

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПИОН-ЯДЕРНОГО РАССЕЯНИЯ ПРИ ЭНЕРГИЯХ В ОБЛАСТИ ПИОН-НУКЛОННОГО (3,3)-РЕЗОНАНСА

*В. К. Лукьянов*<sup>1,\*</sup>, *Е. В. Земляная*<sup>1,2</sup>, *К. В. Лукьянов*<sup>1,2</sup>,  
*И. Абдул-Маггад*<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

<sup>2</sup> Государственный университет «Дубна», Дубна, Россия

<sup>3</sup> Каирский университет, Гиза, Каир

Представлены результаты расчетов сечений упругого и неупругого рассеяния  $\pi$ -мезонов на ядрах  $^{28}\text{Si}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{58}\text{Ni}$ ,  $^{208}\text{Pb}$  при энергиях в области пион-нуклонного (3,3)-резонанса от 130 до 290 МэВ, выполненных на основе модели потенциала свертки (фолдинга). При сравнении их с данными экспериментов получены параметры элементарной амплитуды рассеяния пионов на связанных нуклонах ядра. Эти параметры затем сравниваются с теми, которые известны из данных рассеяния пионов на свободных нуклонах, и таким образом устанавливается влияние ядерной среды на  $\pi N$ -амплитуду рассеяния. Также сечения упругого рассеяния рассчитаны в рамках модифицированной модели потенциала Кисслингера, построенной на основополагающих принципах пион-нуклонного взаимодействия в ядерной среде. Обсуждается область применимости обоих подходов.

The results are presented of calculations of the  $\pi$ -meson elastic and inelastic scattering cross sections by  $^{28}\text{Si}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{58}\text{Ni}$ ,  $^{208}\text{Pb}$  nuclei in the region of pion-nucleon (3,3) resonance at energies from 130 to 290 MeV obtained in the framework of the folding optical potential model, in which the parameters of the elementary amplitude of pion scattering by bound nuclear nucleons are determined by comparison with experimental data. Then these parameters are compared with those known from the pion scattering by free nucleons, and thus the influence of nuclear medium on the  $\pi N$  scattering amplitude is established. Also, the elastic scattering cross sections were calculated within the modified Kisslinger potential model constructed on the basic principle of the pion-nucleon interaction in nuclear matter. The applicability area of both approaches is discussed.

PACS: 25.80.Dj; 24.10.Ht; 21.10.Gv; 21.10.Ft

## ВВЕДЕНИЕ

Особенностью процессов пион-ядерного рассеяния, привлекающей внимание исследователей и отличающей их от протон-ядерного и ядро-ядерного рассеяния, является проявление в этих процессах  $\Delta_{33}$

---

\* E-mail: vlukyanov@jinr.ru

пион-нуклонного резонанса ( $J = 3/2, T = 3/2$ ) в области энергий 100–300 МэВ. Эту особенность важно учитывать при построении моделей пион-ядерного рассеяния при энергиях, соответствующих области резонанса. В этом направлении был выполнен ряд работ, в которых исследовалось, как этот резонанс проявляет себя в ядерной среде. Так, в работе Кисслингера [1] показано, что эту особенность пион-нуклонной амплитуды можно учесть, если ввести в оптический потенциал пион-ядерного взаимодействия зависящую от импульса нелокальную добавку вида  $\nabla v(r)\nabla$ . Позднее эта часть потенциала была линеаризована в работе [2] за счет удачной замены ее на фазово-эквивалентную форму. Что касается самой проблемы, связанной с природой возбуждения пионной моды и ее конденсации в ядрах, то такой анализ был проведен в работах [3–6]. В представленном обзоре рассматривается только упругое и неупругое пион-ядерное рассеяние с возбуждением в ядрах низколежащих состояний коллективной природы. Следует отметить, что в ранних работах анализ данных упругого рассеяния проводился на основе теории высокоэнергетического рассеяния Глаубера [7]. Так, была установлена важная роль учета ферми-движения нуклонов в расчетах полного сечения взаимодействия  $\pi$ -мезонов с дейтроном [8] и дифференциального сечения рассеяния с ядрами  $^{12}\text{C}$  [9]. В работе [10] была предложена сепарабельная форма пион-нуклонного взаимодействия, и на ее основе проведены расчеты сечений рассеяния пионов на ядрах с замкнутой оболочкой  $^4\text{He}$  и  $^{16}\text{O}$ , которые показали, что для более сложного ядра важно учитывать вклад процессов многократного рассеяния пионов. Позднее в работе [11] в расчетах сечений упругого рассеяния  $\pi$ -мезонов на ядре  $^{12}\text{C}$  использовались разные формы потенциала Кисслингера  $a\rho(r) + b\nabla(\rho(r))\nabla$ , а именно его локальная форма  $a\rho(r) + b\nabla^2\rho(r)$ , а также форма в виде «лапласиана» с включением дополнительных членов  $(\nabla^2)^n\rho(r)$ ,  $n = 2, 4$ . Показано, что в области энергий (3,3)-резонанса указанные различия в формах потенциала проявляются при углах рассеяния больше первого минимума сечения. В работе [12] на основе расчетов упругого рассеяния пионов ядрами  $^{12}\text{C}$ ,  $^{58}\text{Ni}$ ,  $^{176}\text{Yb}$  исследовались локальная и нелокальная формы потенциала, сделан вывод о слабом вкладе в сечение поправок, которые возникают за счет виртуального возбуждения низколежащих состояний ядер коллективной природы. В обзорной работе [13] исследовалось рассеяние  $\pi$ -мезонов ядрами  $^4\text{He}$ ,  $^{12}\text{C}$ ,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$  при энергии ниже 350 МэВ с использованием оптических потенциалов, учитывающих вклады однократного и двукратного рассеяния. При этом оказалось, что потенциалы первого порядка медленно меняются с увеличением энергии столкновения. В работе [14] проведено сравнение результатов расчетов на основе модифицированного потенциала Кисслингера с экспериментальными данными упругого рассеяния  $\pi$ -мезонов ядрами  $^{40,42,44,48}\text{Ca}$  при энергиях 116, 180 и 291 МэВ, при этом для  $^{44,48}\text{Ca}$

было установлено распределение нейтронов (в отличие от протонов) преимущественно на периферии этих ядер.

Имеется ряд исследований, в которых расчеты сечений упругого пион-ядерного рассеяния основаны на использовании потенциала вудс-саксоновской формы. Так, в работе [15] обращено внимание на важную роль фактора поглощения в области периферии потенциала рассеяния при объяснении экспериментальных данных в рамках феноменологического потенциала Вудса–Саксона. Также, анализируя полученные в этой работе параметры потенциалов рассеяния  $\pi^\pm$ -мезонов на ядре  $^{208}\text{Pb}$  при энергиях 116, 162, 180 и 291 МэВ, можно видеть, что в рассчитанных на их основе полных сечениях  $\sigma_R$  проявляется максимум при энергии около 180 МэВ, т. е. в области энергии пион-нуклонного (3,3)-резонанса. Еще следует отметить работу [16], в которой на основе оригинального микроскопического подхода получен оптический потенциал, в котором первое слагаемое пропорционально плотности ядра  $\rho(r)$ , а второе — квадрату плотности  $\rho^2(r)$ , что отражает двухнуклонный характер поглощения  $\pi$ -мезона в области ядерной поверхности. В этой работе сделаны широкие приложения и получено согласие рассчитанных  $\pi A$ -сечений с соответствующими экспериментальными данными. При этом фитировались к экспериментальным данным параметры теории  $B_0(E)$  и  $C_0(E)$ , мнимая часть которых определяет мнимую часть пион-ядерного потенциала и которая, как оказалось, имеет максимум в области энергии столкновения 180 МэВ, что соответствует максимуму в области (3,3)-резонанса.

В наших исследованиях для расчета сечения пион-ядерного рассеяния при энергиях 100–300 МэВ, в которых проявляет себя пион-нуклонный резонанс, используются два вида оптических потенциалов. Первый — это потенциал фолдинга (свертки) [17], построенный с использованием двух функций: 1) функции распределения плотности нуклонов ядра-мишени, которая обычно известна из табличных данных; 2) элементарной амплитуды рассеяния пионов на связанных нуклонах ядра, параметры которой определяются на основе сравнения рассчитываемых значений сечений и соответствующих экспериментальных данных. Именно изучение характера изменения этих параметров по сравнению с теми, которые известны из данных рассеяния пионов на свободных нуклонах, является одной из основных задач настоящего исследования.

Также наряду с потенциалом фолдинга нами будет использоваться потенциал Кисслингера [1], представленный в работе [2] в его локальной форме. На этой основе сделано существенное продвижение в работе [18], а именно установлены параметры такого потенциала, выполнены детальные расчеты сечений и проведено сравнение их с экспериментальными данными рассеяния  $\pi^\pm$ -мезонов на ядрах  $^{16}\text{O}$  и  $^{208}\text{Pb}$  при энергиях 50, 162 и 291 МэВ. Далее будем использовать этот потенциал, но в более широких приложениях.

В настоящей работе обобщаются результаты проведенного нами в рамках этих двух подходов анализа широкого набора данных по диффе-

ренициальным сечениям упругого пион-ядерного рассеяния на сложных ядрах  $^{28}\text{Si}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{54}\text{Ni}$ ,  $^{208}\text{Pb}$  при разных энергиях (от 130 до 290 МэВ), покрывающих область (3,3)-резонанса пион-нуклонного рассеяния. При этом согласие с соответствующими экспериментальными данными достигалось за счет варьирования параметров амплитуды рассеяния пионов на связанных нуклонах. Также рассмотрена задача неупругого рассеяния  $\pi$ -мезонов ядрами с возбуждением в них низколежащих уровней коллективной природы — задача, в которой за основу берется потенциал, установленный при анализе упругого рассеяния на тех же ядрах.

## 1. УПРУГОЕ ПИОН-ЯДЕРНОЕ РАССЕЯНИЕ

**1.1. Микроскопический оптический потенциал фолдинга.** За основу берем микроскопический оптический потенциал, построенный на основе теории многократного высокоэнергетического рассеяния частиц на сложных ядрах [7] (см. также [19, 20]) в приближении, когда основной вклад в сечение вносит однократное рассеяние пионов на нуклонах ядра. Тогда потенциал есть свертка пион-нуклонного потенциала  $v_{\pi N}$  и функции распределения плотности нуклонов ядра  $\rho(r)$ . Обе эти величины, вообще говоря, известны: плотность — из данных по электрон-ядерному рассеянию, а  $\pi N$ -амплитуда — из рассеяния пионов на водородной мишени. Перехода в этих функциях к импульсному представлению, получаем пион-ядерный оптический потенциал [17]:

$$U(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \rho(q) v_{\pi N}(q) d^3q = \frac{1}{2\pi^2} \int j_0(qr) \rho(q) v_{\pi N}(q) q^2 dq. \quad (1)$$

Здесь формфакторы  $\rho(q)$  и  $v_{\pi N}(q)$  соответствуют функциям распределения плотности ядра-мишени и пион-нуклонного потенциала

$$\rho(q) = \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \rho(r) d^3r, \quad v_{\pi N}(q) = \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} v_{\pi N}(r) d^3r. \quad (2)$$

Последний можно выразить через амплитуду пион-нуклонного рассеяния в борновском приближении

$$F_{\pi N}^B(q) = -\frac{m_\pi}{2\pi\hbar^2} \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} v_{\pi N}(r) d^3r = -\frac{m_\pi}{2\pi\hbar^2} v_{\pi N}(q), \quad (3)$$

где  $m_\pi$  есть масса налетающего  $\pi$ -мезона. С другой стороны, эту амплитуду можно представить на основе оптической теоремы как

$$F_{\pi N}(q) = \frac{k}{4\pi} (i + \alpha) \sigma f_{\pi N}(q), \quad f_{\pi N}(q) = e^{-\beta q^2/2}. \quad (4)$$

Здесь  $\sigma$  есть полное сечение  $\pi N$ -рассеяния,  $\alpha$  — отношение реальной части к мнимой части амплитуды рассеяния под нулевым углом, а  $\beta$  есть

параметр наклона. Тогда, используя оба выражения  $\pi N$ -амплитуды — (3) и (4), получаем фурье-образ (2)  $\pi N$ -потенциала в виде

$$v_{\pi N}(q) = -\frac{2\pi\hbar^2}{m_\pi} F_{\pi N}(q) = -\frac{\hbar v}{2} (i + \alpha) \sigma f_{\pi N}(q). \quad (5)$$

Данные фазового анализа по рассеянию пионов на протонах и дейтроне позволяют, в принципе, установить три параметра ( $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\beta$ ) амплитуды рассеяния (4)  $\pi$ -мезонов на протонах и три — при рассеянии на нейтронах. Тогда, подставляя  $\pi N$ -потенциал (5) в определение (1) и суммируя отдельно по протонам и нейтронам ядра, получаем оптический пион-ядерный потенциал в виде

$$U(r) = V(r) + iW(r) = -\frac{(\hbar c)\beta_c}{(2\pi)^2} \sum_{N=p,n} \sigma_{\pi N} (\alpha_{\pi N} + i) \int j_0(qr) \rho_N(q) f_{\pi N}(q) q^2 dq. \quad (6)$$

Здесь скорость  $\pi$ -мезона задана в  $\pi A$ -системе центра масс\*, что есть  $\beta_c = v/c = \sqrt{T_{\text{lab}}(T_{\text{lab}} + 2m_\pi) / [T_{\text{lab}} + m_\pi(M_A + m_\pi)/M_A]}$ , где  $T_{\text{lab}}$  — кинетическая энергия  $\pi$ -мезона, а  $M_A$  — масса ядра-мишени.

При дальнейшем рассмотрении важно учесть, что непосредственно измерить рассеяние пионов на свободных нейтронах невозможно. Поэтому в практическом анализе рассеяния на ядрах обычно учитывается соотношение изоспиновой симметрии  $(\pi^\pm n) = (\pi^\mp p)$ , что позволяет использовать только данные рассеяния  $\pi^\pm$ -мезонов на свободных протонах. Для ядер с близким числом протонов и нейтронов  $Z \simeq (A - Z)$  можно предположить, что их функции распределения плотности одинаковы:  $\rho_p = \rho_n = (1/2)\rho$ , где ядерная плотность нуклонов  $\rho(r)$  нормирована на атомную массу  $A$ . Тогда, вводя в выражение для потенциала (6) параметры амплитуды  $\pi N$ -рассеяния с учетом изоспиновой симметрии

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_{\pi N} = \frac{1}{2} [\sigma_{\pi^+p} + \sigma_{\pi^+n}] = \frac{1}{2} [\sigma_{\pi^+p} + \sigma_{\pi^-p}], \\ \alpha &= \alpha_{\pi N} = \frac{1}{2} [\alpha_{\pi^+p} + \alpha_{\pi^+n}] = \frac{1}{2} [\alpha_{\pi^+p} + \alpha_{\pi^-p}], \\ \beta &= \beta_{\pi N} = \frac{1}{2} [\beta_{\pi^+p} + \beta_{\pi^+n}] = \frac{1}{2} [\beta_{\pi^+p} + \beta_{\pi^-p}], \end{aligned} \quad (7)$$

получаем оптический потенциал рассеяния  $\pi$ -мезонов на ядрах, в котором нуклоны не разделяются на протоны и нейтроны [17]:

$$U(r) = V(r) + iW(r) = -\frac{(\hbar c)\beta_c}{(2\pi)^2} \sigma (\alpha + i) \int j_0(qr) \rho(q) f_{\pi N}(q) q^2 dq. \quad (8)$$

\* В формуле (6) и до нее использовались единицы мегаэлектронвольт и ферми, что дает  $\hbar c = 197,327 \text{ МэВ} \cdot \text{фм}$ . Далее будем пользоваться естественной системой, где  $\hbar = c = 1$ , а значит,  $E$ ,  $T$ ,  $k$ ,  $t$  имеют одинаковую размерность (мегаэлектронвольт).

