) (\bar{\kappa} + 2)}{32 \tilde{\omega} \bar{\mathcal{K}}^3} d\bar{\kappa} dv d\bar{\theta} d\bar{\bar{\theta}}. \quad (8)$$

В настоящей работе примем следующее соотношение между угловой скоростью и радиусом сингулярного кольца:

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{\rho_o}. \quad (9)$$

Очевидно, что функция, зависящая только от трех переменных последней системы координат (либо $\{\bar{\theta}, \bar{\kappa}, v\}$, либо $\{\bar{\bar{\theta}}, \bar{\kappa}, v\}$), представляет собой соответственно право- или левовращающуюся относительно оси x^3 полевою конфигурацию. Вследствие условия (9) фазовые скорости соответствующих круговых волн равны скорости света на сингулярном кольце.

1.3. Энергия и момент импульса. В тороидальной системе координат с вращением плотности энергии \mathcal{E} и z -компоненты момента импульса \mathcal{J}_z имеют вид

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\rho_o^2 \mathcal{L}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\theta}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\bar{\theta}}} \right)^2 \pm \frac{1}{\chi^2} (1 - \mathcal{L}) \right), \quad (10a)$$

$$\mathcal{J}_z = \frac{1}{4\pi \rho_o \mathcal{L}} \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\theta}} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\bar{\theta}}} \right)^2 \right). \quad (10b)$$

Скалярная полевая функция Φ имеет размерность электрического потенциала. Это следует из анализа дальнего взаимодействия простейших

сфероидальных солитонов, которое имеет характер электромагнитного в первом порядке по полю удаленных солитонов [2]. Здесь будет удобно рассмотреть безразмерную неизвестную функцию Φ , связанную с исходной функцией следующей формулой:

$$\Phi = \frac{\bar{e}}{\rho_0} \bar{\Phi}, \tag{11}$$

где \bar{e} — элементарный электрический заряд.

Введем также безразмерный параметр решения по формуле

$$\varepsilon \doteq \pm \frac{\bar{e}^2 \chi^2}{\rho_0^4}, \tag{12}$$

где верхний и нижний знаки соответствуют двум сигнатурам метрики.

В настоящей работе мы, в частности, рассматриваем вращающиеся решения, т. е. полагаем, что неизвестная функция зависит от трех координат, в составе которых только одна фазовая: $\bar{\theta}$ или $\bar{\bar{\theta}}$. Без ограничения общности можно считать, что неизвестная функция зависит от координат $\{\bar{\theta}, \bar{\kappa}, \nu\}$. В этом случае из выражений (10) с учетом (9) получаем примечательное соотношение между плотностями энергии и момента импульса:

$$\mathcal{E} = \tilde{\omega} \left(\mathcal{J}_z + \frac{\bar{e}^2}{4\pi\rho_0^3\varepsilon} (1 - \mathcal{L}) \right). \tag{13}$$

В частном случае отсутствия вращения получаем статическое решение, для которого $\mathcal{J}_z = 0$, а в выражении для плотности энергии (13) остается только второе слагаемое в скобках.

Энергия и момент импульса солитона-частицы равны

$$\mathbb{E} \doteq \int_V \mathcal{E} dV, \quad \mathbb{J} \doteq \int_V \mathcal{J}_z dV, \tag{14}$$

где взят элемент трехмерного объема dV (6), V — всё трехмерное пространство. Для случая вращающегося решения дифференциал азимутального угла $d\varphi$ заменяется на дифференциал фазовой координаты $d\bar{\theta}$ в соответствии с (7).

1.4. Уравнения в тороидальных координатах. Уравнение модели в тороидальных рациональных координатах получаем непосредственно из общего уравнения (2) с подстановкой метрического тензора (5). При этом учитываем, что в него входят компоненты с верхними индексами.

Далее подставляем в полученное уравнение неизвестную функцию Φ вида

$$\Phi = \frac{e}{\rho_0} \sqrt{\bar{\kappa}} \bar{\Phi}, \tag{15}$$

где безразмерная функция $\bar{\Phi}$ зависит от двух фазовых переменных $\{\bar{\theta}, \bar{\bar{\theta}}\}$ (7) и двух пространственных $\{\bar{\kappa}, \nu\}$: $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}(\bar{\theta}, \bar{\bar{\theta}}, \bar{\kappa}, \nu)$.

