ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2023. Т. 54, вып. 5. С. 997–1074

О РАССЕЯНИИ МАССИВНОГО НЕЙТРАЛЬНОГО ЛЕПТОНА НА ЯДРЕ

В. А. Бедняков *

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Изложен теоретический подход к описанию релятивистского рассеяния массивного (нейтрального) лептона на ядре, при котором последнее сохраняет свою целостность. Измеряемое сечение такого процесса включает в себя упругий (или когерентный) вклад, когда ядро остается в своем первоначальном квантовом состоянии, и неупругий (некогерентный) вклад, когда ядро переходит в другое (возбужденное) квантовое состояние. Переход от упругого режима рассеяния к неупругому *автоматически* регулируется зависимостью нуклон-ядерных формфакторов от переданного ядру импульса. При малых переданных импульсах доминирует упругое рассеяние, с ростом переданного импульса возрастает доля неупругого рассеяния, которое, в свою очередь, становится доминантным при достаточно больших переданных импульсах. Фундаментальным считается взаимодействие точечного лептона с бесструктурными нуклонами ядра-мишени. Это взаимодействие параметризуется с помощью четырех эффективных констант связи, отражающих аксиально-векторный характер слабого взаимодействия.

Подробно рассмотрен случай рассеяния *массивных* лептонов (аналогов нейтрино), взаимодействующих с нуклонами по каналу $V \mp A$-токов Стандартной модели. Благодаря ненулевой массе лептонов возникает дополнительный канал их упругого и неупругого рассеяния на ядрах, обусловленный возможностью изменения спиральности таких лептонов. Например, несмотря на малость массы при (кинетических) энергиях лептонов, значительно меньших массы нейтрино (например, реликтовых), сечение их взаимодействия с ядром оказывается многократно усиленным как минимум «эффектом когерентности ядра».

Полученные выражения для сечений применимы при поиске новой физики в секторе нейтральных лептонов, во всех случаях прецизионного анализа данных с участием нейтрино и антинейтрино при энергии последних не более сотен мегаэлектронвольт, особенно когда следует принимать во внимание ненулевые значения нейтринных масс. Эти выражения могут быть использованы при анализе результатов экспериментов по прямому детектированию нейтральных массивных слабовзаимодействующих *релятивистских* частиц темной материи, поскольку в отличие от общепринятого случая одновременно принимается во внимание как упругое, так и неупругое взаимодействие таких частиц с ядром-мишенью. При этом наличие «неупругого сигнала» с его характерной сигнатурой может ока-

* E-mail: bedny@jinr.ru

заться единственным регистрируемым свидетельством взаимодействия частицы темной материи с ядром.

A theoretical approach to the description of the relativistic scattering of a massive (neutral) lepton on a nucleus, in which the latter retains its integrity, is presented. The measured cross section of such a process includes an elastic (or coherent) contribution when the nucleus remains in its original quantum state and an inelastic (incoherent) contribution when the nucleus goes into another (excited) quantum state. Transition from the elastic scattering regime to the inelastic scattering regime is regulated *automatically* by the dependence of the nucleon-nucleus form factors on the momentum transferred to the nucleus. At small momentum transfers, elastic scattering dominates, with an increase in the transferred momentum, the proportion of inelastic scattering increases, which, in turn, becomes dominant at sufficiently large transferred momenta. The interaction of a point lepton with structureless nucleons of the target nucleus is considered as fundamental. This interaction is parameterized in a rather general form with four effective coupling constants, reflecting the (axial) vector nature of the weak interaction.

The scattering of *massive* (anti)neutrinos interacting with nucleons through the $V \mp A$ currents of the Standard Model is considered in detail. Due to the nonzero mass of the (anti)neutrino, an additional possibility arises for elastic and inelastic scattering of (anti)neutrinos on nuclei, due to the possibility of changing the helicity of these (anti)neutrinos. For example, despite the smallness of the mass of neutrinos at (kinetic) energies of (anti)neutrinos much lower than the mass of neutrinos (for example, relic ones), the cross section of their interaction with the nucleus turns out to be many times stronger, at least due to the “nucleus coherence effect”.

The obtained expressions for the cross sections are applicable in all cases of precision data analysis involving neutrinos and antineutrinos, especially when nonzero neutrino masses must be taken into account. These expressions could also be used in the analysis results of experiments on direct detection of neutral massive weakly interacting *relativistic* dark matter particles since, unlike the generally accepted case, both elastic and inelastic interactions of the particles with the target are simultaneously taken into account. In this case, the presence of an “inelastic signal” with its characteristic signature may be the only one registered evidence of the act of interaction of a particle of dark matter with the nucleus.

PACS: 13.15.+g; 30.Pt; 14.60.St

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] впервые был сформулирован подход к описанию взаимодействия *безмассовых* нейтрино и антинейтрино с ядром A, в результате которого ядро либо остается в своем первоначальном состоянии, либо переходит в возбужденное состояние с сохранением целостности $\nu(\overline{\nu}) + A \to \nu(\overline{\nu}) + A^{(*)}$. В работе [4] подход был обобщен на случай нерелятивистского рассеяния массивного нейтрального слабовзаимодействующего лептона на ядрах. На этой основе было выполнено исследование баланса когерентности и некогерентности в задаче детектирования галактических частиц темной материи с учетом конкретных кинематических условий и энергетических уровней ядра, где была отмечена недооценка роли неупругих процессов при прямом поиске частиц темной материи [5].

Напомним, что подход [1–3] опирается на описание ядра как связанного состояния составляющих его бесструктурных нуклонов, взаимодействие которых с лептоном задается эффективным 4-фермионным лагранжианом и описывается с помощью скалярных произведений лептонного и нуклонного токов, что позволяет контролировать спиновые состояния нуклонов в начальном и конечном состояниях ядра. Благодаря конструктивному использованию условия полноты волновых функций ядерных состояний (сохранения вероятности) удается наблюдаемое сечение представить в виде суммы двух слагаемых. Одно слагаемое отвечает упругому взаимодействию, при котором сохраняется начальное квантовое состояние ядра. Другое слагаемое — это общий вклад в наблюдаемое сечение всех остальных (потенциально возможных) неупругих процессов, который сопровождается изменением квантового состояния ядра. Было установлено, что ядерные формфакторы протона/нейтрона $F_{p/n}(\mathbf{q})$ по мере роста переданного ядру 3-импульса $\mathbf{q}$ *автоматически регулируют* переход от режима упругого лептон-ядерного взаимодействия к режиму неупругого лептон-ядерного взаимодействия. В этом явлении заключается *принципиальное отличие* подхода [1–3] от концепции когерентности по Фридману [6, 7], когда на основе результата сравнения радиуса ядра-мишени и характерного переданного ему импульса решался вопрос о том, какую формулу — когерентную или некогерентную — следует использовать для вычисления сечения процесса рассеяния (анти)нейтрино на ядре.

Также было отмечено, что упругие и неупругие нейтринные $\nu(\overline{\nu})A$-процессы оказываются экспериментально неразличимыми, когда единственной наблюдаемой величиной является энергия отдачи ядра. Поэтому в экспериментах, нацеленных на изучение когерентного рассеяния (анти)нейтрино (при достаточно высоких энергиях) путем детектирования только энергии отдачи ядра [8], может присутствовать некогерентный фон, который неотличим от сигнала, когда снимающие возбуждение ядра γ-кванты не поддаются регистрации.

Аналогичная ситуация происходит при прямом детектировании частиц темной материи: некогерентный (неупругий) вклад в ожидаемую скорость счета событий доминирует в ряде кинематических областей при вполне допустимых значениях параметров новой физики [4, 5]. Этот некогерентный вклад имеет самостоятельный интерес, поскольку представляет собой дополнительный источник важной информации о характере (неизвестного в случае темной материи) взаимодействия. Он может быть измерен напрямую путем целенаправленной регистрации фотонов, испущенных возбужденными в результате неупругих процессов ядрами-мишенями [9]. Число таких фотонов пропорционально отношению сечения неупругого канала взаимодействия к сечению упругого канала, и эти фотоны должны иметь характерный для ядра A спектр энергий, которые, как правило, значительно больше энергии отдачи ядра, что заметно упрощает их регистрацию.

В контексте вышесказанного задача данной работы состоит в дальнейшем обобщении *безмассового нейтринного* [1–3] и *массового лептонного* [4, 5] подходов на *релятивистский* случай взаимодействия *массивных* нейтральных слабовзаимодействующих лептонов (χ-частиц) с ядрами $\chi A \to \chi A^{(*)}$ и выяснении новых возникающих при таком характере взаимодействия закономерностей.

1. КИНЕМАТИКА И СЕЧЕНИЕ χA-РАССЕЯНИЯ

В случае взаимодействия двух частиц с образованием двух частиц $\chi + A \to \chi + A^{(*)}$ 4-импульсы падающего и уходящего лептона (χ-частицы) обозначены как $k = (k_0 = E_\chi, \mathbf{k})$ и $k' = (k'_0 = E'_\chi, \mathbf{k}')$, а 4-импульсы начального и конечного состояний ядра, соответственно, как $P_n = (P^0_n, \mathbf{P}_n)$ и $P'_m = (P^0_m, \mathbf{P}_m)$ (рис. 1, *а*). Полная энергия ядерного состояния $|P_n\rangle$ равна $P^0_n = E_\mathbf{P} + \varepsilon_n$, где ε_n — внутренняя энергия n-го квантового состояния ядра. Если χ-частица массой m_χ с импульсом $\mathbf{k}$ налетает вдоль z-оси на покоящееся ядро A и улетает под углом θ к x-оси с импульсом $\mathbf{k}'$, то все 4-импульсы можно записать в следующем виде [4]:

$$k = \left(k_0 = \sqrt{m^2_\chi + |\mathbf{k}|^2}, 0, 0, k_z = |\mathbf{k}|\right), \quad P_n = (P^0_n = m_A + \varepsilon_n, 0, 0, 0),$$
$$k' = \left(k'_0 = \sqrt{m^2_\chi + |\mathbf{k}'|^2}, k'_x = |\mathbf{k}'|\sin\theta, 0, k'_z = |\mathbf{k}'|\cos\theta\right),$$
$$P'_m = \left(P^0_m = \varepsilon_m + \sqrt{m^2_A + \mathbf{q}^2}, -|\mathbf{k}'|\sin\theta, 0, |\mathbf{k}| - |\mathbf{k}'|\cos\theta\right),$$

где m_A — масса ядра A, а ε_m — энергия возбуждения m-го уровня (состояния) этого ядра. Переданный ядру 4-импульс $q = (q_0, \mathbf{q})$ следующим

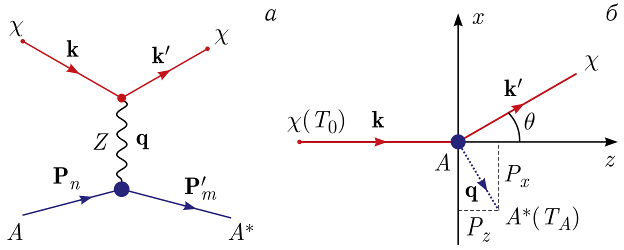

Рис. 1. *а*) Пример χA-взаимодействия за счет обмена нейтральным Z-бозоном. *б*) Кинематика этого процесса в лабораторной системе отсчета, где ядро A покоится

образом связан с этими величинами:

$$\begin{aligned} q^2 &\equiv (k-k')^2 = 2\left(m_\chi^2 - \sqrt{(m_\chi^2+|\mathbf{k}'|^2)(m_\chi^2+|\mathbf{k}|^2)} + |\mathbf{k}||\mathbf{k}'|\cos\theta\right), \\ q_0 &= k_0 - k_0' = P_m^0 - P_n^0 = \Delta\varepsilon_{mn} + T_A, \\ \mathbf{q}^2 &= (\mathbf{k}-\mathbf{k}')^2 = (-|\mathbf{k}'|\sin\theta)^2 + (|\mathbf{k}| - |\mathbf{k}'|\cos\theta)^2 = \\ &\qquad = |\mathbf{k}|^2 + |\mathbf{k}'|^2 - 2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|\cos\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь введено обозначение для разности энергий ядерных состояний $|m\rangle$ и $|n\rangle$:

$$\Delta\varepsilon_{mn} \equiv \varepsilon_m - \varepsilon_n. \tag{2}$$

Кинетическая энергия движения ядра отдачи определяется в виде

$$T_A(|\mathbf{k}'|, \cos\theta) = \sqrt{m_A^2 + |\mathbf{k}'|^2 + |\mathbf{k}|^2 - 2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|\cos\theta} - m_A. \tag{3}$$

Максимальное значение энергии отдачи $T_A^{\max}$ соответствует максимальному переданному импульсу, который получается при $\cos\theta = -1$, т. е. $\mathbf{q}^2_{\max} = (|\mathbf{k}| + |\mathbf{k}'|)^2$. Как правило, $T_A^{\max} \leqslant 200$ кэВ, и для наиболее интересных ядер-мишеней $\Delta\varepsilon_{mn}$ заметно меньше 1 МэВ.

Поскольку в лабораторной системе отсчета ядро-мишень считается покоящимся и находящимся в некотором $|n\rangle$-состоянии, дифференциальное сечение процесса $\chi A_n \to \chi A_m^{(*)}$ принимает вид (см., например, [1–4, 10–12])

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma_{mn}}{d|\mathbf{k}'|d\cos\theta} &= \frac{-|i\mathcal{M}_{mn}|^2|\mathbf{k}'|^2}{2^5\pi\sqrt{m_\chi^2+|\mathbf{k}'|^2}} \times \\ &\times \frac{\delta\left(k_0 - \sqrt{m_\chi^2+|\mathbf{k}'|^2} - \Delta\varepsilon_{mn} - T_A(|\mathbf{k}'|,\cos\theta)\right)}{(m_A+\varepsilon_m+T_A(|\mathbf{k}'|,\cos\theta))\sqrt{k_0^2(m_A+\varepsilon_n)^2 - m_\chi^2 m_A^2}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Выражение (4) и входящая в него кинетическая энергия отдачи ядра (3) зависит от двух переменных — модуля импульса $|\mathbf{k}'|$ и косинуса $\cos\theta$ угла вылета χ-частицы после взаимодействия. Интегрирование по $\cos\theta$ выполняется с помощью δ-функции закона сохранения энергии из (4), представленной в виде функции $\cos\theta$:

$$\delta(f(\cos\theta)) = \sum_i \frac{\delta(\cos\theta - \cos\theta_i)}{|df(\cos\theta_i)/d\cos\theta|}. \tag{5}$$

Здесь $\cos\theta_i$ — решения уравнения (на сохранение энергии)

$$f(\cos\theta_i) \equiv k_0 - \sqrt{m_\chi^2+|\mathbf{k}'|^2} - \Delta\varepsilon_{mn} - T_A(|\mathbf{k}'|,\cos\theta_i) = 0. \tag{6}$$

Входящая в (5) производная этой функции такова: $\dfrac{df(\cos\theta)}{d\cos\theta} = \dfrac{|\mathbf{k}'||\mathbf{k}|}{T_A(|\mathbf{k}'|,\cos\theta)+m_A}$. После интегрирования выражения (4) по $\cos\theta$ имеем

$$\frac{d\sigma_{mn}}{d|\mathbf{k}'|} = \frac{-1}{2^5\pi\sqrt{k_0^2(m_A+\varepsilon_n)^2 - m_\chi^2 m_A^2}} \frac{|i\mathcal{M}_{mn}|^2|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|\sqrt{m_\chi^2+|\mathbf{k}'|^2}} \times \\ \times \frac{m_A + T_A(|\mathbf{k}'|,\cos\theta_i)}{(m_A + T_A(|\mathbf{k}'|,\cos\theta_i)+\varepsilon_m)}. \quad (7)$$

С помощью якобиана переход от переменной $|\mathbf{k}'|$ к наблюдаемой переменной T_A

$$\frac{dT_A(|\mathbf{k}'|,\cos\theta)}{d|\mathbf{k}'|} = -\frac{|\mathbf{k}'|}{\sqrt{m_\chi^2+|\mathbf{k}'|^2}} \quad (8)$$

из формулы (7) получается выражение для дифференциального сечения χA-рассеяния

$$\frac{d\sigma_{mn}}{dT_A} = \frac{d\sigma_{mn}}{d|\mathbf{k}'|}\frac{d|\mathbf{k}'|}{dT_A} = \frac{|i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5\pi\sqrt{w}}\frac{1}{|\mathbf{k}|}\frac{T_A+m_A}{T_A+m_A+\varepsilon_m}, \quad (9)$$

где для потока начальных частиц использовано обозначение

$$\sqrt{w} \equiv \sqrt{(m_\chi^2+|\mathbf{k}|^2)(m_A+\varepsilon_n)^2 - m_\chi^2 m_A^2} \simeq |\mathbf{k}|m_A\sqrt{1+\frac{2\varepsilon_n}{m_A}\left(1+\frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}|^2}\right)}. \quad (10)$$

Окончательно релятивистское сечение процесса $\chi A_n \to \chi A_m$ имеет вид

$$\frac{d\sigma_{mn}}{dT_A}(\chi A_n \to \chi A_m) = \frac{|i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5\pi|\mathbf{k}|^2 m_A} C_{mn}(T_A), \quad (11)$$

где

$$C_{mn}(T_A) = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2\varepsilon_n}{m_A}\left(1+\dfrac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}|^2}\right)}}\frac{T_A+m_A}{T_A+m_A+\varepsilon_m} \simeq O(1),$$

поскольку в рассматриваемом приближении $m_A \gg T_A + \varepsilon_m$.

2. АМПЛИТУДА РАССЕЯНИЯ χ-ЧАСТИЦЫ НА ЯДРЕ

Амплитуда вероятности рассеяния релятивистского χ-лептона на ядре, как и в нерелятивистском случае [4], опирается на предположение о том, что взаимодействие осуществляется между лептоном и бесструктурным нуклоном. Это позволяет использовать эффективный 4-фермиоонный лагранжиан [1, 3], записанный в виде произведения лептонного $L_\mu(x) = h_\chi \overline{\psi}_\chi(x) O_\mu \psi_\chi(x)$ и нуклонного $H^\mu(x) = \sum\limits_{f=n,p} h_f \overline{\psi}_f(x) O^\mu \psi_f(x)$ токов, где O^μ — комбинации γ-матриц.

В первом порядке по константе Ферми G_F элемент $\mathbb{S}$-матрицы $\langle P'_m, k'|\mathbb{S}|P_n, k\rangle$, определяющий вероятность перехода ядра и χ-частицы в результате их взаимодействия из начального состояния $|P_n, k\rangle$ в конечное $\langle P'_m, k'|$, записывается стандартным образом:

$$\langle P'_m, k'|\mathbb{S}|P_n, k\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(q + P_n - P'_m) i\mathcal{M}_{mn} = \\ = \frac{iG_F}{\sqrt{2}} \int d^4x\, H^\mu_{mn}(x)\, L^\chi_\mu(x), \quad (12)$$

где $H^\mu_{mn}(x) \equiv \langle P'_m|H^\mu(x)|P_n\rangle$ — матричный элемент перехода ядра из состояния $|P_n\rangle$ в состояние $\langle P'_m|$ за счет адронного тока вида $H^\mu(x)$. Здесь волновая функция состояния ядра определяется выражением [1–4]

$$|P_n\rangle = \int \left(\prod_i^A d\widetilde{\mathbf{p}}^\star_i\right) \frac{\widetilde{\psi}_n(\{p^\star\})}{\sqrt{A!}} \Phi_n(p)|\{p^\star\}\rangle, \\ \text{где} \quad \widetilde{\mathbf{p}}^\star_i = \frac{d\mathbf{p}^\star_i}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\mathbf{p}^\star_i}}}. \quad (13)$$

Волновая функция $\Phi_n(p) = (2\pi)^3\sqrt{2P^0_n}\,\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{P})$ соответствует ядру с определенным значением 3-импульса $\mathbf{P}$ и энергией $P^0_n = E_\mathbf{P} + \varepsilon_n$. В формуле (13) обозначение $\{p^\star\} \equiv (p^\star_1, \ldots, p^\star_n)$, а $p^\star_i$ — 4-импульс i-го нуклона в системе центра масс (покоящегося) ядра.

После преобразования правой части соотношения (12) матричный элемент, определяющий сечение (11), записывается следующим образом:

$$i\mathcal{M}_{mn} = \frac{iG_F}{\sqrt{2}} \sqrt{4P^{0\prime}_m P^0_n}\; l_\mu(k', k, s', s)\, h^\mu_{mn}(\mathbf{q}), \quad (14)$$

где лептонный ток обозначен так:

$$l_\mu(k', k, s', s) \equiv \overline{u}_\chi(\mathbf{k}', s') O_\mu u_\chi(\mathbf{k}, s). \quad (15)$$

Присутствующий в (14) адронный ток $h^\mu_{mn}(\mathbf{q}) = \langle m|H^\mu(0)|n\rangle$, определенный через $|n\rangle$-функции ядерного состояния в системе покоя ядра, имеет вид

$$h^\mu_{mn}(\mathbf{q}) = \sum_k^A \frac{\overline{u}(\overline{\mathbf{p}}^\star_k + \mathbf{q}, r'_k)\, O^\mu_k\, u(\overline{\mathbf{p}}^\star_k, r_k)}{\sqrt{4E_{\overline{\mathbf{p}}^\star_k} E_{\overline{\mathbf{p}}^\star_k + \mathbf{q}}}} \times \\ \times \int \prod_{i=1}^A \frac{d\mathbf{p}^\star_i \delta\big(f(\mathbf{p}^\star_k)\big)}{(2\pi)^3} \widetilde{\psi}^*_m(\{p^{(k)}_\star\}, \mathbf{p}^\star_k + \mathbf{q}) \widetilde{\psi}_n(\{p^\star\})(2\pi)^3 \delta^3\left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}^\star_i\right), \quad (16)$$

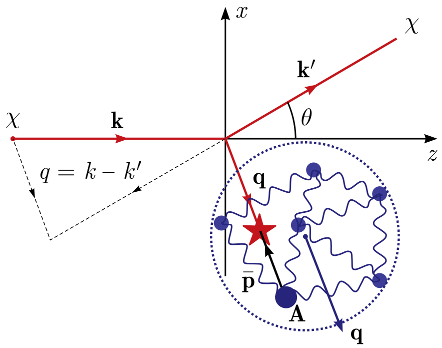

Рис. 2. Схематическое представление условия одновременного выполнения закона сохранения энергии и целостности ядра, «выбирающее» *зависящим от* $\mathbf{q}$ импульс активного нуклона $\overline{\mathbf{p}} = (p_L, p_T)$, взаимодействие с которым происходит в точке, отмеченной звездочкой

где $\overline{\mathbf{p}}^{\star}_k(\mathbf{q})$ — решение уравнения *

$$f(\overline{\mathbf{p}}) \equiv \sqrt{m^2 + \overline{\mathbf{p}}^2} - \sqrt{m^2 + (\overline{\mathbf{p}} + \mathbf{q})^2} - T_A - \Delta\varepsilon_{mn} = 0, \qquad (17)$$

представляющего собой условие одновременного выполнения закона сохранения энергии и *целостности ядра* (рис. 2). Оно «выбирает» импульс активного нуклона $\overline{\mathbf{p}} = (p_L, p_T)$ *зависящим от* $\mathbf{q}$ в виде [1, 3]

$$p_L = -\frac{|\mathbf{q}|}{2}\left[1 - \sqrt{\beta}\sqrt{1 + \frac{4m_T^2}{\mathbf{q}^2(1-\beta)}}\,\right],$$
$$\text{где} \quad \beta = \frac{(T_A + \Delta\varepsilon_{mn})^2}{\mathbf{q}^2}, \quad m_T^2 = m^2 + p_T^2. \qquad (18)$$

В формуле (16) выражение $\{p_\star^{(k)}\}$ совпадает с $\{p_\star\}$ за исключением k-го элемента, который равен $(\mathbf{p}_k^\star + \mathbf{q}, s_k)$.