При расчете оптического потенциала фолдинга (8) будем использовать функцию распределения ядерной плотности  $\rho(r)$  в виде симметризованной ферми-функции (SF-функции)

$$\rho_{\text{SF}}(r) = \rho_0 \frac{\text{sh}\left(\frac{R}{a}\right)}{\text{ch}\left(\frac{R}{a}\right) + \text{ch}\left(\frac{r}{a}\right)} = \rho_0 \left[ \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} + \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{r+R}{a}\right)} \right], \quad (9)$$

где

$$\rho_0 = \frac{A}{1,25\pi R^3} \left[ 1 + \left(\frac{\pi a}{R}\right)^2 \right]^{-1}. \quad (10)$$

Соответствующий фурье-образ плотности имеет явный вид [21]:

$$\rho_{\text{SF}}(q) = -\rho_0 \frac{4\pi^2 a R \cos qR}{q \text{sh}(\pi a q)} \left[ 1 - \left(\frac{\pi a}{R}\right) \text{cth}(\pi a q) \text{tg} qR \right], \quad R \geq \pi a. \quad (11)$$

Здесь параметры  $R$  и  $a$  — радиус и наклон функции  $\rho_{\text{SF}}(r)$  распределения плотности точечных нуклонов ядра, которые известны из соответствующих таблиц, а переданный импульс  $q$  определяется в зависимости от импульса  $k$  и угла рассеяния  $\theta$  падающей частицы как

$$q = 2k \sin(\theta/2) \left( 1 + \frac{2E}{M_A} \sin^2(\theta/2) \right), \quad (12)$$

где  $E$  и  $M_A$  есть полная энергия падающего  $\pi$ -мезона и масса ядра-мишени.

В случае  $R \gg a$  вторым слагаемым в функции  $\rho_{\text{SF}}(r)$  (9) можно пренебречь, тогда получаем традиционно используемую плотность ядра в виде ферми-функции

$$\rho_F = \rho_0 \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)}. \quad (13)$$

В отличие от симметризованной функции (9) производная ферми-функции (13) в центре ядра  $r = 0$  всегда отлична от нуля, поэтому справедливость ее применения для легких ядер, когда значения радиуса  $R$  и диффузности  $a$  сопоставимы по величине, вызывает вопросы. Ферми-функция используется также для потенциала, форму которого называют вудс-саксоновской.

Ниже приводятся результаты расчетов сечений пион-ядерного рассеяния, полученные на основе оптического потенциала (8), которые срав-

ниваются с экспериментальными данными. При этом параметры  $R$  и  $a$  ядерной плотности в виде симметризованной ферми-функции берутся из табличных данных, а параметры  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  амплитуды рассеяния пионов на *связанных нуклонах ядра* варьируются для определения значений, обеспечивающих согласие расчетных значений сечений с соответствующими экспериментальными данными. Таким образом, фактически изучается влияние ядерной среды на пион-нуклонную  $\pi N$ -амплитуду рассеяния — так называемый *in-medium* эффект.

**1.2. Релятивистское волновое уравнение.** Дифференциальное сечение пион-ядерного рассеяния рассчитывается, как и ранее в работе [22], с использованием релятивистского уравнения Клейна–Гордона–Фока в форме, соответствующей условию  $T \gg U$ , где  $T$  есть кинетическая энергия пиона. При этом микроскопический потенциал (8) дополняется кулоновским потенциалом  $V_C(r)$  равномерно заряженной сферы радиусом  $R_c = r_c A^{1/3}$ , который устанавливается из условия равенства *gms*-радиусов его и кулоновского фолдинг-потенциала с плотностью заряда ядра вида (9). Такой потенциал подставляется в релятивистское волновое уравнение

$$(\Delta + k^2)\psi(\mathbf{r}) = 2\bar{\mu}U(r)\psi(\mathbf{r}) = 2\mu U_{\text{eff}}(r)\psi(\mathbf{r}). \quad (14)$$

Здесь эффективный потенциал есть

$$U_{\text{eff}}(r) = \gamma^{(r)}U(r), \quad U(r) = U_{\text{opt}}(r) + U_c(r), \quad (15)$$

$$\gamma^{(r)} = \frac{\bar{\mu}}{\mu} = \frac{\bar{m}_\pi m_\pi + M_A}{m_\pi \bar{m}_\pi + M_A},$$

где  $\mu$  есть приведенная масса,  $\bar{\mu}$  — релятивистская приведенная масса  $\pi A$ -системы

$$\mu = \frac{m_\pi M_A}{m_\pi + M_A}, \quad \bar{\mu} = \frac{\bar{m}_\pi M_A}{\bar{m}_\pi + M_A}, \quad \bar{m}_\pi = \sqrt{k^2 + m_\pi^2} = T_{\text{cm}} + m_\pi = E, \quad (16)$$

а релятивистский импульс  $k$  в системе центра масс равен

$$k = \frac{M_A k_{\text{lab}}}{\sqrt{(m_\pi + M_A)^2 + 2M_A T_{\text{lab}}}} = \frac{M_A \sqrt{T_{\text{lab}}(T_{\text{lab}} + 2m_\pi)}}{\sqrt{(m_\pi + M_A)^2 + 2M_A T_{\text{lab}}}}. \quad (17)$$

На конечном этапе волновое уравнение (14) решается численно с помощью программы DWUCK4 [23], которая выдает дифференциальное и полное сечения упругого рассеяния. При этом автоматически учитываются эффекты релятивизации и искажения волновых функций относительного движения  $\pi$ -мезона в поле потенциала ядра.

### 1.3. Параметры пион-нуклонной амплитуды в ядерной среде.

Естественно предполагать, что в ядерной среде пион-нуклонное взаимодействие отличается от того, которое установлено на основе данных рассеяния пионов на свободных, не связанных в ядре нуклонах. В опре-

делении пион-ядерного оптического потенциала (6), который используется здесь в расчетах,  $\pi N$ -амплитуда (4) входит отдельно для рассеяния на протоне  $\pi p$  и нейтроне  $\pi n$ . Поэтому в общем случае оптический потенциал зависит от шести параметров  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , из них три — для рассеяния на протонах и три — на нейтронах ядра. Вопрос о том, насколько сильно ядерная среда влияет на параметры пион-нуклонной амплитуды, рассматривался в работе [24], в которой были проведены расчеты и сравнения с экспериментальными данными [25] дифференциальных сечений упругого рассеяния  $\pi^\pm$ -мезонов на ядрах  $^{28}\text{Si}$ ,  $^{58}\text{Ni}$ ,  $^{208}\text{Pb}$  при энергии  $T_{\text{lab}} = 291$  МэВ. Распределения плотности точечных протонов и нейтронов ядра выбирались одинаковыми в виде ферми-функций  $\rho(r)$ , нормированных соответственно на  $Z$  и  $A - Z$  ядра, со значениями радиуса  $R$  и диффузности  $a$  (в единицах ферми): 3,134 и 0,477 для  $^{28}\text{Si}$  [26], 4,2 и 0,475 для  $^{58}\text{Ni}$  [27], 6,654 и 0,475 для  $^{208}\text{Pb}$  [28]. Значения параметров  $\pi p$ - и  $\pi n$ -амплитуд рассеяния (4) взяты из работы [29], в которой они были приведены как данные фазового анализа  $\pi N$ -рассеяния и использованы в подходе Глаубера для расчета сечений рассеяния  $\pi^- + ^{12}\text{C}$  при  $T_{\text{lab}} = 260$  МэВ и  $\pi^+ + ^{16}\text{O}$  при 270 МэВ. В наших расчетах сечений при энергии пионов 291 МэВ [24] использовались как эти параметры, так и их линейная экстраполяция к энергии 291 МэВ (табл. 1). На рис. 1, *a* и *б* эти сечения даны штриховыми и сплошными линиями соответственно, разница между ними заметна в основном при сравнительно больших углах рассеяния. Видно, что предложенный потенциал (6) и схема расчета вполне себя оправдывают, а использование параметров амплитуд  $\pi N$ -рассеяния, полученных из анализа рассеяния на легких ядрах  $^{12}\text{C}$  и  $^{16}\text{O}$  при близких энергиях, позволяет отразить основные черты сечений рассеяния только на ядрах среднего атомного веса  $^{28}\text{Si}$ ,  $^{58}\text{Ni}$ . Также видно, что в случае кулоновского потенциала притяжения для  $\pi^-$ -мезонов (см. рис. 1, *a*), который обеспечивает их более глубокое проникновение в ядро, дифракционная картина более рельефна, чем в случае  $\pi^+$ -мезонов, когда происходит отталкивание (см. рис. 1, *б*). При рассеянии  $\pi$ -мезонов

Таблица 1. Параметры амплитуды (4) рассеяния пионов на свободных нуклонах

$T_{\text{lab}}$ , МэВ	$\sigma_{\pi^-p}$ , фм <sup>2</sup>	$\alpha_{\pi^-p}$	$\beta_{\pi^-p}$ , фм <sup>2</sup>	$\sigma_{\pi^-n}$ , фм <sup>2</sup>	$\alpha_{\pi^-n}$	$\beta_{\pi^-n}$ , фм <sup>2</sup>	Ссылка
260	3,5	-0,28	0,436	9,3	-0,91	0,463	[29]
291	2,5	-0,46	0,370	6,0	-1,23	0,420	Экстраполяция
$T_{\text{lab}}$ , МэВ	$\sigma_{\pi^+n}$ , фм <sup>2</sup>	$\alpha_{\pi^+n}$	$\beta_{\pi^+n}$ , фм <sup>2</sup>	$\sigma_{\pi^+p}$ , фм <sup>2</sup>	$\alpha_{\pi^+p}$	$\beta_{\pi^+p}$ , фм <sup>2</sup>	Ссылка
270	3,2	-0,28	0,405	8,5	-1,0	0,436	[29]
291	1,0	-0,58	0,370	7,7	-1,1	0,400	Экстраполяция

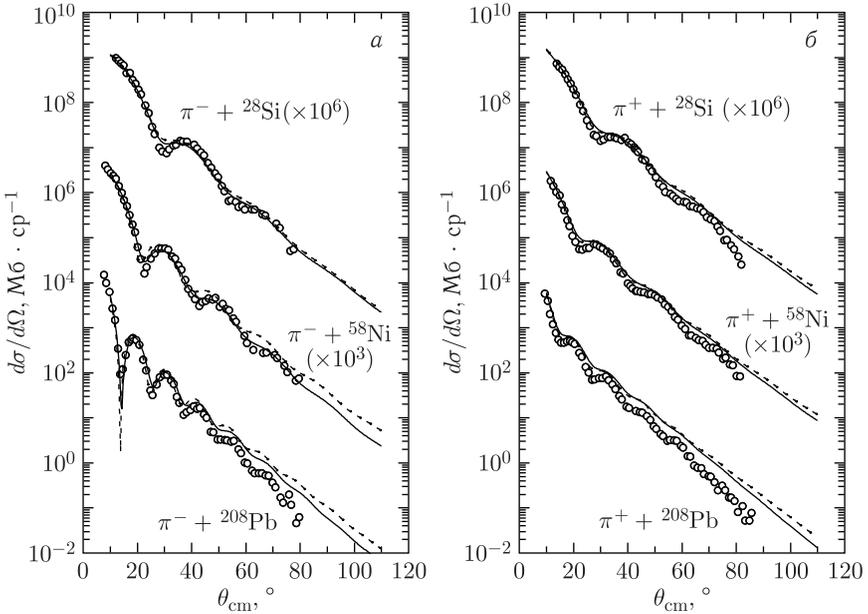


Рис. 1. Рассчитанные в [24] значения дифференциальных сечений упругого рассеяния  $\pi$ -мезонов на ядрах в сравнении с экспериментальными данными при  $E_{\text{lab}} = 291$  МэВ с использованием данных по пион-нуклонным амплитудам из табл. 1. Штриховые кривые — использование параметров для  $\pi^-$ -мезонов при 260 МэВ, а для  $\pi^+$ -мезонов при 270 МэВ (из работы [29]), сплошные — экстраполяции этих параметров к энергии 291 МэВ. Экспериментальные данные взяты из [25]

на тяжелом ядре  $^{208}\text{Pb}$  расхождение с экспериментом оказывается весьма значительным, что в данном подходе мы связываем, в первую очередь, с необходимостью учета влияния ядерной среды на величину параметров  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  элементарной амплитуды  $\pi N$ -взаимодействия.

Дать количественную оценку уровня согласия результатов этих расчетов с экспериментальными данными можно по их  $\chi^2$ -отклонениям (на точку), которые определялись по формуле

$$\chi^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\left| \frac{d\sigma^{\text{exp}}}{d\Omega(\theta_i)} - \frac{d\sigma^{\text{theor}}}{d\Omega(\theta_i)} \right|}{\frac{\Delta d\sigma^{\text{exp}}}{d\Omega(\theta_i)}}, \quad (18)$$

где  $\Delta d\sigma^{\text{exp}}/d\Omega(\theta_i)$  в знаменателе определяет 10%-ю «ошибку» экспериментального значения сечения в точке  $i$ , а  $N$  — число измеренных значений сечения. В данном случае для  $\pi^-$ -мезонов значение  $\chi^2$  находится в пределах от 4,675 ( $^{58}\text{Ni}$ ) до 85,32 ( $^{208}\text{Pb}$ ), а для  $\pi^+$ -мезонов — от 24,05 ( $^{58}\text{Ni}$ ) до 173,33 ( $^{208}\text{Pb}$ ). Отклонения штриховых линий на

рис. 1, а и б, рассчитанных с использованием параметров элементарной  $\pi N$ -амплитуды при энергиях 260 и 270 МэВ, еще более сильные.