Выбор вида (15) обусловлен характером поведения искомого решения на пространственной бесконечности. Преобразуя рациональные тороидальные координаты в сферические $\{r, \vartheta, \varphi\}$, имеем

$$\frac{e}{\rho_0} \sqrt{\bar{\kappa}} = \frac{e}{r} + \frac{e \rho_0 \sin \vartheta}{r^2} + \frac{e \rho_0^2 (1 - 3 \cos(2\vartheta))}{4 r^3} + \mathcal{O}(r^{-4})_{r \rightarrow \infty}. \quad (16)$$

После подстановки (15) с учетом определения безразмерного параметра решения (12) и умножения на общий знаменатель всех слагаемых получаем уравнение для функции $\bar{\Phi}$ с полиномиальными по переменной $\bar{\kappa}$ коэффициентами.

Приведем здесь только соответствующее линейризованное уравнение. После подстановки $\varepsilon = 0$ получаем

$$\begin{aligned} & (\bar{\kappa} + 1)^2 \times \\ & \times \left((16 \bar{\kappa}^2 - \bar{\kappa}^2 (\bar{\kappa} + 2)^2) \left(\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \bar{\theta}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \bar{\theta}^2} \right) + 2 (16 \bar{\kappa}^2 + \bar{\kappa}^2 (\bar{\kappa} + 2)^2) \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \bar{\theta} \partial \bar{\theta}} \right) + \\ & + 4 \bar{\kappa} (\bar{\kappa} + 2) \bar{\kappa}^2 \left((\bar{\kappa} + 1) \left((2 + 3 \bar{\kappa} (\bar{\kappa} + 2)) \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{\kappa}} + \bar{\kappa} (\bar{\kappa} + 1) (\bar{\kappa} + 2) \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \bar{\kappa}^2} \right) + \right. \\ & \left. + \bar{\kappa} (\bar{\kappa} + 2) \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial v^2} + (\bar{\kappa} + 1)^2 \bar{\Phi} \right) = 0. \quad (17) \end{aligned}$$

2. ЛЕПТОН КАК ТОРОИДАЛЬНЫЙ СОЛИТОН-ЧАСТИЦА

2.1. Элементарные частицы как тороидальные солитоны. Прежде всего следует отметить, что введенный в (12) безразмерный параметр ε не является свободным для решения, а наоборот, должен принимать конкретные значения для различных решений. Фактически он определяет радиус сингулярного кольца ρ_0 определенного решения в выбранной системе единиц измерения. Будем называть его также параметром кольца.

Рассмотрим этот вопрос более детально. Как было отмечено в работе [1], исходная полевая модель инвариантна относительно масштабного преобразования или подстановки $\Phi(\{x^\mu\}) \rightarrow a \Phi(\{x^\mu/a\})$, где a — безразмерный масштабный параметр. Наличие этого типа инвариантности иногда порождает критику подобных моделей (и концепции единого поля), основанную на невозможности получить наблюдаемые на опыте дискретные числовые характеристики элементарных частиц вследствие наличия непрерывного параметра a в каждом решении.

Ответ на эту критику содержится, в частности, в работе А. Эйнштейна [6]. Сущность его состоит в том, что масштабная инвариантность отдельного частицеподобного решения, очевидно, нарушается в многоча-

стичном решении, которое содержит в некотором смысле это частицеподобное. Иными словами, взаимодействие частиц разрушает масштабную инвариантность для отдельной частицы.

Рассмотрим масштабную инвариантность на примере простейшего сфероидального солитона-частицы, или более коротко — сферона [2]. Применение упомянутого выше масштабного преобразования с параметром a к этому сферонному решению эквивалентно замене величины заряда $\bar{e} \rightarrow a^2 \bar{e}$. При этом меняется характерный пространственный размер солитона, определяемый параметром \bar{r} : $\bar{r} \rightarrow a \bar{r}$.

Таким образом, наличие у сферонного решения свободного параметра электрического заряда \bar{e} обусловлено масштабной инвариантностью. Однако характерный размер сферона \bar{r} однозначно связан с величиной заряда. Значит, если мы фиксируем заряд \bar{e} , то тем самым мы фиксируем и характерный размер \bar{r} .

Для тороидального решения характерным размером, связанным с масштабной инвариантностью, можно считать радиус сингулярного кольца ρ_0 . Тогда при фиксированном заряде \bar{e} должен быть фиксированным и радиус кольца. Но, конечно, радиус кольца может быть различным для различных тороидальных солитонных решений.

Следует отметить, что в силу условия (9) с радиусом кольца связана длина круговых волн с фазами $\bar{\theta}$ и $\bar{\bar{\theta}}$, а также соответствующая частота. Вообще при фиксированном заряде все остальные характеристики солитона-частицы пространственно-временной пленки оказываются фиксированными и определяются только видом решения.