Как и ранее [1–4], считается, что волновая функция $\widetilde{\psi}_n$ имеет вид произведения независимых друг от друга импульсной $\widetilde{\psi}_n$ и спиновой χ_n компонент:

$$\widetilde{\psi}_n(\{p^\star\}) = \widetilde{\psi}_n(\{\mathbf{p}_\star\})\chi_n(\{r\}). \qquad (19)$$

Здесь введены импульсная $\{\mathbf{p}_\star\} = (\mathbf{p}_1^\star, \ldots, \mathbf{p}_A^\star)$ и спиновая $\{r\} = (r_1, \ldots$ $\ldots, r_A)$ переменные. Спиновые функции нормированы условием

$$\chi_m^*(\{r\})\chi_n(\{r\}) = \delta_{mn} \quad \text{и} \quad \chi_n^*(\{r'\})\chi_n(\{r\}) = \delta_{\{r'\}\{r\}}, \qquad (20)$$

означающим, что если (после взаимодействия) все спины нуклонов остались неизменными, то спиновое состояние ядра также не изменилось, и наоборот, если спиновое состояние ядра не изменилось, то и все спины нуклонов должны остаться также неизменными.

* Здесь и далее в этом разделе считается, что масса протона равна массе нейтрона, т. е. $m_p = m_n \equiv m$.

Поскольку после взаимодействия спиновое r'_k-состояние активного нуклона в $|m\rangle$-ядре может оказаться отличным от спинового r_k-состояния этого нуклона в $|n\rangle$-ядре, определим произведение спиновых функций

$$\lambda^{mn}(r',r) \equiv \lambda^{mn}(\{r'\},\{r\}) \equiv \chi^*_m(\{r^{(k)}\})\chi_n(\{r\}) = \\ = \delta_{mn}\delta_{r'r} + (1-\delta_{mn})\lambda^{mn}_{r'r}, \quad (21)$$

где $\{r^{(k)}\} \equiv \{r'\}$ совпадает с $\{r\}$, за исключением k-го элемента, который равен r'_k, и введено обозначение $\lambda^{mn}_{r'r} \equiv \lambda^{mn}(r',r)$ при $m \neq n$. С учетом (21) и $\overline{\mathbf{p}}(\mathbf{q})$ из (17) выражение (16) переписывается в виде

$$h^{\mu}_{mn}(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^{A} \frac{\overline{u}(\overline{\mathbf{p}}+\mathbf{q}, r'_k)O^{\mu}_k u(\overline{\mathbf{p}}, r_k)}{\sqrt{4E_{\overline{\mathbf{p}}}E_{\overline{\mathbf{p}}+\mathbf{q}}}}\lambda^{mn}(r',r)\ \langle m|\, \mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k}|n\rangle, \quad (22)$$

где многомерный интеграл из (16) представлен в виде ядерного матричного элемента 3-мерного оператора $\widehat{\mathbf{X}}_k$ сдвига k-го нуклона:

$$f^k_{mn}(\mathbf{q}) \equiv \langle m|\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k}|n\rangle = \\ = \int \left[\prod_{i=1}^{A}\frac{d\mathbf{p}^\star_i}{(2\pi)^3}\right]\delta\big(f(\mathbf{p}^\star_k)\big)\widetilde{\psi}^*_m(\{\mathbf{p}^{(k)}_\star\}, \mathbf{p}^\star_k+\mathbf{q})\widetilde{\psi}_n(\{\mathbf{p}_\star\})(2\pi)^3\delta^3\left(\sum_{l=1}^{A}\mathbf{p}^\star_l\right). \quad (23)$$

Здесь $\delta\big(f(\mathbf{p}^\star_k)\big)$-функция учитывает сохранение целостности ядра после сдвига $\widehat{\mathbf{X}}_k$-оператором импульса активного k-го нуклона, вызванного внешним воздействием.

В итоге для матричного элемента (14), определяющего амплитуду вероятности процесса $\chi_s A_n \to \chi_{s'} A^{(*)}_m$, получается *окончательное* выражение

$$i\mathcal{M}^{s's,r'r}_{mn}(\mathbf{q}) = i\frac{G_F}{\sqrt{2}}\frac{m_A}{m}C^{1/2}_{1,mn}\sum_{k=1}^{A} f^k_{mn}(\mathbf{q})\lambda^{mn}(r',r)(l_{s's}\, h^k_{r'r}), \quad (24)$$

где

$$(l_{s's}\, h^k_{r'r}) \equiv l_\mu(k',k,s',s)\,\overline{u}(\overline{\mathbf{p}}+\mathbf{q}, r'_k)O^{\mu}_k u(\overline{\mathbf{p}}, r_k) \quad (25)$$

представляет собой скалярное произведение тока лептона и тока k-го нуклона, заключающее в себе всю специфику происходящего между ними взаимодействия. В формуле (24) введен вспомогательный множитель

$$C_{1,mn} \equiv \frac{P^0_n P'^0_m}{E_{\overline{\mathbf{p}}}E_{\overline{\mathbf{p}}+\mathbf{q}}}\frac{m^2}{m^2_A} \simeq O(1), \quad (26)$$

величина которого с хорошей точностью близка к 1, при этом зависимость от n, m и T_A проявляется только на уровне $O(10^{-3})$*.

3. СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ χ-ЧАСТИЦЫ НА ЯДРЕ

3.1. Когерентный и некогерентный вклады в χA-сечение. *Наблюдаемое* дифференциальное сечение процесса $\chi_s A \to \chi_{s'} A^{(*)}$ получается путем усреднения по всем возможным начальным $|n\rangle$-состояниям и суммированием по всем конечным $|m\rangle$-состояниям ядра выражения (11). После суммирования по спиновым r, r'-индексам (активного) нуклона *на уровне* матричного элемента (24) это наблюдаемое сечение может быть записано в виде [1–4]

$$\frac{d\sigma_{s's}}{dT_A}(\chi A \to \chi A^{(*)}) = \frac{G_F^2 m_A}{2^6\pi|\mathbf{k}_l^\chi|^2 m^2}\Big[T^{s's}_{m=n} + T^{s's}_{m\neq n}\Big], \tag{27}$$

где

$$T^{s's}_{m=n} = g_c \sum_{k,j}^{A}\sum_n \omega_n \left[f^k_{nn} f^{j*}_{nn} \sum_r (l_{s's}\, h^k_{rr}) \sum_x (l_{s's}\, h^j_{xx})^*\right], \tag{28}$$

$$T^{s's}_{m\neq n} = g_i \sum_{k,j}^{A}\sum_n \omega_n \Bigg[\sum_{m\neq n} f^k_{mn} f^{j*}_{mn} \sum_{r'r} \lambda^{mn}_{r'r}(l_{s's}\, h^k_{r'r})\Bigg(\sum_{x'x} \lambda^{mn}_{x'x}(l_{s's}\, h^j_{x'x})\Bigg)^\dagger\Bigg]. \tag{29}$$

Здесь $\sum\limits_n \omega_n = 1$ представляет собой сумму вероятностей всех возможных начальных состояний ядра A. Для полноты картины сохранены поправочные кинематические коэффициенты $g_c = C_{1,nn} C_{nn}$ и $g_i = C_{1,mn} C_{mn}$, значения которых близки к 1 на уровне $O(10^{-3})$.

Суммирование по индексу n в формуле (28) определяет нуклонные формфакторы, усредненные по всем возможным начальным состояниям ядра [1–4]:

$$\sum_n \omega_n f^k_{nn} f^{j*}_{nn} = \begin{cases} |F_{p/n}(\mathbf{q})|^2, & \text{когда } (k,j) = (p,p) \text{ или } (n,n), \\ F_p(\mathbf{q}) F^*_n(\mathbf{q}), & \text{когда } (k,j) = (p,n), \\ F_n(\mathbf{q}) F^*_p(\mathbf{q}), & \text{когда } (k,j) = (n,p). \end{cases} \tag{30}$$

С учетом этого определения выражение (28) для вклада в сечение, отвечающего сохранению ядра его первоначального состояния, когда

---

* Подробности вывода формул (24) и (26) обсуждаются в приложении.

проекция спина активного нуклона не меняется, можно представить как квадрат модуля суммы вкладов протонов и нейтронов:

$$T^{s's}_{m=n}(\mathbf{q}) = g_c \left| \sum_{f=p,n} \sum_{k=1}^{A_f} \sum_{r} (l_{s's}\, h^f_{rr}(\mathbf{q})) F_f(\mathbf{q}) \right|^2. \tag{31}$$

Здесь A_f обозначает полное число нуклонов f-типа в ядре.

Чтобы выполнить суммирование по ядерным индексам m, n в формуле (29), отметим, что из условия нормировки спиновых волновых функций (20) для *одного и того же* k-го нуклона следует соотношение

$$\lambda^{mn}_{r'_k r_k} [\lambda^{mn}_{x'_k x_k}]^* \equiv \delta_{r'_k x'_k} \delta_{r_k x_k} |\lambda^{mn}_{r'_k r_k}|^2, \quad \text{где} \quad |\lambda^{mn}_{r'_k r_k}|^2 = 1. \tag{32}$$

Поэтому можно считать, что $\lambda^{mn}_{r'r}$ не зависит от индексов m и n, может отличаться для протонов и нейтронов $\lambda^{mn}_{r'r} \simeq \lambda^{p/n}_{r'r}$. Иными словами, для любой начальной ориентации спина активного нуклона (индекс r) с одинаковой вероятностью возможна любая конечная ориентация спина этого нуклона (индекс r') при $|n\rangle \to |m\rangle$-переходе ядра*. В результате $\lambda^{mn}_{r'r}$ можно вынести за знак суммирования по m, n в (29). Тогда, если индексы k и j в формуле (29) «указывают» на один и тот же нуклон (скажем, протон), суммирование дает

$$\begin{aligned} &\sum_n \omega_n \sum_{m \neq n} f^k_{mn} f^{k*}_{mn} = \\ &= \sum_n \omega_n \Big[\langle n| \, \mathrm{e}^{i\mathbf{q}\mathbf{X}_k} \sum_m |m\rangle\langle m| \, \mathrm{e}^{-i\mathbf{q}\mathbf{X}_k} |n\rangle \Big] - |F_p(\mathbf{q})|^2 = 1 - |F_p(\mathbf{q})|^2. \end{aligned} \tag{33}$$

Если $k \neq j$, но они «указывают» все еще на протоны (индекс p), то можно записать

$$\begin{aligned} \sum_n \omega_n \sum_{m \neq n} f^k_{mn} f^{j*}_{mn} = \sum_n \omega_n \mathrm{cov}_{nn} \, (\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k}, \mathrm{e}^{-i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_j}) \equiv \\ \equiv \Big\langle \mathrm{cov} \, \Big(\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k}, \mathrm{e}^{-i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_j} \Big) \Big\rangle_p, \end{aligned} \tag{34}$$

где введен оператор ковариации операторов сдвига $\mathrm{e}^{-i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_j}$ и $\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k}$ по состоянию $|n\rangle$ в виде

$$\begin{aligned} &\mathrm{cov}_{nn}(\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k}, \, \mathrm{e}^{-i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_j}) \equiv \\ &\equiv \langle n| \, \mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k} \, \mathrm{e}^{-i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_j} |n\rangle - \langle n| \, \mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k} |n\rangle\langle n| \, \mathrm{e}^{-i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_j} |n\rangle. \end{aligned} \tag{35}$$

Выражение (34) обращается в нуль при малых и больших переданных импульсах. Аналогичное рассмотрение проходит для нейтронов и обобщается на совместный случай протонов и нейтронов. Считается,

* Обсуждение этого приближения дано в приложении.

что, когда корреляции между нуклонами в ядре достаточно слабые, ковариационными функциями типа (34) можно пренебречь. Например, в моделях ядерных оболочек, где многочастичные волновые функции ядер конструируются в виде произведения одночастичных волновых функций [13, 14], ковариация (34) обращается тождественно в нуль. Поэтому, как и в [1–4], в дальнейшем рассмотрении *полностью пренебрегается ковариационными вкладами* типа (34). С учетом вышесказанного слагаемое (29) можно представить окончательно в виде суммы по всем нуклонам:

$$T^{s's}_{m\neq n} = g_i \sum_{f=p,n} \left[1 - |F_f(\mathbf{q})|^2\right] \sum_{k=1}^{A_f} \sum_{r'r} \left|(l_{s's}\, h^f_{r'r}(\mathbf{q}))\right|^2. \tag{36}$$

Таким образом, наблюдаемое дифференциальное сечение (27) процесса $\chi_s A \to \chi_{s'} A^{(*)}$ можно записать в виде двух принципиально отличающихся друг от друга слагаемых:

$$\begin{gathered}
\frac{d\sigma_{s's}}{dT_A} = \frac{d\sigma^{s's}_{\rm coh}}{dT_A}(\chi A \to \chi A) + \frac{d\sigma^{s's}_{\rm inc}}{dT_A}(\chi A \to \chi A^*),\\
\text{где } \frac{d\sigma^{s's}_{\rm coh}}{dT_A} = c_A g_c \left| \sum_{f=n,p} \sum_{k=1}^{A_f} \sum_{r} (l_{s's}\, h^f_{rr}(\mathbf{q})) F_f(\mathbf{q}) \right|^2\\
\text{и } \frac{d\sigma^{s's}_{\rm inc}}{dT_A} = c_A g_i \sum_{f=n,p} \sum_{k=1}^{A_f} \sum_{r'r} |(l_{s's}\, h^f_{r'r}(\mathbf{q}))|^2 [1 - |F_f(\mathbf{q})|^2]
\end{gathered} \tag{37}$$

отвечают, соответственно, упругому и неупругому взаимодействию χ-частицы с ядром. В формулах (37) для удобства введены универсальные множители:

$$c_A \equiv \frac{G_F^2 m_A}{2^6 \pi |\mathbf{k}^\chi_l|^2 m^2} \quad \text{и} \quad \widehat{c}_A \equiv \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{k}^\chi_l|^2 m^2} = 4^2 c_A, \tag{38}$$

где $\mathbf{k}^\chi_l$ — импульс налетающей χ-частицы в системе покоя ядра-мишени. Спиральности χ-частицы (в общем случае проекции спина на некоторое направление) в начальном s и конечном s' состояниях считаются фиксированными в (37). По ним в дальнейшем можно провести усреднение (суммирование).

Поскольку скалярные произведения $(l_{s's}\, h^f_{r'r})$ в формулах (37) зависят только от типа активного нуклона и не зависят от его номера (т. е. от индекса суммирования k), суммирование по k в формулах (37) дает полное число протонов и нейтронов в ядре. В результате дифференциальные сечения рассеяния χ-частицы на ядре $\chi_s A \to \chi_{s'} A^{(*)}$ принимают вид

$$\frac{d\sigma^{s's}_{\text{inc}}}{dT_A} = c_A g_i \sum_{f=p,n} [1 - |F_f(\mathbf{q})|^2] \left[A^f_+ \sum_{r'=\pm} |(l_{s's}\, h^{\eta,f}_{r'+})|^2 + \right.$$
$$\left. + A^f_- \sum_{r'=\pm} |(l_{s's}\, h^{\eta,f}_{r'-})|^2 \right], \qquad (39)$$
$$\frac{d\sigma^{s's}_{\text{coh}}}{dT_A} = c_A g_c \left| \sum_{f=p,n} F_f(\mathbf{q})[A^f_+(l_{s's}\, h^{\eta,f}_{++}) + A^f_-(l_{s's}\, h^{\eta,f}_{--})] \right|^2.$$

Здесь явно выделены суммы по начальным проекциям спина нуклона на направление прилета χ-частицы, что отмечено индексом η у адронных токов. В формуле (39) $A^f_\pm$ — число нуклонов f-типа с проекцией спина ± 1 на это направление.

Формулы (39) удобно переписать *окончательно* в терминах полного числа нуклонов f-типа $A_f = A^f_+ + A^f_-$ и разности числа нуклонов $\Delta A_f = A^f_+ - A^f_-$, имеющих положительную и отрицательную проекции спина на выделенное направление:

$$\frac{d\sigma^{s's}_{\text{coh}}(\mathbf{q})}{g_c dT_A} = c_A \left| \sum_{f=p,n} F_f(\mathbf{q}) \frac{A_f}{2} Q^{s's}_f \right|^2,$$
$$\frac{d\sigma^{s's}_{\text{inc}}(\mathbf{q})}{g_i dT_A} = c_A \sum_{f=p,n} \widehat{F}^2_f(\mathbf{q}) \frac{A_f}{2} \left[Q^{s's}_+ + \frac{\Delta A_f}{A_f} Q^{s's}_- \right], \qquad (40)$$
$$\text{где} \quad \widehat{F}^2_f(\mathbf{q}) \equiv \left[1 - F^2_f(\mathbf{q})\right].$$

Таким образом, *когерентное* и *некогерентное* сечения определяются, соответственно, следующими комбинациями скалярных произведений:

$$Q^{s's}_f \equiv \widehat{Q}^{s's}_+ + \frac{\Delta A_f}{A_f} \widehat{Q}^{s's}_-, \quad \text{где} \quad \widehat{Q}^{s's}_\pm \equiv (l_{s's}\, h^f_{++}) \pm (l_{s's}\, h^f_{--}), \qquad (41)$$

$$\text{и} \quad Q^{s's}_\pm \equiv \sum_{r'=\pm} |(l_{s's}\, h^f_{r'+})|^2 \pm \sum_{r'=\pm} |(l_{s's}\, h^f_{r'-})|^2. \qquad (42)$$

Как правило, если ядро имеет суммарный нулевой спин, то $\Delta A_f = 0$. Практически всегда $\Delta A_f \ll A_f$, за исключением таких ядер, как гелий [15], который, может быть, заслуживает отдельного внимания. Чтобы завершить вывод формулы для дифференциального сечения процесса $\chi A \to \chi A^{(*)}$, необходимо иметь явные выражения для скалярных произведений $(l_{s's}\, h^{p/n}_{r'r})$. Эти величины будут приведены в п. 3.2.

3.2. Набор скалярных произведений для сечений $\chi A \to \chi A^{(*)}$ рассеяния. Скалярные произведения χ-лептонного и нуклонного токов, полученные в работе [16], необходимы для самосогласованного вычисления когерентных и некогерентных сечений $\chi A \to \chi A^{(*)}$ рассеяния. Они определяются выражениями

$$(l^i_{s's}\, h^k_{r'r}) \equiv \sum_{\mu,\nu}^{4} J^{i,\mu}_{s's}(\mathbf{k}')\, g_{\mu\nu}\, J^{k,\nu}_{r'r}(\mathbf{p}'),$$

где индексы s и r обозначают значения начальных спиновых состояний лептона и нуклона, а индексы s' и r' — их конечные состояния. Индексами i и k обозначены векторные ($J^{v,\mu} \equiv V^\mu$), аксиально-векторные ($J^{a,\mu} \equiv A^\mu$) лептонные (аргумент $\mathbf{k}'$) и нуклонные (аргумент $\mathbf{p}'$) токи. Скалярные произведения выражены через массы нуклона и χ-частицы m, m_χ

$$\text{и параметры} \quad \lambda_\pm = \sqrt{E_p \pm m}\,, \qquad \xi_\pm = \sqrt{E_\chi \pm m_\chi}\,,$$

а также угол θ рассеяния χ-частицы в системе центра масс лептона и нуклона (с. ц. м.), где $\mathbf{k} + \mathbf{p} = \mathbf{k}' + \mathbf{p}' = 0$, p и k — 4-импульсы нуклона и χ-частицы, кроме того,

$$\begin{aligned}
E_\chi &\equiv \sqrt{m_\chi^2 + |\mathbf{k}|^2} = \sqrt{m_\chi^2 + |\mathbf{k}'|^2} = \frac{s + m_\chi^2 - m^2}{2\sqrt{s}},\\
E_p &\equiv \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2} = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}'|^2} = \frac{s + m^2 - m_\chi^2}{2\sqrt{s}},\\
|\mathbf{p}| &= \sqrt{E_p^2 - m^2} = \lambda_+\lambda_- = |\mathbf{k}| = \sqrt{E_\chi^2 - m_\chi^2} = \xi_+\xi_- = \frac{\lambda(s, m^2, m_\chi^2)}{2\sqrt{s}}.
\end{aligned} \tag{43}$$

Здесь $\lambda^2(s, m^2, m_\chi^2) \equiv [s - (m + m_\chi)^2][s - (m - m_\chi)^2]$. Инвариантный квадрат полной энергии в с. ц. м. имеет вид

$$s_{\text{с.ц.м}} = (p + k)^2 = (p_0 + k_0)^2 - (\mathbf{p} + \mathbf{k})^2 = (E_\chi + E_p)^2.$$

При этом не меняются величины импульсов частиц $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}| = |\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}|$, откуда возникает единственная свободная переменная упругого рассеяния χ-лептона на нуклоне в с. ц. м. — угол θ между направлением начального импульса лептона $\mathbf{k}$ и направлением его конечного импульса $\mathbf{k}'$. Он присутствует в переданном нуклону 3-импульсе

$$\mathbf{q}^2 = 2|\mathbf{k}|^2(1 - \cos\theta) \equiv \mathbf{q}^2_{\max} \sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{44}$$

В системе покоя нуклона, когда $p_l = (m, \mathbf{p}_l = \mathbf{0})$, квадрат полной энергии имеет вид

$$\begin{aligned}
s = (k_l + p_l)^2 = m_\chi^2 + m^2 + 2m\sqrt{m_\chi^2 + [\mathbf{k}^l_\chi]^2} = \\
= m_\chi^2 + m^2 + 2mm_\chi \left[1 + \frac{2T_0}{m_\chi}\right]^{1/2},
\end{aligned} \tag{45}$$

где $T_0 = |\mathbf{k}_\chi^l|^2/(2m_\chi)$ — кинетическая энергия лептона, падающего на покоящийся нуклон. Для дальнейшего полезно также соотношение

$$\frac{|\mathbf{k}|^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} = \frac{m^2}{s}. \tag{46}$$

С учетом определения угла θ через энергию отдачи ядра T_A*

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{q}^2_{\max}} \simeq \frac{T_A}{T_A^{\max}}, \quad \text{где} \quad T_A^{\max} \simeq \frac{4m_\chi T_0}{m_A}, \tag{47}$$

параметрами T_0 (начальная кинетическая энергия χ-частицы) через соотношения (43) и (45) и T_A (кинетическая энергия отдачи ядра) определяются все необходимые для вычисления сечений величины.