Таким образом, естественно ставить вопрос о значениях параметров  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  амплитуды рассеяния  $\pi$ -мезонов на *связанных нуклонах* ядра, обеспечивающих согласие рассчитанных значений пион-ядерных сечений и экспериментальных данных. При этом целесообразно уменьшить число варьируемых параметров пион-нуклонной амплитуды, используя вместо двух амплитуд  $\pi n$ - и  $\pi p$ -рассеяния единую 3-параметрическую амплитуду  $\pi N$ -рассеяния, зависящую от усредненных параметров  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ . Это можно сделать, используя соотношения изоспиновой симметрии (7). Также считаем, что функции распределения плотности протонов и нейтронов ядра имеют одинаковую форму  $\rho_p = \rho_n = (1/2)\rho$ , где плотность  $\rho(r)$  нормирована на атомный вес ядра  $A$ . При этом сам потенциал рассчитывается по формуле (8), в которой он выражается через три параметра ( $\sigma$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ ) амплитуды  $\pi N$ -рассеяния в ядерной среде (табл. 2). В последнем столбце табл. 2 приведены значения этих параметров при рассеянии на свободных нуклонах, которые получены аппроксимацией данных, представленных в работах [30, 31] при  $E_{\text{lab}}$  от 90 до 280 МэВ. Согласие рассчитываемых значений сечений к данным пион-ядерного рассеяния достигалось за счет варьирования двух параметров ( $\sigma$  и  $\alpha$ ) при сохранении значения параметра наклона  $\beta = 0,434$  фм<sup>2</sup>, известного из рассеяния на свободных нуклонах. Среднеквадратичное отклонение  $\chi^2$  рассчитанных значений сечений от соответствующих экспериментальных данных определялось по формуле (18).

В качестве иллюстрации на рис. 2 показана динамика изменения параметров функции отклонения, соответственно, для случаев рассеяния  $\pi^+ + {}^{28}\text{Si}$ ,  $\pi^- + {}^{58}\text{Ni}$  и  $\pi^+ + {}^{208}\text{Pb}$ , когда значения  $\chi^2$  сходятся к своему минимуму. На рис. 3, а и б сплошными линиями показаны рассчитанные значения сечений для  $\pi^-$ - и  $\pi^+$ -рассеяния в сравнении с экспериментальными данными, а соответствующие  $\chi^2$ -отклонения и параметры  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  даны в табл. 2. Штриховыми линиями на рис. 3 приведены сечения, рассчитанные с параметрами  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  амплитуды рассеяния на свобод-

**Таблица 2. Обеспечивающие наилучшее согласие с экспериментальными данными значения параметров  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  амплитуды рассеяния пионов (4) на нуклонах ядер при  $E_{\text{lab}} = 291$  МэВ, входящих в оптический потенциал (8), и соответствующие значения  $\chi^2$  и  $\chi_0^2$**

Параметр	<sup>28</sup> Si		<sup>58</sup> Ni		<sup>208</sup> Pb		Свободное $\pi N$ -рассеяние
	$\pi^+$	$\pi^-$	$\pi^+$	$\pi^-$	$\pi^+$	$\pi^-$	
$\sigma$ , фм <sup>2</sup>	5,55	4,81	5,43	4,09	4,04	4,23	4,76
$\alpha$	-0,64	-0,88	-0,68	-1,02	-0,56	-0,92	-0,95
$\beta$ , фм <sup>2</sup>	0,434						
$\chi^2$	2,30	3,56	1,73	4,25	3,94	6,95	—
$\chi_0^2$	23,5	5,46	17,70	9,92	676,40	28,10	—

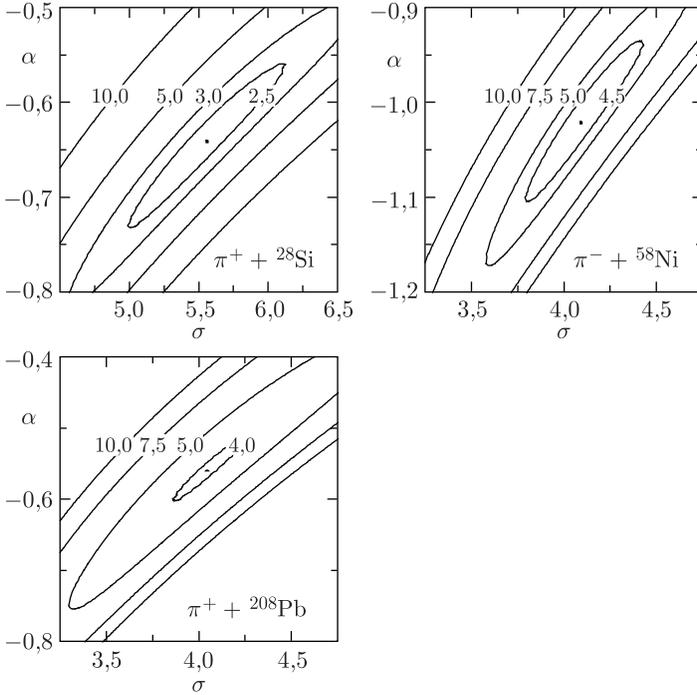


Рис. 2. Поведение  $\chi^2$ -отклонений (18) при варьировании параметров  $\sigma$ ,  $\alpha$  к экспериментальным данным расчетов дифференциальных сечений рассеяния  $\pi$ -мезонов на ядрах  ${}^{28}\text{Si}$ ,  ${}^{58}\text{Ni}$ ,  ${}^{208}\text{Pb}$  при энергии  $E_{\text{lab}} = 291$  МэВ

ных (несвязанных) нуклонах, их значения даны в последнем столбце табл. 2, а соответствующие им  $\chi_0^2$ -отклонения от «экспериментальных» сечений — в последней строке табл. 2.

На основе проведенного анализа можно сделать ряд заключений. Во-первых, сам факт построения оптического потенциала (6), (8), который явно зависит от параметров пион-нуклонной амплитуды рассеяния, дает возможность анализа поведения амплитуды пион-нуклонного рассеяния в ядерной среде. Во-вторых, оказалось, что использование значений параметров  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  амплитуды рассеяния  $\pi$ -мезона на свободных нуклонах не позволяет с приемлемой точностью объяснить данные сечений пион-ядерного рассеяния. Этот вывод сохраняется как для расчетов с отдельно заданными свободными пион-протонными и пион-нейтронными амплитудами (всего шесть параметров), так и для расчетов с единой пион-нуклонной амплитудой рассеяния, которая зависит от трех усредненных значений параметров. В последнем случае (см. табл. 2) получаем сечение  $\pi N$ -рассеяния в ядерной среде, усредненное по трем ядрам-мишеням, которое равно  $\bar{\sigma} = 4,69$  фм<sup>2</sup>. Это значение не совпадает с величиной се-

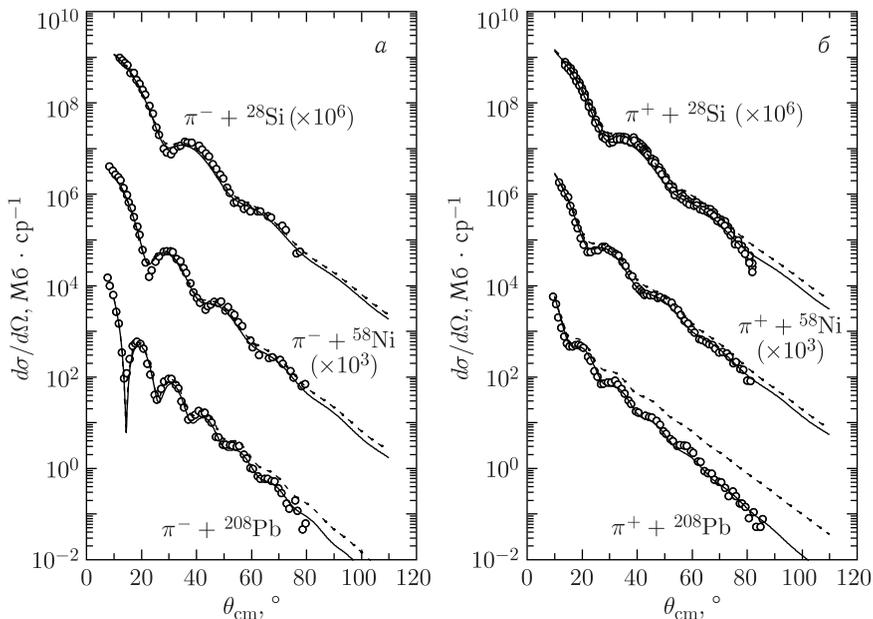


Рис. 3. Рассчитанные в [24] значения дифференциальных сечений рассеяния  $\pi^-$ - и  $\pi^+$ -мезонов на ядрах при  $T_{\text{lab}} = 291$  МэВ в сравнении с экспериментальными данными при использовании результатов по пион-нуклонным амплитудам из табл. 2, штриховые линии — с параметрами  $\pi N$ -амплитуд рассеяния на свободных нуклонах, сплошные — с параметрами  $\pi N$ -амплитуд подгонки. Экспериментальные данные взяты из [25]

чения свободного  $\pi N$ -рассеяния  $\sigma = 4,76$  фм<sup>2</sup>. Также усредненный параметр преломления  $\bar{\alpha} = -0,78$  отличается примерно на 10% от его значения  $\alpha = -0,95$  в случае рассеяния пионов на свободных нуклонах. Такие сравнительно небольшие отклонения параметров элементарной амплитуды  $\pi N$ -рассеяния на связанных нуклонах от параметров рассеяния на свободных нуклонах можно объяснить тем, что при достаточно большой энергии (291 МэВ) система  $\pi N$ -рассеяния находится на границе выхода из области (3,3)-резонанса, где механизм процесса определяется двумя конкурирующими, а в данном случае уравновешивающими друг друга, факторами. Один — это «разбухание» нуклона в ядре (swelling) [32], что, казалось бы, должно приводить к росту сечения. Другой фактор — это ослабление взаимодействия пиона со связанным нуклоном ядра, который в отличие от свободного нуклона испытывает действие принципа Паули (blocking effect) (см., например, [33, 34]). С ростом энергии этот последний эффект теряет силу, что видно, например, из анализа рассеяния пионов на ядре <sup>12</sup>C [35] при большой энергии (672 МэВ). В этом случае эффект «разбухания» должен играть определяющую роль, из-за чего,

видимо, полное сечение  $\pi N$ -рассеяния на ядерном нуклоне несколько превысило значение сечения рассеяния на свободном нуклоне.

В заключение следует отметить, что и в нашем анализе [26, 36], и в работе [35] согласие с экспериментальными данными достигалось за счет варьирования только двух параметров ( $\sigma$  и  $\alpha$ ), в то время как параметр наклона  $\beta$  сохранялся таким, как для свободной амплитуды. В этом плане актуальным остается более трудоемкий анализ с варьированием трех параметров ( $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ) в области более низких значений энергии 100–250 МэВ, в которой явно проявляется  $\pi N$  (3,3)-резонанс, а нуклон находится в ядре в связанном состоянии. Результаты такого анализа будут представлены в п. 1.5.

#### 1.4. Локальная модель оптического потенциала Кисслингера.

Как уже отмечалось во введении, нелокальную форму добавки  $\nabla v(r)\nabla$  в потенциале пион-ядерного взаимодействия Кисслингера [1] трудно использовать в приложениях. В работе [2] предложена линейризация этого потенциала с помощью замены волновой функции в виде  $\varphi(\mathbf{r}) = [1 - \alpha(r)]^{-1/2}\psi(\mathbf{r})$ . В результате получается, что функция  $\psi(\mathbf{r})$  удовлетворяет обычному волновому уравнению (14), в котором импульс  $\pi$ -мезона соответствует энергии  $E = T_{\text{cm}} + m_\pi$ , а потенциал преобразуется в форму [18]

$$V(r) = \frac{(\hbar c)^2}{2E} \frac{1}{1 - \alpha} \left\{ u - k^2 \alpha - \left[ \frac{1}{2} \nabla^2 \alpha + \frac{\left(\frac{1}{2} \nabla \alpha\right)^2}{1 - \alpha} \right] \right\}, \quad (19)$$

где  $u = u(r)$  и  $\alpha = \alpha(r)$ . Решение уравнения — функция  $\psi = \psi(\mathbf{r})$  — соответствует вкладу в потенциал в основном от  $s$ - и частично от  $p$ -взаимодействия в  $\pi N$ -системе, а другие слагаемые с производными функциями  $\alpha = \alpha(r)$  дают сравнительно небольшие вклады только от  $p$ -волновой части взаимодействия. Ниже эти составляющие потенциала даны в форме, представленной в работе [18] при энергии пиона порядка 100 МэВ и более:

$$u(r) = -4\pi p_1 [\mathbf{b}_0 \rho(r) \mp \mathbf{b}_1 \Delta \rho(r)] + \delta q, \quad (20)$$

$$\alpha(r) = 4\pi \frac{[\mathbf{c}_0 \rho(r) \mp \mathbf{c}_1 \Delta \rho(r)]}{p_1} + 4\pi \frac{[\mathbf{C}_0 \rho^2(r) \mp \mathbf{C}_1 \rho(r) \Delta \rho(r)]}{p_2}, \quad (21)$$

$$\delta q(r) = -2\pi \varepsilon \nabla^2 \left\{ \frac{[\mathbf{c}_0 \rho(r) \mp \mathbf{c}_1 \Delta \rho(r)]}{p_1} + \frac{1}{2} \frac{[\mathbf{C}_0 \rho^2(r) \mp \mathbf{C}_1 \rho(r) \Delta \rho(r)]}{p_2} \right\}. \quad (22)$$

Здесь  $\mathbf{b}_0$ ,  $\mathbf{b}_1$ ,  $\mathbf{c}_0$ ,  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{C}_0$ ,  $\mathbf{C}_1$  есть комплексные числа — варьируемые параметры (всего 12 чисел). Их вещественные и мнимые части определяют, соответственно, реальную и мнимую части оптического потенциала и зависят от энергии столкновения и массы ядра-мишени. Также обозна-

чено  $\Delta\rho = \rho_n - \rho_p$ ,  $p_1 = 1 + \varepsilon$ ,  $p_2 = 1 + (1/2)\varepsilon$ , где  $\varepsilon = E/M$ ,  $M$  — масса нуклона.

Дифференциальные сечения рассеяния рассчитываются, как и в работе [22], на основе решения уравнения Клейна–Гордона в форме (14).

**1.5. Анализ сечений упругого пион-ядерного рассеяния на основе оптических потенциалов фолдинга и модели Кисслингера.** Ниже представлены результаты широкого анализа экспериментальных данных по дифференциальным сечениям упругого рассеяния пионов на ядрах  $^{28}\text{Si}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{58}\text{Ni}$ ,  $^{208}\text{Pb}$  при энергиях в области (3,3)-резонанса пион-нуклонного рассеяния [37]. При этом используются два оптических потенциала. Первый — это потенциал фолдинга (свертки) с параметрами  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  амплитуды рассеяния пиона на нуклоне, находящемся в ядерной среде. Эти параметры определяются путем минимизации отклонения вычисляемых значений сечений пион-ядерного рассеяния от экспериментальных данных и затем сравниваются с соответствующими параметрами амплитуды рассеяния пионов на свободных, не связанных в ядре нуклонах. Второй потенциал — это оптический потенциал Кисслингера, при построении которого учитывается специфика пион-нуклонного (3,3)-резонанса и который зависит от шести комплексных варьируемых параметров, меняющихся по мере роста энергии падающих мезонов. В обоих случаях на основе заданного кулоновского и ядерного потенциалов рассчитывается сечение пион-ядерного рассеяния с помощью численного решения релятивистского волнового уравнения (14). При этом в каждом из заданных потенциалов варьируются определяющие его параметры. В потенциале фолдинга это три параметра ( $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ) для каждого ядра-мишени и энергии  $\pi$ -мезона, а в потенциале Кисслингера — это 12 параметров для каждого значения энергии, но для всех четырех ядер-мишеней. Таким образом, достигается согласие рассчитанных сечений с соответствующими экспериментальными данными. В рамках обоих подходов при расчете потенциалов используется симметризованная ферми-функция (SF) как функция распределения плотности ядра либо как функция распределения «точечных» (point-like) нуклонов ядра. Процедура определения значений варьируемых параметров для обоих потенциалов реализуется как минимизация соответствующих  $\chi^2$ -функций, определяющих отклонение рассчитываемых значений дифференциальных сечений рассеяния  $\pi$ -мезонов от их экспериментальных данных в области углов рассеяния до  $80^\circ$ .