Также нужно подчеркнуть, что параметр элементарного электрического заряда \bar{e} рассматривается здесь как параметр масштабной инвариантности. Это значит, что этот фиксирующий масштаб параметр будет содержаться и в решениях, представляющих электрически нейтральные солитоны-частицы.

Итак, наблюдаемое свойство квантования заряда невозможно получить при рассмотрении отдельного солитонного решения. Однако естественно допустить, что проблема квантования заряда решается при рассмотрении многосолитонного решения, когда существенно взаимодействии солитонов-частиц. Здесь же мы будем предполагать значение электрического заряда солитона-частицы фиксированным и равным его наблюдаемому значению.

Для упрощения расчетов, использующих размерные величины, будем выражать все размерности через размерности электрического потенциала и длины. В качестве них возьмем вольт и метр, а систему будем именовать ВМ.

Для получения величины элементарного электрического заряда в системе ВМ сравним асимптотические выражения для потенциала пози-

трона (с зарядом q в кулонах) на бесконечности в системе СИ и ВМ:

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\bar{e}}{r} \implies \bar{e} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \approx 1,440 \cdot 10^{-9} \text{ В} \cdot \text{м}, \quad (18)$$

где $q \approx 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл; $\epsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная.

Энергия \mathbb{E} и момент импульса \mathbb{J} согласно (10), (14), (6) и (18) имеют размерности $\text{В}^2 \cdot \text{м}$ и $\text{В}^2 \cdot \text{м}^2$ соответственно.

Как известно, 1 эВ — это энергия, которую приобретает электрон, проходя ускоряющую разность потенциалов в 1 В. Поскольку мы рассматриваем временную координату $x^0 = \epsilon t$ вместо времени t , угловая скорость $\tilde{\omega}$ и частота ω имеют размерность м^{-1} . Вследствие этого мы вводим умноженную на скорость света в вакууме постоянную Планка \hbar так, что величина $\omega \hbar$ имеет размерность энергии. С учетом вышесказанного и (18) имеем

$$1 \text{ эВ} \approx 1,440 \cdot 10^{-9} \text{ В}^2 \cdot \text{м}, \quad (19a)$$

$$\hbar \doteq \epsilon \hbar \approx 1,973 \cdot 10^{-7} \text{ эВ} \cdot \text{м} \approx 2,842 \cdot 10^{-16} \text{ В}^2 \cdot \text{м}^2. \quad (19b)$$

Как видно, значения постоянной Планка \hbar и элементарного электрического заряда \bar{e} в системе единиц ВМ дают правильное значение обратной величины постоянной тонкой структуры α :

$$\alpha^{-1} = \frac{\hbar}{e^2} \approx 137. \quad (20)$$

В используемой системе единиц ВМ комптоновская длина волны частицы задается эмпирической формулой

$$\lambda_{\mathcal{C}} = \frac{2\pi \hbar}{\mathbb{E}}. \quad (21)$$

Мы полагаем, что комптоновская длина волны частицы однозначно связана с основной частотой ν быстроосциллирующей части соответствующего солитона. В системе единиц ВМ эта связь задается формулой

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \lambda_{\mathcal{C}}^{-1}. \quad (22)$$

Учитывая (21) и (22), имеем эмпирическую связь энергии солитона-частицы с круговой частотой его периодической по времени части:

$$\mathbb{E} = \hbar \omega. \quad (23)$$

Зависимость солитонного решения от фазовых переменных $\bar{\theta}$ и $\bar{\bar{\theta}}$ фактически означает наличие волн, распространяющихся вдоль сингулярного кольца в двух противоположных направлениях. Условие однозначности полевой функции в пространстве приводит к периодичности решения по фазовым переменным. Тогда на длине сингулярного кольца должно укладываться целое число соответствующих длин волн. Надо понимать,

что длина круговой волны зависит от расстояния до оси вращения. Мы полагаем, что на кольце укладывается целое число комптоновских длин волн частицы. Тогда, учитывая (22) и (9), имеем

$$2\pi \rho_o = n \lambda \implies \rho_o = \frac{n}{\omega} \implies \omega = n \tilde{\omega}. \quad (24)$$

Введенное в (24) квантовое число n определяет различные солитоны-частицы.