В связи с этим напомним, что согласно условию сохранения целостности ядра (17) *в системе покоя ядра* активный нуклон «встречает» падающую на ядро (вдоль z-оси) χ-частицу с ненулевым импульсом $p_l = (m, 0, 0, p_L)$ из (18), поэтому s-инвариант в системе покоя ядра (лабораторной системе) следует пересчитать:

$$s = (k_l + p_l)^2 = m_\chi^2 + m^2 + 2mm_\chi\left\{\sqrt{1+\frac{|\mathbf{k}_\chi^l|^2}{m_\chi^2}}\sqrt{1+\frac{p_L^2}{m^2}} - \frac{|\mathbf{k}_\chi^l|}{m_\chi}\frac{p_L}{m}\right\}. \tag{48}$$

Иными словами, s-величина зависит как от кинетической энергии падающей χ-частицы T_0 (или $|\mathbf{k}_\chi^l|$), так и от кинетической энергии отдачи ядра T_A. Однако, как правило, $p_L/m \leqslant 0{,}1$. Эта поправка невелика и далее не учитывается.

Приведенные ниже выражения для скалярных произведений лептонного и нуклонного токов при значениях проекции спина нуклона ($r', r = \pm 1$) и χ-частицы ($s', s = \pm 1$) определены следующим образом [16]:

$$(l^w_{s's}\, h^{w,f}_{r'r}) = \alpha_f(l^v_{s's}\, h^v_{r'r}) + \beta_f(l^v_{s's}\, h^a_{r'r}) + \gamma_f(l^a_{s's}\, h^v_{r'r}) + \delta_f(l^a_{s's}\, h^a_{r'r}). \tag{49}$$

Напомним, что индекс f обозначает нейтрон или протон.

Когда сохраняются спиральность χ-лептона и проекция спина нуклона, эти скалярные произведения имеют вид

$$(l^w_{\pm\pm}\, h^{w,f}_{\pm\pm}) = 4\cos\frac{\theta}{2}\times$$
$$\times\left[(\alpha_f - \delta_f)\left[\xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_-\cos^2\frac{\theta}{2} + (m_\chi + \xi_-^2)\left(m + \lambda_-^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right]\pm\right.$$
$$\left.\pm\,\lambda_+\lambda_-(\gamma_f - \beta_f)\left[(m_\chi + \xi_-^2)\cos^2\frac{\theta}{2} + m + \lambda_-^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right]\right],$$

* Поскольку $\mathbf{q}^2 \ll m_A^2$, $\mathbf{q}^2 \simeq 2m_A T_A$, а из (3) следует, что $T_A^{\max} \simeq$ $\simeq m_A\left(1 + \frac{4|\mathbf{k}_\chi^l|^2}{2m_A^2}\right) - m_A \simeq \frac{2|\mathbf{k}_\chi^l|^2}{m_A} = \frac{4m_\chi T_0}{m_A}$.

$$
\begin{aligned}
(l^w_{\pm\pm}\, h^{w,f}_{\mp\mp}) = 4\cos\frac{\theta}{2}\times \\
\times \Bigg[(\alpha_f+\delta_f)(m_\chi+\xi_-^2)m + \xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_-\left(\alpha_f+\alpha_f\sin^2\frac{\theta}{2}+\delta_f\cos^2\frac{\theta}{2}\right)+ \\
+(m_\chi+\xi_-^2)\lambda_-^2\left(\delta_f+\delta_f\sin^2\frac{\theta}{2}+\alpha_f\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\pm \\
\pm\lambda_+\lambda_-\Bigg\{(\beta_f+\gamma_f)m+\lambda_-^2\left(\beta_f+\beta_f\sin^2\frac{\theta}{2}+\gamma_f\cos^2\frac{\theta}{2}\right)+ \\
+(m_\chi+\xi_-^2)\left(\gamma_f+\gamma_f\sin^2\frac{\theta}{2}+\beta_f\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\Bigg\}\Bigg].
\end{aligned}
$$

Когда спиральность χ-лептона сохраняется, меняется проекция спина нуклона:

$$
\begin{aligned}
(l^w_{\pm\pm}\, h^{w,f}_{\pm\mp}) = \mp 4\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mp i\varphi}\times \\
\times \Bigg[2m\delta_f(m_\chi+\xi_-^2)+\xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_-\left(\alpha_f+\alpha_f\sin^2\frac{\theta}{2}+\delta_f\cos^2\frac{\theta}{2}\right)+ \\
+(\xi_-^2+m_\chi)\lambda_-^2\left(\delta_f+\delta_f\sin^2\frac{\theta}{2}+\alpha_f\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\pm \\
\pm\lambda_+\lambda_-\Bigg\{2m\beta_f+(\xi_-^2+m_\chi)\left(\gamma_f+\gamma_f\sin^2\frac{\theta}{2}+\beta_f\cos^2\frac{\theta}{2}\right)+ \\
+\lambda_-^2\left(\beta_f+\beta_f\sin^2\frac{\theta}{2}+\gamma_f\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\Bigg\}\Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(l^w_{\pm\pm}\, h^{w,f}_{\mp\pm}) = 4\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\pm i\varphi}\Big[(\gamma_f-\beta_f)\lambda_+\lambda_-[m_\chi+\lambda_-^2+\xi_-^2]\pm \\
\pm(\alpha_f-\delta_f)[\xi_+\xi_-\lambda_+\lambda_-+(\xi_-^2+m_\chi)\lambda_-^2]\Big].
\end{aligned}
$$

Когда спиральность χ-лептона меняется, сохраняется проекция спина нуклона:

$$
\begin{aligned}
(l^w_{\pm\mp}\, h^{w,f}_{\mp\mp}) = 4m_\chi\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mp i\varphi}\times \\
\times\left[(\beta_f-\gamma_f)\lambda_+\lambda_-\cos^2\frac{\theta}{2}\pm(\alpha_f-\delta_f)\left(m+\lambda_-^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(l^w_{\pm\mp}\, h^{w,f}_{\pm\pm}) = 4m_\chi\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mp i\varphi}\times \\
\times\left[(\gamma_f-\beta_f)\lambda_+\lambda_-\cos^2\frac{\theta}{2}\pm\left\{(\alpha_f+\delta_f)m+(\alpha_f-\delta_f)\lambda_-^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right\}\right].
\end{aligned}
$$

Наконец, при изменении спиральности χ-лептона и проекции спина нуклона

$$(l^w_{\pm\mp}\, h^{w,f}_{\mp\pm}) = 4m_\chi \cos\frac{\theta}{2}\left[(\alpha_f-\delta_f)\lambda_-^2 \sin^2\frac{\theta}{2} - 2\delta_f m \pm (\gamma_f-\beta_f)\lambda_+\lambda_- \sin^2\frac{\theta}{2}\right],$$

$$(l^w_{\pm\mp}\, h^{w,f}_{\pm\mp}) = -4m_\chi\lambda_- \cos\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mp 2i\varphi}\big[(\alpha_f-\delta_f)\lambda_- \mp (\gamma_f-\beta_f)\lambda_+\big].$$

В дальнейшем удобнее использовать скалярные произведения в виде разложения по константам связи слабых токов $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ (индекс f временно опущен) в следующем компактном виде:

$$\begin{aligned}
\frac{(l^w_{\pm\pm}\, h^{w,f}_{\pm\pm})}{4\cos\theta/2} &= \alpha f_1(\theta) - \delta f_1(\theta) \pm \gamma f_2(\theta) \mp \beta f_2(\theta),\\
\frac{(l^w_{\pm\pm}\, h^{w,f}_{\mp\mp})}{4\cos\theta/2} &= \alpha f_3(\theta) + \delta f_4(\theta) \pm \beta f_5(\theta) \pm \gamma f_6(\theta),\\
\frac{(l^w_{\pm\pm}\, h^{w,f}_{\pm\mp})}{\mp 4\sin\theta/2\,\mathrm{e}^{\mp i\varphi}} &= \alpha f_7(\theta) + \delta f_8(\theta) \pm \beta f_9(\theta) \pm \gamma f_{10}(\theta),\\
\frac{(l^w_{\pm\pm}\, h^{w,f}_{\mp\pm})}{4\sin\theta/2\,\mathrm{e}^{\pm i\varphi}} &= \pm\alpha f_{11}(\theta) \mp \delta f_{11}(\theta) + \gamma f_{12}(\theta) - \beta f_{12}(\theta),\\
\frac{(l^w_{\pm\mp}\, h^{w,f}_{\mp\mp})}{4\sin\theta/2\,\mathrm{e}^{\mp i\varphi}} &= \pm\alpha f_{13}(\theta) \mp \delta f_{13}(\theta) + \beta f_{14}(\theta) - \gamma f_{14}(\theta),\\
\frac{(l^w_{\pm\mp}\, h^{w,f}_{\pm\pm})}{4\sin\theta/2\,\mathrm{e}^{\mp i\varphi}} &= \pm\alpha f_{13}(\theta) \pm \delta f_{15}(\theta) + \gamma f_{14}(\theta) - \beta f_{14}(\theta),\\
\frac{(l^w_{\pm\mp}\, h^{w,f}_{\mp\pm})}{4\cos\theta/2} &= +\alpha f_{16}(\theta) - \delta f_{17}(\theta) \pm \gamma_f f_{14}(\theta) \mp \beta_f f_{14}(\theta),\\
\frac{(l^w_{\pm\mp}\, h^{w,f}_{\pm\mp})}{4\cos\theta/2\,\mathrm{e}^{\mp 2i\varphi}} &= -\alpha f_{16}(\theta) + \delta f_{16}(\theta) \pm \gamma f_{14}(\theta) \mp \beta f_{14}(\theta).
\end{aligned}\tag{50}$$

Здесь введены следующие обозначения «формфакторного типа»:

$$f_1(\theta) \equiv E_\chi m + (E_\chi + \lambda_+^2)\lambda_-^2 \cos^2\frac{\theta}{2},$$

$$f_2(\theta) \equiv \lambda_+\lambda_-\left[m + (E_\chi + \lambda_-^2)\cos^2\frac{\theta}{2}\right],$$

$$f_3(\theta) \equiv E_\chi\left(m + \lambda_-^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) + \lambda_+^2\lambda_-^2\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

$$f_4(\theta) \equiv E_\chi m + E_\chi\lambda_-^2\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + \lambda_+^2\lambda_-^2\cos^2\frac{\theta}{2},$$

$$f_5(\theta) \equiv \lambda_+\lambda_-\left[m + \lambda_-^2\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + E_\chi\cos^2\frac{\theta}{2}\right],$$

$$
\begin{aligned}
&f_6(\theta) \equiv \lambda_+\lambda_-\left[m + \lambda_-^2\cos^2\frac{\theta}{2} + E_\chi\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right],\\
&f_7(\theta) \equiv \lambda_+^2\lambda_-^2\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + E_\chi\lambda_-^2\cos^2\frac{\theta}{2},\\
&f_8(\theta) \equiv 2E_\chi m + \lambda_+^2\lambda_-^2\cos^2\frac{\theta}{2} + E_\chi\lambda_-^2\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2}\right),\\
&f_9(\theta) \equiv \lambda_+\lambda_-\left[2m + E_\chi\cos^2\frac{\theta}{2} + \lambda_-^2\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right],\\
&f_{10}(\theta) \equiv \lambda_+\lambda_-\left[E_\chi\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + \lambda_-^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right],\\
&f_{11}(\theta) \equiv (E_\chi + \lambda_+^2)\lambda_-^2\cos^2\frac{\theta}{2}, \quad f_{12}(\theta) \equiv \lambda_+\lambda_-(E_\chi + \lambda_-^2)\cos^2\frac{\theta}{2},\\
&f_{13}(\theta) \equiv m_\chi\left(m + \lambda_-^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right), \quad f_{14}(\theta) \equiv m_\chi\lambda_+\lambda_-\cos^2\frac{\theta}{2},\\
&f_{15}(\theta) \equiv m_\chi\left(m - \lambda_-^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) = f_{13}(\theta) - 2m_\chi\lambda_-^2\cos^2\frac{\theta}{2},\\
&f_{16}(\theta) \equiv m_\chi\lambda_-^2\sin^2\frac{\theta}{2}, \quad f_{17}(\theta) \equiv m_\chi\left(2m + \lambda_-^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) = 2m_\chi m + f_{16}(\theta).
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Квадраты этих скалярных произведений в виде разложений по произведениям констант связи слабых токов (50) записываются следующим образом:

$$
\frac{|(l^w_{\pm\pm}\, h^{w,f}_{\pm\pm})|^2}{16\cos^2\theta/2} = (\alpha^2+\delta^2)f_1^2 - 2\alpha\delta f_1^2 + (\beta^2+\gamma^2)f_2^2 - 2\beta\gamma f_2^2 \mp
$$
$$
\mp 2(\alpha\beta+\gamma\delta)f_1f_2 \pm 2(\alpha\gamma+\beta\delta)f_1f_2,
$$

$$
\frac{|(l^w_{\pm\pm}\, h^{w,f}_{\mp\mp})|^2}{16\cos^2\theta/2} = \alpha^2 f_3(\theta)^2 + \beta^2 f_5(\theta)^2 + \gamma^2 f_6(\theta)^2 + \delta^2 f_4(\theta)^2 +
$$
$$
+ 2\alpha\delta f_3(\theta)f_4(\theta) + 2\beta\gamma f_5(\theta)f_6(\theta) \pm 2\alpha\beta f_3(\theta)f_5(\theta) \pm 2\alpha\gamma f_3(\theta)f_6(\theta) \pm
$$
$$
\pm 2\beta\delta f_4(\theta)f_5(\theta) \pm 2\gamma\delta f_4(\theta)f_6(\theta),
$$

$$
\frac{|(l^w_{\pm\pm}\, h^{w,f}_{\pm\mp})|^2}{16\sin^2\theta/2} = \alpha^2 f_7(\theta)^2 + \delta^2 f_8(\theta)^2 + 2\alpha\delta f_7(\theta)f_8(\theta) + \beta^2 f_9(\theta)^2 +
$$
$$
+ \gamma^2 f_{10}(\theta)^2 + 2\beta\gamma f_9(\theta)f_{10}(\theta) \pm 2\alpha\beta f_7(\theta)f_9(\theta) \pm 2\alpha\gamma f_7(\theta)f_{10}(\theta) \pm
$$
$$
\pm 2\beta\delta f_9(\theta)f_8(\theta) \pm 2\gamma\delta f_8(\theta)f_{10}(\theta),
$$

$$
\frac{|(l^w_{\pm\pm}\, h^{w,f}_{\mp\pm})|^2}{16\sin^2\theta/2} = (\alpha^2+\delta^2-2\alpha\delta)f_{11}(\theta)^2 + (\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma)f_{12}(\theta)^2 \mp
$$
$$
\mp 2(\alpha\beta+\gamma\delta)f_{11}(\theta)f_{12}(\theta) \pm 2(\alpha\gamma+\beta\delta)f_{11}(\theta)f_{12}(\theta),
$$

$$\frac{|(l^w_{\pm\mp}\,h^{w,f}_{\mp\mp})|^2}{16\sin^2\theta/2} = (\alpha^2+\delta^2-2\alpha\delta)f_{13}(\theta)^2+(\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma)f_{14}(\theta)^2\pm$$
$$\pm\,2(\alpha\beta+\gamma\delta)f_{13}(\theta)f_{14}(\theta)\mp 2(\alpha\gamma+\beta\delta)f_{13}(\theta)f_{14}(\theta),$$
$$\frac{|(l^w_{\pm\mp}\,h^{w,f}_{\pm\pm})|^2}{16\sin^2\theta/2} = \alpha^2 f_{13}(\theta)^2+\delta^2 f_{15}(\theta)^2+2\alpha\delta f_{13}(\theta)f_{15}(\theta)+$$
$$+(\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma)f_{14}(\theta)^2\mp 2(\alpha\beta-\alpha\gamma)f_{13}(\theta)f_{14}(\theta)\mp 2(\beta\delta-\gamma\delta)f_{14}(\theta)f_{15}(\theta),$$
$$\frac{|(l^w_{\pm\mp}\,h^{w,f}_{\mp\pm})|^2}{16\cos^2\theta/2} = \alpha^2 f_{16}(\theta)^2+\delta^2 f_{17}(\theta)^2-2\alpha\delta f_{16}(\theta)f_{17}(\theta)+$$
$$+\,(\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma)f_{14}(\theta)^2\pm 2\alpha(\gamma-\beta)f_{14}(\theta)f_{16}(\theta)\pm 2\delta(\beta-\gamma)f_{14}(\theta)f_{17}(\theta),$$
$$\frac{|(l^w_{\pm\mp}\,h^{w,f}_{\pm\mp})|^2}{16\cos^2\theta/2} = (\alpha^2+\delta^2-2\alpha\delta)f_{16}(\theta)^2+(\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma)f_{14}(\theta)^2\pm$$
$$\pm\,2(\alpha\beta+\gamma\delta)f_{14}(\theta)f_{16}(\theta)\mp 2(\alpha\gamma+\beta\delta)f_{14}(\theta)f_{16}(\theta).$$

Этот набор скалярных произведений нуклонного и лептонного токов представляет собой основу для вычисления когерентных (упругих) и некогерентных (неупругих) сечений взаимодействия χ-частицы с ядром в релятивистском приближении.

3.3. Сечения процесса $\chi A \to \chi A^{(*)}$ в релятивистском случае. *Когерентные сечения.* Согласно определению (40) когерентные χA-сечения задаются $\widehat{Q}^{s's}_{\pm}$-комбинациями скалярных произведений (41), которые имеют вид

$$\frac{\widehat{Q}^{\mp\mp}_{+}}{8\cos\theta/2} \equiv \alpha f_{\alpha+}(\theta)+\delta f_{\delta-}(\theta)\mp\beta f_{\beta-}(\theta)\mp\gamma f_{\gamma+}(\theta),$$
$$\frac{\widehat{Q}^{\mp\mp}_{-}}{8\cos\theta/2} \equiv \pm[\alpha f_{\alpha-}(\theta)+\delta f_{\delta+}(\theta)\mp\beta f_{\beta+}(\theta)\mp\gamma f_{\gamma-}(\theta)],$$
$$\frac{\widehat{Q}^{\mp\pm}_{+}}{8\sin(\theta/2)\,\mathrm{e}^{\pm i\varphi}} = \mp\alpha\widehat{f}_{\alpha}(\theta)\pm\delta\widehat{f}_{\delta-}(\theta),$$
$$\frac{\widehat{Q}^{\mp\pm}_{-}}{8\sin(\theta/2)\,\mathrm{e}^{\pm i\varphi}} = \mp(\gamma-\beta)\widehat{f}_{\beta\gamma}(\theta)+\delta\widehat{f}_{\delta+}(\theta).$$

Тогда $Q^{s's}_f$-величины из (41) таковы:

$$\frac{Q^{\mp\mp}_f}{8\cos\theta/2} = \alpha\Big[f_{\alpha+}(\theta)\pm\frac{\Delta A_f}{A_f}f_{\alpha-}(\theta)\Big]+\delta\Big[f_{\delta-}(\theta)\pm\frac{\Delta A_f}{A_f}f_{\delta+}(\theta)\Big]\mp$$
$$\mp\,\beta\Big[f_{\beta-}(\theta)\pm\frac{\Delta A_f}{A_f}f_{\beta+}(\theta)\Big]\mp\gamma\Big[f_{\gamma+}(\theta)\pm\frac{\Delta A_f}{A_f}f_{\gamma-}(\theta)\Big],$$

$$\frac{Q_f^{\mp\pm}}{8\sin\theta/2} = \mp\, \mathrm{e}^{\pm i\varphi}\left[\alpha \widehat{f}_\alpha(\theta) - \delta \widehat{f}_{\delta-}(\theta) + (\gamma-\beta)\frac{\Delta A_f}{A_f}\widehat{f}_{\beta\gamma}(\theta) \mp \delta\frac{\Delta A_f}{A_f}\widehat{f}_{\delta+}(\theta)\right]. \tag{52}$$

Здесь введены следующие обозначения для формфакторных функций:

$$\begin{aligned}
f_{\alpha+}(\theta) &\equiv \frac{1}{2}[f_1(\theta)+f_3(\theta)] = E_\chi\left(m+\lambda_-^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)+\lambda_+^2\lambda_-^2 = \\
&= E_\chi\left(m\sin^2\frac{\theta}{2}+E_p\cos^2\frac{\theta}{2}\right)+|\mathbf{k}|^2, \\
f_{\delta+}(\theta) &\equiv \frac{1}{2}[f_4(\theta)+f_1(\theta)] = E_\chi(m+\lambda_-^2)+\lambda_+^2\lambda_-^2\cos^2\frac{\theta}{2} = \\
&= E_\chi E_p + |\mathbf{k}|^2\cos^2\frac{\theta}{2}, \\
f_{\beta+}(\theta) &\equiv \frac{1}{2}[f_5(\theta)+f_2(\theta)] = \lambda_+\lambda_-\left(m+E_\chi\cos^2\frac{\theta}{2}+\lambda_-^2\right) = \\
&= |\mathbf{k}|\left(E_p+E_\chi\cos^2\frac{\theta}{2}\right), \\
f_{\gamma+}(\theta) &\equiv \frac{1}{2}[f_6(\theta)+f_2(\theta)] = \lambda_+\lambda_-\left(m+E_\chi+\lambda_-^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) = \\
&= |\mathbf{k}|\left(E_\chi+m\sin^2\frac{\theta}{2}+E_p\cos^2\frac{\theta}{2}\right), \\
f_{\alpha-}(\theta) &\equiv \frac{1}{2}[f_3(\theta)-f_1(\theta)] = \lambda_+^2\lambda_-^2\sin^2\frac{\theta}{2} = |\mathbf{k}|^2\sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad (53)\\
f_{\delta-}(\theta) &\equiv \frac{1}{2}[f_4(\theta)-f_1(\theta)] = E_\chi\lambda_-^2\sin^2\frac{\theta}{2} = E_\chi(E_p-m)\sin^2\frac{\theta}{2}, \\
f_{\beta-}(\theta) &\equiv \frac{1}{2}[f_5(\theta)-f_2(\theta)] = \lambda_+\lambda_-\lambda_-^2\sin^2\frac{\theta}{2} = |\mathbf{k}|(E_p-m)\sin^2\frac{\theta}{2}, \\
f_{\gamma-}(\theta) &\equiv \frac{1}{2}[f_6(\theta)-f_2(\theta)] = \lambda_+\lambda_-E_\chi\sin^2\frac{\theta}{2} = |\mathbf{k}|E_\chi\sin^2\frac{\theta}{2}; \\
\widehat{f}_\alpha(\theta) &\equiv f_{13}(\theta) = m_\chi m + m_\chi\lambda_-^2\cos^2\frac{\theta}{2} = m_\chi\left(m+(E_p-m)\cos^2\frac{\theta}{2}\right), \\
\widehat{f}_{\beta\gamma}(\theta) &\equiv f_{14}(\theta) = m_\chi\lambda_+\lambda_-\cos^2\frac{\theta}{2} = m_\chi|\mathbf{k}|\cos^2\frac{\theta}{2}, \\
\widehat{f}_{\delta-}(\theta) &\equiv \frac{1}{2}[f_{13}(\theta)-f_{15}(\theta)] = m_\chi\lambda_-^2\cos^2\frac{\theta}{2} = m_\chi(E_p-m)\cos^2\frac{\theta}{2}, \\
\widehat{f}_{\delta+}(\theta) &\equiv \frac{1}{2}[f_{15}(\theta)+f_{13}(\theta)] = m_\chi m.
\end{aligned}$$