Результаты расчетов дифференциальных сечений упругого рассеяния  $\pi^\pm$ -мезонов на ядрах  $^{28}\text{Si}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{58}\text{Ni}$  и  $^{208}\text{Pb}$  и их сравнение с соответствующими экспериментальными данными представлены на рис. 4–7. Так, на рис. 4 можно видеть хорошее согласие рассчитанных значений сечений с экспериментальными данными для ядра-мишени  $^{28}\text{Si}$  при энергиях  $\pi$ -мезонов 130, 162, 180, 226 и 291 МэВ во всей области проявления (3,3)-резонанса. В расчетах использовался потенциал фол-

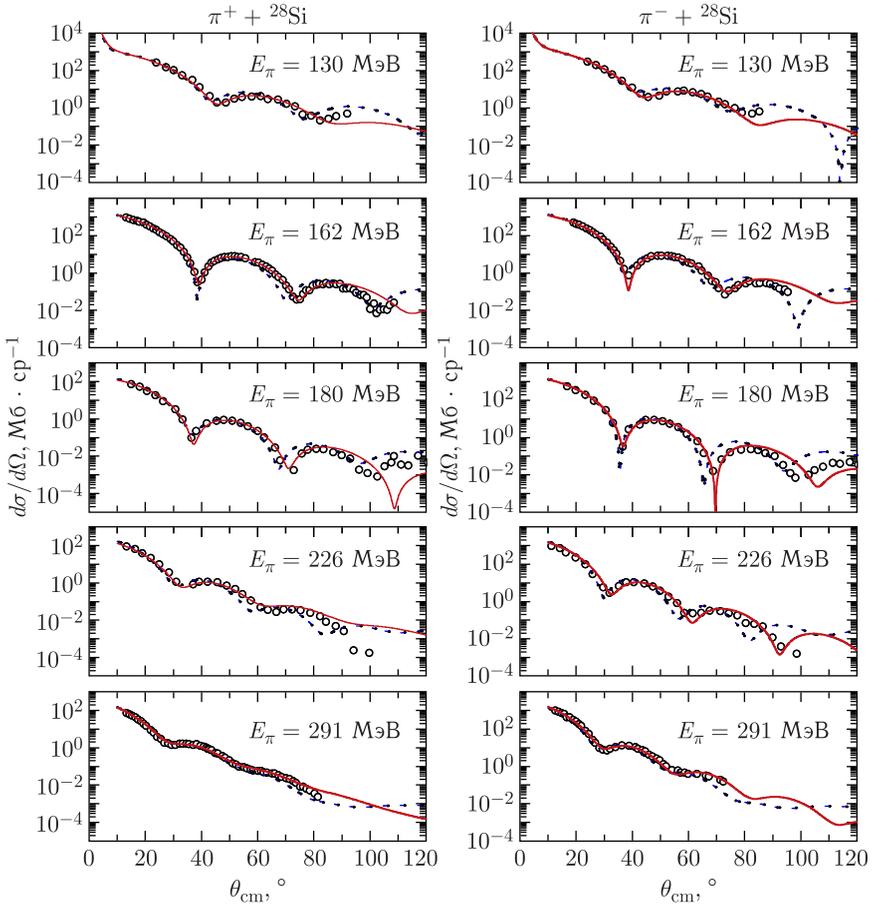


Рис. 4. Рассчитанные в [37] значения сечений упругого рассеяния  $\pi^\pm + {}^{28}\text{Si}$  при энергиях 130, 162, 180, 226 и 291 МэВ в сравнении с экспериментальными данными из [25, 40, 41]. Сплошные линии — расчеты на основе оптического потенциала фолдинга, а штриховые — на основе локального потенциала Кисслингера. Параметры  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  амплитуды  $\pi N$ -рассеяния «в среде», используемые в расчетах потенциала фолдинга, даны в табл. 3, а параметры оптического потенциала Кисслингера — в табл. 4

динга (8) (сплошные линии), параметры функции распределения плотности «точечных» нуклонов ядра  $R_c = 3,134$  фм,  $a_c = 0,477$  фм взяты из работ [26, 38], а полученные в ходе фитирования параметры пион-нуклонной амплитуды рассеяния  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  приведены в табл. 3. Достаточно хорошее согласие получается при использовании потенциала Кисслингера (штриховые линии) с параметрами распределения плотности ядра  ${}^{28}\text{Si}$  в виде симметризованных ферми-функций  $R = 3,14$  фм и  $a = 0,537$  фм

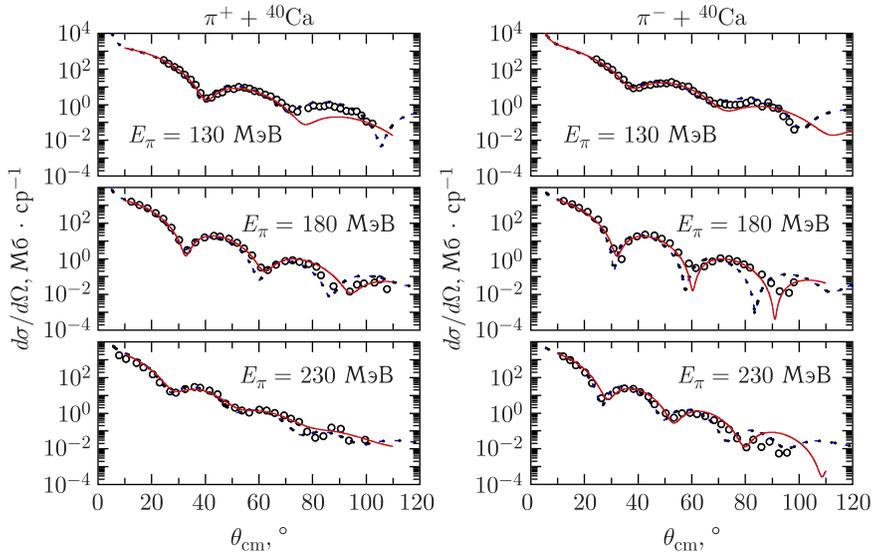


Рис. 5. То же, что и на рис. 4, но для упругого рассеяния  $\pi^\pm + {}^{40}\text{Ca}$  при энергиях  $\pi$ -мезонов 130, 180 и 230 МэВ. Экспериментальные данные взяты из [42]

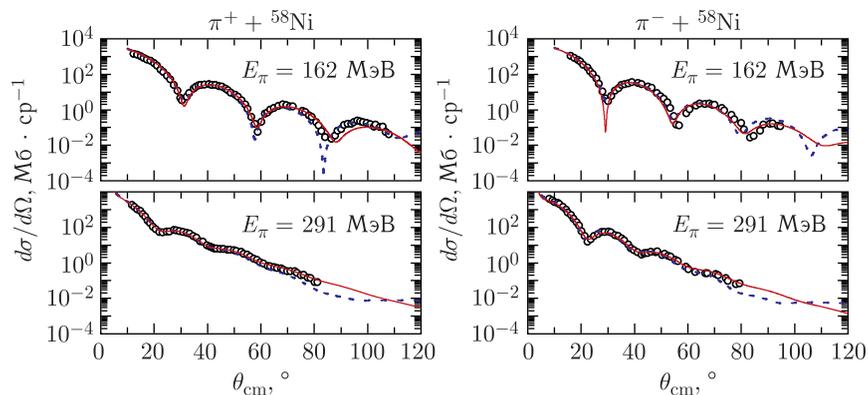


Рис. 6. То же, что и на рис. 4, но для упругого рассеяния  $\pi^\pm + {}^{58}\text{Ni}$  при энергиях  $\pi$ -мезонов 162 и 291 МэВ. Экспериментальные данные взяты из [25, 41]

из работы [39] и с 12 параметрами самого потенциала Кисслингера из табл. 4. Соответствующие экспериментальные данные взяты из работ [25, 40, 41].

Аналогичным образом были рассчитаны сечения и для других ядер-мишеней —  ${}^{40}\text{Ca}$ ,  ${}^{58}\text{Ni}$  и  ${}^{208}\text{Pb}$ . Соответствующие расчетные значения в сравнении с экспериментальными данными представлены на рис. 5–7.

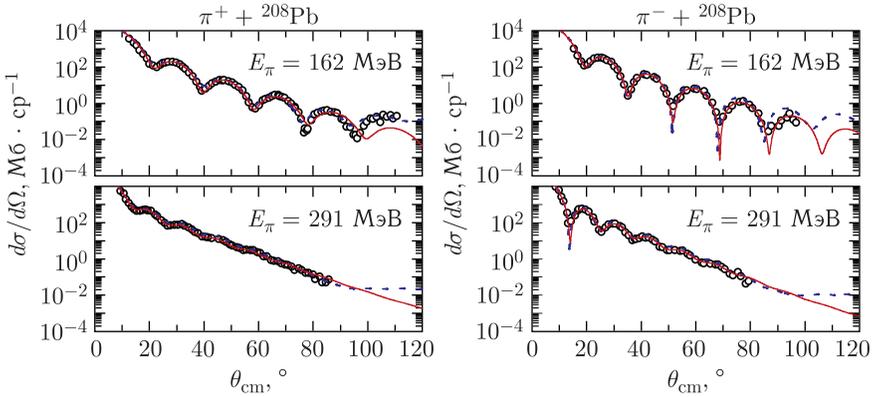


Рис. 7. То же, что и на рис. 4, но для упругого рассеяния  $\pi^\pm + {}^{208}\text{Pb}$  при энергиях  $\pi$ -мезонов 162 и 291 МэВ. Экспериментальные данные взяты из [25, 41]

При этом для оптических потенциалов использовались параметры, которые приведены в табл. 3 и 4. Для ядра  ${}^{40}\text{Ca}$  (см. рис. 5) экспериментальные данные сечений взяты из работы [42], а в расчетах использовались следующие параметры симметризованной ферми-плотности ядра:  $R_c = 3,593$  фм,  $a_c = 0,493$  фм из работы [26] и  $R = 3,53$  фм,  $a = 0,562$  фм из работы [38]. На рис. 6 приведены расчетные значения сечений при энергиях  $\pi$ -мезонов 162 и 291 МэВ для ядра  ${}^{58}\text{Ni}$ , которые сравниваются с экспериментальными данными из работ [25, 41]. Здесь параметры симметризованных ферми-функций распределения плотности «точечных» нуклонов и распределения реальной плотности ядра-мишени представлены следующими значениями:  $R_c = 4,08$  фм,  $a_c = 0,515$  фм из [43] и  $R = 4,024$  фм,  $a = 0,582$  фм из [44]. Далее, на рис. 7 приведены экспериментальные данные сечений рассеяния пионов на ядре  ${}^{208}\text{Pb}$  при энергиях 162 и 291 МэВ из работ [25, 41] и соответствующие им сечения [45], рассчитанные с использованием параметров плотности ядра  $R_c = 6,654$  фм,  $a_c = 0,475$  фм из [28] и  $R = 6,67$  фм,  $a = 0,545$  фм из [18].

Следует отметить, что при расчетах с использованием потенциала Кислингера значения 12 варьируемых параметров меняются только по мере изменения энергии столкновения и практически не зависят от выбора ядра-мишени. В нашем случае мы исходили из тех параметров этого потенциала, которые были получены в работе [18] при анализе сечений рассеяния  $\pi$ -мезонов на двух ядрах ( ${}^{16}\text{O}$  и  ${}^{208}\text{Pb}$ ) при энергиях 162 и 226 МэВ. Оказалось, что в расчетах сечений рассеяния на ядрах  ${}^{28}\text{Si}$ ,  ${}^{40}\text{Ca}$ ,  ${}^{58}\text{Ni}$  и  ${}^{208}\text{Pb}$  при энергиях 130, 162, 180, 226, 230 и 291 МэВ вычисленные параметры потенциалов практически совпадают при одинаковых энергиях с теми, которые приведены в работе [18]. Из табл. 4 видно, что их реальные части, кроме  $\text{Re } b_1$  и  $\text{Re } C_1$ , слабо растут ли-

Таблица 3. Параметры  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  оптических потенциалов фолдинга (8), обеспечивающие наилучшее согласие расчетных и экспериментальных данных, и соответствующие значения  $\chi^2$ . Фитирование параметров проводилось по экспериментальным точкам в области углов рассеяния  $\Theta_{\text{cm}}$  от 0 до  $80^\circ$

Реакция	$T_{\text{lab}}$ , МэВ	$\sigma$ , фм <sup>2</sup>	$\alpha$	$\beta$ , фм <sup>2</sup>	$\chi^2$
$\pi^- + {}^{28}\text{Si}$	130	7,00	0,84	0,93	0,122
$\pi^+ + {}^{28}\text{Si}$		5,87	1,00	1,42	0,872
$\pi^- + {}^{40}\text{Ca}$		7,15	0,84	1,02	0,603
$\pi^+ + {}^{40}\text{Ca}$		5,65	0,98	1,55	1,982
$\pi^- + {}^{28}\text{Si}$	162	9,05	0,49	0,50	0,398
$\pi^+ + {}^{28}\text{Si}$		8,15	0,68	0,81	0,776
$\pi^- + {}^{58}\text{Ni}$		10,53	0,09	0,99	3,685
$\pi^+ + {}^{58}\text{Ni}$		8,03	0,49	0,87	1,111
$\pi^- + {}^{208}\text{Pb}$		10,00	0,30	1,01	0,644
$\pi^+ + {}^{208}\text{Pb}$		6,22	0,61	1,28	0,719
$\pi^- + {}^{28}\text{Si}$	180	8,97	0,37	0,44	1,262
$\pi^+ + {}^{28}\text{Si}$		8,35	0,61	0,52	1,024
$\pi^- + {}^{40}\text{Ca}$		8,95	0,40	0,45	0,891
$\pi^+ + {}^{40}\text{Ca}$		6,85	0,94	0,67	1,588
$\pi^- + {}^{28}\text{Si}$	226	7,35	0,54	0,33	4,160
$\pi^+ + {}^{28}\text{Si}$		8,75	-0,17	0,36	4,997
$\pi^- + {}^{40}\text{Ca}$	230	6,75	0,64	0,29	2,123
$\pi^+ + {}^{40}\text{Ca}$		8,05	-0,25	0,55	2,743
$\pi^- + {}^{28}\text{Si}$	291	4,86	-0,80	0,39	1,169
$\pi^+ + {}^{28}\text{Si}$		5,24	-0,76	0,45	0,874
$\pi^- + {}^{58}\text{Ni}$		4,55	-0,86	0,32	0,863
$\pi^+ + {}^{58}\text{Ni}$		5,47	-0,65	0,37	0,558
$\pi^- + {}^{208}\text{Pb}$		4,97	-0,93	0,64	0,592
$\pi^+ + {}^{208}\text{Pb}$		6,04	-0,43	0,64	0,574

бо убывают с увеличением энергии столкновения, а значения мнимых частей параметров  $b_0$  и  $b_1$  растут с увеличением энергии, в то время как мнимые части  $c_0, c_1, C_0, C_1$  сначала растут при увеличении энергии до 180–226 МэВ, а потом плавно убывают при увеличении энергии до 291 МэВ, что, видимо, связано с проявлением в этом интервале энергии (3,3)-резонанса сечений пион-нуклонного рассеяния.