Имея в виду, прежде всего, семейство лептонов, запишем экспериментальное значение момента импульса, или спина, для этих частиц:

$$\mathbb{J} = \frac{\hbar}{2}. \quad (25)$$

Принимая во внимание формулы (10)–(14) и (24), заключаем, что эмпирические соотношения (23) и (25) требуют выполнения следующих соотношений для вращающегося солитона-частицы:

$$\tilde{\mathbb{J}} \doteq \frac{1}{\bar{e}^2} \mathbb{J} = \int_V \frac{1}{4\pi \rho_o^3 \mathcal{L}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)^2 dV = \frac{\alpha^{-1}}{2}, \quad (26a)$$

$$\tilde{\mathcal{A}} \doteq \frac{1}{\bar{e}^2} (\rho_o \mathbb{E} - \mathbb{J}) = \int_V \frac{1}{4\pi \rho_o^3 \varepsilon} (1 - \mathcal{L}) dV = \alpha^{-1} \left(n - \frac{1}{2} \right), \quad (26b)$$

где введены обозначения для безразмерного спина $\tilde{\mathbb{J}}$ и безразмерной временной плотности регуляризованного действия $\tilde{\mathcal{A}}$.

Используя обозначения (26), запишем выражение для энергии:

$$\mathbb{E} = \frac{\bar{e}^2}{\rho_o} (\tilde{\mathbb{J}} + \tilde{\mathcal{A}}) = \frac{n \bar{e}^2}{\alpha \rho_o}. \quad (27)$$

2.2. О решениях линейного уравнения. 2.2.1. Статическое решение. Статическое решение линеаризованного уравнения (17) рассматриваемой полевой модели следует из решения уравнения Лапласа в тороидальных координатах, которое известно [7]. Здесь мы рассматриваем решения, которые обращаются в нуль на пространственной бесконечности. Соответствующее общее решение уравнения (17) для функции $\bar{\Phi}$ (см. (15)) имеет вид

$$\bar{\Phi} = \dot{\bar{\Phi}}_{nm} (C_1 \cos(n\varphi) + C_2 \sin(n\varphi)) (C_3 \cos(mv) + C_4 \sin(mv)), \quad (28a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Phi}}_{nm} &\doteq \frac{2^{1-2|m|+|n|} \bar{\kappa}^{|n|}}{(\bar{\kappa} + 1)^{|m|} (\bar{\kappa} + 2)^{1-2|m|+|n|}} \mathcal{F}_{\frac{1}{2}-|m|, \frac{1}{2}-|m|+|n|; |n|+1} \left(\frac{\bar{\kappa}^2}{(\bar{\kappa} + 2)^2} \right) = \\ &= \bar{\kappa}^{|n|} \left(1 - \frac{|n| + 1}{2} \bar{\kappa} + \frac{5 + 4m^2 + 2|n|(6 + |n|(|n| + 4))}{16(|n| + 1)} \bar{\kappa}^2 + \mathcal{O}(\bar{\kappa}^3)_{\bar{\kappa} \rightarrow 0} \right), \end{aligned} \quad (28b)$$

где n и m — целые числа; $\varphi = (\bar{\theta} + \bar{\bar{\theta}})/2$; $\mathbb{F}_{\alpha, \beta; \gamma}(z) \doteq {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ — гипергеометрическая функция; $\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ — произвольные действительные константы.

2.2.2. О динамическом решении. Как известно [7], в случае представления решения линейного уравнения в виде произведения гармонического по времени множителя $\exp(i\omega x^0)$ и множителя, зависящего от пространственных тороидальных координат, в соответствующем уравнении Гельмгольца не удастся разделить переменные. В результате задача даже для линейного уравнения представляется достаточно сложной.

Конечно, любое известное периодическое по времени решение волнового уравнения может быть представлено и в тороидальных координатах. Однако интерес могут вызывать именно некоторые элементарные тороидальные решения, зависящие от времени, как, например, для сферических координат. К настоящему времени автору неизвестны подобные решения для тороидальных координат.

2.3. Приближенные тороидальные решения нелинейной модели.

2.3.1. Вид искомого решения. Естественно предположить, что вблизи сингулярного кольца решение в определенном смысле похоже на решение, имеющее некоторую осевую симметрию. Решения с осевой симметрией рассматривались в работе [1], в которой были представлены световые солитоны и статическое решение с цилиндрической симметрией. Это статическое решение (см. формулы (4.29)–(4.31) и далее в статье [1]) соответствует электрически заряженной струне. Решение имеет характерный радиальный размер $\bar{\rho}$ и радиальную компоненту напряженности электрического поля Υ_ρ следующего вида:

$$\bar{\rho} \doteq |2\bar{q}\chi|, \quad \Upsilon_\rho = -\frac{2\bar{q}}{\rho}, \quad (29)$$

где \bar{q} — линейная плотность заряда; ρ — радиальная координата цилиндрической системы координат.