Подстановка $Q_f^{s's}$-параметров из (52) в формулу (40) дает выражения для *релятивистских* сечений *когерентного* χA-рассеяния массивной χ-частицы на ядре (процесс $\chi A \to \chi A$) за счет слабого взаимодействия (49) в следующем виде:

$$\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\rm coh}(\mathbf{q})}{g_c\widehat{c}_A dT_A} = \cos^2\frac{\theta}{2}\Big|\sum_{f=p,n} G^f_\alpha(\mathbf{q})f_{\alpha+}(\theta) \pm \Delta G^f_\alpha(\mathbf{q})f_{\alpha-}(\theta) + G^f_\delta(\mathbf{q})f_{\delta-}(\theta) \pm \\ \pm \Delta G^f_\delta(\mathbf{q})f_{\delta+}(\theta) \mp G^f_\beta(\mathbf{q})f_{\beta-}(\theta) - \Delta G^f_\beta(\mathbf{q})f_{\beta+}(\theta) \mp \\ \mp G^f_\gamma(\mathbf{q})f_{\gamma+}(\theta) - \Delta G^f_\gamma(\mathbf{q})f_{\gamma-}(\theta)\Big|^2, \quad (54)$$

$$\frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\rm coh}(\mathbf{q})}{g_c\widehat{c}_A dT_A} = \sin^2\frac{\theta}{2}\Big|\sum_{f=p,n} G^f_\alpha(\mathbf{q})\widehat{f}_\alpha(\theta) - G^f_\delta(\mathbf{q})\widehat{f}_{\delta-}(\theta) \mp \Delta G^f_\delta(\mathbf{q})\widehat{f}_{\delta+}(\theta) + \\ + [\Delta G^f_\gamma(\mathbf{q}) - \Delta G^f_\beta(\mathbf{q})]\widehat{f}_{\beta\gamma}(\theta)\Big|^2.$$

В формулах (54) введены обозначения для когерентных структурных факторов, аккумулирующих в себе зависимость как от ядра, так и от констант слабого взаимодействия:

$$\begin{aligned} G^f_\alpha(\mathbf{q}) &\equiv \alpha_f F_f(\mathbf{q})A_f, & \Delta G^f_\alpha(\mathbf{q}) &\equiv \alpha_f F_f(\mathbf{q})\Delta A_f,\\ G^f_\beta(\mathbf{q}) &\equiv \beta_f F_f(\mathbf{q})A_f, & \Delta G^f_\beta(\mathbf{q}) &\equiv \beta_f F_f(\mathbf{q})\Delta A_f,\\ G^f_\gamma(\mathbf{q}) &\equiv \gamma_f F_f(\mathbf{q})A_f, & \Delta G^f_\gamma(\mathbf{q}) &\equiv \gamma_f F_f(\mathbf{q})\Delta A_f,\\ G^f_\delta(\mathbf{q}) &\equiv \delta_f F_f(\mathbf{q})A_f, & \Delta G^f_\delta(\mathbf{q}) &\equiv \delta_f F_f(\mathbf{q})\Delta A_f. \end{aligned} \quad (55)$$

Важное упрощение общих формул (54) получается, если учесть, что массы протона и нейтрона одинаковы*, т.е. $m \equiv m_p = m_n$. Тогда форм-факторные f-функции в выражениях (54) также не будут зависеть от типа нуклона и формулы (54) можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\rm coh}(\mathbf{q})}{g_c\widehat{c}_A dT_A} = \cos^2\frac{\theta}{2}\Big|G_\alpha(A,\mathbf{q})f_{\alpha+}(\theta) \pm \Delta G_\alpha(A,\mathbf{q})f_{\alpha-}(\theta) + \\ + G_\delta(A,\mathbf{q})f_{\delta-}(\theta) \pm \Delta G_\delta(A,\mathbf{q})f_{\delta+}(\theta) \mp G_\beta(A,\mathbf{q})f_{\beta-}(\theta) - \\ - \Delta G_\beta(A,\mathbf{q})f_{\beta+}(\theta) \mp G_\gamma(A,\mathbf{q})f_{\gamma+}(\theta) - \Delta G_\gamma(A,\mathbf{q})f_{\gamma-}(\theta)\Big|^2, \quad (56)$$

$$\frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\rm coh}(\mathbf{q})}{g_c\widehat{c}_A dT_A} = \sin^2\frac{\theta}{2}\Big|G_\alpha(A,\mathbf{q})\widehat{f}_\alpha(\theta) - G_\delta(A,\mathbf{q})\widehat{f}_{\delta-}(\theta) \mp \Delta G_\delta(A,\mathbf{q})\widehat{f}_{\delta+}(\theta) + \\ + [\Delta G_\gamma(A,\mathbf{q}) - \Delta G_\beta(A,\mathbf{q})]\widehat{f}_{\beta\gamma}(\theta)\Big|^2.$$

В выражения (56) введены новые $\mathbf{q}$-зависящие эффективные константы связи, учитывающие «влияние» ядерной и нуклонной структур (τ «про-

* Ранее так не считалось, хотя f-индекс (равный p или n) у массы нуклона m и f-функций был опущен.

бегает» значения α, β, γ, δ):

$$\begin{aligned} G_\tau(A,\mathbf{q}) &\equiv G_\tau^p(\mathbf{q}) + G_\tau^n(\mathbf{q}) = \tau_p A_p F_p(\mathbf{q}) + \tau_n A_n F_n(\mathbf{q}),\\ \Delta G_\tau(A,\mathbf{q}) &\equiv \Delta G_\tau^p(\mathbf{q}) + \Delta G_\tau^n(\mathbf{q}) = \tau_p \Delta A_p F_p(\mathbf{q}) + \tau_n \Delta A_n F_n(\mathbf{q}). \end{aligned} \tag{57}$$

Можно сказать, что ядерные формфакторы «участвуют в слабом взаимодействии» вместе с соответствующим числом (неспаренных) протонов или нейтронов.

Учитывая выражения (53) для f-формфакторных функций, формулы (56) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\rm coh}}{g_c dT_A} &= \cos^2\frac{\theta}{2}\frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{E_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2}\Bigg|G_\alpha(A,\mathbf{q})\left(\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{E_p}{m}\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{|\mathbf{k}|^2}{mE_\chi}\right) \pm \\ &\pm \Delta G_\alpha(A,\mathbf{q})\frac{|\mathbf{k}|^2}{mE_\chi}\sin^2\frac{\theta}{2} + G_\delta(A,\mathbf{q})\left(\frac{E_p}{m} - 1\right)\sin^2\frac{\theta}{2} \pm \\ &\pm \Delta G_\delta(A,\mathbf{q})\left(\frac{E_p}{m} + \frac{|\mathbf{k}|^2}{mE_\chi}\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \mp G_\beta(A,\mathbf{q})\frac{|\mathbf{k}|}{E_\chi}\left(\frac{E_p}{m} - 1\right)\sin^2\frac{\theta}{2} - \\ &- \Delta G_\beta(A,\mathbf{q})\frac{|\mathbf{k}|}{m}\left(\frac{E_p}{E_\chi} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right) \mp G_\gamma(A,\mathbf{q})\frac{|\mathbf{k}|}{m}\left(1 + \frac{E_p}{E_\chi}\cos^2\frac{\theta}{2} + \right. \\ &\left. + \frac{m}{E_\chi}\sin^2\frac{\theta}{2}\right) - \Delta G_\gamma(A,\mathbf{q})\frac{|\mathbf{k}|}{m}\sin^2\frac{\theta}{2}\Bigg|^2, \\ \frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\rm coh}}{g_c dT_A} &= \sin^2\frac{\theta}{2}\frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2}\Bigg|\Big(G_\alpha(A,\mathbf{q}) - G_\delta(A,\mathbf{q})\Big)\frac{E_p}{m}\cos^2\frac{\theta}{2} + \\ &+ G_\alpha(A,\mathbf{q})\sin^2\frac{\theta}{2} + G_\delta(A,\mathbf{q})\cos^2\frac{\theta}{2} + \Big(\Delta G_\gamma(A,\mathbf{q}) - \Delta G_\beta(A,\mathbf{q})\Big)\times \\ &\times \frac{|\mathbf{k}|}{m}\cos^2\frac{\theta}{2} \mp \Delta G_\delta(A,\mathbf{q})\Bigg|^2. \end{aligned} \tag{58}$$

Формулы (58) представляют собой наиболее общий набор выражений для релятивистских сечений *когерентного рассеяния массивного χ-лептона на ядре* за счет слабого взаимодействия, заданного в виде (49). Усредненные по начальным проекциям и просуммированные по конечным проекциям спинов χ-лептона когерентные сечения таковы:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{s'=s}_{\rm coh}}{dT_A} &= \cos^2\frac{\theta}{2}\frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{E_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2}\Bigg\{\Bigg[G_\alpha(A,\mathbf{q})\left(\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{E_p}{m}\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{|\mathbf{k}|^2}{mE_\chi}\right) + \\ &+ G_\delta(A,\mathbf{q})\left(\frac{E_p}{m} - 1\right)\sin^2\frac{\theta}{2} - \Delta G_\beta(A,\mathbf{q})\frac{|\mathbf{k}|}{m}\left(\frac{E_p}{E_\chi} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right) - \\ &- \Delta G_\gamma(A,\mathbf{q})\frac{|\mathbf{k}|}{m}\sin^2\frac{\theta}{2}\Bigg]^2 + \Bigg[\Delta G_\alpha(A,\mathbf{q})\frac{|\mathbf{k}|^2}{mE_\chi}\sin^2\frac{\theta}{2} + \end{aligned}$$

$$+ \Delta G_\delta(A,\mathbf{q})\left(\frac{E_p}{m} + \frac{|\mathbf{k}|^2}{mE_\chi}\cos^2\frac{\theta}{2}\right) - G_\beta(A,\mathbf{q})\frac{|\mathbf{k}|}{m}\frac{E_p - m}{E_\chi}\sin^2\frac{\theta}{2} -$$
$$- G_\gamma(A,\mathbf{q})\frac{|\mathbf{k}|}{m}\left(1 + \frac{E_p}{E_\chi}\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{m}{E_\chi}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\Bigg]^2\Bigg\},$$
$$\frac{d\sigma^{s'\neq s}_{\text{coh}}}{dT_A} = \sin^2\frac{\theta}{2}\frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2}\Bigg\{\Bigg[G_\alpha(A,\mathbf{q})\left(\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{E_p}{m}\cos^2\frac{\theta}{2}\right) -$$
$$- G_\delta(A,\mathbf{q})\left(\frac{E_p}{m} - 1\right)\cos^2\frac{\theta}{2} + (\Delta G_\gamma(A,\mathbf{q}) - \Delta G_\beta(A,\mathbf{q}))\,\frac{|\mathbf{k}|}{m}\cos^2\frac{\theta}{2}\Bigg]^2 +$$
$$+ \big[\Delta G_\delta(A,\mathbf{q})\big]^2\Bigg\}. \qquad (59)$$

Вторая формула в (59) отвечает когерентному рассеянию на ядре массивного χ-лептона с переворотом его спиральности. Сечение в данном случае пропорционально квадрату массы лептона m_χ и сильно подавлено при вылете лептона в переднюю полусферу. Сечение без изменения спиральности лептона (первая формула) пропорционально квадрату энергии лептона E_χ и максимально при минимальных углах вылета лептона. Для бесспинового ядра из (59) получаются более «короткие» формулы путем простого отбрасывания слагаемых, пропорциональных ΔG, поскольку при $\Delta A_f = 0$ все $\Delta G = 0$.

Полностью «усредненное» (усредненное по начальным спиральностям и просуммированное по конечным спиральностям лептона) *когерентное* χA-сечение представляет собой сумму двух выражений из (59). Для бесспинового ядра ($\Delta A_f = 0$) полностью усредненное когерентное χA-сечение слабого взаимодействия имеет вид

$$\frac{d\sigma^{\text{tot}}_{\text{coh},w}}{g_c\widehat{c}_A dT_A} = \cos^2\frac{\theta}{2}\Bigg\{E_\chi^2\Bigg[G_\alpha(A,\mathbf{q})\left(m\sin^2\frac{\theta}{2} + E_p\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{|\mathbf{k}|^2}{E_\chi}\right) +$$
$$+ G_\delta(A,\mathbf{q})(E_p - m)\sin^2\frac{\theta}{2}\Bigg]^2 + |\mathbf{k}|^2\Bigg[G_\gamma(A,\mathbf{q})\Bigg[m\sin^2\frac{\theta}{2} +$$
$$+ E_p\cos^2\frac{\theta}{2} + E_\chi\Bigg] + G_\beta(A,\mathbf{q})(E_p - m)\sin^2\frac{\theta}{2}\Bigg]^2\Bigg\} +$$
$$+ \sin^2\frac{\theta}{2}m_\chi^2\Bigg[G_\alpha(A,\mathbf{q})\left(m\sin^2\frac{\theta}{2} + E_p\cos^2\frac{\theta}{2}\right) - G_\delta(A,\mathbf{q})(E_p - m)\cos^2\frac{\theta}{2}\Bigg]^2. \qquad (60)$$

В качестве «упрощающего примера» общих формул (54) *будем считать*, что ядерные формфакторы — действительные функции, не зависящие от типа нуклона, т. е.

$$F(\mathbf{q}) \equiv F_p(\mathbf{q}) = F_n(\mathbf{q}). \qquad (61)$$

Тогда они факторизуются в выражениях (57) и когерентные χA-сечения (58) оказываются напрямую им пропорциональны:

$$\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\rm coh}}{g_c F^2(\mathbf{q}) dT_A} = \cos^2\frac{\theta}{2}\frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{E_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2}\Bigg|G_\alpha(A)\left(\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{E_p}{m}\cos^2\frac{\theta}{2}+\frac{|\mathbf{k}|^2}{mE_\chi}\right)\pm$$
$$\pm\Delta G_\alpha(A)\frac{|\mathbf{k}|^2}{mE_\chi}\sin^2\frac{\theta}{2}+G_\delta(A)\left(\frac{E_p}{m}-1\right)\sin^2\frac{\theta}{2}\pm$$
$$\pm\Delta G_\delta(A)\left(\frac{E_p}{m}+\frac{|\mathbf{k}|^2}{mE_\chi}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\mp G_\beta(A)\frac{|\mathbf{k}|}{E_\chi}\left(\frac{E_p}{m}-1\right)\sin^2\frac{\theta}{2}-$$
$$-\Delta G_\beta(A)\frac{|\mathbf{k}|}{m}\left(\frac{E_p}{E_\chi}+\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\mp G_\gamma(A)\frac{|\mathbf{k}|}{m}\left(1+\frac{E_p}{E_\chi}\cos^2\frac{\theta}{2}+\frac{m}{E_\chi}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)-$$
$$-\Delta G_\gamma(A)\frac{|\mathbf{k}|}{m}\sin^2\frac{\theta}{2}\Bigg|^2,$$
$$\frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\rm coh}}{g_c F^2(\mathbf{q}) dT_A} = \sin^2\frac{\theta}{2}\frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2}\Bigg|(G_\alpha(A)-G_\delta(A))\,\frac{E_p}{m}\cos^2\frac{\theta}{2}+$$
$$+G_\alpha(A)\sin^2\frac{\theta}{2}+G_\delta(A)\cos^2\frac{\theta}{2}+(\Delta G_\gamma(A)-\Delta G_\beta(A))\,\frac{|\mathbf{k}|}{m}\cos^2\frac{\theta}{2}\mp$$
$$\mp\Delta G_\delta(A)\Bigg|^2. \qquad (62)$$

В (62) введены $\mathbf{q}$-независящие «укрупненные» константы взаимодействия:

$$G_\tau(A) = \tau_p A_p + \tau_n A_n \quad \text{и} \quad \Delta G_\tau(A) = \tau_p \Delta A_p + \tau_n \Delta A_n, \quad \text{где} \quad \tau = \alpha,\beta,\gamma,\delta. \qquad (63)$$

Некогерентные сечения. Релятивистские некогерентные сечения χA-рассеяния за счет слабых токов (49) получаются из формулы (40) после вычисления величины

$$Q^{s's}_{\pm} \equiv S^{s's}_{+} \pm S^{s's}_{-},$$
$$\text{где} \quad S^{s's}_{\pm} \equiv \sum_{r'=\pm}|(l_{s's}\,h^f_{r'\pm})|^2 = |(l_{s's}\,h^f_{+\pm})|^2 + |(l_{s's}\,h^f_{-\pm})|^2.$$

С помощью квадратов скалярных произведений, представленных в виде разложения по комбинациям эффективных констант связи α, β, γ, δ, вычисляются восемь $Q^{s's}_{\pm,w}$-величин. Они таковы (здесь и далее у $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ для простоты опущен f-индекс):

$$\frac{Q^{\mp\mp}_{+,w}}{16} = \alpha^2 F^+_{\alpha^2}(\theta)+\beta^2 F^+_{\beta^2}(\theta)+\gamma^2 F^+_{\gamma^2}(\theta)+\delta^2 F^+_{\delta^2}(\theta)+\alpha\delta F^+_{\alpha\delta}(\theta)+$$
$$+\beta\gamma F^+_{\beta\gamma}(\theta)\mp\{\alpha\beta F^+_{\alpha\beta}(\theta)+\alpha\gamma F^+_{\alpha\gamma}(\theta)+\beta\delta F^+_{\beta\delta}(\theta)+\gamma\delta F^+_{\gamma\delta}(\theta)\},$$

$$\begin{aligned}
\frac{Q^{\mp\mp}_{-,w}}{16} &= \mp\{+\alpha^2 F^-_{\alpha^2}(\theta) + \beta^2 F^-_{\beta^2}(\theta) + \gamma^2 F^-_{\gamma^2}(\theta) + \delta^2 F^-_{\delta^2}(\theta) - \\
&- \alpha\delta F^-_{\alpha\delta}(\theta) - \beta\gamma F^-_{\beta\gamma}(\theta)\} + \alpha\gamma F^-_{\alpha\gamma}(\theta) - \alpha\beta F^-_{\alpha\beta}(\theta) + \\
&\qquad + \beta\delta F^-_{\beta\delta}(\theta) - \gamma\delta F^-_{\gamma\delta}(\theta), \\
\frac{Q^{\mp\pm}_{+,w}}{16} &= +\alpha^2 G^+_{\alpha^2}(\theta) + \delta^2 G^+_{\delta^2}(\theta) + \alpha\delta G^+_{\alpha\delta}(\theta) + (\gamma-\beta)^2 G^+_{\beta\gamma}(\theta) \mp \\
&\qquad \mp (\gamma-\beta)\delta G^+_{\beta\delta}(\theta), \\
\frac{Q^{\mp\pm}_{-,w}}{16} &= \pm\delta^2 G^-_{\delta^2}(\theta) \pm \alpha\delta G^-_{\alpha\delta}(\theta) + \alpha(\gamma-\beta) G^-_{\alpha\gamma}(\theta) + \delta(\beta-\gamma) G^-_{\beta\delta}(\theta).
\end{aligned} \tag{64}$$

Подставляя $Q^{s's}_{\pm,w}$ в формулу (40), получим набор некогерентных сечений в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\text{inc}}}{g_i\widehat{c}_A dT_A} &= \frac{1}{2}\sum_{f=p,n} A_f \widehat{F}^2_f(\mathbf{q}) \times \\
&\times \Bigg[\frac{\Delta A_f}{A_f}\{\alpha\gamma F^-_{\alpha\gamma}(\theta) - \alpha\beta F^-_{\alpha\beta}(\theta) + \beta\delta F^-_{\beta\delta}(\theta) - \gamma\delta F^-_{\gamma\delta}(\theta)\} + \\
&+ \alpha^2 F^+_{\alpha^2}(\theta) + \beta^2 F^+_{\beta^2}(\theta) + \gamma^2 F^+_{\gamma^2}(\theta) + \delta^2 F^+_{\delta^2}(\theta) + \alpha\delta F^+_{\alpha\delta}(\theta) + \\
&+ \beta\gamma F^+_{\beta\gamma}(\theta) \mp \frac{\Delta A_f}{A_f}\{\alpha^2 F^-_{\alpha^2}(\theta) + \beta^2 F^-_{\beta^2}(\theta) + \gamma^2 F^-_{\gamma^2}(\theta) + \delta^2 F^-_{\delta^2}(\theta) - \\
&- \alpha\delta F^-_{\alpha\delta}(\theta) - \beta\gamma F^-_{\beta\gamma}(\theta)\} \mp \{\alpha\beta F^+_{\alpha\beta}(\theta) + \alpha\gamma F^+_{\alpha\gamma}(\theta) + \\
&+ \beta\delta F^+_{\beta\delta}(\theta) + \gamma\delta F^+_{\gamma\delta}(\theta)\}\Bigg],
\end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\text{inc}}}{g_i\widehat{c}_A dT_A} &= \frac{1}{2}\sum_{f=p,n} A_f \widehat{F}^2_f(\mathbf{q}) \Bigg[\alpha^2 G^+_{\alpha^2}(\theta) + \delta^2 G^+_{\delta^2}(\theta) + \alpha\delta G^+_{\alpha\delta}(\theta) + \\
&+ (\gamma-\beta)^2 G^+_{\beta\gamma}(\theta) \mp (\gamma-\beta)\delta G^+_{\beta\delta}(\theta) + \frac{\Delta A_f}{A_f} \times \\
&\times \{\pm\delta^2 G^-_{\delta^2}(\theta) \pm \alpha\delta G^-_{\alpha\delta}(\theta) + \alpha(\gamma-\beta) G^-_{\alpha\gamma}(\theta) + \delta(\beta-\gamma) G^-_{\beta\delta}(\theta)\}\Bigg].
\end{aligned}$$