В итоге можно сказать, что и потенциал фолдинга, и потенциал Кисслингера, несмотря на их различия во внутренней области ядра, приводят к хорошему согласию рассчитанных значений сечений с экспериментальными данными. Причину такого согласия можно понять на примере данных рассеяния  $\pi^+ + {}^{28}\text{Si}$ , представленных на рис. 8, где приведены результаты расчетов сечений для каждой пары потенциалов фолдинга и Кисслингера при энергиях 162, 226 и 291 МэВ в области

Таблица 4. Параметры потенциалов Кисслингера в зависимости от энергии  $\pi$ -мезонов

$E_\pi$ , МэВ	$Re b_0$	$Re b_1$ , фм	$Re c_0$	$Re c_1$ , фм <sup>3</sup>	$Re C_0$	$Re C_1$ , фм <sup>6</sup>
130	-0,0592	-0,1291	0,7479	0,4171	0,4919	1,8353
162	-0,0770	-0,1219	0,4935	0,2754	0,4325	2,2229
180	-0,0853	-0,1245	0,3671	0,2050	0,4369	2,2458
226	-0,1008	-0,1214	0,0849	0,0478	0,5657	1,6316
230	-0,1018	-0,1212	0,0634	0,0359	0,5850	1,5332
291	-0,1088	-0,1189	-0,2026	-0,1123	1,0406	-0,8569
$E_\pi$ , МэВ	$Im b_0$	$Im b_1$ , фм	$Im c_0$	$Im c_1$ , фм <sup>3</sup>	$Im C_0$	$Im C_1$ , фм <sup>6</sup>
130	0,0310	0,0007	0,3025	0,1502	2,0026	3,8615
162	0,0403	0,0046	0,5525	0,2753	2,1163	4,4689
180	0,0451	0,0071	0,6394	0,3185	2,1380	4,5148
226	0,0559	0,0129	0,6712	0,3324	2,0230	3,5965
230	0,0567	0,0134	0,6614	0,3272	2,0021	3,4478
291	0,0675	0,0209	0,2617	0,1216	1,4690	-0,1836

(3,3)-резонанса. Видно, что оба сечения, рассчитанные при одинаковых энергиях, но в рамках разных подходов, практически совпадают вплоть до углов рассеяния  $70^\circ$  (и до  $50^\circ$  для сечений при 226 МэВ). При этом в каждой паре потенциалы значительно (даже по знаку) отличаются друг от друга во внутренней области, что особенно сильно проявляется при энергиях 162 и 226 МэВ, и практически всюду совпадают при максимальной энергии 291 МэВ. В то же время поведение потенциалов в каждой паре оказывается весьма близким друг другу в области их периферии.

Важная роль периферийной области оптического потенциала (ОП) подтверждается в работе [44] сравнительными расчетами на основе 3-параметрического микроскопического потенциала свертки и стандартного 6-параметрического потенциала Вудса–Саксона. Эти результаты представлены для случая рассеяния  $\pi^- + {}^{208}\text{Pb}$  при энергии 162 МэВ на рис. 9, где рассчитанный микроскопический потенциал и дифференциальные сечения показаны сплошными линиями. Параметры потенциала свертки  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и соответствующие значения  $\chi^2$ -отклонения приведены в табл. 3. Два набора параметров 6-параметрического потенциала Вудса–Саксона взяты из работы [15] и показаны на рис. 9 штриховыми и штрихпунктирными линиями соответственно. Несмотря на существенную разницу между значениями параметров в этих двух потенциалах,  $\chi^2$ -отклонения от экспериментальных данных и рассчитанные значения сечений рассеяния близки как между собой, так и с результатами расчета на основе микроскопического потенциала. Из рис. 9 видно, что потенциалы сильно отличаются по глубине, но очень близки в области периферии, за счет чего и обеспечивается согласие с экспериментальными данными.

Отсюда можно сделать весьма важное заключение, что область периферии ядра играет решающую роль в формировании сечения упругого

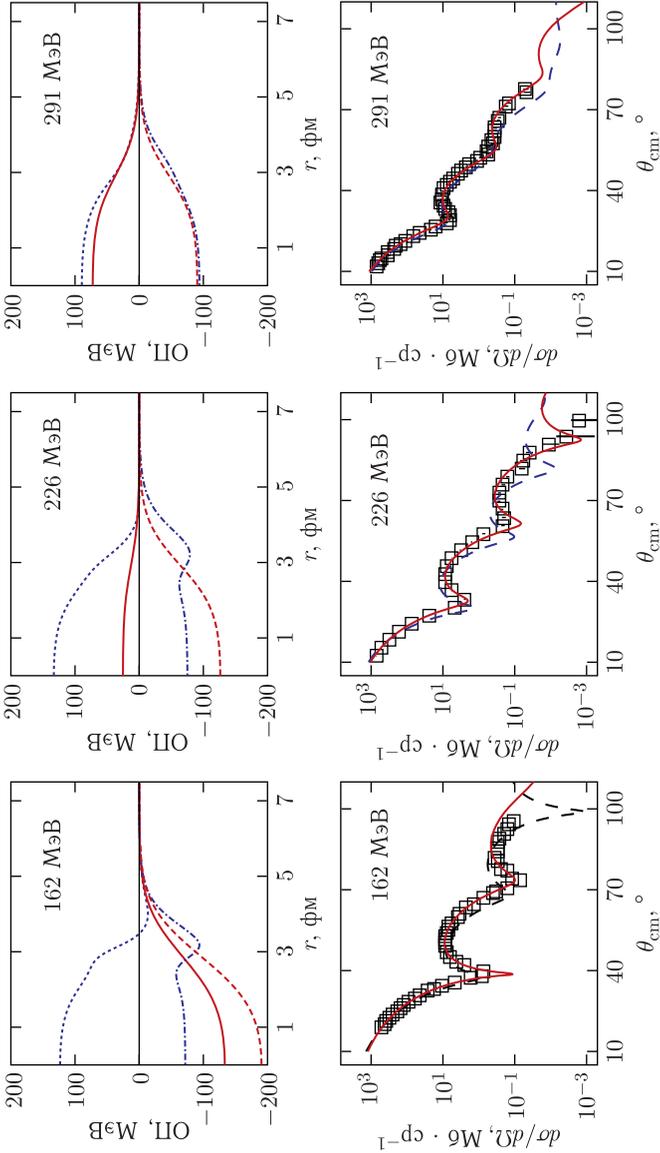


Рис. 8. Потенциалы в сравнении с соответствующими сечениями пион-ядерного рассеяния  $\pi^+ + {}^{28}\text{Si}$  при энергиях  $T_{\text{lab}} = 162, 226$  и  $291$  МэВ (см. [44]). В верхнем ряду показаны потенциалы фолдинга (сплошные линии для вещественной части потенциалов и штриховые — для мнимой части), которые сравниваются с потенциалами Кислингера (19): пунктирные линии — для вещественной части, штрихпунктирные — для мнимой части потенциала. В нижнем ряду даны соответствующие сечения (сплошные линии — на основе потенциала фолдинга, штриховые — с помощью потенциала Кислингера)

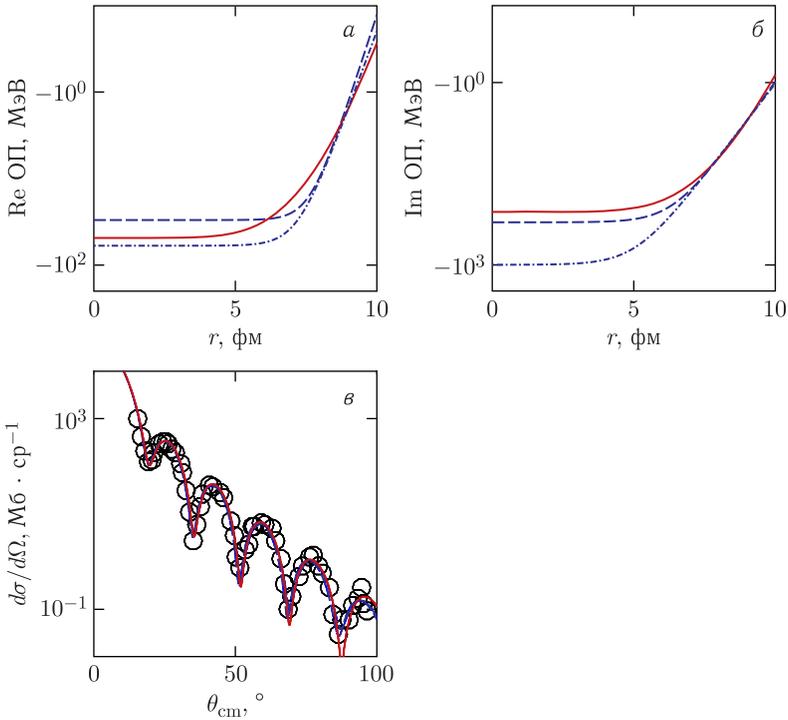


Рис. 9. Анализ роли периферии ядро-ядерных столкновений. Сплошные линии — микроскопический потенциал свертки и соответствующее дифференциальное сечение упругого рассеяния  $\pi^- + {}^{208}\text{Pb}$  при 162 МэВ. Штриховые и штрихпунктирные — то же самое, но для 6-параметрического потенциала Вудса-Саксона с двумя наборами параметров, полученных в [15]. Экспериментальные данные взяты из [41]

пион-ядерного рассеяния при энергиях в области (3,3)-резонанса и что поведение потенциала на расстояниях меньше радиуса его полуспада практически не влияет на результаты его сравнения с сечениями рассеяния в наблюдаемой области их измерения.

### 1.6. Влияние ядерной среды на параметры пион-нуклонного взаимодействия.

Представляется естественным, что взаимодействия  $\pi$ -мезона со свободным нуклоном и нуклоном, связанным в ядерной среде (in-medium), различаются по своей силе и характеру. Для изучения этого эффекта удобнее рассматривать амплитуды пион-нуклонного рассеяния как таковые, «усредненные» по разному знаку заряда самих  $\pi$ -мезонов, а именно с параметрами  $\sigma_{\text{ав}} = (\sigma_{\pi^+} + \sigma_{\pi^-})/2$ ,  $\alpha_{\text{ав}} = (\alpha_{\pi^+} + \alpha_{\pi^-})/2$ ,  $\beta_{\text{ав}} = (\beta_{\pi^+} + \beta_{\pi^-})/2$ . Такие усредненные параметры сечения рассеяния пионов на связанных в ядре нуклонах (см. [37]) представлены на рис.10 в сравнении с такими же усредненными параметрами, но

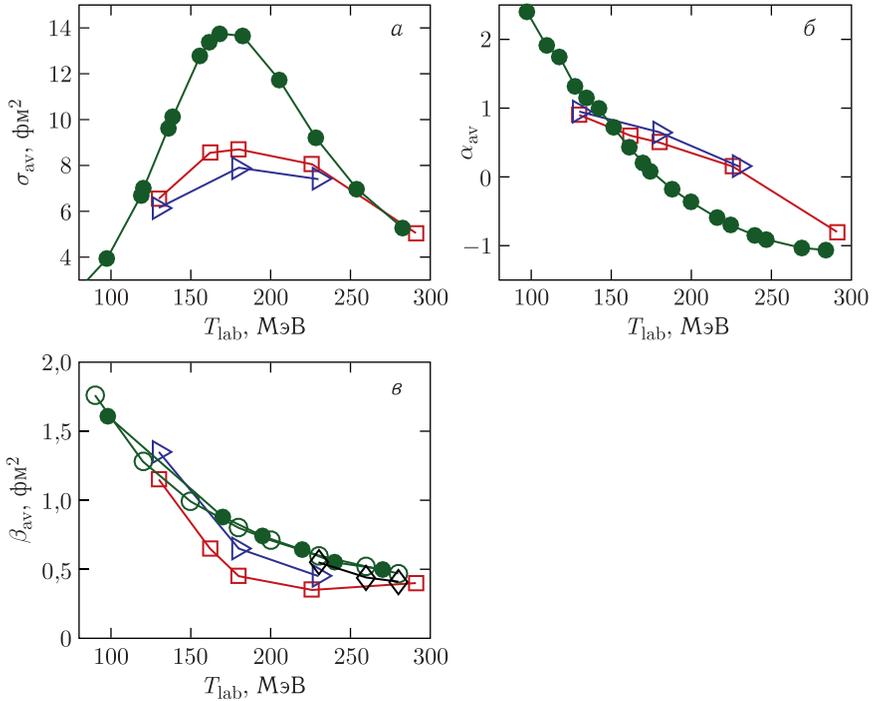


Рис. 10. Зависимость от энергии параметров  $\sigma_{av}$ ,  $\alpha_{av}$ ,  $\beta_{av}$  амплитуды  $\pi N$ -рассеяния (4)  $\pi$ -мезонов «в ядерной среде», полученных в [37] на основе данных рассеяния  $\pi + {}^{28}\text{Si}$  (квадраты) и  $\pi + {}^{40}\text{Ca}$  (треугольники), в сравнении с данными рассеяния  $\pi$ -мезонов на «свободных» нуклонах: а) экспериментальные данные взяты из [48] (кружки); б) из [49] (кружки); в) из [30] (темные и светлые кружки), а также из [31] (ромбы)

для рассеяния пионов на свободных нуклонах (free), взятыми из работ [30, 31]. Из рис. 10, а видно, что полное сечение  $\pi N$ -рассеяния в среде  $\sigma_{av}$  сохраняет общие черты резонансного поведения в области энергий (3,3)-резонанса рассеяния пионов на свободных нуклонах. В то же время абсолютное значение сечения  $\pi N$ -рассеяния в ядре оказывается примерно на 30% ниже сечения рассеяния  $\pi$ -мезона на свободном нуклоне, т. е. происходит ослабление взаимодействия  $\pi$ -мезона с нуклоном, если последний находится в ядерной среде. Причиной этого может быть паули-блокировка нуклонов, находящихся на оболочках в потенциальной яме ядра, что по сути и означает распределение части взаимодействия пиона на другие нуклоны оболочки. Что касается поведения параметра  $\alpha_{av} = \text{Re } f(0)/\text{Im } f(0)$ , то на рис. 10, б видно, как по мере перехода энергии через точку максимума (3,3)-резонанса вещественная часть  $\pi N$ -амплитуды рассеяния вперед в ядерной среде

продолжает оставаться положительной, в то время как при рассеянии на свободных нуклонах эта часть амплитуды становится отрицательной. Это может означать, что в данной области энергии пионы испытывают преломление в ядерной среде, которое ослабевает по мере увеличения энергии, начиная с  $\sim 230$  МэВ и выше. В случае рассеяния на свободных нуклонах такая смена режима от положительных к отрицательным значениям  $\alpha_{\text{ав}}$  происходит в области максимума (3,3)-резонанса при энергии 170 МэВ. Интересно также понять поведение параметра наклона  $\pi N$ -амплитуды  $\beta_{\text{ав}}$ , который, как видно из рис. 10, в, в ядерной среде в области (3,3)-резонанса оказывается примерно в 2 раза меньше, чем в случае рассеяния на свободных нуклонах. Если использовать для качественных оценок борновское приближение, то потенциал, порождающий амплитуду  $\sim \exp(-\beta q^2/2)$ , имел бы тоже гауссову форму вида  $\sim \exp(-r^2/2\beta)$ , что соответствует среднеквадратичному радиусу потенциала  $\pi N$ -взаимодействия  $\sim \sqrt{2\beta}$  фм. Таким образом, уменьшение  $\beta_{\text{ав}}$  в 2 раза означает уменьшение радиуса взаимодействия пиона с нуклоном ядерной среды примерно на 30%.