Поскольку мы будем рассматривать решения, соответствующие заряженным частицам, в частности лептонам, то естественно допустить, что статическая часть решения вблизи сингулярного кольца похожа на указанное цилиндрическое решение. Таким образом, мы рассматриваем эту заряженную струну, свернутую в кольцо. При этом будем считать, что поверхность $\bar{\rho} = \text{const}$ совпадает с координатной поверхностью $\kappa = \text{const}$. Как известно, эти координатные поверхности представляют собой тороиды. Центры кругов, возникающих в поперечном сечении тороидов, расположены на расстоянии $\check{\rho}_o$ от оси z , не совпадающем с радиусом кольца координатной системы ρ_o . Таким образом, имеем

$$\check{\rho}_o = \rho_o \operatorname{cth} \check{\kappa} = \rho_o \left(\frac{1}{\check{\kappa}} + \frac{1 + \check{\kappa}}{2 + \check{\kappa}} \right), \quad \bar{\rho} = \rho_o \operatorname{csch} \check{\kappa} = \rho_o \left(\frac{1}{\check{\kappa}} + \frac{1}{2 + \check{\kappa}} \right), \quad (30)$$

где $\check{\kappa}$ и $\check{\bar{\kappa}}$ — значения координат κ и $\bar{\kappa}$, соответствующих тороиду с малым $\check{\rho}$ и большим $\check{\rho}_o$ радиусами.

Таким образом, свернутая струна находится вблизи кольца координатной системы, но точно с ним не совпадает. Ее полный заряд должен быть равен элементарному электрическому заряду \bar{e} . Тогда

$$2 \pi \check{\rho}_o \check{\bar{q}} = \bar{e}. \tag{31}$$

Учитывая (29)–(31) и определение безразмерного параметра ε (12), получаем следующее выражение для $\check{\bar{\kappa}}$:

$$\check{\bar{\kappa}} = \frac{\pi + \sqrt{\pi^2 + 4|\varepsilon|} + \sqrt{2\pi} \sqrt{\pi + \sqrt{\pi^2 + 4|\varepsilon|}}}{2\sqrt{|\varepsilon|}} - 1. \tag{32}$$

Для случая, когда малый радиус тороида намного меньше радиуса кольца координатной системы $\check{\rho} \ll \rho_o$, можем приближенно считать

$$\check{\rho}_o \approx \rho_o \implies \check{\bar{\kappa}} \approx \frac{2\pi}{\sqrt{|\varepsilon|}}, \tag{33}$$

что согласуется с формулой (32) для малых абсолютных значений безразмерного параметра $|\varepsilon| \ll 1$.

Недавние исследования, связанные с гравитационным взаимодействием в теории пространственно-временной пленки [8], указывают на то, что выбор сигнатуры метрики в исходной модели должен соответствовать отрицательным значениям безразмерного параметра $\varepsilon < 0$. В этом случае согласно упомянутому выше цилиндрическому решению из работы [1] поверхность тороида $\bar{\kappa} = \check{\bar{\kappa}}$ должна быть сингулярной для решения.

Однако следует учитывать, что простым сворачиванием цилиндрического решения мы не получим точное решение модели. Кроме того, будем рассматривать решения с временной зависимостью типа вращения. Следовательно, сингулярная поверхность искомого решения может отличаться от тороидальной $\bar{\kappa} = \check{\bar{\kappa}}$.

2.3.2. Схема метода нахождения приближенного решения. Найдем решение для функции $\bar{\Phi}$ из формулы (15). Будем считать искомую функцию зависящей от трех координат $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}(\bar{\kappa}, \bar{\theta}, \nu)$, что означает рассмотрение вращающегося решения. Приближенное решение будем искать в виде следующей частичной суммы формального степенного ряда по $\bar{\kappa}$:

$$\bar{\Phi} = \sum_{i=0}^N \bar{\Phi}_i \bar{\kappa}^i, \tag{34}$$

где коэффициенты $\bar{\Phi}_i$ являются периодическими функциями двух оставшихся координат: $\bar{\Phi}_i = \bar{\Phi}_i(\bar{\theta}, \nu)$.

Выражение (34) подставляется в уравнение модели для функции $\bar{\Phi}$. Затем последовательно приравняются к нулю коэффициенты при раз-

личных степенях $\bar{\kappa}$, начиная с низших. Все получаемые таким образом уравнения сводятся к линейным дифференциальным второго порядка относительно переменной $\bar{\theta}$, т. е. уравнение для определения функции $\bar{\Phi}_i$ не содержит производных от этой функции по переменной v .