Формулы (65) представляют собой общие выражения для *релятивистских некогерентных* сечений χA-рассеяния за счет слабых токов. Входящие в (65) нуклонные F- и G-формфакторные функции получены с помощью функций из (51). Будучи выраженными через угол рассеяния χ-лептона и энергетические переменные (43), они таковы:

$$\begin{aligned}
\frac{F^-_{\alpha^2}(\theta)}{2} &= -2\sin^2\frac{\theta}{2}|\mathbf{k}|^2\left(|\mathbf{k}|^2 + E_p E_\chi \cos^2\frac{\theta}{2}\right), \\
\frac{F^-_{\delta^2}(\theta)}{2} &= -2\sin^2\frac{\theta}{2}E_p E_\chi\left(E_p E_\chi + |\mathbf{k}|^2 \cos^2\frac{\theta}{2}\right),
\end{aligned}$$

$$\frac{F^-_{\beta^2}(\theta)}{2} = -2\sin^2\frac{\theta}{2}|\mathbf{k}|^2\left(E_p^2 + E_pE_\chi\cos^2\frac{\theta}{2}\right),$$
$$\frac{F^-_{\gamma^2}(\theta)}{2} = -2\sin^2\frac{\theta}{2}|\mathbf{k}|^2\left(E_\chi^2 + E_pE_\chi\cos^2\frac{\theta}{2}\right),$$
$$\frac{F^+_{\alpha^2}(\theta)}{2} = |\mathbf{k}|^4\left(1+\sin^4\frac{\theta}{2}\right) + \cos^2\frac{\theta}{2}\left[|\mathbf{k}|^2\left(E_\chi^2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2E_pE_\chi\right) + m^2E_\chi^2\right],$$
$$\frac{F^+_{\delta^2}(\theta)}{2} = E_\chi^2E_p^2\left(1+\sin^4\frac{\theta}{2}\right) + \\ + \cos^2\frac{\theta}{2}\left[|\mathbf{k}|^2\left(|\mathbf{k}|^2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2E_\chi E_p\right) + m^2E_\chi^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right],$$
$$\frac{F^+_{\beta^2}(\theta)}{2|\mathbf{k}|^2} = \left(E_p + E_\chi\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{\theta}{2}\left[m^2\cos^2\frac{\theta}{2} + E_p^2\left(\sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right],$$
$$\frac{F^+_{\gamma^2}(\theta)}{2|\mathbf{k}|^2} = \left(E_p\cos^2\frac{\theta}{2} + E_\chi\right)^2 + \\ + \sin^2\frac{\theta}{2}\left[m^2\cos^2\frac{\theta}{2} + E_\chi^2\left(\sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right]; \quad (66)$$
$$\frac{F^+_{\alpha\beta}(\theta)}{4} = 2\sin^2\frac{\theta}{2}|\mathbf{k}|^3\left(E_p + E_\chi\cos^2\frac{\theta}{2}\right),$$
$$\frac{F^+_{\alpha\delta}(\theta)}{4} = \sin^2\frac{\theta}{2}|\mathbf{k}|^2\left[(E_\chi^2 + |\mathbf{k}|^2)\cos^2\frac{\theta}{2} + 2E_\chi E_p\right],$$
$$\frac{F^+_{\gamma\delta}(\theta)}{4} = 2\sin^2\frac{\theta}{2}E_\chi|\mathbf{k}|\left(E_\chi E_p + |\mathbf{k}|^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right),$$
$$\frac{F^+_{\beta\gamma}(\theta)}{4} = \sin^2\frac{\theta}{2}|\mathbf{k}|^2\left[(E_\chi^2 + |\mathbf{k}|^2)\cos^2\frac{\theta}{2} + 2E_\chi E_p\right],$$
$$\frac{F^-_{\alpha\delta}(\theta)}{4} = 2E_\chi E_p|\mathbf{k}|^2\sin^4\frac{\theta}{2} + (E_\chi E_p + |\mathbf{k}|^2)^2\cos^2\frac{\theta}{2},$$
$$\frac{F^-_{\beta\gamma}(\theta)}{4} = 2E_\chi E_p|\mathbf{k}|^2\sin^4\frac{\theta}{2} + |\mathbf{k}|^2(E_\chi + E_p)^2\cos^2\frac{\theta}{2},$$
$$\frac{F^-_{\beta\delta}(\theta)}{4} = -\sin^2\frac{\theta}{2}|\mathbf{k}|\left[E_p(E_\chi^2 + |\mathbf{k}|^2)\cos^2\frac{\theta}{2} + 2E_\chi E_p^2\right],$$
$$\frac{F^-_{\alpha\gamma}(\theta)}{4} = -\sin^2\frac{\theta}{2}|\mathbf{k}|\left[E_p(E_\chi^2 + |\mathbf{k}|^2)\cos^2\frac{\theta}{2} + 2|\mathbf{k}|^2E_\chi\right],$$
$$\frac{F^-_{\alpha\beta}(\theta)}{4|\mathbf{k}|} = |\mathbf{k}|^2E_p\left(1+\sin^4\frac{\theta}{2}\right) + \cos^2\frac{\theta}{2}\left[E_\chi^2E_p\cos^2\frac{\theta}{2} + E_\chi(|\mathbf{k}|^2 + E_p^2)\right],$$
$$\frac{F^-_{\gamma\delta}(\theta)}{4|\mathbf{k}|} = E_\chi^2E_p\left(1+\sin^4\frac{\theta}{2}\right) + \cos^2\frac{\theta}{2}\left[|\mathbf{k}|^2\left(E_p\cos^2\frac{\theta}{2} + E_\chi\right) + E_\chi E_p^2\right],$$

$$\frac{F^{+}_{\alpha\gamma}(\theta)}{4|\mathbf{k}|} = (E^2_\chi + E_\chi E_p + |\mathbf{k}|^2)E_p \cos^2\frac{\theta}{2} + |\mathbf{k}|^2 E_\chi\left(2\sin^4\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right),$$
$$\frac{F^{+}_{\beta\delta}(\theta)}{4|\mathbf{k}|} = (E^2_\chi + E_\chi E_p + |\mathbf{k}|^2)E_p \cos^2\frac{\theta}{2} + |\mathbf{k}|^2 E_\chi\left(2\sin^4\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right) + {} + 2m^2 E_\chi \sin^2\frac{\theta}{2};$$

$$\begin{gathered}
\frac{G^{-}_{\alpha\delta}(\theta)}{2m^2_\chi} = -2m^2\sin^2\frac{\theta}{2}, \quad \frac{G^{-}_{\delta^2}(\theta)}{2m^2_\chi} = -2m^2\cos^2\frac{\theta}{2},\\
\frac{G^{+}_{\beta\gamma}(\theta)}{2m^2_\chi} = \lambda^2_+\lambda^2_-\cos^4\frac{\theta}{2} = |\mathbf{k}|^2\cos^4\frac{\theta}{2},\\
\frac{G^{+}_{\alpha^2}(\theta)}{2m^2_\chi} = \left(m^2 + |\mathbf{k}|^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\sin^2\frac{\theta}{2},\\
\frac{G^{+}_{\delta^2}(\theta)}{2m^2_\chi} = m^2\left(1+\cos^2\frac{\theta}{2}\right) + |\mathbf{k}|^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2},\\
\frac{G^{+}_{\beta\delta}(\theta)}{2m^2_\chi} = \frac{G^{+}_{\gamma\delta}(\theta)}{2m^2_\chi} = 2m|\mathbf{k}|\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right),\\
\frac{G^{+}_{\alpha\delta}(\theta)}{2m^2_\chi} = -2|\mathbf{k}|^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2},\\
\frac{G^{-}_{\alpha\gamma}(\theta)}{2m^2_\chi} = 2|\mathbf{k}|\cos^2\frac{\theta}{2}\left[m + 2(E_p - m)\cos^2\frac{\theta}{2}\right]\sin^2\frac{\theta}{2},\\
\frac{G^{-}_{\beta\delta}(\theta)}{2m^2_\chi} = 2|\mathbf{k}|\cos^2\frac{\theta}{2}\left[m + 2(E_p - m)\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\cos^2\frac{\theta}{2}.
\end{gathered} \tag{67}$$

Все G-формфакторные функции (отвечающие перевороту спина лептона) пропорциональны квадрату массы лептона и исчезают при $m_\chi = 0$. С учетом выражений (67) вторая формула из (65) дает некогерентные сечения χA-рассеяния *с переворотом спина лептона* в общем виде:

$$\frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\text{inc}}}{g_i dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{m^2_\chi}{|\mathbf{k}_\chi|^2}\sum_{f=p,n} A_f \widehat{F}^2_f(\mathbf{q})\left[\left(\alpha^2\sin^2\frac{\theta}{2} + \delta^2\left(1+\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right) + {} \right.$$
$$+ (\alpha-\delta)^2\frac{|\mathbf{k}|^2}{m^2}\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} + \left[(\gamma-\beta)\frac{|\mathbf{k}|}{m} \pm \delta\right]^2\cos^4\frac{\theta}{2} \mp 2(\gamma-\beta)\delta\frac{|\mathbf{k}|}{m}\times$$
$$\times\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{2\Delta A_f}{A_f}\left\{\mp\left(\delta^2\cos^2\frac{\theta}{2} + \alpha\delta\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + (\gamma-\beta)\frac{|\mathbf{k}|}{m}\times\right.$$
$$\left.\left.\times\left[\left(\alpha\sin^2\frac{\theta}{2} - \delta\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\frac{\theta}{2} + 2(\alpha-\delta)\left(\frac{E_p}{m} - 1\right)\cos^4\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\right\}\right]. \tag{68}$$

Аналогичное «прямое» разложение первой формулы из (65) занимает слишком много места в силу более сложного вида F-формфакторов (66). Тем не менее, введя обобщенные некогерентные ядерно-нуклонные формфакторные комбинации, аккумулирующие зависимость от слабых констант связи нуклонов, в виде

$$\Phi^{+}_{ab}(\mathbf{q},A)=\sum_{f=p,n}\widehat{F}^2_f(\mathbf{q})A_f a_f b_f \quad \text{и} \quad \Phi^{-}_{ab}(\mathbf{q},A)=\sum_{f=p,n}\widehat{F}^2_f(\mathbf{q})\Delta A_f a_f b_f, \tag{69}$$

где a и b независимо друг от друга «пробегают» все значения $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, можно получить *самое компактное* разложение некогерентного χA-сечения без переворота спина χ-лептона по 20-нуклонным F-формфакторам, соответствующим всем возможным комбинациям слабых констант связи. Это разложение имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\rm inc}}{8g_i c_A dT_A} &= \Phi^{+}_{\alpha^2}(\mathbf{q})F^{+}_{\alpha^2}(\theta)+\Phi^{+}_{\beta^2}(\mathbf{q})F^{+}_{\beta^2}(\theta)+\Phi^{+}_{\gamma^2}(\mathbf{q})F^{+}_{\gamma^2}(\theta)+\\ &+\Phi^{+}_{\delta^2}(\mathbf{q})F^{+}_{\delta^2}(\theta)+\Phi^{+}_{\alpha\delta}(\mathbf{q})F^{+}_{\alpha\delta}(\theta)+\Phi^{+}_{\beta\gamma}(\mathbf{q})F^{+}_{\beta\gamma}(\theta)\mp\\ &\mp[\Phi^{+}_{\alpha\beta}(\mathbf{q})F^{+}_{\alpha\beta}(\theta)+\Phi^{+}_{\alpha\gamma}(\mathbf{q})F^{+}_{\alpha\gamma}(\theta)+\Phi^{+}_{\beta\delta}(\mathbf{q})F^{+}_{\beta\delta}(\theta)+\\ &+\Phi^{+}_{\gamma\delta}(\mathbf{q})F^{+}_{\gamma\delta}(\theta)]+\Phi^{-}_{\alpha\gamma}(\mathbf{q})F^{-}_{\alpha\gamma}(\theta)-\Phi^{-}_{\alpha\beta}(\mathbf{q})F^{-}_{\alpha\beta}(\theta)+\\ &+\Phi^{-}_{\beta\delta}(\mathbf{q})F^{-}_{\beta\delta}(\theta)-\Phi^{-}_{\gamma\delta}(\mathbf{q})F^{-}_{\gamma\delta}(\theta)\pm\Phi^{-}_{\beta\gamma}(\mathbf{q})F^{-}_{\beta\gamma}(\theta)\mp\\ &\mp\Phi^{-}_{\alpha^2}(\mathbf{q})F^{-}_{\alpha^2}(\theta)\mp\Phi^{-}_{\beta^2}(\mathbf{q})F^{-}_{\beta^2}(\theta)\mp\Phi^{-}_{\gamma^2}(\mathbf{q})F^{-}_{\gamma^2}(\theta)\mp\\ &\mp\Phi^{-}_{\delta^2}(\mathbf{q})F^{-}_{\delta^2}(\theta)\pm\Phi^{-}_{\alpha\delta}(\mathbf{q})F^{-}_{\alpha\delta}(\theta).\end{aligned} \tag{70}$$

Подставив в эту формулу явные выражения для F-формфакторов и выполнив простые, но несколько утомительные преобразования, можно получить разложение *некогерентного* χA-сечения *без переворота спина* χ-лептона по кинематическим структурам типа $|\mathbf{k}|^2$, $|\mathbf{k}|^4$, $2E_pE_\chi$ в нижеследующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\rm inc}}{g_i\widehat{c}_A dT_A} &= m^2m^2_\chi\Big[\cos^2\frac{\theta}{2}(\Phi^{+}_{\alpha^2+\delta^2}(\mathbf{q})\pm\Phi^{-}_{2\alpha\delta}(\mathbf{q}))+\\ &+\sin^2\frac{\theta}{2}(\Phi^{+}_{2\delta^2}(\mathbf{q})\pm\Phi^{-}_{2\delta^2}(\mathbf{q}))\Big]+m^2|\mathbf{k}|^2\Big[\cos^2\frac{\theta}{2}(\Phi^{+}_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}(\mathbf{q})\pm\\ &\pm\Phi^{-}_{2(\alpha\delta+\beta\gamma)}(\mathbf{q}))+\sin^2\frac{\theta}{2}(\Phi^{+}_{2(\beta^2+\delta^2)}(\mathbf{q})\pm\Phi^{-}_{2(\beta^2+\delta^2)}(\mathbf{q}))\Big]+\\ &+m^2_\chi|\mathbf{k}|^2\Big[\cos^2\frac{\theta}{2}(\Phi^{+}_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}(\mathbf{q})\pm\Phi^{-}_{2(\alpha\delta+\beta\gamma)}(\mathbf{q}))+\\ &+\sin^2\frac{\theta}{2}(\Phi^{+}_{2(\gamma^2+\delta^2)}(\mathbf{q})\pm\Phi^{-}_{2(\gamma^2+\delta^2)}(\mathbf{q}))-\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\Phi^{+}_{(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2}(\mathbf{q})\Big]\mp\end{aligned}$$

$$\mp m_\chi^2|\mathbf{k}|E_p\Big[\cos^2\frac{\theta}{2}(\Phi^+_{2(\alpha\gamma+\beta\delta)}(\mathbf{q})\pm\Phi^-_{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}(\mathbf{q}))+$$
$$+\sin^2\frac{\theta}{2}(\Phi^+_{4\gamma\delta}(\mathbf{q})\pm\Phi^-_{4\gamma\delta}(\mathbf{q}))\pm\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\Phi^-_{2(\alpha-\delta)(\gamma-\beta)}(\mathbf{q})\Big]\mp m^2|\mathbf{k}|E_\chi\times$$
$$\times\Big[\cos^2\frac{\theta}{2}(\Phi^+_{2(\alpha\gamma+\beta\delta)}(\mathbf{q})\pm\Phi^-_{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}(\mathbf{q}))+\sin^2\frac{\theta}{2}(\Phi^+_{4\beta\delta}(\mathbf{q})\pm\Phi^-_{4\beta\delta}(\mathbf{q}))\Big]+$$
$$+2E_pE_\chi|\mathbf{k}|^2\Big[\Phi^+_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}(\mathbf{q})\pm\Phi^-_{2(\alpha\delta+\beta\gamma)}(\mathbf{q})-$$
$$-\sin^2\frac{\theta}{2}\Big(\Phi^+_{(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2}(\mathbf{q})\mp\cos^2\frac{\theta}{2}\Phi^-_{(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2}(\mathbf{q})\Big)\Big]+$$
$$+2|\mathbf{k}|^4\Big[\Phi^+_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}(\mathbf{q})\pm\Phi^-_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}(\mathbf{q})-$$
$$-\cos^2\frac{\theta}{2}\Big(\sin^2\frac{\theta}{2}\Phi^+_{(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2}(\mathbf{q})\pm\Phi^-_{(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2}(\mathbf{q})\Big)\Big]\mp$$
$$\mp2|\mathbf{k}|^3E_p\Big[\Phi^+_{2(\alpha\gamma+\beta\delta)}(\mathbf{q})\pm\Phi^-_{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}(\mathbf{q})+\sin^2\frac{\theta}{2}\Big(\Phi^+_{2(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}(\mathbf{q})\mp$$
$$\mp\cos^2\frac{\theta}{2}\Phi^-_{2(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}(\mathbf{q})\Big)\Big]\mp2|\mathbf{k}|^3E_\chi\Big[\Phi^+_{2(\alpha\gamma+\beta\delta)}(\mathbf{q})\pm\Phi^-_{2(\alpha\beta+\gamma\delta)}(\mathbf{q})+$$
$$+\sin^2\frac{\theta}{2}\Big(\cos^2\frac{\theta}{2}\Phi^+_{2(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}(\mathbf{q})\mp\Phi^-_{2(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}(\mathbf{q})\Big)\Big].\quad(71)$$

В формуле (71) для сокращения записи введены суммы из выражений (69) типа

$$\Phi^+_{\alpha^2\pm\delta^2}(\mathbf{q})=\Phi^+_{\alpha^2}(\mathbf{q},A)\pm\Phi^+_{\delta^2}(\mathbf{q},A)=\sum_{f=p,n}\widehat{F}^2_f(\mathbf{q})A_f(\alpha_f^2\pm\delta_f^2),$$
$$\Phi^-_{\alpha\delta\pm\beta\gamma}(\mathbf{q})=\Phi^-_{\alpha\delta}(\mathbf{q},A)\pm\Phi^-_{\beta\gamma}(\mathbf{q},A)=\sum_{f=p,n}\widehat{F}^2_f(\mathbf{q})\Delta A_f(\alpha_f\delta_f\pm\beta_f\gamma_f).$$

Формулы (70) и (71) — это два разных представления *некогерентного сечения* рассеяния χ-частицы на ядре *без переворота спина лептона*. Для бесспинового ядра ($\Delta A_f=0$ и все $\Phi^-=0$) формула (71) принимает вид

$$\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\text{inc},0}}{g_i\widehat{c}_A dT_A}=m^2m_\chi^2\Big[\cos^2\frac{\theta}{2}\Phi^+_{\alpha^2+\delta^2}(\mathbf{q})+2\sin^2\frac{\theta}{2}\Phi^+_{\delta^2}(\mathbf{q})\Big]+$$
$$+m^2|\mathbf{k}|^2\Big[\cos^2\frac{\theta}{2}\Phi^+_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}(\mathbf{q})+2\sin^2\frac{\theta}{2}\Phi^+_{\beta^2+\delta^2}(\mathbf{q})\Big]+$$
$$+m_\chi^2|\mathbf{k}|^2\Big[\cos^2\frac{\theta}{2}\Phi^+_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}(\mathbf{q})+2\sin^2\frac{\theta}{2}\Phi^+_{\gamma^2+\delta^2}(\mathbf{q})-$$

$$
\begin{aligned}
&- \sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\Phi^{+}_{(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2}(\mathbf{q})\Big]+\\
&+ 2E_pE_\chi|\mathbf{k}|^2\left[\cos^2\frac{\theta}{2}\Phi^{+}_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}(\mathbf{q}) + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\Phi^{+}_{\alpha\delta+\beta\gamma}(\mathbf{q})\right]+\\
&+ 2|\mathbf{k}|^4\left[\Phi^{+}_{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}(\mathbf{q}) - \sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\Phi^{+}_{(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2}(\mathbf{q})\right]\mp\\
&\mp 2m_\chi^2|\mathbf{k}|E_p\left[\cos^2\frac{\theta}{2}\Phi^{+}_{\alpha\gamma+\beta\delta}(\mathbf{q}) + \sin^2\frac{\theta}{2}\Phi^{+}_{2\gamma\delta}(\mathbf{q})\right]\mp\\
&\mp 2m^2|\mathbf{k}|E_\chi\left[\cos^2\frac{\theta}{2}\Phi^{+}_{\alpha\gamma+\beta\delta}(\mathbf{q}) + \sin^2\frac{\theta}{2}\Phi^{+}_{2\beta\delta}(\mathbf{q})\right]\mp\\
&\mp 4|\mathbf{k}|^3E_\chi\left[\Phi^{+}_{\alpha\gamma+\beta\delta}(\mathbf{q}) + \Phi^{+}_{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}(\mathbf{q})\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right]\mp\\
&\mp 4|\mathbf{k}|^3E_p\left[\Phi^{+}_{\alpha\gamma+\beta\delta}(\mathbf{q}) + \Phi^{+}_{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}(\mathbf{q})\sin^2\frac{\theta}{2}\right]. \qquad (72)
\end{aligned}
$$

Из формул (71) и (72) можно получить «проверочные предельные случаи». Во-первых, когда $m_\chi^2 \to 0$ (и $E_\chi \to |\mathbf{k}|$), формула (72) приобретает вид

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\text{inc},0}}{|\mathbf{k}|^2 g_i\widehat{c}_A dT_A} &= s\Phi^{+}_{(\alpha\mp\gamma)^2+(\beta\mp\delta)^2}(\mathbf{q}) - m^2\sin^2\frac{\theta}{2}\Phi^{+}_{(\alpha\mp\gamma)^2-(\beta\mp\delta)^2}(\mathbf{q}) -\\
&- 2|\mathbf{k}|\sin^2\frac{\theta}{2}\Phi^{+}_{((\alpha-\delta)\pm(\beta-\gamma))^2}(\mathbf{q})\left(E_p + |\mathbf{k}|\cos^2\frac{\theta}{2}\right),
\end{aligned}
$$

из которого для некогерентного χA-сечения без переворота спина при $m_\chi^2 = 0$ и $\Delta A_f = 0$ получается следующее «явное выражение»:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\text{inc},00}}{dT_A} &= \frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{|\mathbf{k}|^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2}\sum_{f=p,n}\widehat{F}_f^2(\mathbf{q})A_f\times\\
&\times\left[\frac{s}{m^2}[(\alpha\mp\gamma)^2 + (\beta\mp\delta)^2] - \sin^2\frac{\theta}{2}[(\alpha\mp\gamma)^2 - (\beta\mp\delta)^2]-\right.\\
&\left.- 2\frac{|\mathbf{k}|}{m}\sin^2\frac{\theta}{2}((\alpha\mp\gamma)\pm(\beta\mp\delta))^2\left(\frac{E_p}{m} + \frac{|\mathbf{k}|}{m}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right]. \qquad (73)
\end{aligned}
$$

Выражение (73) будет использовано далее для кросс-проверки. Во-вторых, когда $|\mathbf{k}| \to 0$, из (72) имеем простое выражение

$$
\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\text{inc}}}{dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2}\left[\Phi^{+}_{\alpha^2}(\mathbf{q})\cos^2\frac{\theta}{2} + \Phi^{+}_{\delta^2}(\mathbf{q})\left(1 + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right],
$$

которое совпадает с полученным ранее в нерелятивистском пределе [4].