**1.7. Итоги анализа упругого рассеяния.** При рассмотрении пион-ядерного рассеяния в области энергии (3,3)-резонанса от 130 до 290 МэВ мы использовали две теоретические модели этого процесса и убедились, что с их помощью можно добиться успешного согласия с большим количеством имеющихся экспериментальных данных. Ниже подведем итоги по результатам проделанной работы.

1. Модель оптического потенциала фолдинга строится с использованием функции пространственного распределения нуклонов ядра и амплитуды пион-нуклонного рассеяния. Функции распределения нуклонов известны из табличных данных, а три параметра ( $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ) амплитуды рассеяния пионов на *связанных нуклонах* ядра являются варьируемыми параметрами, которые затем сравниваются с их известными значениями, полученными из данных по рассеянию пионов на *свободных нуклонах*.

2. Наборы этих трех параметров рассеяния на связанных нуклонах были получены из анализа данных сечений рассеяния  $\pi$ -мезонов на каждом из рассматриваемых ядер-мишеней  $^{28}\text{Si}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{58}\text{Ni}$ ,  $^{208}\text{Pb}$  при энергиях в области (3,3)-резонанса пион-нуклонного рассеяния. Так, значения сечений пион-нуклонного рассеяния  $\sigma$  на ядерных нуклонах оказались примерно в 1,6 раз меньше соответствующих сечений рассеяния  $\pi$ -мезонов на свободных нуклонах.

3. Аналогичным образом были определены 12 параметров оптического потенциала Кисслингера, наборы значений которых совпадают для всех рассматриваемых ядер-мишеней при заданной энергии рассеяния. В этом плане они отличаются от параметров потенциала фолдинга  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , которые оказываются разными для разных ядер-мишеней и разных энергий  $\pi$ -мезонов.

4. Согласие рассчитанных значений сечений с экспериментальными данными имеет место как для потенциала фолдинга, так и для потенциала Кисслингера, хотя они сильно отличаются друг от друга во внутриядерной области и оказываются близкими в области ядерной периферии. Это позволяет сделать весьма важное заключение о том, что при описании сечений рассеяния при углах  $\theta < 80^\circ$  именно область периферии ядер играет определяющую роль.

5. Сравнение сечений  $\sigma$  рассеяния  $\pi$ -мезонов на свободных и связанных в ядре нуклонах при энергиях в области (3,3)-резонанса показывает, что взаимодействие пионов со связанными нуклонами ядра слабее, чем со свободными нуклонами. Поведение параметра  $\alpha$ , характеризующего преломление потока пионов в ядерной среде, показывает, что изменение траектории движения пионов относительно связанных нуклонов ядра заметным образом проявляется лишь при энергии столкновения ниже 300 МэВ.

Итак, мы отмечаем успешное применение в анализе данных упругого пион-ядерного рассеяния модели оптического потенциала, основанного на свертке пион-нуклонной амплитуды и хорошо установленной функции распределения плотности ядра. При этом полученные значения варьируемых параметров  $\pi N$ -амплитуды в ядерной среде отличаются от значений для амплитуды рассеяния  $\pi$ -мезонов на свободных нуклонах. В этом плане представляется интересным исследовать, как ведут себя эти параметры в процессах неупругого рассеяния пионов с возбуждением низколежащих состояний в тех же ядрах при таких же энергиях рассеяния.

## 2. НЕУПРУГОЕ ПИОН-ЯДЕРНОЕ РАССЕЯНИЕ

Амплитуда неупругого рассеяния пионов ядрами строится по определенному стандарту рассмотрения прямых процессов. Для этого используемый ранее при анализе упругого рассеяния оптический потенциал фолдинга (8) обобщается так, чтобы в него были включены коллективные переменные, характеризующие вращение ядра и колебания его поверхности. Сам потенциал (8) был построен как интеграл свертки формфактора  $\rho(q)$  ядерной плотности  $\rho(r)$  и пион-нуклонной амплитуды рассеяния  $F_{\pi N}(q)$  (4). В ходе анализа экспериментальных данных упругого пион-ядерного рассеяния показано, что основные физические параметры, определяющие размеры ядра, а именно радиус  $R$  и диффузный слой  $a$  его поверхности, а также параметры пион-нуклонной амплитуды  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  играют определяющую роль при интерпретации этих данных. И теперь при анализе сечений неупругого рассеяния, когда плотность ядра  $\rho(\mathbf{r})$  зависит от угловых переменных  $\mathbf{r}$  и определяется параметрами деформации ядра, возникает вопрос, насколько параметры  $\pi N$ -амплитуды  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  стабильны в новых условиях рассеяния, связанных как с возбуждением колебаний ядерной поверхности, так и с вращением деформированного ядра.

### 2.1. Потенциал перехода и амплитуда неупругого рассеяния.

В работах [44, 46, 50, 51] мы рассматриваем неупругое рассеяние с возбуждением низколежащих ядерных состояний коллективной природы, энергии которых пренебрежимо малы по сравнению с энергией падающих  $\pi$ -мезонов. Определенно, это есть состояния вращения аксиально-деформированного ядра с квантовыми числами момента и четности  $2^+$  и состояния коллективного колебания ядерной поверхности с квантовыми числами  $3^-$ . Для построения амплитуды неупругого рассеяния вводится обобщенный оптический потенциал фолдинга, который включает в себя координаты такого коллективного движения. Этот потенциал можно получить (см. [46]), используя исходные выражения (1), (8) с заменой в них сферически-симметричной плотности ядра  $\rho(r)$  и, соответственно, ее формфактора  $\rho(q)$  на выражения  $\rho(\mathbf{r})$  и  $\rho(\mathbf{q})$ , в которых вектор  $\mathbf{r}$  включает в себя примесь аксиальной деформации ядра квадрупольного ( $\lambda = 2$ ) и октупольного ( $\lambda = 3$ ) типа. Тогда имеем [50]

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{(\hbar c)\beta_c}{(2\pi)^2 k} \int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \rho(\mathbf{q}) F_{\pi N}(q) d^3 q, \quad (23)$$

где

$$\rho(\mathbf{q}) = \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r}) d^3 r. \quad (24)$$

Здесь угловая зависимость формфактора плотности  $\rho(\mathbf{q})$  определяется таковой в самой деформированной плотности  $\rho(\mathbf{r})$ , которая получается с помощью замены

$$\mathbf{r} \Rightarrow r + \delta^{(\lambda)}(\mathbf{r}), \quad \delta^{(\lambda)}(\mathbf{r}) = -r \left( \frac{r}{R} \right)^{\lambda-2} \sum_{\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\hat{r}), \quad \lambda = 2, 3, \quad (25)$$

где  $\alpha_{\lambda\mu}$  есть переменные коллективного движения ядерной плотности. Подставляя (25) в (24) и ограничиваясь всюду при разложении линейными членами деформационной примеси  $\delta^{(\lambda)}(\mathbf{r})$ , получаем соответствующие выражения для плотности и ее формфактора, которые теперь зависят от переменных коллективного движения  $\alpha_{\lambda\mu}$ , а именно

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(r) + \rho_{\lambda}(r) \sum_{\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\hat{r}), \quad \rho_{\lambda}(r) = -r \frac{d\rho(r)}{dr} \left( \frac{r}{R} \right)^{\lambda-2}, \quad (26)$$

$$\rho(\mathbf{q}) = \rho(q) + \rho_{\lambda}(q) i^{\lambda} \sum_{\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\hat{q}), \quad (27)$$

где

$$\rho(q) = 4\pi \int j_0(qr) \rho(r) r^2 dr, \quad \rho_{\lambda}(q) = 4\pi \int j_{\lambda}(qr) \rho_{\lambda}(r) r^2 dr. \quad (28)$$

Окончательно подставляя (27) в (23), получаем прямой (8) и переходной потенциалы для расчета, соответственно, упругого и неупругого сечений рассеяния\*:

$$U(\mathbf{r}) = U(r) + U^{(\lambda)}(\mathbf{r}), \quad U^{(\lambda)}(\mathbf{r}) = U_\lambda(r) \sum_{\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\hat{r}), \quad (29)$$

$$U(r) = -\frac{\hbar v}{(2\pi)^2} \sigma (\alpha + i) \int j_0(qr) \rho(q) f_{\pi N}(q) q^2 dq, \quad (30)$$

$$U_\lambda(r) = -\frac{\hbar v}{(2\pi)^2} \sigma (\alpha + i) \int j_\lambda(qr) \rho_\lambda(q) f_{\pi N}(q) q^2 dq, \quad \lambda = 2, 3. \quad (31)$$

Здесь сферически-симметричный потенциал (30) совпадает с полученным ранее (8), его нужно подставить в релятивистское уравнение Клейна-Гордона (14)

$$(\Delta + k^2)\psi(\mathbf{r}) = 2\bar{\mu}[U(\mathbf{r}) + U_c(\mathbf{r})]\psi(\mathbf{r}), \quad U(r) \equiv U_{\text{opt}}(r) \quad (32)$$

и действовать по уже изложенной схеме расчета сечений упругого рассеяния с помощью стандартной программы DWUCK4 [23]. В таком подходе на основе уравнения (32) (см. ранее приведенное уравнение (14)) рассчитываются волновые функции  $\psi^{(\pm)}(\mathbf{r})$  относительного движения пиона во входном и выходном каналах реакции в поле сферически-симметричного потенциала  $U_{\text{opt}}(r) + U_c(r)$ , что дает амплитуду перехода

$$T_{BA}^\lambda = \sum_{\mu} \langle B | \alpha_{\lambda\mu} | A \rangle \int \psi_b^{(-)*}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_b) [U^{(\lambda)}(\mathbf{r}) + U_c^{(\lambda)}(\mathbf{r})] \times \\ \times Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) \psi_a^{(+)}(\mathbf{r}, \mathbf{k}_a) d\mathbf{r}. \quad (33)$$

Таким образом, автоматически учитываются эффекты релятивизации и искажения при движении пиона в поле ядра-мишени. В данной программе сферически-симметричная часть оптического потенциала  $U_{\text{opt}}(r) = U(r) + U_c(r)$  обеспечивает расчет сечения упругого рассеяния, в то время как переходной потенциал  $U^{(\lambda)}(\mathbf{r}) + U_c^{(\lambda)}(\mathbf{r})$  определяет расчет сечения неупругого рассеяния с возбуждением  $2^+$  и  $3^-$  коллективных состояний ядра. В неупругом рассеянии кулоновская часть переходного потенциала автоматически учитывается как уже встроенная в программу DWUCK4, где радиальная часть задана в форме

$$U_{c,\lambda}(r) = \frac{3Z_A Z_\pi e^2}{2\lambda + 1} \frac{R_c^\lambda}{r^{\lambda+1}}, \quad r > R_c. \quad (34)$$

Здесь фигурирует только внешняя часть мультипольного разложения кулоновского потенциала однородно заряженной сферы. Теоретической

\* Используемые параметры  $\sigma, \alpha, \beta$  определяются выражениями (7), а функция  $f_{\pi N}$  определяет  $q$ -зависимость амплитуды  $\pi N$ -рассеяния (4).

основой такого рода расчета, заложенной в программу, является метод искаженных волн борновского приближения (DWBA), в котором соответствующий матричный элемент содержит только линейную зависимость от переходного потенциала. При этом структура матричного элемента  $\langle B | \alpha_{\lambda\mu} | A \rangle$  соответствует  $(\lambda\mu)$ -переходу из основного  $A$ -состояния ядра в возбужденное  $B$ -состояние коллективного движения ядерной поверхности. В случае четно-четного ядра эти функции определяются квантовыми числами момента  $|A\rangle = |I_A, M_A\rangle$ ,  $I_A = M_A = 0$ ,  $\langle B| = \langle I_B, M_B|$ ,  $I_B = \lambda$ ,  $M_B = \mu$ , а матричный элемент перехода ядра из основного в возбужденное состояние есть [47]

$$\langle B | \alpha_{\lambda\mu} | A \rangle = (I_A \lambda M_A \mu | I_B M_B) \langle I_B || \alpha_{\lambda 0} || I_A \rangle = \\ = (0 \lambda 0 \mu | \lambda \mu) \langle \lambda || \alpha_{\lambda 0} || 0 \rangle = (1/\sqrt{2\lambda + 1}) \beta_\lambda, \quad (35)$$

где  $\beta_\lambda$ ,  $\lambda = 2, 3$ , — параметр деформации ядра-мишени, который является варьируемым в такого рода задачах.

**2.2. Результаты расчетов и сравнение их с экспериментальными данными.** В предложенной схеме расчета сечений неупругого рассеяния пионов с возбуждением коллективных состояний ядра главным элементом является функция распределения плотности нуклонов, на основе которой вычисляется комплексный оптический потенциал упругого рассеяния (30) и переходной потенциал (31) неупругого рассеяния. Параметры этих потенциалов, включая параметры  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  амплитуды пион-нуклонного рассеяния, остаются неизменными — такими, как были получены ранее из анализа соответствующих сечений упругого пион-ядерного рассеяния. Единственный дополнительный параметр при расчете неупругого рассеяния — это параметр квадрупольной  $\beta_2$  или октупольной  $\beta_3$  деформации ядра.