Каждое такое уравнение решается методом разложения на гармонические составляющие по переменной $\bar{\theta}$ с конечным числом гармоник. При этом получается, что номер старшей гармоники равен номеру i функции $\bar{\Phi}_i$. При этом решение для функции $\bar{\Phi}_i$ содержит некоторые произвольные функции переменной v . Эти произвольные функции и их производные входят в коэффициенты уравнений для функции $\bar{\Phi}_{i+1}$ и последующих. Условия существования регулярных решений этих уравнений конкретизируют указанные произвольные функции переменной v .

Другим возможным подходом к поиску приближенного решения с зависимостью от фазы $\bar{\theta}$ является использование метода итераций с начальным приближением в виде вращающегося статического решения (28).

2.3.3. Получение приближенного решения. Первое уравнение метода получения решения (34) имеет следующий вид:

$$\varepsilon (\bar{\Phi}_0 + 2\bar{\Phi}_1) \left(\frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{\theta}} \right)^2 = 0. \quad (35)$$

Оказывается, что для существования решения для $\bar{\Phi}_3$ мы должны принять $\bar{\Phi}_0 = \text{const}$. Полагаем $\bar{\Phi}_0 = 1$, что соответствует частице с положительным элементарным зарядом. Тогда решение следующей функции может быть представлено в виде

$$\bar{\Phi}_1 = -\frac{1}{2} + \bar{\bar{\Phi}}_{1s} \sin(\bar{\theta} - mv), \quad (36)$$

где $\bar{\bar{\Phi}}_{1s} = \bar{\bar{\Phi}}_{1s}(v)$ — произвольная функция.

В (36) с использованием произвола в выборе функций переменной v введена закрученная фаза $(\bar{\theta} - mv)$ с параметром закрученности m . Такой выбор соответствует рассматриваемому классу решений, представляющих собой полевые конфигурации с движущимися по кругу закрученными световыми солитонами типа полученных в работе [1].

Произвольная функция $\bar{\bar{\Phi}}_{1s}(v)$ и ее производные входят в уравнение для функции $\bar{\Phi}_2(\bar{\theta}, v)$, и соответствующее решение получается всюду регулярным. Однако решение для следующей функции $\bar{\Phi}_3(\bar{\theta}, v)$ оказывается в общем случае бесконечным при $v = 0$. Для регуляризации этого решения функция $\bar{\bar{\Phi}}_{1s}(v)$ должна стремиться к нулю при $v \rightarrow 0$ как $\sin^4(v/2)$ или быстрее. В частности, можно принять

$$\bar{\bar{\Phi}}_{1s} = a_1 \sin^4(v/2) \doteq a_1 \tilde{v}^4, \quad (37)$$

где a_1 — константа и введено обозначение $\tilde{v} \doteq \sin(v/2)$.

Запишем полученное в результате приближенное решение, включая члены второго порядка по $\bar{\kappa}$:

$$\bar{\Phi} = 1 + \bar{\kappa} \left(-\frac{1}{2} + a_1 \tilde{v}^4 \sin(\bar{\theta} - mv) \right) + \bar{\kappa}^2 \left(\bar{\Phi}_2 - a_1 \tilde{v}^4 \sin(\bar{\theta} - mv) + \right. \\ \left. + \bar{\Phi}_{2s2} \sin(2(\bar{\theta} - mv)) + \bar{\Phi}_{2c2} \cos(2(\bar{\theta} - mv)) \right) + \mathcal{O}(\bar{\kappa}^3)_{\bar{\kappa} \rightarrow \infty}, \quad (38a)$$

где функция $\bar{\Phi}_2$ определена как

$$\bar{\Phi}_2 = \frac{5 - 2\varepsilon \tilde{v}^2 \left(1 - \tilde{v}^4 + 2a_1^2 \tilde{v}^{10} \left(13 - 2\tilde{v}^2 \left(5 + 4\bar{\Phi}_{2c2} \right) \right) \right)}{16 \left(1 - \varepsilon \tilde{v}^4 \left(1 - \tilde{v}^2 + 2a_1^2 \tilde{v}^{10} \right) \right)}, \quad (38б)$$

$\bar{\Phi}_{2s2} = \bar{\Phi}_{2s2}(v)$, $\bar{\Phi}_{2c2} = \bar{\Phi}_{2c2}(v)$ — произвольные функции, которые вместе со своими производными до второго порядка включительно входят в полученное решение для функции $\bar{\Phi}_3$.