В терминах Φ-формфакторных функций из (69) выражение (68) для некогерентного сечения χA-рассеяния *с переворотом спина лептона* принимает вид

$$\frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\rm inc}}{8g_i c_A dT_A} = \Phi^{+}_{\alpha^2}(\mathbf{q})G^{+}_{\alpha^2}(\theta) + \Phi^{+}_{\delta^2}(\mathbf{q})G^{+}_{\delta^2}(\theta) + \Phi^{+}_{\alpha\delta}(\mathbf{q})G^{+}_{\alpha\delta}(\theta) + \\ + \Phi^{+}_{(\gamma-\beta)^2}(\mathbf{q})G^{+}_{\beta\gamma}(\theta) \mp \Phi^{+}_{(\gamma-\beta)\delta}(\mathbf{q})G^{+}_{\beta\delta}(\theta) \pm \\ \pm \Phi^{-}_{\delta^2}(\mathbf{q})G^{-}_{\delta^2}(\theta) \pm \Phi^{-}_{\alpha\delta}(\mathbf{q})G^{-}_{\alpha\delta}(\theta) + \Phi^{-}_{\alpha(\gamma-\beta)}(\mathbf{q})G^{-}_{\alpha\gamma}(\theta) + \Phi^{-}_{\delta(\beta-\gamma)}(\mathbf{q})G^{-}_{\beta\delta}(\theta).$$

После «раскрытия» G-формфакторов это выражение переходит в следующее:

$$\frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\rm inc}}{g_i dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2}\Big\{\Phi^{+}_{\alpha^2+\delta^2}(\mathbf{q}) + \cos^2\frac{\theta}{2}\Phi^{+}_{\delta^2-\alpha^2}(\mathbf{q}) + \\ + \frac{|\mathbf{k}|}{m}\cos^2\frac{\theta}{2}\left[\frac{|\mathbf{k}|}{m}\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\Phi^{+}_{(\alpha-\delta)^2}(\mathbf{q}) + \cos^2\frac{\theta}{2}\Phi^{+}_{(\gamma-\beta)^2}(\mathbf{q})\right) \pm \right. \\ \left. \pm 2\Phi^{+}_{(\gamma-\beta)\delta}(\mathbf{q})\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right] + \\ + 2\frac{|\mathbf{k}|}{m}\cos^2\frac{\theta}{2}\left[\Phi^{-}_{(\alpha+\delta)(\beta-\gamma)}(\mathbf{q})\cos^2\frac{\theta}{2} - \Phi^{-}_{\alpha(\beta-\gamma)}(\mathbf{q})\right] + \\ + 4\frac{(E_p-m)}{m}\frac{|\mathbf{k}|}{m}\cos^4\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\Phi^{-}_{(\delta-\alpha)(\beta-\gamma)}(\mathbf{q}) \mp \\ \mp 2\left[\Phi^{-}_{\alpha\delta}(\mathbf{q}) + \Phi^{-}_{\delta^2-\alpha\delta}(\mathbf{q})\cos^2\frac{\theta}{2}\right]\Big\}. \quad (74)$$

Полностью усредненное по начальным и просуммированное по конечным спиральностям χ-частицы *усредненное некогерентное* сечение слабого χA-взаимодействия имеет вид

$$\frac{d\sigma^{\rm tot}_{\rm inc}}{g_i c_A dT_A} \equiv \frac{1}{2}\sum_{s's}\frac{d\sigma^{s's}_{\rm inc}}{g_i c_A dT_A} = \\ = \frac{1}{2}\sum_{f=p,n}\frac{A_f}{2}\widehat{F}^2_f(\mathbf{q})16\left[\sum_{s's}\frac{Q^{s's}_{+,w}}{16} + \frac{\Delta A_f}{A_f}\sum_{s's}\frac{Q^{s's}_{-,w}}{16}\right]. \quad (75)$$

Это сечение можно вычислить «напрямую», взяв сумму всех индивидуальных некогерентных сечений из (65) по всем проекциям спина s, s' начального и конечного χ-лептона. Например, когда $m_\chi = 0$ и $\Delta A_f = 0$, полное χA-сечение (75) представляет собой полусумму только двух выражений из (73). Действительно,

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{d\sigma^{--}_{\rm inc,00}}{dT_A} + \frac{d\sigma^{++}_{\rm inc,00}}{dT_A}\right\} = \frac{G_F^2 m_A}{8\pi}\frac{|\mathbf{k}|^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2}\sum_{f=p,n}\widehat{F}^2_f(\mathbf{q})A_f \times \\ \times\left[+\frac{s}{m^2}[(\alpha-\gamma)^2 + (\beta-\delta)^2] - \sin^2\frac{\theta}{2}[(\alpha-\gamma)^2 - (\beta-\delta)^2] - \right.$$

$$
-\frac{2|\mathbf{k}|}{m}\sin^2\frac{\theta}{2}(\alpha-\gamma+\beta-\delta)^2\left(\frac{E_p}{m}+\frac{|\mathbf{k}|}{m}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)+
$$
$$
+\frac{s}{m^2}[(\alpha+\gamma)^2+(\beta+\delta)^2]-\sin^2\frac{\theta}{2}[(\alpha+\gamma)^2-(\beta+\delta)^2]-
$$
$$
-\frac{2|\mathbf{k}|}{m}\sin^2\frac{\theta}{2}(\alpha+\gamma-\beta-\delta)^2\left(\frac{E_p}{m}+\frac{|\mathbf{k}|}{m}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\Bigg]. \quad (76)
$$

Здесь верхняя строка отвечает отрицательной спиральности безмассового χ-лептона и полностью обращается в нуль для $V+A$-тока, нижняя строка — положительной спиральности безмассового χ-лептона и полностью обращается в нуль для $V-A$-тока *. Это «свойство» выражения (73) говорит в пользу его правильности. После небольшого преобразования формула (76) принимает вид ($m_\chi=0$ и $\Delta A_f=0$)

$$
\frac{d\sigma^{\rm tot}_{{\rm inc},00}}{g_i dT_A}=\frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{|\mathbf{k}|^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2}\times
$$
$$
\times\sum_{f=p,n}\widehat{F}_f^2(\mathbf{q})A_f\left[\frac{s}{m^2}(\alpha^2+\delta^2+\beta^2+\gamma^2)-\sin^2\frac{\theta}{2}(\alpha^2-\delta^2+\gamma^2-\beta^2)-\right.
$$
$$
\left.-\frac{2|\mathbf{k}|}{m}\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{E_p}{m}+\frac{|\mathbf{k}|}{m}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)[(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2]\right]. \quad (77)
$$

Другой вариант нахождения полного сечения (75) — воспользоваться результатами вычисления сумм $\sum Q^{s's}_{\pm,w}$ из правой части формулы (75), которые имеют вид

$$
\sum_{s's}\frac{Q^{s's}_{+,w}}{2^5}=\alpha^2S^+_{\alpha^2}(\theta)+\beta^2S^+_{\beta^2}(\theta)+\gamma^2S^+_{\gamma^2}(\theta)+\delta^2S^+_{\delta^2}(\theta)+
$$
$$
+\alpha\delta S^+_{\alpha\delta}(\theta)+\beta\gamma S^+_{\beta\gamma}(\theta), \quad (78)
$$
$$
\sum_{s's}\frac{Q^{s's}_{-,w}}{2^5}=\alpha\gamma S^-_{\alpha\gamma}(\theta)+\beta\delta S^-_{\beta\delta}(\theta)-\alpha\beta S^-_{\alpha\beta}(\theta)-\gamma\delta S^-_{\gamma\delta}(\theta).
$$

Суммы структурных коэффициентов при комбинациях констант связи следующие:

$$
\frac{S^+_{\alpha^2}(\theta)}{2}=\frac{F^+_{\alpha^2}(\theta)}{2}+\frac{G^+_{\alpha^2}(\theta)}{2}=m^2m_\chi^2+|\mathbf{k}|^2\left[s\cos^2\frac{\theta}{2}+2|\mathbf{k}|^2\sin^4\frac{\theta}{2}\right],
$$
$$
\frac{S^+_{\delta^2}(\theta)}{2}=\frac{F^+_{\delta^2}(\theta)}{2}+\frac{G^+_{\delta^2}(\theta)}{2}=
$$
$$
=3m^2m_\chi^2+|\mathbf{k}|^2\left[s\cos^2\frac{\theta}{2}+2|\mathbf{k}|^2\sin^4\frac{\theta}{2}+2(m^2+m_\chi^2)\sin^2\frac{\theta}{2}\right],
$$

* Поскольку в случае слабого $V\mp A$-тока $(\alpha\mp\gamma)_{V\mp A}=2g_V$, $(\delta\mp\beta)_{V\mp A}=\pm2g_A$, $(\alpha\mp\gamma)_{V\pm A}=(\delta\mp\beta)_{V\pm A}=0$.

$$\frac{S^{+}_{\alpha\delta}(\theta)}{2} = \frac{F^{+}_{\alpha\delta}(\theta)}{2} + \frac{G^{+}_{\alpha\delta}(\theta)}{2} = 2\sin^2\frac{\theta}{2}|\mathbf{k}|^2\left[s - m^2 - m_\chi^2 - 2|\mathbf{k}|^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right],$$
$$\frac{S^{+}_{\gamma^2}(\theta)}{2} = \frac{F^{+}_{\gamma^2}(\theta)}{2} + \frac{G^{+}_{\beta\gamma}(\theta)}{2} = |\mathbf{k}|^2\left[(s + m_\chi^2)\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin^4\frac{\theta}{2}E_\chi^2\right], \tag{79}$$
$$\frac{S^{+}_{\beta^2}(\theta)}{2} = \frac{F^{+}_{\beta^2}(\theta)}{2} + \frac{G^{+}_{\beta\gamma}(\theta)}{2} =$$
$$= |\mathbf{k}|^2\left[(s + m_\chi^2)\cos^2\frac{\theta}{2} + 2(m^2 - m_\chi^2)\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} + 2E_p^2\sin^4\frac{\theta}{2}\right],$$
$$\frac{S^{+}_{\beta\gamma}(\theta)}{2} = \frac{F^{+}_{\beta\gamma}(\theta)}{2} - 2\frac{G^{+}_{\beta\gamma}(\theta)}{2} =$$
$$= 2|\mathbf{k}|^2\left[(s - m^2 + m_\chi^2)\sin^2\frac{\theta}{2} - m_\chi^2\cos^2\frac{\theta}{2} - 2E_\chi^2\sin^4\frac{\theta}{2}\right];$$

$$\frac{S^{-}_{\alpha\gamma}(\theta)}{4|\mathbf{k}|} = \frac{G^{-}_{\alpha\gamma}(\theta)}{2} + \frac{F^{-}_{\alpha\gamma}(\theta)}{2} = -\sin^2\frac{\theta}{2}\left[m_\chi^2(E_p - m)\times\right.$$
$$\left.\times\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1 - 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) + 2|\mathbf{k}|^2\left(E_p\cos^2\frac{\theta}{2} + E_\chi\right)\right],$$
$$\frac{S^{-}_{\beta\delta}(\theta)}{4|\mathbf{k}|} = \frac{G^{-}_{\beta\delta}(\theta)}{2} + \frac{F^{-}_{\beta\delta}(\theta)}{2} = m_\chi^2\left(m\cos^2\frac{\theta}{2} + E_p\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\times$$
$$\times\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) - 2\sin^2\frac{\theta}{2}E_p\left(E_\chi E_p + \cos^2\frac{\theta}{2}|\mathbf{k}|^2\right), \tag{80}$$
$$\frac{S^{-}_{\gamma\delta}(\theta)}{4|\mathbf{k}|} = \frac{F^{-}_{\gamma\delta}(\theta)}{2} + \frac{G^{-}_{\beta\delta}(\theta)}{2} = 2E_\chi^2E_p\left(\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^4\frac{\theta}{2}\right) - m_\chi^2(E_p - m)\times$$
$$\times\cos^4\frac{\theta}{2}\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + E_\chi(m^2 + 2|\mathbf{k}|^2)\cos^2\frac{\theta}{2},$$
$$\frac{S^{-}_{\alpha\beta}(\theta)}{4|\mathbf{k}|} = \frac{F^{-}_{\alpha\beta}(\theta)}{2} + \frac{G^{-}_{\alpha\gamma}(\theta)}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2}\left[m_\chi^2\cos^2\frac{\theta}{2}(E_p - m)\left(1 + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + (m_\chi^2 + E_\chi m)m + 2|\mathbf{k}|^2\sqrt{s}\right] + 2|\mathbf{k}|^2E_p\sin^4\frac{\theta}{2}.$$

Подставляя выражения (79) и (80) в формулы (78), получим для них явный вид:

$$\sum\frac{Q^{s's}_{+,w}}{2^6} = (\alpha^2 + 3\delta^2)m^2m_\chi^2 + 2|\mathbf{k}|^4[(\alpha - \delta)^2 + (\beta - \gamma)^2]\sin^4\frac{\theta}{2} +$$
$$+ |\mathbf{k}|^2 s\left[((\alpha - \delta)^2 + (\beta - \gamma)^2)\cos^2\frac{\theta}{2} + 2(\alpha\delta + \beta\gamma)\right] +$$

$$
\begin{aligned}
&+2|\mathbf{k}|^2\sin^2\frac{\theta}{2}[m^2(\beta-\gamma)\beta+(m^2+m_\chi^2)(\delta-\alpha)\delta]+\\
&+|\mathbf{k}|^2m_\chi^2\left[(\beta-\gamma)^2\left(\sin^4\frac{\theta}{2}+\cos^4\frac{\theta}{2}\right)+(\gamma^2-\beta^2)\sin^2\frac{\theta}{2}\right],
\end{aligned}
\tag{81}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum\frac{Q^{s's}_{-,w}}{2^7|\mathbf{k}|}=&(\alpha\gamma+\beta\delta)\left[m_\chi^2E_p\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)-\right.\\
&\left.-2|\mathbf{k}|^2\left(E_p\cos^2\frac{\theta}{2}+E_\chi\right)\sin^2\frac{\theta}{2}\right]-(\alpha\beta+\gamma\delta)\times\\
&\times\left[m_\chi^2E_p\cos^4\frac{\theta}{2}\left(1+2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+2|\mathbf{k}|^2E_p\left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+\right.\\
&\left.+(2|\mathbf{k}|^2+m^2)E_\chi\cos^2\frac{\theta}{2}\right]-2\delta(\beta m^2E_\chi+\gamma m_\chi^2E_p)\sin^2\frac{\theta}{2}+\\
&+\left(\alpha\sin^2\frac{\theta}{2}-\delta\cos^2\frac{\theta}{2}\right)(\gamma-\beta)mm_\chi^2\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right).
\end{aligned}
$$

С помощью этих сумм по формуле (75) вычисляется полностью усредненное некогерентное сечение χA-взаимодействия. По аналогии с когерентным сечением (60) приведем лишь формулу для полностью усредненного *некогерентного* χA-сечения *для бесспинового ядра*:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{\rm tot}_{\rm inc}}{g_i dT_A}=\widehat{c}_A\sum_{f=p,n}A_f\widehat{F}_f^2(\mathbf{q})&\left[(\alpha^2+3\delta^2)m^2m_\chi^2+2|\mathbf{k}|^4[(\alpha-\delta)^2+\right.\\
&+(\beta-\gamma)^2]\sin^4\frac{\theta}{2}+|\mathbf{k}|^2s\left[((\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2)\cos^2\frac{\theta}{2}+2(\alpha\delta+\beta\gamma)\right]+\\
&+2|\mathbf{k}|^2\sin^2\frac{\theta}{2}[m^2(\beta-\gamma)\beta+(m^2+m_\chi^2)(\delta-\alpha)\delta]+\\
&\left.+|\mathbf{k}|^2m_\chi^2\left[(\beta-\gamma)^2\left(\sin^4\frac{\theta}{2}+\cos^4\frac{\theta}{2}\right)+(\gamma^2-\beta^2)\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\right].
\end{aligned}
\tag{82}
$$

В терминах Φ-функций из (69) эта формула имеет вид*

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{\rm tot}_{\rm inc}}{g_i\widehat{c}_A dT_A}=&m_\chi^2m^2\Phi^+_{\alpha^2+3\delta^2}(\mathbf{q})+m_\chi^2|\mathbf{k}|^2\left[\Phi^+_{(\beta-\gamma)^2}(\mathbf{q})\left(\sin^4\frac{\theta}{2}+\cos^4\frac{\theta}{2}\right)+\right.\\
&\left.+\Phi^+_{(\gamma^2-\beta^2)}(\mathbf{q})\sin^2\frac{\theta}{2}\right]+2|\mathbf{k}|^4\Phi^+_{(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2}(\mathbf{q})\sin^4\frac{\theta}{2}+
\end{aligned}
$$

---

* Поскольку $\Phi^+_{(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2}(\mathbf{q})\cos^2\theta/2+\Phi^+_{2(\alpha\delta+\beta\gamma)}(\mathbf{q})=\Phi^+_{\alpha^2+\delta^2+\beta^2+\gamma^2}(\mathbf{q})\times$ $\times\cos^2\theta/2+\Phi^+_{2\alpha\delta+2\beta\gamma}(\mathbf{q})\sin^2\theta/2$.

$$+|\mathbf{k}|^2 s\left[\Phi^+_{(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2}(\mathbf{q})\cos^2\frac{\theta}{2}+\Phi^+_{2(\alpha\delta+\beta\gamma)}(\mathbf{q})\right]+$$
$$+2|\mathbf{k}|^2\sin^2\frac{\theta}{2}[m^2\Phi^+_{(\beta-\gamma)\beta}(\mathbf{q})+(m^2+m_\chi^2)\Phi^+_{(\delta-\alpha)\delta}(\mathbf{q})]. \quad (83)$$

Итак, формулы (82) и (83) задают на *бесспиновом ядре* полностью усредненное по начальным и просуммированное по конечным спиральностям χ-частицы *некогерентное* сечение слабого χA-взаимодействия.

В сверхрелятивистском «нейтринном» пределе ($m_\chi \to 0$, $|\mathbf{k}| = E_\chi$) суммы (81) таковы:

$$\sum\frac{Q^{s's}_{+,w}}{2^6|\mathbf{k}|^2}=2|\mathbf{k}|^2[(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2]\sin^4\frac{\theta}{2}+s\left[((\alpha-\delta)^2+\right.$$
$$\left.+(\beta-\gamma)^2)\cos^2\frac{\theta}{2}+2(\alpha\delta+\beta\gamma)\right]+2m^2\sin^2\frac{\theta}{2}[(\beta-\gamma)\beta+(\delta-\alpha)\delta], \quad (84)$$
$$\sum\frac{Q^{s's}_{-,w}}{2^7|\mathbf{k}|^2}=-2\delta\beta m^2\sin^2\frac{\theta}{2}-2(\alpha\gamma+\beta\delta)|\mathbf{k}|\left(E_p\cos^2\frac{\theta}{2}+|\mathbf{k}|\right)\sin^2\frac{\theta}{2}-$$
$$-(\alpha\beta+\gamma\delta)\left[2|\mathbf{k}|E_p\left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+(2|\mathbf{k}|^2+m^2)\cos^2\frac{\theta}{2}\right].$$

Тогда полностью усредненное некогерентное χA-сечение (75) принимает вид

$$\frac{d\sigma^{\rm tot}_{\rm inc,0}}{g_i dT_A}=\frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{E_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2}\sum_{f=p,n}A_f\widehat{F}^2_f(\mathbf{q})\left[\frac{2E_\chi^2}{m^2}[(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2]\sin^4\frac{\theta}{2}+\right.$$
$$+s\left[(\alpha^2+\delta^2+\beta^2+\gamma^2)\cos^2\frac{\theta}{2}+2(\alpha\delta+\beta\gamma)\sin^2\frac{\theta}{2}\right]+$$
$$+2\sin^2\frac{\theta}{2}[\beta(\beta-\gamma)+\delta(\delta-\alpha)]+\frac{2\Delta A_f}{A_f}\left\{-2(\alpha\gamma+\beta\delta)\frac{E_\chi}{m}\times\right.$$
$$\times\left(\frac{E_p}{m}\cos^2\frac{\theta}{2}+\frac{E_\chi}{m}\right)\sin^2\frac{\theta}{2}-(\alpha\beta+\gamma\delta)\left[\frac{2E_\chi E_p}{m^2}\left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+\right.$$
$$\left.\left.\left.+\left(2\frac{E_\chi^2}{m^2}+1\right)\cos^2\frac{\theta}{2}\right]-2\delta\beta\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}\right].$$

Из этого выражения для бесспинового ядра получается

$$\frac{d\sigma^{\rm tot}_{\rm inc,00}}{g_i dT_A}=\frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{|\mathbf{k}|^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2}\sum_{f=p,n}A_f\widehat{F}^2_f(\mathbf{q})\left[\frac{2|\mathbf{k}|^2}{m^2}[(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2]\sin^4\frac{\theta}{2}+\right.$$
$$+s\left[(\alpha^2+\delta^2+\beta^2+\gamma^2)\cos^2\frac{\theta}{2}+2(\alpha\delta+\beta\gamma)\sin^2\frac{\theta}{2}\right]+$$
$$\left.+2\sin^2\frac{\theta}{2}[\beta(\beta-\gamma)+\delta(\delta-\alpha)]\right]. \quad (85)$$

Поскольку $m_\chi = 0$, в формулу (85) для полного сечения не должны давать вклад сечения с переворотом спина χ-лептона, следовательно, это выражение есть сумма двух вкладов, когда безмассовый χ-лептон падает на ядро с положительной и отрицательной (сохраняющейся) спиральностью, поэтому выражение (85) должно совпадать с прямой суммой этих вкладов, т. е. с формулой (77). В нерелятивистском пределе, когда $|\mathbf{k}| \ll m_\chi$ (или $|\mathbf{k}| \to 0$), получается

$$\sum \frac{Q^{s's}_{+,w}}{2^6} = (\alpha^2 + 3\delta^2) m^2 m_\chi^2, \quad \sum \frac{Q^{s's}_{-,w}}{2^7} \propto |\mathbf{k}| \simeq 0.$$

Отсюда усредненное (полное) некогерентное χA-сечение (75) приобретает «простой вид»

$$\frac{d\sigma^{\text{tot}}_{\text{inc}}}{g_i dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2} \sum_{f=p,n} A_f \widehat{F}_f^2(\mathbf{q})(\alpha^2 + 3\delta^2),$$

который был получен ранее в работе [4].