В работе [51] рассчитаны дифференциальные сечения неупругого рассеяния  $\pi^\pm$ -мезонов на ядрах  $^{28}\text{Si}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{58}\text{Ni}$ ,  $^{208}\text{Pb}$  при энергиях  $T_{\text{lab}} = 162, 180, 226$  и  $291$  МэВ с возбуждением в них низколежащих  $2^+$  и  $3^-$  коллективных состояний, которые сравнивались с экспериментальными данными из работ [25, 41, 42]. В расчетах использовались in-medium параметры  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  пион-нуклонной амплитуды рассеяния в ядерной среде, полученные ранее из условия согласия с соответствующими данными упругого пион-ядерного рассеяния. При этом согласие абсолютных значений неупругих сечений с экспериментальными данными достигалось только за счет варьирования параметра квадрупольной деформации ядра  $\beta_2$  (при возбуждении  $2^+$  коллективного состояния) и октупольной деформации  $\beta_3$  (при возбуждении  $3^-$ -состояния). Рассчитанные таким образом сечения представлены в работе [51] в сравнении с результатами расчетов с параметрами  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  амплитуды рассеяния пионов на свободных нуклонах, приведенными в работах [29, 30]. Показано, что результаты расчета с использованием in-medium параметров  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , полученных из анализа сечений упругого рассеяния  $\pi$ -мезонов на ядрах,

дает хорошее согласие также с данными неупругого рассеяния, в то время как при использовании «свободных параметров»  $\pi N$ -амплитуды в расчетах  $\pi A$ -потенциала фолдинга полученные значения сечения как упругого, так и неупругого рассеяния оказываются в явном расхождении с экспериментальными данными. В целом, как и для сечений упругого рассеяния, наибольшие расхождения сечений, рассчитанных с использованием in-medium и «свободных» параметров, отмечаются при энергиях в области (3,3)-резонанса, в то время как при энергии 291 МэВ за пределами (3,3)-резонанса «эффекты среды» становятся довольно слабыми.

На рис. 11–14 в сравнении с экспериментальными данными из работ [25, 41, 42] представлены дифференциальные сечения неупругого рассеяния  $\pi^\pm$ -мезонов на четно-четных ядрах  $^{28}\text{Si}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{58}\text{Ni}$ ,  $^{208}\text{Pb}$  при энергиях  $T_{\text{lab}} = 162, 180, 226$  и 291 МэВ с возбуждением в них низколежащих  $2^+$  и  $3^-$  коллективных состояний, рассчитанные по вышеуказанной схеме с использованием in-medium параметров (см. табл. 3), полученных, в отличие от приведенных в работе [51], фитированием к данным упругого  $\pi A$ -рассеяния в диапазоне углов рассеяния до  $80^\circ$ ,

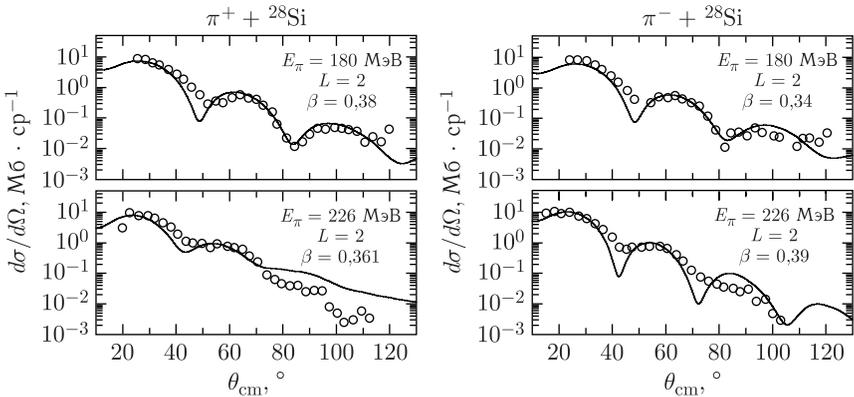


Рис. 11. Неупругое рассеяние  $\pi^\pm + ^{28}\text{Si}$  при энергиях  $\pi$ -мезонов 180 и 226 МэВ. Экспериментальные данные взяты из [40]

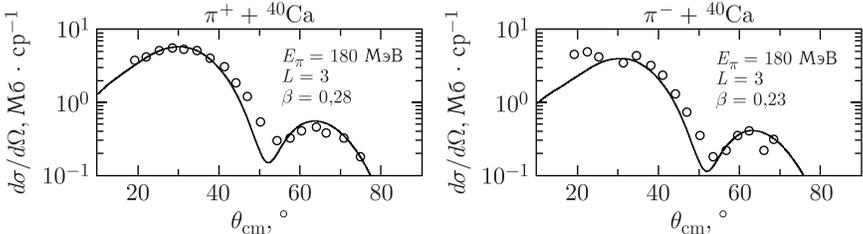


Рис. 12. Неупругое рассеяние  $\pi^\pm + ^{40}\text{Ca}$  при энергиях  $\pi$ -мезонов 180 МэВ. Экспериментальные данные взяты из [42]

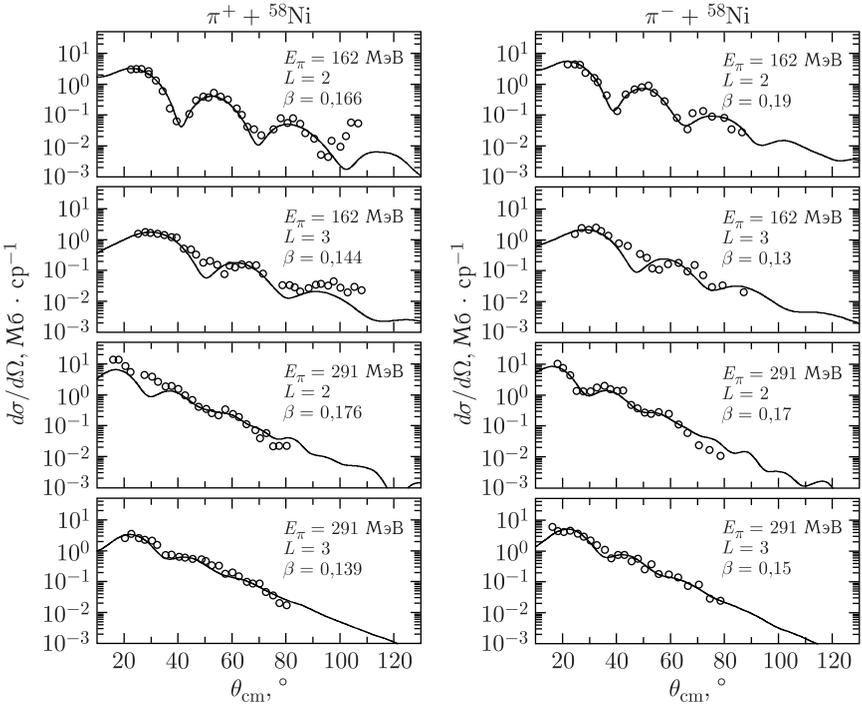


Рис. 13. Неупругое рассеяние  $\pi^{\pm} + {}^{58}\text{Ni}$  при энергиях  $\pi$ -мезонов 162 и 291 МэВ. Экспериментальные данные взяты из [25, 41]

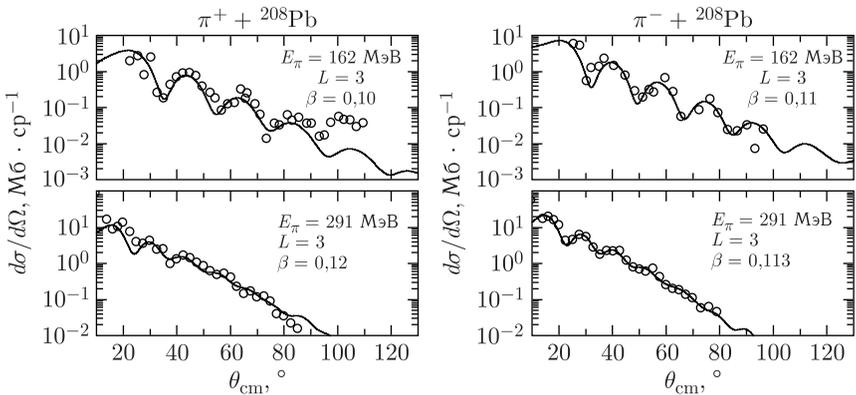


Рис. 14. Неупругое рассеяние  $\pi^{\pm} + {}^{208}\text{Pb}$  при энергиях  $\pi$ -мезонов 162 и 291 МэВ. Экспериментальные данные взяты из [25, 41]

соответствующем диапазону применимости высокоэнергетического приближения в расчете ОП. В расчетах сечений использовались ферми-функции распределения плотности рассматриваемых ядер со значениями

радиуса  $R$  и диффузности  $a$ , которые использовались ранее при анализе упругого рассеяния, а именно (в фемтометрах): 3,134 и 0,477 для  $^{28}\text{Si}$ , 3,593 и 0,493 для  $^{40}\text{Ca}$ , 4,08 и 0,515 для  $^{58}\text{Ni}$  и 6,654 и 0,475 для  $^{208}\text{Pb}$ .

Видно, что применяемая процедура расчета с in-medium параметрами, полученными при анализе данных упругого  $\pi A$ -рассеяния, не требует их дополнительной корректировки при анализе неупругого рассеяния. Что же касается параметров деформации ядра, полученных фитированием к данным  $\pi^+$ - и  $\pi^-$ -рассеяния на одном и том же ядре, то эти параметры не сильно отличаются друг от друга, что свидетельствует о том, что разработанная модель достаточно точно соответствует физике механизма процесса неупругого рассеяния с возбуждением низколежащих состояний ядер.

### 2.3. Выводы по результатам анализа неупругого рассеяния.

Анализируя полученные результаты, можно заключить, что использование свободной пион-нуклонной амплитуды не позволяет с приемлемой точностью объяснить данные неупругого пион-ядерного рассеяния, причем величины расхождения с экспериментом оказываются примерно такими же, как и в случае упругого рассеяния, когда тоже использовались параметры свободной  $\pi N$ -амплитуды. В то же время для in-medium параметров пион-нуклонной амплитуды упругого рассеяния согласие с экспериментом восстанавливается, что говорит о слабом изменении плотности ядерной среды в состоянии коллективного вращения или колебаний ядерной поверхности при низких энергиях возбуждения. Оказалось, что возбуждение коллективных уровней ядра при рассеянии пионов с высокой энергией происходит в основном за счет ядерного поля. Так, при рассеянии  $\pi^+$ -мезонов в поле наиболее тяжелого ядра  $^{208}\text{Pb}$  вклад кулоновского возбуждения имеет слабый деструктивный характер из-за кулон-ядерной интерференции. Это явление будет более явно проявляться при низких энергиях рассеяния, так же как и действие принципа Паули (см., например, [52]).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе проведен детальный анализ сечений упругого и неупругого рассеяния  $\pi$ -мезонов на ядрах в области энергии столкновения от 30 до 290 МэВ, в которой расположен  $p$ -волновой пион-нуклонный резонанс, соответствующий  $\Delta_{33}$ -изобаре с квантовыми числами  $J = 3/2$ ,  $T = 3/2$ . Для этого использовались две модели построения пион-ядерного потенциала, а именно модель свертки пион-нуклонной амплитуды с функцией пространственного распределения плотности нуклонов ядра, а также модель локального пион-ядерного потенциала, эквивалентного потенциалу Кисслингера. Детальные расчеты на этой основе дифференциальных сечений упругого и неупругого рассеяния пионов на ядрах  $^{28}\text{Si}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{58}\text{Ni}$ ,  $^{208}\text{Pb}$  показали, что имеющиеся эксперименталь-

ные данные сечений рассеяния можно объяснить с хорошей точностью и что при этом главную роль играет поведение плотности распределения нуклонов на периферии ядра в области полуспада его плотности. При этом область внутренней структуры ядра слабо проявляет себя в исследуемых сечениях из-за сильного «поглощения» падающих  $\pi$ -мезонов. В нашем подходе это связано с действием мнимой части пион-ядерного потенциала, определяемой мнимой частью амплитуды пион-нуклонного рассеяния, которая определяется полным сечением рассеяния пиона на связанном в ядре нуклоне. Такая физическая особенность изучаемых процессов фактически нивелирует особенности используемых оптических потенциалов в центральной области ядра, и требуется в основном достаточная точность их поведения в области ядерной поверхности. Помимо самого факта успешного описания данных сечений, в основном в области первого и второго квадрантов углов рассеяния, физически интересными результатами являются полученные значения параметров  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  амплитуды рассеяния пиона на связанном в ядре нуклоне. Эти параметры проявляют зависимость от энергии  $\pi N$ -столкновения, которая отличается от той, которая наблюдается в тех же параметрах, но полученных из данных рассеяния  $\pi$ -мезонов на свободных нуклонах. В принципе, этого следовало ожидать, поскольку вся ядерная физика работает с эффективными нуклон-нуклонными потенциалами, параметры которых отличаются от потенциалов рассеяния нуклонов на свободных, не связанных в ядре нуклонах.

В нашем случае, когда после интерпретации данных упругого пион-ядерного рассеяния мы перешли к рассмотрению сечений неупругого рассеяния пионов ядрами, пришлось мало что добавлять, а именно вместо распределения плотности нуклонов использовалась производная по координате от этой же плотности. Изменились только квантовые числа, теперь они характеризуют низколежащие состояния ядра, природа которых связана с коллективным движением нуклонов, — вращением ядра как целого и колебаниями поверхности ядра. При этом исходные характеристики потенциала, а именно параметры взаимодействия пионов со связанными нуклонами, остались такими же, как и при рассмотрении упругого пион-ядерного рассеяния. В целом, получается взаимосвязанная картина упругого и определенного типа неупругого пион-ядерного рассеяния.

Взятые за основу модели оптических потенциалов могут оказаться полезными и в других расчетах, в том числе при изучении рассеяния  $K$ -мезонов ядрами, а также при анализе данных протон-ядерного рассеяния. Отметим, что модель микроскопического оптического потенциала фолдинга уже использовалась авторами при анализе экспериментальных данных протон-ядерных взаимодействий с участием легких экзотических ядер с нейтронным и гало (см., например, [53–55]). С точки зрения перспективы получения новой информации об особенностях распределения плотности нуклонов на периферии тяжелых ядер с избытком нейтронов

типа  $^{48}\text{Ca}$ ,  $^{64}\text{Ni}$  и учета этой информации при планировании экспериментов на пучках радиоактивных ядер интересным представляется анализ рассеяния пионов и протонов на этих ядрах в рамках описанного в данной работе подхода.