Следует отметить, что подстановка $\varepsilon = 0$, $a_1 = 0$, $\bar{\Phi}_{2s2} = 0$, $\bar{\Phi}_{2c2} = 0$ в полученное решение (38) дает правильные члены разложения статического решения (28) соответствующего линейного уравнения при $n = 0$, $m = 0$, $C_1 = 1$, $C_3 = 1$.

Запишем полученное приближенное статическое решение, включая члены третьего порядка по $\bar{\kappa}$:

$$\bar{\Phi} = 1 - \frac{1}{2} \bar{\kappa} + \frac{5 - 2\varepsilon \tilde{v}^2 (1 - \tilde{v}^4)}{16 (1 - \varepsilon \tilde{v}^4 (1 - \tilde{v}^2))} \bar{\kappa}^2 - \frac{7 - 2\varepsilon \tilde{v}^2 (3 - 4\tilde{v}^2 + \tilde{v}^4)}{32 (1 - \varepsilon \tilde{v}^4 (1 - \tilde{v}^2))} \bar{\kappa}^3 + \\ + \mathcal{O}(\bar{\kappa}^4)_{\bar{\kappa} \rightarrow \infty}. \quad (39)$$

Преобразуем полученное приближенное решение (38) для $m = 1$, $\bar{\Phi}_{2s2} = 0$, $\bar{\Phi}_{2c2} = 0$ к сферическим координатам $\{r, \vartheta, \varphi\}$:

$$\bar{\Phi} \approx \frac{\bar{e}}{r} - \frac{\bar{e} \rho_o^2 (1 + 3 \cos(2\vartheta))}{8 r^3} + \frac{7 \bar{e} \rho_o^3 \sin^3 \vartheta}{r^4} + \frac{\bar{e} \rho_o^4 f_1(\varepsilon, \vartheta)}{r^5} + \\ + \frac{\bar{e} \rho_o^5 f_2(\varepsilon, \vartheta)}{r^6} + \frac{2a_1 \bar{e} \rho_o^5 \sin(\vartheta) \cos^4(\vartheta)}{r^6} \sin \bar{\theta}. \quad (40)$$

Если в решении (38) принять $a_1 = 0$, то минимальная гармоника по фазе будет вторая. Тогда можно переопределить $2m \rightarrow m$ и рассмотреть решение, зависящее от закрученной фазы $2\bar{\theta} - mv$.

Обозначим через n минимальный номер гармоники по фазе $\bar{\theta}$. Можно предположить, что различные пары чисел $\{n, m\}$ определяют разные частицы.

Теперь, имея в виду упомянутый в конце предыдущего пункта метод итераций, примем в качестве начального приближения функцию

$$\bar{\Phi}_{(0)} = \dot{\bar{\Phi}}_{00} + a_{nm} \dot{\bar{\Phi}}_{nm} \sin(n\bar{\theta} - mv), \quad (41)$$

где функции $\dot{\bar{\Phi}}_{nm}$ определены в (28б).

Очевидно, что подстановка $\{\bar{\theta} \rightarrow \varphi\}$ переводит периодическое по времени начальное приближение (41) в сумму статических решений вида (28).

2.3.4. Энергия и спин начального приближения. Вычислим энергию и спин начального приближения (41) тороидального солитона с трубчатой сингулярной поверхностью вне этой поверхности, т. е. будем интегрировать по области пространства $0 \leq \bar{\kappa} \leq \check{\kappa}$, где величина $\check{\kappa}$ определена в (32). Таким образом, здесь пренебрегаем полем внутри сингулярной трубки или полагаем его равным постоянной величине, что дает нулевые плотности энергии и спина.

Мы производим расчет безразмерных величин $\tilde{\mathcal{J}}$ и $\tilde{\mathcal{A}}$, определенных в формулах (26). Соответствующие подынтегральные выражения или плотности разлагаем по степеням безразмерного параметра ε до второй степени включительно. При этом коэффициенты при степенях ε оказываются полиномами от нулевой до шестой степени по четным степеням амплитуды a_{nm} составляющей, зависящей от времени. Коэффициенты этих полиномов являются только функциями координат $\{\bar{\theta}, \bar{\kappa}, \nu\}$, по которым и производится последовательное интегрирование. Причем сначала