Полное сечение слабого χA-взаимодействия представляет собой сумму полностью усредненных когерентных и некогерентного слагаемых, заданных в общем виде формулами (59) и (75). Приведем в качестве примера выражения для такой суммы в случае *бесспинового* ($\Delta A_f = 0$) ядра*:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{\text{tot}}_0}{dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \Bigg[\cos^2\frac{\theta}{2} \frac{E_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2} \Bigg\{ \Bigg[G_\alpha(A,\mathbf{q}) \left(\frac{E_p}{m}\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{|\mathbf{k}|^2}{mE_\chi} \right) + \\
+ G_\delta(A,\mathbf{q}) \left(\frac{E_p}{m} - 1 \right) \sin^2\frac{\theta}{2} \Bigg]^2 + \frac{|\mathbf{k}|^2}{m^2} \Bigg[G_\beta(A,\mathbf{q}) \frac{E_p - m}{E_\chi} \sin^2\frac{\theta}{2} + \\
+ G_\gamma(A,\mathbf{q}) \left(1 + \frac{E_p}{E_\chi}\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{m}{E_\chi}\sin^2\frac{\theta}{2} \right) \Bigg]^2 \Bigg\} + \sin^2\frac{\theta}{2} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2} \times \\
\times \Bigg[G_\alpha(A,\mathbf{q}) \left(\frac{E_p}{m}\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} \right) - G_\delta(A,\mathbf{q}) \left(\frac{E_p}{m} - 1 \right) \cos^2\frac{\theta}{2} \Bigg]^2 + \\
+ \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2} \Phi^+_{\alpha^2+3\delta^2}(\mathbf{q}) + 2\frac{|\mathbf{k}|^2}{s} \Phi^+_{(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2}(\mathbf{q}) \sin^4\frac{\theta}{2} + \\
+ \Phi^+_{(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2}(\mathbf{q}) \cos^2\frac{\theta}{2} + \Phi^+_{2(\alpha\delta+\beta\gamma)}(\mathbf{q}) + \\
+ 2\frac{m^2}{s}\sin^2\frac{\theta}{2} \left[\Phi^+_{(\beta-\gamma)\beta}(\mathbf{q}) + \left(1 + \frac{m_\chi^2}{m^2} \right) \Phi^+_{(\delta-\alpha)\delta}(\mathbf{q}) \right] + \\
+ \frac{m_\chi^2}{s} \left[\Phi^+_{(\beta-\gamma)^2}(\mathbf{q}) \left(\sin^4\frac{\theta}{2} + \cos^4\frac{\theta}{2} \right) + \Phi^+_{(\gamma^2-\beta^2)}(\mathbf{q}) \sin^2\frac{\theta}{2} \right] \Bigg]. \quad (86)
\end{aligned}$$

* Здесь учтено соотношение (46), выражение для $\widehat{c}_A$ из (38) и $g_c \simeq g_i \simeq 1$.

На примере этой формулы напомним алгоритм вычисления сечений. «Внешними фиксированными» параметрами, задающими характер взаимодействия, являются слабая константа Ферми G_F, (общая) масса нуклона m, два набора эффективных констант взаимодействия протона и нейтрона с лептоном — $\alpha_{p/n}, \beta_{p/n}, \gamma_{p/n}, \delta_{p/n}$. «Внешними статическими» параметрами являются масса m_A ядра-мишени и масса m_χ лептона. «Внешними динамическими» параметрами являются начальная кинетическая энергия T_0 (или импульс $\mathbf{k}_\chi$) лептона, налетающего на покоящееся ядро, и энергия отдачи этого ядра T_A (также в системе покоя ядра). Через них с помощью выражения (47) определяется угол рассеяния θ, а на основе формул (43) и (45) определяются остальные величины — E_p, E_χ, $\mathbf{k}$.

3.4. Массивные (анти)нейтрино и $V \mp A$-взаимодействие. Рассмотрим важный частный случай рассеяния массивного нейтрального χ-лептона на ядре за счет «стандартного» слабого взаимодействия $V \mp A$.

Поскольку вычисления скалярных произведений были проведены [16], когда собственными состояниями спина χ-лептона были состояния его спиральности (проекции спина на направление его импульса), нейтрино (у которого спиральность отрицательная) отвечают сечения с $[--]$-индексами χ-лептона, т. е. когерентное $d\sigma^{--}_{\text{coh}}/dT_A$ и некогерентное $d\sigma^{--}_{\text{inc}}/dT_A$ сечения. Только благодаря ненулевой массе m_χ возможны процессы с переворотом спина χ-лептона, сечения которых приведены во второй строчке формул (54).

Получим из общих формул выражения для сечений когерентного рассеяния на ядрах массивных нейтрино Стандартной модели. Воспользуемся формулами (62), отвечающими предположению о равенстве ядерных протонного и нейтронного формфакторов (61). При $V - A$-характере слабого взаимодействия нейтрино с нуклонами у последних имеются следующие эффективные константы связи из (49):

$$\alpha_f = +g_V^f, \quad \beta_f = -g_A^f, \quad \gamma_f = -g_V^f, \quad \delta_f = +g_A^f. \tag{87}$$

Тогда $\mathbf{q}$-независящие обозначения (63) упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned}
G_\alpha(A) &= g_V^p A_p + g_V^n A_n \equiv G_V(A), \\
G_\gamma(A) &= -(g_V^p A_p + g_V^n A_n) = -G_V(A), \\
G_\delta(A) &= g_A^p A_p + g_A^n A_n \equiv G_A(A), \\
G_\beta(A) &= -(g_A^p A_p + g_A^n A_n) = -G_A(A), \\
\Delta G_\alpha(A) &= g_V^p \Delta A_p + g_V^n \Delta A_n \equiv \Delta G_V(A), \\
\Delta G_\gamma(A) &= -(g_V^p \Delta A_p + g_V^n \Delta A_n) = -\Delta G_V(A), \\
\Delta G_\delta(A) &= g_A^p \Delta A_p + g_A^n \Delta A_n \equiv \Delta G_A(A), \\
\Delta G_\beta(A) &= -(g_A^p \Delta A_p + g_A^n \Delta A_n) = -\Delta G_A(A).
\end{aligned}$$

С их помощью из (62) получается общий набор χA-сечений когерентного рассеяния массивного χ-лептона за счет $V{-}A$-взаимодействия в следующем виде:

$$\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\text{coh},\,V-A}}{g_c\widehat{c}_A dT_A} = \cos^2\frac{\theta}{2}F^2(\mathbf{q})\Big|G_V(A)[f_{\alpha+}(\theta) \pm f_{\gamma+}(\theta)] + G_A(A)[f_{\delta-}(\theta) \pm \pm f_{\beta-}(\theta)] + \Delta G_V(A)[f_{\gamma-}(\theta) \pm f_{\alpha-}(\theta)] + \Delta G_A(A)[f_{\beta+}(\theta) \pm f_{\delta+}(\theta)]\Big|^2,$$

$$\frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\text{coh},\,V-A}}{g_c\widehat{c}_A dT_A} = \sin^2\frac{\theta}{2}m^2_\chi F^2(\mathbf{q})\left|G_V(A)\left(m + \lambda^2_- \cos^2\frac{\theta}{2}\right) - G_A(A)\lambda^2_-\cos^2\frac{\theta}{2} - \Delta G_V(A)\lambda_+\lambda_-\cos^2\frac{\theta}{2} + \Delta G_A(A)\left[\lambda_+\lambda_-\cos^2\frac{\theta}{2} \mp m\right]\right|^2. \tag{88}$$

Для отрицательной начальной спиральности ($s = -1$, правый верхний индекс) массивного χ-лептона, соответствующей нейтрино со слабым взаимодействием $V{-}A$, формулы (88) приобретают явный вид:

$$\frac{d\sigma^{--}_{\text{coh},\,V-A}}{g_c\widehat{c}_A dT_A} = \cos^2\frac{\theta}{2}F^2(\mathbf{q})(|\mathbf{k}| + E_\chi)^2\left|G_V(A)\left(m\sin^2\frac{\theta}{2} + E_p\cos^2\frac{\theta}{2} + |\mathbf{k}|\right) + \Delta G_V(A)|\mathbf{k}|\sin^2\frac{\theta}{2} + G_A(A)(E_p - m)\sin^2\frac{\theta}{2} + \Delta G_A(A)\left(E_p + |\mathbf{k}|\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right|^2,$$

$$\frac{d\sigma^{+-}_{\text{coh},\,V-A}}{g_c\widehat{c}_A dT_A} = m^2_\chi\sin^2\frac{\theta}{2}F^2(\mathbf{q})\left|G_V(A)\left(m\sin^2\frac{\theta}{2} + E_p\cos^2\frac{\theta}{2}\right) - \Delta G_V(A)|\mathbf{k}|\cos^2\frac{\theta}{2} - G_A(A)(E_p - m)\cos^2\frac{\theta}{2} + \Delta G_A(A)\left(|\mathbf{k}|\cos^2\frac{\theta}{2} + m\right)\right|^2. \tag{89}$$

Здесь учтено, что для сумм f-формфакторов из (88) выполняется

$$f_{\alpha+}(\theta) + f_{\gamma+}(\theta) = (|\mathbf{k}| + E_\chi)\left(m\sin^2\frac{\theta}{2} + E_p\cos^2\frac{\theta}{2} + |\mathbf{k}|\right),$$

$$f_{\alpha-}(\theta) + f_{\gamma-}(\theta) = (|\mathbf{k}| + E_\chi)|\mathbf{k}|\sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$f_{\beta-}(\theta) + f_{\delta-}(\theta) = (|\mathbf{k}| + E_\chi)(E_p - m)\sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$f_{\beta+}(\theta) + f_{\delta+}(\theta) = (|\mathbf{k}| + E_\chi)\left(E_p + |\mathbf{k}|\cos^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Напомним, что в инвариантных переменных справедливы соотношения

$$E_{\chi/p} = \frac{s \pm m_\chi^2 \mp m^2}{2\sqrt{s}}, \quad |\mathbf{k}| = \frac{\lambda(s, m^2, m_\chi^2)}{2\sqrt{s}}, \quad [\mathbf{k}_\chi^l]^2 = \frac{\lambda^2(s, m^2, m_\chi^2)}{4m^2},$$

откуда имеем

$$4^2 c_A (E_\chi + |\mathbf{k}|)^2 = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{(E_\chi + |\mathbf{k}|)^2}{m^2 |\mathbf{k}_\chi^l|^2} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{\varkappa(s, m^2, m_\chi^2)}{s}, \tag{90}$$

где

$$\varkappa(s, m_\chi^2) \equiv \varkappa(s, m^2, m_\chi^2) = \left[1 + \frac{s + m_\chi^2 - m^2}{\lambda(s, m^2, m_\chi^2)}\right]^2,$$

а также

$$4^2 c_A m_\chi^2 = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{m^2 |\mathbf{k}_\chi^l|^2} = \frac{G_F^2 m_A}{\pi} \frac{m_\chi^2}{\lambda^2(s, m^2, m_\chi^2)}.$$

Тогда для массивного χ-лептона, падающего на ядро с отрицательной начальной спиральностью и взаимодействущего с нуклонами ядра по каналу $V{-}A$ слабого тока, когерентные χA-сечения (89) можно записать *окончательно* в виде

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{--}_{\mathrm{coh},\,V-A}}{g_c dT_A} &= \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \varkappa(s, m_\chi^2) \cos^2\frac{\theta}{2} F^2(\mathbf{q}) \times \\
&\times \left| G_V(A) \left(\frac{m}{\sqrt{s}} \sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{E_p}{\sqrt{s}} \cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{s}} \right) + \Delta G_V(A) \frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{s}} \sin^2\frac{\theta}{2} + \right. \\
&\left. + G_A(A) \frac{(E_p - m)}{\sqrt{s}} \sin^2\frac{\theta}{2} + \Delta G_A(A) \left(\frac{E_p}{\sqrt{s}} + \frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{s}} \cos^2\frac{\theta}{2} \right) \right|^2, \\
\frac{d\sigma^{+-}_{\mathrm{coh},\,V-A}}{g_c dT_A} &= \frac{G_F^2 m_A}{\pi} \frac{s m_\chi^2}{\lambda^2(s, m_\chi^2)} \sin^2\frac{\theta}{2} F^2(\mathbf{q}) \times \\
&\times \left| G_V(A) \left(\frac{m}{\sqrt{s}} \sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{E_p}{\sqrt{s}} \cos^2\frac{\theta}{2} \right) - \Delta G_V(A) \frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{s}} \cos^2\frac{\theta}{2} - \right. \\
&\left. - G_A(A) \frac{(E_p - m)}{\sqrt{s}} \cos^2\frac{\theta}{2} + \Delta G_A(A) \left(\frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{s}} \cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \right|^2.
\end{aligned} \tag{91}$$

Формулы (91) представляют собой основной результат для сечения когерентного рассеяния массивного нейтрино на ядре за счет слабого $V{-}A$-взаимодействия*. В инвариантных переменных когерентные сечения слабого $V{-}A$-взаимодействия массивного нейтрино, падающего на

* Если в ядерных формфакторах $F^2(\mathbf{q})$ «восстановить» зависимость от типа нуклона, то их следует «спрятать обратно» в параметры $G_V(A, \mathbf{q})$ и $G_A(A, \mathbf{q})$.

бесспиновое ($\Delta A_f = 0$) ядро, принимают вид

$$\frac{d\sigma^{--}_{\mathrm{coh},\,V-A}}{g_c dT_A} = \left[1 - \frac{T_A}{T_A^{\max}}\right]\left[\frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\right] F^2(\mathbf{q})\varkappa(s, m_\chi^2)\times$$
$$\times\left\{G_A(A)\frac{(\sqrt{s}\,-m)^2 - m_\chi^2}{2s}\sin^2\frac{\theta}{2} + {}\right.$$
$$\left. + G_V(A)\left[\frac{m}{\sqrt{s}} + \frac{(\sqrt{s}\,-m)^2 - m_\chi^2}{2s}\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{\lambda(s, m^2, m_\chi^2)}{2s}\right]\right\}^2, \tag{92}$$

$$\frac{d\sigma^{+-}_{\mathrm{coh},\,V-A}}{g_c dT_A} = \sin^2\frac{\theta}{2}\left[\frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\right]\frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2}\frac{s}{m^2}F^2(\mathbf{q})\times$$
$$\times\left\{-G_A(A)\frac{(\sqrt{s}\,-m)^2 - m_\chi^2}{2s}\cos^2\frac{\theta}{2} + {}\right.$$
$$\left. + G_V(A)\left[\frac{m}{\sqrt{s}} + \frac{(\sqrt{s}\,-m)^2 - m_\chi^2}{2s}\cos^2\frac{\theta}{2}\right]\right\}^2, \text{ где } \sin^2\frac{\theta}{2} \simeq \frac{T_A}{T_A^{\max}}.$$

По поводу этих формул имеются два комментария. Во-первых, в случае безмассового нейтрино Стандартной модели вторая формула должна обращаться в нуль, что явно видно в силу ее пропорциональности квадрату массы нейтрино m_χ^2. Во-вторых, при $m_\chi = 0$ получается $\lambda(s, m^2, m_\chi^2 = 0) = (s - m^2)$. Отсюда следует, что

$$\varkappa(s, m_\chi^2 = 0) = 4 \quad \text{и}$$
$$\frac{m}{\sqrt{s}} + \frac{(s - m^2)}{2s} + \frac{(\sqrt{s}\,-m)^2}{2s}\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 - \frac{(\sqrt{s}\,-m)^2}{2s}\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

В результате первая формула переходит в выражение

$$\frac{d\sigma^{--}_{\mathrm{coh}}}{dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{\pi}\left[1 - \frac{T_A}{T_A^{\max}}\right]F^2(\mathbf{q})\left[G_V(A)\left[1 - \frac{(\sqrt{s}\,-m)^2}{2s}\sin^2\frac{\theta}{2}\right] + {}\right.$$
$$\left. + G_A(A)\frac{(\sqrt{s}\,-m)^2}{2s}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]^2, \tag{93}$$

которое совпадает с соответствующей формулой из работы [3]. Иными словами, формула (92) для сечения когерентного рассеяния массивного нейтрино на (бесспиновом) ядре при $m_\chi \to 0$ в точности переходит в известную формулу для безмассового нейтрино [3].

По поводу второй формулы (92) отметим следующее. Это сечение (с переворотом спина лептона) имеет «заметное» значение только при «заметной» массе этого лептона, более того, угловое, пропорциональное $\sin^2\theta/2$-распределение сильно отличается от случая без поворота спина лептона (первая формула с $\cos^2\theta/2$-распределением). Последнее означает, что переворот спина лептона (в силу сохранения полного углового момента системы) возможен только тогда, когда изменивший спин лептон вылетает из зоны взаимодействия практически точно в обратную сторону. В то же время при (крайне) малых импульсах падающего на ядро лептона $|\mathbf{k}_\chi|^2 \ll m_\chi^2$, во-первых, переданный ядру импульс $\mathbf{q}$ также очень мал, следовательно, ядерный формфактор $F^2(\mathbf{q}) \simeq 1$ не играет никакой роли, во-вторых, $\sqrt{s} \simeq m + m_\chi$, тогда когерентное χA-сечение с переворотом спина лептона принимает вид

$$\frac{d\sigma_{\rm coh}^{+-}(\chi A)}{dT_A} = \sin^2\frac{\theta}{2}\frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2}G_V^2(A). \tag{94}$$

Видно, что если $|\mathbf{k}_\chi|^2/m_\chi^2 \equiv \Theta \ll 1$, то когерентное χA-сечение с переворотом спина усилено не только A^2-фактором ядра, скрытым в параметре $G_V^2(A)$, но и достаточно большим множителем «потока частиц» Θ^{-1}. Данное рассуждение не теряет силу, если $|\mathbf{k}_\chi|^2 \simeq m_\chi^2 \ll m^2$, тогда $s \simeq m^2$ и вторая формула из (92) также переходит в выражение (94).

Далее отметим, что в формулу для $V{-}A$-сечений (88) при сохранении положительной спиральности χ-лептона (правый верхний индекс $+$) входят следующие комбинации нуклонных f-формфакторов из (53):

$$f_{\alpha+}(\theta) - f_{\gamma+}(\theta) = (E_\chi - |\mathbf{k}|)\left(m\sin^2\frac{\theta}{2} + E_p\cos^2\frac{\theta}{2} - |\mathbf{k}|\right),$$

$$f_{\gamma-}(\theta) - f_{\alpha-}(\theta) = (E_\chi - |\mathbf{k}|)|\mathbf{k}|\sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$f_{\delta-}(\theta) - f_{\beta-}(\theta) = (E_\chi - |\mathbf{k}|)(E_p - m)\sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$f_{\beta+}(\theta) - f_{\delta+}(\theta) = (E_\chi - |\mathbf{k}|)\left(|\mathbf{k}|\cos^2\frac{\theta}{2} - E_p\right).$$

Все эти величины для «++»-*спиральности* пропорциональны разности $(E_\chi - |\mathbf{k}|)$, а не сумме $(E_\chi + |\mathbf{k}|)$, как для «−−»-спиральности. Это означает, что $V - A$-связи из (87) сильно «подавляют» (пропорционально $(E_\chi - |\mathbf{k}|)^2$) когерентные сечения взаимодействия с ядром массивного аналога антинейтрино и при переходе к безмассовому пределу просто обращают эти сечения в нуль. Таким образом, для «++»-спиральности массивного аналога антинейтрино необходимо задать константы связи согласно $V + A$-характеру слабого взаимодействия, отвечающего именно антинейтрино. Действительно, в случае антинейтрино (в силу $V + A$-тока) нуклонные слабые константы взаимодействия в отличие от (87) имеют вид

$$\alpha_f^{V+A} \equiv \alpha_f^{\overline{\nu}} = +g_V^f, \quad \beta_f^{\overline{\nu}} = -g_A^f, \quad \gamma_f^{\overline{\nu}} = +g_V^f, \quad \delta_f^{\overline{\nu}} = -g_A^f. \tag{95}$$

Тогда $\mathbf{q}$-независящие факторы (63) для $V + A$-сечений будут таковы:

$$G_\alpha^{\overline{\nu}}(A) = g_V^p A_p + g_V^n A_n \equiv G_V(A),$$

$$\Delta G_\alpha^{\overline{\nu}}(A) = g_V^p \Delta A_p + g_V^n \Delta A_n \equiv \Delta G_V(A),$$

$$\begin{aligned}
G_{\gamma}^{\overline{\nu}}(A) &= g_V^p A_p + g_V^n A_n = G_V(A),\\
\Delta G_{\gamma}^{\overline{\nu}}(A) &= g_V^p \Delta A_p + g_V^n \Delta A_n = \Delta G_V(A),\\
G_{\delta}^{\overline{\nu}}(A) &= -(g_A^p A_p + g_A^n A_n) \equiv -G_A(A),\\
\Delta G_{\beta}^{\overline{\nu}}(A) &= -(g_A^p \Delta A_p + g_A^n \Delta A_n) = -\Delta G_A(A),\\
G_{\beta}^{\overline{\nu}}(A) &= -(g_A^p A_p + g_A^n A_n) = -G_A(A),\\
\Delta G_{\delta}^{\overline{\nu}}(A) &= -(g_A^p \Delta A_p + g_A^n \Delta A_n) \equiv -\Delta G_A(A).
\end{aligned}$$

После подстановки этих факторов в формулы (56) получаются выражения для когерентных χA-сечений рассеяния на ядре массивного лептона, отвечающих $V+A$-взаимодействию:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\text{coh},\,V+A}(\mathbf{q})}{4^2 g_c c_A dT_A} &= \cos^2\frac{\theta}{2}F^2(\mathbf{q})\Big|G_V(A)[f_{\alpha+}(\theta)\mp f_{\gamma+}(\theta)] - G_A(A)[f_{\delta-}(\theta)\mp\\
&\mp f_{\beta-}(\theta)] - \Delta G_V(A)[f_{\gamma-}(\theta)\mp f_{\alpha-}(\theta)] + \Delta G_A(A)[f_{\beta+}(\theta)\mp f_{\delta+}(\theta)]\Big|^2,\\
\frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\text{coh},\,V+A}(\mathbf{q})}{4^2 g_c c_A dT_A} &= \sin^2\frac{\theta}{2}m_\chi^2 F^2(\mathbf{q})\Big|G_V(A)\Big(m + \lambda_-^2\cos^2\frac{\theta}{2}\Big) +\\
&+ G_A(A)\lambda_-^2\cos^2\frac{\theta}{2} \pm \Delta G_A(A)m + [\Delta G_V(A) + \Delta G_A(A)]\lambda_+\lambda_-\cos^2\frac{\theta}{2}\Big|^2.
\end{aligned} \tag{96}$$

Видно, что эти формулы «соответствуют» антинейтрино (спиральность положительная при слабом $V+A$-токе). Состояниям «$++$»-спиральности соответствует сумма $f_{\alpha+}(\theta) + f_{\gamma+}(\theta) \propto (E_\chi + |\mathbf{k}|)$, которая не обращается в нуль в безмассовом и нерелятивистском случаях, когда $E_\chi \simeq |\mathbf{k}|$. Если по каналу слабого $V+A$-тока «захочет» провзаимодействовать χ-частица с левой «$--$»-спиральностью (как нейтрино), то ее когерентное сечение (первая формула (96)) будет подавлено множителем $(E_\chi - |\mathbf{k}|)^2$ и полностью исчезнет, когда $E_\chi \simeq |\mathbf{k}|$.