Работа выполнена при поддержке программы сотрудничества ОИЯИ с Арабской Республикой Египет.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kisslinger L. S.* Scattering of Mesons by Light Nuclei // *Phys. Rev.* 1955. V. 98. P. 761.
2. *Krell M., Ericson T. E. O.* Energy Levels and Wave Functions of Pionic Atoms // *Nucl. Phys. B.* 1969. V. 11. P. 521.
3. *Brown G. E., Weise W.* Pion Scattering and Isobars in Nuclei // *Phys. Rep. (Sect. C of Phys. Lett.)*. 1975. V. 22, No. 6. P. 279.
4. *Migdal A. B.* Pion Fields in Nuclear Matter // *Rev. Mod. Phys.* 1978. V. 50. P. 107.
5. *Migdal A. B., Saperstein E. E., Troitsky M. A., Voskresensky D. N.* Pion Degrees of Freedom in Nuclear Matter // *Phys. Rep.* 1990. V. 192. P. 179.
6. *Voskresensky D. N.* S-Wave Pion Condensation in Symmetric Nuclear Matter // *Phys. Rev. D.* 2002. V. 105. P. 116007.
7. *Glauber R. J.* Lectures in Theoretical Physics. New York: Intersci., 1959. P. 315.
8. *Faldt G., Ericson T. E. O.* Fermi Motion in Pion Deuteron Scattering at High Energies // *Nucl. Phys. B.* 1968. V. 8. P. 1.
9. *Bjornak R., Finjord J., Osland P., Reitan A.* Elastic and Single-Charge-Exchange Scattering of Pions by Carbon Nuclei // *Nucl. Phys. B.* 1970. V. 22. P. 179.
10. *Charlton L. A., Eisenberg J. M.* Multiple-Scattering Theory for Pion-Nucleus Scattering near the 3,3 Resonance // *Ann. Phys.* 1971. V. 63. P. 286.
11. *Landau R. H., Phatak S. C., Tabakin F.* Improved Theoretical Pion-Nucleus Optical Potentials // *Ann. Phys.* 1973. V. 78. P. 299.
12. *Miller G. A.* Nuclear Polarizability Corrections to Pion Elastic Scattering // *Nucl. Phys. A.* 1974. V. 223. P. 477.
13. *Liu L. S., Shakin C. M.* Pion-Nucleus Elastic Scattering: Theory and Applications // *Prog. Part. Nucl. Phys.* 1981. V. 5. P. 207.
14. *Khallaf S. A. E., Ebrahim A. A.* Analysis of  $\pi^\pm$ -Nucleus Elastic Scattering Using a Local Potential // *Phys. Rev. C.* 2000. V. 62. P. 024603;  
*Khallaf S. A. E., Ebrahim A. A.* Elastic and Inelastic Scattering of Pions from Nuclei Using an Equivalent Local Potential // *Phys. Rev. C.* 2002. V. 65. P. 064605.
15. *Satchler G. R.* Local Potential Model for Pion-Nucleus Scattering and  $\pi^+\pi^-$  Excitation Ratios // *Nucl. Phys. A.* 1992. V. 540. P. 533.
16. *Gmitro M., Kamalov S. S., Mach R.* Momentum-Space Second-Order Optical Potential for Pion-Nucleus Elastic Scattering // *Phys. Rev. C.* 1987. V. 36. P. 1105.

17. Лукьянов В.К., Земляная Е.В., Лукьянов К.В. Ядро-ядерное рассеяние в высокоэнергетическом приближении и оптический потенциал фолдинга // ЯФ. 2006. Т. 69. С. 26;  
*Lukyanov V.K., Zemlyanaya E.V., Lukyanov K.V. Nucleus–Nucleus Scattering in the High-Energy Approximation and Optical Folding Potential // Phys. At. Nucl. 2006. V. 69. P. 240.*
18. Johnson M.B., Satchler G.R. Characteristics of Local Pion–Nucleus Potentials That Are Equivalent to Kisslinger-Type Potentials // Ann. Phys. 1996. V. 248. P. 134.
19. Ситенко А. Г. К теории ядерных реакций с участием сложных частиц // Укр. физ. журн. 1959. Т. 4. С. 152.
20. Czyz W., Maximon L.C. High Energy, Small Angle Elastic Scattering of Strongly Interacting Composite Particles // Ann. Phys. 1969. V. 52. P. 59.
21. Елдышев Ю.Н., Лукьянов В.К., Поль Ю.С. Анализ упругого рассеяния электронов на легких ядрах на базе симметризованной ферми-плотности // ЯФ. 1972. Т. 16. С. 506.
22. Лукьянов В.К., Земляная Е.В., Лукьянов К.В., Ханна К.М. Микроскопический  $K^+$ -ядерный оптический потенциал и соответствующие расчеты дифференциальных сечений упругого рассеяния и полных сечений реакции // ЯФ. 2010. Т. 73. С. 1443;  
*Lukyanov V.K., Zemlyanaya E.V., Lukyanov K.V., Hanna K.M. Microscopic  $K^+$ -Nucleus Optical Potential and Calculations of Differential Elastic-Scattering Cross Sections and Total Reaction Cross Sections // Phys. At. Nucl. 2010. V. 73. P. 1443.*
23. Kunz P.D., Rost E. The Distorted-Wave Born Approximation // Computational Nuclear Physics 2 / Eds. K. Langanke, J. A. Maruhn, S. E. Koonin. New York: Springer, 1993.
24. Лукьянов В.К., Земляная Е.В., Лукьянов К.В., Али-Эль-Лити, Абдулмаггад И., Словинский Б. Анализ упругого рассеяния пи-мезонов ядрами в рамках микроскопического оптического потенциала // Изв. РАН. 2013. Т. 77, № 4. С. 475;  
*Lukyanov V.K., Zemlyanaya E.V., Lukyanov K.V., Lithi A.E., Abdulmagead I., Slowinski B. Analysis of Elastic Scattering of Pi-Mesons by Nuclei within the Microscopic Optical Potential // Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. 2013. V. 77, No. 4. P. 427.*
25. Geesaman D.F., Olmer C., Zeidman B., Boudrie R.L., Blanpied G.S., Devereux M.J., Bursleson G.R., Segel R.E., Swenson L.W., Thiessen H.A. Elastic and Inelastic Scattering of 291-MeV Pions by  $^9\text{Be}$ ,  $^{28}\text{Si}$ ,  $^{58}\text{Ni}$ , and  $^{208}\text{Pb}$  // Phys. Rev. C. 1981. V. 23. P. 2635.
26. Лукьянов В.К., Земляная Е.В., Словинский Б. Полные сечения ядро-ядерных реакций в подходе Глаубера–Ситенко для реалистичных распределений ядерной материи // ЯФ. 2004. Т. 67. С. 1306;  
*Lukyanov V.K., Zemlyanaya E.V., Slowinski B. Total Cross Sections for Nucleus–Nucleus Reactions within the Glauber–Sitenko Approach for Realistic Distributions of Nuclear Matter // Phys. At. Nucl. 2004. V. 67. P. 1282.*
27. El-Azab Farid M., Satchler G.R. A Density-Dependent Interaction in the Folding Model for Heavy-Ion Potentials // Nucl. Phys. A. 1985. V. 438. P. 525.

28. *Patterson J.D., Peterson R.J.* Empirical Distributions of Protons within Nuclei // Nucl. Phys. A. 2003. V. 717. P. 235.
29. *Lesnyak H., Lesnyak L.* Coulomb-Nuclear Interference in the Multiple Collision Model // Nucl. Phys. B. 1972. V. 38. P. 221.
30. *Locher M.P., Steinmann O., Straumann O.* Why Is the 33-Resonance Shifted in Nuclei? // Nucl. Phys. B. 1971. V. 27. P. 598.
31. *Bano N., Ahmad I.* Medium-Energy Pion Scattering and the Alpha-Cluster Description of  $^{12}\text{C}$  // J. Phys. G: Nucl. Phys. 1979. V. 5. P. 39.
32. *Brown G.E., Dover C.B., Siegel P.B., Weise W.*  $K^+$ -Nucleus Scattering and the "Swelling" of Nucleons in Nuclei // Phys. Rev. Lett. 1988. V. 60. P. 2723.
33. *Oset E., Toki Y., Weise W.* Pionic Modes of Excitation in Nuclei // Phys. Rep. 1982. V. 83. P. 281.
34. *Bertulani C.A., De Conti C.* Pauli Blocking and Medium Effects in Nucleon Knockout Reactions // Phys. Rev. C. 2010. V. 81. P. 064603.
35. *Mizoguchi M., Toki H.* Modification of Pion-Nucleon and Kaon-Nucleon Scattering Amplitudes in  $^{12}\text{C}$  at  $k = 0.8 \text{ GeV}/c$  // Nucl. Phys. A. 1990. V. 513. P. 685.
36. *Лукьянов В.К., Земляная Е.В., Лукьянов К.В., Жабицкая Е.И., Жабицкий М.В.* Моделирование пион-ядерного микроскопического оптического потенциала при энергиях (3,3)-резонанса и влияние ядерной среды на пион-нуклонную амплитуду // ЯФ. 2014. Т. 77. С. 103;  
*Lukyanov V.K., Zemlyanaya E.V., Lukyanov K.V., Zhabitskaya E.I., Zhabitsky M.V.* Modeling of a Microscopic Optical Pion-Nucleon Potential at Energies in the (3,3)-Resonance Region and Nuclear-Matter Effect on the Pion-Nucleon Amplitude // Phys. At. Nucl. 2014. V. 77. P. 100.
37. *Lukyanov V.K., Zemlyanaya E.V., Lukyanov K.V., Abdul-Magead I.* Analysis of the Pion-Nucleus Scattering within the Folding and the Kisslinger Type Potentials // Nucl. Phys. A. 2021. V. 1010. P. 122190.
38. *Lukyanov V.K., Zemlyanaya E.V., Lukyanov K.V., Abdul-Magead I.A.M.* Comparative Analysis of the Pion-Nucleus Scattering within the Microscopic Folding and the Local Kisslinger Type Potentials // Eur. Phys. J. Web Conf. 2017. V. 138. P. 01019.
39. *De Vries H., De Jager C.W., De Vries C.* Nuclear Charge-Density-Distribution Parameters from Elastic Electron Scattering // At. Data Nucl. Data Tables. 1987. V. 36. P. 495.
40. *Freedom B.M., Corfu R., Egger J.-P., Gretillat P., Lunke C., Piffaretti J., Schwarz E., Jansen J., Perrin C.* A Systematic Study of  $\pi^+$  and  $\pi^-$  Inelastic Scattering from  $^{28}\text{Si}$  in the Region of the  $\pi N(3,3)$  Resonance // Nucl. Phys. A. 1979. V. 326. P. 385.
41. *Olmer C., Geesaman D.F., Zeidman B., Chakravarti S., Lee T.-S.H., Boudrie R.L., Siemssen R.H., Amann J.F., Morris C.L., Thiessen H.A., Burleson G.R., Devereux M.J., Segel R.E., Swenson L.W.* Elastic and Inelastic Scattering of 162 MeV Pions by  $^{28}\text{Si}$ ,  $^{58}\text{Ni}$ , and  $^{208}\text{Pb}$  // Phys. Rev. C. 1980. V. 21. P. 254.
42. *Gretillat P., Egger J.-P., Germond J.-F., Lunke C., Schwarz E., Perrin C., Freedom B.M.* Study of  $\pi^+$  and  $\pi^-$  Elastic Scattering from  $^{40}\text{Ca}$  and  $^{48}\text{Ca}$  in the Region of the  $\pi N(3,3)$  Resonance // Nucl. Phys. A. 1981. V. 364. P. 270.
43. *Khoa D.T., Satchler G.R.* Generalized Folding Model for Elastic and Inelastic Nucleus-Nucleus Scattering Using Realistic Density Dependent Nucleon-Nucleon Interaction // Nucl. Phys. A. 2000. V. 668. P. 3.

44. *Zemlyanaya E. V., Lukyanov V. K., Lukyanov K. V., Abdul-Magead I. A. M., Zhabitskaya E. I., Zhabitsky M. V.* Microscopic Analysis of Elastic and Inelastic Pion–Nucleus Scattering at Energies of (3,3) Resonance // *Nucl. Theory.* 2016. V. 35. P. 103.
45. *Lukyanov K. V., Lukyanov V. K., Zemlyanaya E. V., Abdumagead I.* Pion–Nucleus Elastic Scattering Studies within the Microscopic Folding Potential // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2020. V. 1555. P. 012018.
46. *Лукьянов В. К., Земляная Е. В., Лукьянов К. В., Али-Эль-Лити, Абдулмагеад И.* Анализ неупругого рассеяния пи-мезонов ядрами на основе микроскопического оптического потенциала // *Изв. РАН.* 2014. Т. 78, вып. 5. С. 609; *Lukyanov V. K., Zemlyanaya E. V., Lukyanov K. V., El-Lithi A., Abdumagead I.* Analysis of Inelastic Scattering of  $\pi$ -Mesons from Nuclei within the Microscopic Optical Potential // *Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys.* 2014. V. 78, No. 5. P. 421.
47. *Satchler G. R.* Direct Nuclear Reactions. Oxford; New York: Clarendon Press, 1983.
48. *Carter A. A., Williams J. R., Bugg D. V., Bussey P. J., Dance D. R.* The Total Cross Sections for Pion–Proton Scattering between 70 MeV and 290 MeV // *Nucl. Phys. B.* 1971. V. 26. P. 445.
49. *Arndt R. A., Ford J. M., Roper L. D.* Pion–Nucleon Partial-Wave Analysis to 1100 MeV // *Phys. Rev. D.* 1985. V. 32. P. 1085.
50. *Lukyanov V. K., Zemlyanaya E. V., Lukyanov K. V., Ellithi A. Y., Abdumagead I. A. M.* Study of Elastic and Inelastic Pion–Nucleus Scattering Using the Microscopic Model of Optical Potential // *Intern. J. Mod. Phys. E.* 2015. V. 24, No. 4. P. 1550035.
51. *Лукьянов В. К., Земляная Е. В., Лукьянов К. В., Абдулмагеад Л. А. М.* Использование оптического потенциала свертки для анализа пион-ядерного неупругого рассеяния и влияния ядерной среды на пион-нуклонную амплитуду // *ЯФ.* 2016. Т. 79, вып. 6. С. 670; *Lukyanov V. K., Zemlyanaya E. V., Lukyanov K. V., Abdumagead I. A. M.* Application of a Folding-Model Optical Potential to Analyzing Inelastic Pion–Nucleus Scattering and the In-Medium Effect on the Pion–Nucleon Amplitude // *Phys. At. Nucl.* 2016. V. 79, No. 6. P. 978.
52. *Лукьянов В. К., Титов А. И.* Возбуждение ядер частицами околосбарьерной энергии // *ЯФ.* 1973. Т. 18. С. 306.
53. *Lukyanov V. K., Lukyanov K. V., Zemlyanaya E. V., Antonov A. N., Gaidarov M. K.* Calculations of  ${}^6\text{He} + p$  Elastic Scattering Cross Sections Using Folding Approach and High-Energy Approximation for the Optical Potential // *Eur. Phys. J. A.* 2007. V. 33. P. 389.
54. *Lukyanov V. K., Kadrev D. N., Zemlyanaya E. V., Antonov A. N., Lukyanov K. V., Gaidarov M. K., Spasova K.* Microscopic Analysis of  ${}^{11}\text{Li}$  Elastic Scattering on Protons and Breakup Processes within the  ${}^9\text{Li} + 2n$  Cluster Model // *Phys. Rev. C.* 2013. V. 88. P. 034612.
55. *Lukyanov V. K., Kadrev D. N., Zemlyanaya E. V., Antonov A. N., Lukyanov K. V., Gaidarov M. K., Spasova K.* Microscopic Analysis of  ${}^{10,11}\text{Be}$  Elastic Scattering on Protons and Nuclei, and Breakup Processes of  ${}^{11}\text{Be}$  within the  ${}^{10}\text{Be} + n$  Cluster Model // *Phys. Rev. C.* 2015. V. 91. P. 034606.