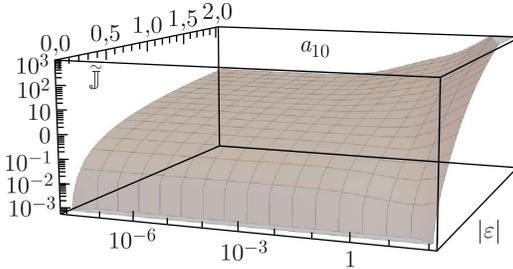


Рис. 1. Зависимость безразмерного спина $\tilde{\mathcal{J}}$ начального приближения при $n = 1$ и $m = 0$ от $|\varepsilon|$ ($\varepsilon < 0$) и a_{10}

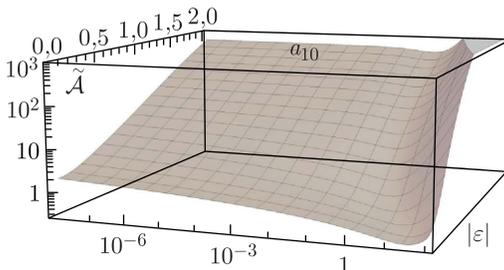


Рис. 2. Зависимость безразмерной временной плотности регуляризованного действия $\tilde{\mathcal{A}}$ начального приближения при $n = 1$ и $m = 0$ от $|\varepsilon|$ ($\varepsilon < 0$) и a_{10}

интегрирование проводится аналитически по периодическим переменным $\{\bar{\theta}, v\}$, а затем по переменной $\bar{\kappa}$ численно.

Результаты расчетов для начального приближения (41) со значениями целочисленных параметров $n = 1$ и $m = 0$ представлены на рис. 1 и 2. На графиках функций $\tilde{\mathbb{J}}(\varepsilon, a_{10})$ и $\tilde{\mathbb{A}}(\varepsilon, a_{10})$ видно, что существует область на плоскости $\{|\varepsilon|, a_{10}\}$, для которой значения $\tilde{\mathbb{J}}$ и $\tilde{\mathbb{A}}$ близки значениям, характерным для лептона (26). Однако данный расчет не дает возможности фиксировать значения параметров $\{\varepsilon, a_{nm}\}$, которые, как отмечалось выше, не являются свободными для искомого солитонного решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках задачи по нахождению тороидальных солитонных решений уравнения пространственно-временной пленки, сопоставляемых лептонам, осуществлено следующее.

- Введена рациональная тороидальная система координат с вращением, которая более подходит для рассматриваемой задачи.
- Введен безразмерный параметр решения, входящий в уравнение, как параметр нелинейности. Значение этого параметра определяется солитонным решением и, в свою очередь, определяет радиус кольца солитона.
- Получены критерии сопоставления искомым солитонных решений реальным лептонам.
- Выведена формула связи радиуса тороидальной сингулярной поверхности солитона с безразмерным параметром решения.
- Предложен метод нахождения решения в виде формального ряда по радиальной переменной $\bar{\kappa}$ рациональной тороидальной системы координат. Получены члены этого ряда до $\bar{\kappa}^3$ включительно. Однако полученные коэффициенты разложения содержат свободные функции первой угловой тороидальной координаты v .
- Также предложен итерационный метод нахождения решения, в котором в качестве начального приближения взято вращающееся решение, полученное из статического решения линеаризованного уравнения. Для этого начального приближения при определенных значениях целочисленных параметров ($n = 1, m = 0$) получены зависимости безразмерных спина и регуляризованного действия от параметра ε и амплитуды временной части a_{01} . Можно говорить о некотором грубом соответствии полученных величин энергии и спина тем значениям, которые имеются для реального электрона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chernitskii A.A. Lightlike Shell Solitons of Extremal Space-Time Film // J. Phys. Commun. 2018. V. 2. P. 105013.

2. *Chernitskii A. A.* About Long-Range Interaction of Spheroidal Solitons in Scalar Field Nonlinear Model // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2017. V.938. P.012029.
3. *Chernitskii A. A.* Gravitation in Unified Scalar Field Theory // *Universe.* 2021. V.7. P. 11.
4. *Черницкий А. А.* Нелинейная электродинамика: сингулярные солитоны и их взаимодействия. СПб.: СПбГИЭУ, 2012. 360 с.
5. *Chernitskii A. A.* About Toroidal Soliton-Particle of Extremal Space-Time Film // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2020. V. 1435. P.012054.
6. *Einstein A.* A Comment on a Criticism of Unified Field Theory // *Phys. Rev.* 1953. V. 89. P.321.
7. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т.2. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
8. *Chernitskii A. A.* Gravitation in Theory of Space-Time Film and Galactic Soliton // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021. V.2081. P.012016.