Итак, когерентные χA-сечения для «антинейтриноподобного» (индексы $++$, $-+$ и $V+A$) и «нейтриноподобного» (индексы $--$, $+-$ и $V-A$) взаимодействия массивного χ-лептона с ядром имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\text{coh},\,V\mp A}(\mathbf{q})}{g_c \widehat{c}_A dT_A} &= \cos^2\frac{\theta}{2}(|\mathbf{k}| + E_\chi)^2 F^2(\mathbf{q})\times\\
&\times\Big|G_V(A)\Big(m\sin^2\frac{\theta}{2} + E_p\cos^2\frac{\theta}{2} + |\mathbf{k}|\Big) \pm G_A(A)(E_p - m)\sin^2\frac{\theta}{2} \pm\\
&\pm \Delta G_V(A)|\mathbf{k}|\sin^2\frac{\theta}{2} + \Delta G_A(A)\Big(E_p + |\mathbf{k}|\cos^2\frac{\theta}{2}\Big)\Big|^2,
\end{aligned}$$

$$\frac{d\sigma^{\pm\mp}_{\text{coh},\,V\mp A}(\mathbf{q})}{g_c\widehat{c}_A dT_A} = m_\chi^2 \sin^2\frac{\theta}{2}F^2(\mathbf{q})\Big|G_V(A)\Big(m\sin^2\frac{\theta}{2} + E_p\cos^2\frac{\theta}{2}\Big)\mp$$
$$\mp G_A(A)(E_p - m)\cos^2\frac{\theta}{2} \mp \Delta G_V(A)|\mathbf{k}|\cos^2\frac{\theta}{2} +$$
$$+ \Delta G_A(A)\Big(m + |\mathbf{k}|\cos^2\frac{\theta}{2}\Big)\Big|^2. \quad (97)$$

Следует подчеркнуть, что каждая из формул (97) заключает в себе только по два возможных выражения, когда *одновременно* берутся только верхние или только нижние индексы у сечения (типа $\mp\mp$) и тока ($\mp$).

Отметим, что, как и ранее для нейтрино, при (крайне) малых значениях импульса падающего на ядро (правого) лептона $|\mathbf{k}_\chi|^2 \ll m_\chi^2$, во-первых, $F^2(\mathbf{q}) \simeq 1$, во-вторых, $\sqrt{s} \simeq m + m_\chi$, $|\mathbf{k}| \simeq 0$, $E_p \simeq m$, тогда когерентные χA-сечения с переворотом спина (левого и правого) лептона *одинаковы*:

$$\frac{d\sigma^{\pm\mp}_{\text{coh},\,V\mp A}(\mathbf{q})}{g_c dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\big|G_V(A) + \Delta G_A(A)\big|^2. \qquad (98)$$

Таким образом, если $|\mathbf{k}_\chi|^2/m_\chi^2 \equiv \Theta \ll 1$, то когерентные χA-сечения с переворотом спина (как левого, так и правого массивного лептона) усилены не только влиянием ядра, но и достаточно большим фактором «потока частиц» Θ^{-1}. Эти наблюдения *выглядят новыми* и имеют, вероятно, ключевое значение для возможности регистрации реликтовых массивных (анти)нейтрино крайне низкой энергии ($(5{-}6)\cdot 10^{-4}$ эВ). Несмотря на достаточно большое сечение, открытым остается старый вопрос: *что, собственно, будем измерять?*

Из общей формулы (60) можно получить полностью усредненное когерентное χA-сечение на *бесспиновом ядре* для $V\mp A$-взаимодействия, т. е. когда нуклонные константы связи (87) и (95) таковы:

$$\alpha_{V\mp A} = +g_V, \quad \beta_{V\mp A} = -g_A, \quad \gamma_{V\mp A} = \mp g_V, \quad \delta_{V\mp A} = \pm g_A. \qquad (99)$$

Тогда $\mathbf{q}$-зависящие эффективные константы связи из (57) принимают «$V\mp A$»-вид

$$\begin{aligned}
G_{\alpha_\mp}(A,\mathbf{q}) &= \sum(+g_V^f)A_f F_f(\mathbf{q}) \equiv +G_V(A,\mathbf{q}),\\
G_{\gamma_\mp}(A,\mathbf{q}) &= \sum(\mp g_V^f)A_f F_f(\mathbf{q}) \equiv \mp G_V(A,\mathbf{q}),\\
G_{\beta_\mp}(A,\mathbf{q}) &= \sum(-g_A^f)A_f F_f(\mathbf{q}) = -G_A(A,\mathbf{q}),\\
G_{\delta_\mp}(A,\mathbf{q}) &= \sum(\pm g_A^f)A_f F_f(\mathbf{q}) \equiv \pm G_A(A,\mathbf{q}).
\end{aligned} \qquad (100)$$

Аналогично (100) для спин-зависящих факторов:

$$\Delta G_{\alpha_{\mp}}(A,\mathbf{q}) = \sum(+g_V^f)\Delta A_f F_f(\mathbf{q}) \equiv +\Delta G_V(A,\mathbf{q}),$$
$$\Delta G_{\gamma_{\mp}}(A,\mathbf{q}) = \sum(\mp g_V^f)\Delta A_f F_f(\mathbf{q}) \equiv \mp\Delta G_V(A,\mathbf{q}),$$
$$\Delta G_{\beta_{\mp}}(A,\mathbf{q}) = \sum(-g_A^f)\Delta A_f F_f(\mathbf{q}) = -\Delta G_A(A,\mathbf{q}),$$
$$\Delta G_{\delta_{\mp}}(A,\mathbf{q}) = \sum(\pm g_A^f)\Delta A_f F_f(\mathbf{q}) \equiv \pm\Delta G_A(A,\mathbf{q}).$$

Подстановка (100) в (60) дает *полностью усредненное когерентное $V \mp A$-сечение* рассеяния массивного лептона на ядре *без спина* ($\Delta A_f = 0$):

$$\frac{d\sigma^{\rm tot}_{{\rm coh},\,V\mp A,0}}{g_c \widehat{c}_A dT_A} = \cos^2\frac{\theta}{2}\left[G_V(A,\mathbf{q})E_\chi\left(E_p\cos^2\frac{\theta}{2} + m\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{|\mathbf{k}|^2}{E_\chi}\right)\pm\right.$$
$$\left.\pm\, G_A(A,\mathbf{q})E_\chi(E_p-m)\sin^2\frac{\theta}{2}\right]^2 +$$
$$+\cos^2\frac{\theta}{2}\left[G_V(A,\mathbf{q})|\mathbf{k}|\left(E_p\cos^2\frac{\theta}{2} + m\sin^2\frac{\theta}{2} + E_\chi\right)\pm\right.$$
$$\left.\pm\, G_A(A,\mathbf{q})|\mathbf{k}|(E_p-m)\sin^2\frac{\theta}{2}\right]^2 +$$
$$+\, m_\chi^2\sin^2\frac{\theta}{2}\left[G_V(A,\mathbf{q})\left(E_p\cos^2\frac{\theta}{2} + m\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\mp\right.$$
$$\left.\mp\, G_A(A,\mathbf{q})(E_p-m)\cos^2\frac{\theta}{2}\right]^2. \quad (101)$$

Это когерентное $V \mp A$-сечение можно разложить по $\mathbf{q}$-зависящим эффективным константам:

$$\frac{d\sigma^{\rm tot}_{{\rm coh},\,V\mp A,0}}{g_c dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi m^2|\mathbf{k}_\chi|^2}\big\{G_V^2(A,\mathbf{q})T_V(\theta) + G_A^2(A,\mathbf{q})T_A(\theta)\pm$$
$$\pm\, 2G_V(A,\mathbf{q})G_A(A,\mathbf{q})T_M(\theta)\big\}, \quad (102)$$

где коэффициенты этого разложения следующие:

$$T_A = (E_p-m)^2\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\left(2|\mathbf{k}|^2\sin^2\frac{\theta}{2} + m_\chi^2\right),$$
$$T_M = 2(E_p-m)\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}|\mathbf{k}|^2\left(E_\chi + E_p\cos^2\frac{\theta}{2} + m\sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$
$$T_V = \left(E_p\cos^2\frac{\theta}{2} + m\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2\left(2|\mathbf{k}|^2\cos^2\frac{\theta}{2} + m_\chi^2\right) +$$
$$+\cos^2\frac{\theta}{2}|\mathbf{k}|^2\left[m_\chi^2 + 2|\mathbf{k}|^2 + 4E_\chi\left(E_p\cos^2\frac{\theta}{2} + m\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right].$$

Формула (102) дает когерентное χA-сечение ($\Delta A_f = 0$) для двух вариантов слабого $V \mp A$-взаимодействия массивного χ-лептона с ядром, полностью просуммированное по спиральностям конечного лептона и усредненное по спиральностям начального лептона.

Для проверки вычислений рассмотрим вариант перехода общих формул когерентного рассеяния в предел $V \mp A$-токов. Подставим для этого в общие формулы для сечений (56) $V \mp A$-параметры из (100) в следующем виде:

$$\begin{aligned} G_{\alpha_\mp}(A,\mathbf{q}) &= [+G_V(\mathbf{q})], & G_{\gamma_\mp}(A,\mathbf{q}) &= [\mp G_V(\mathbf{q})], \\ G_{\beta_\mp}(A,\mathbf{q}) &= [-G_A(\mathbf{q})], & G_{\delta_\mp}(A,\mathbf{q}) &= [\pm G_A(\mathbf{q})], \\ \Delta G_{\alpha_\mp}(A,\mathbf{q}) &= [+\Delta G_V(\mathbf{q})], & \Delta G_{\gamma_\mp}(A,\mathbf{q}) &= [\mp \Delta G_V(\mathbf{q})], \\ \Delta G_{\beta_\mp}(A,\mathbf{q}) &= [-\Delta G_A(\mathbf{q})], & \Delta G_{\delta_\mp}(A,\mathbf{q}) &= [\pm \Delta G_A(\mathbf{q})]. \end{aligned}$$

В результате получаются *все* когерентные χA-сечения в $V \mp A$-приближении:

$$\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\text{coh},\,V-A}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2} g_c \widehat{c}_A dT_A} = \Big|(f_{\alpha+}(\theta) \pm f_{\gamma+}(\theta))G_V(\mathbf{q}) + (f_{\delta-}(\theta) \pm f_{\beta-}(\theta))G_A(\mathbf{q}) + \\ + (f_{\gamma-}(\theta) \pm f_{\alpha-}(\theta))\Delta G_V(\mathbf{q}) + (f_{\beta+}(\theta) \pm f_{\delta+}(\theta))\Delta G_A(\mathbf{q})\Big|^2,$$

$$\frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\text{coh},\,V-A}}{\sin^2\dfrac{\theta}{2} g_c \widehat{c}_A dT_A} = \Big|G_V(\mathbf{q})\widehat{f}_\alpha(\theta) - G_A(\mathbf{q})\widehat{f}_{\delta-}(\theta) - \Delta G_V(\mathbf{q})\widehat{f}_{\beta\gamma}(\theta) + \\ + (\widehat{f}_{\beta\gamma}(\theta) \mp \widehat{f}_{\delta+}(\theta))\Delta G_A(\mathbf{q})\Big|^2,$$

$$\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\text{coh},\,V+A}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2} g_c \widehat{c}_A dT_A} = \Big|(f_{\alpha+}(\theta) \mp f_{\gamma+}(\theta))G_V(\mathbf{q}) - (f_{\delta-}(\theta) \mp f_{\beta-}(\theta))G_A(\mathbf{q}) - \\ - (f_{\gamma-}(\theta) \mp f_{\alpha-}(\theta))\Delta G_V(\mathbf{q}) + (f_{\beta+}(\theta) \mp f_{\delta+}(\theta))\Delta G_A(\mathbf{q})\Big|^2,$$

$$\frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\text{coh},\,V+A}}{\sin^2\dfrac{\theta}{2} g_c \widehat{c}_A dT_A} = \Big|G_V(\mathbf{q})\widehat{f}_\alpha(\theta) + G_A(\mathbf{q})\widehat{f}_{\delta-}(\theta) + \Delta G_V(\mathbf{q})\widehat{f}_{\beta\gamma}(\theta) + \\ + (\widehat{f}_{\beta\gamma}(\theta) \pm \widehat{f}_{\delta+}(\theta))\Delta G_A(\mathbf{q})\Big|^2.$$

Поскольку для f-формфакторов из (88) при $V \mp A$ выполняется

$$f_{\alpha+}(\theta) \pm f_{\gamma+}(\theta) = (E_\chi \pm |\mathbf{k}|)\left(m\sin^2\frac{\theta}{2} + E_p\cos^2\frac{\theta}{2} \pm |\mathbf{k}|\right),$$

$$f_{\gamma-}(\theta) \pm f_{\alpha-}(\theta) = (E_\chi \pm |\mathbf{k}|)|\mathbf{k}|\sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$f_{\delta-}(\theta) \pm f_{\beta-}(\theta) = (E_\chi \pm |\mathbf{k}|)(E_p - m)\sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$f_{\beta+}(\theta) \pm f_{\delta+}(\theta) = (E_\chi \pm |\mathbf{k}|)\left(|\mathbf{k}|\cos^2\frac{\theta}{2} \pm E_p\right),$$

а также согласно (53)

$$\widehat{f}_\alpha(\theta) = m_\chi\left(m + (E_p - m)\cos^2\frac{\theta}{2}\right),$$
$$\widehat{f}_{\beta\gamma}(\theta) = m_\chi|\mathbf{k}|\cos^2\frac{\theta}{2},$$
$$\widehat{f}_{\delta-}(\theta) = m_\chi(E_p - m)\cos^2\frac{\theta}{2},$$
$$\widehat{f}_{\delta+}(\theta) = m_\chi m,$$

полный набор когерентных χA-сечений для слабых $V-A$- и $V+A$-токов таков:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\mathrm{coh},\,V-A}}{g_c\widehat{c}_A dT_A} &= \cos^2\frac{\theta}{2}(E_\chi \pm |\mathbf{k}|)^2\Bigg|\left(m\sin^2\frac{\theta}{2} + E_p\cos^2\frac{\theta}{2} \pm |\mathbf{k}|\right)G_V(\mathbf{q}) + \\
&\quad + (E_p - m)\sin^2\frac{\theta}{2}G_A(\mathbf{q}) + |\mathbf{k}|\sin^2\frac{\theta}{2}\Delta G_V(\mathbf{q}) + \\
&\qquad + \left(|\mathbf{k}|\cos^2\frac{\theta}{2} \pm E_p\right)\Delta G_A(\mathbf{q})\Bigg|^2, \\
\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\mathrm{coh},\,V+A}}{g_c\widehat{c}_A dT_A} &= \cos^2\frac{\theta}{2}(E_\chi \mp |\mathbf{k}|)^2\Bigg|\left(m\sin^2\frac{\theta}{2} + E_p\cos^2\frac{\theta}{2} \mp |\mathbf{k}|\right)G_V(\mathbf{q}) - \\
&\quad - (E_p - m)\sin^2\frac{\theta}{2}G_A(\mathbf{q}) - |\mathbf{k}|\sin^2\frac{\theta}{2}\Delta G_V(\mathbf{q}) + \\
&\qquad + \left(|\mathbf{k}|\cos^2\frac{\theta}{2} \mp E_p\right)\Delta G_A(\mathbf{q})\Bigg|^2, \\
\frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\mathrm{coh},\,V-A}}{g_c\widehat{c}_A dT_A} &= \sin^2\frac{\theta}{2}m_\chi^2\Big|m[G_V(\mathbf{q}) \mp \Delta G_A(\mathbf{q})] + [G_V(\mathbf{q}) - G_A(\mathbf{q})]\times \\
&\quad \times (E_p - m)\cos^2\frac{\theta}{2} + [\Delta G_A(\mathbf{q}) - \Delta G_V(\mathbf{q})]|\mathbf{k}|\cos^2\frac{\theta}{2}\Big|^2, \\
\frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\mathrm{coh},\,V+A}}{g_c\widehat{c}_A dT_A} &= \sin^2\frac{\theta}{2}m_\chi^2\Big|m[G_V(\mathbf{q}) \pm \Delta G_A(\mathbf{q})] + [G_V(\mathbf{q}) + G_A(\mathbf{q})]\times \\
&\quad \times (E_p - m)\cos^2\frac{\theta}{2} + [\Delta G_V(\mathbf{q}) + \Delta G_A(\mathbf{q})]|\mathbf{k}|\cos^2\frac{\theta}{2}\Big|^2.
\end{aligned} \tag{103}$$

Выражения для сечений в случае ядра без спина ($\Delta A_f = 0$) получаются из (103) путем отбрасывания слагаемых, пропорциональных ΔG. Их можно использовать, например, для прямой проверки разложения по эффективным $\mathbf{q}$-зависящим константам связи полностью усредненного когерентного $V \mp A$-сечения на бесспиновом ядре (102). Действительно, при $\Delta A_f = 0$ для $V - A$-взаимодействия имеются следующие разложения по эффективным $\mathbf{q}$-зависящим константам связи:

$$\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\text{coh}, V-A,0}}{g_c\widehat{c}_A dT_A} = \cos^2\frac{\theta}{2}(E_\chi \pm |\mathbf{k}|)^2\Big[G_V^2(\mathbf{q})\Big(m\sin^2\frac{\theta}{2} + E_p\cos^2\frac{\theta}{2} \pm |\mathbf{k}|\Big)^2 + \\ + G_A^2(\mathbf{q})(E_p - m)^2\sin^4\frac{\theta}{2} + 2G_V(\mathbf{q})G_A(\mathbf{q})\times \\ \times\Big(m\sin^2\frac{\theta}{2} + E_p\cos^2\frac{\theta}{2} \pm |\mathbf{k}|\Big)(E_p - m)\sin^2\frac{\theta}{2}\Big],$$

$$\frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\text{coh}, V-A,0}}{g_c\widehat{c}_A dT_A} = \sin^2\frac{\theta}{2}m_\chi^2\Big[G_V^2(\mathbf{q})\Big(m\sin^2\frac{\theta}{2} + E_p\cos^2\frac{\theta}{2}\Big)^2 + \\ + G_A^2(\mathbf{q})(E_p - m)^2\cos^4\frac{\theta}{2} - 2G_V(\mathbf{q})G_A(\mathbf{q})\times \\ \times\Big(m\sin^2\frac{\theta}{2} + E_p\cos^2\frac{\theta}{2}\Big)(E_p - m)\cos^2\frac{\theta}{2}\Big].$$

Тогда усредненное когерентное «$V - A$»-сечение, представляющее собой сумму (поделенную на 2) четырех приведенных выше слагаемых, можно записать в виде

$$\frac{d\sigma^{\text{tot}}_{\text{coh}, V-A,0}}{g_c\widehat{c}_A\, dT_A} \equiv \frac{1}{2}\sum_{s's=\pm}\frac{d\sigma^{s's}_{\text{coh}, V-A,0}}{g_c\widehat{c}_A dT_A} \equiv G_V^2(\mathbf{q})C_V(\theta) + G_A^2(\mathbf{q})C_A(\theta) + \\ + 2G_V(\mathbf{q})G_A(\mathbf{q})C_M(\theta).$$

Для усредненного когерентного $V + A$-сечения получается точно такое же разложение, однако со знаком минус перед интерференционным слагаемым (см. формулу (102)). В результате с учетом (38) усредненное когерентное $V \mp A$-сечение на ядре без спина принимает вид

$$\frac{d\sigma^{\text{tot}}_{\text{coh}, V\mp A,0}}{g_c dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\Big\{G_V^2(\mathbf{q})\frac{C_V(\theta)}{|\mathbf{k}|^2 s} + G_A^2(\mathbf{q})\frac{C_A(\theta)}{|\mathbf{k}|^2 s} \pm \\ \pm 2G_V(\mathbf{q})G_A(\mathbf{q})\frac{C_M(\theta)}{|\mathbf{k}|^2 s}\Big\}. \quad (104)$$

Прямые вычисления дают выражения для параметров $C_A(\theta)$, $C_V(\theta)$ и $C_M(\theta)$, совпадающие с $T(\theta)$-параметрами из (102), хотя получены они совершенно разными способами.

Наконец, в пределе *безмассового* χ-лептона, когда $m_\chi = 0$, $E_p/\sqrt{s} = (s + m^2)/2s$, $|\mathbf{k}|/\sqrt{s} = E_\chi/\sqrt{s} = (s - m^2)/2s$, $C_{V,A,M}$-параметры из (104) содержат только по одному слагаемому, отвечающему сохранению спиральности нейтрино ($V - A$) или антинейтрино ($V + A$).

Они таковы:

$$\frac{C_A(\theta)}{|\mathbf{k}|^2 s} = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\widehat{C}_A(\theta)_0 = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1-\frac{m}{\sqrt{s}}\right)^4\sin^4\frac{\theta}{2},$$

$$\frac{C_M(\theta)}{|\mathbf{k}|^2 s} = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\widehat{C}_M(\theta)_0 = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1-\frac{m}{\sqrt{s}}\right)^2\times$$
$$\times\sin^2\frac{\theta}{2}\left[2-\sin^2\frac{\theta}{2}\left(1-\frac{m}{\sqrt{s}}\right)^2\right],$$

$$\frac{C_V(\theta)}{|\mathbf{k}|^2 s} = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\widehat{C}_V(\theta)_0 = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\left[2-\sin^2\frac{\theta}{2}\left(1-\frac{m}{\sqrt{s}}\right)^2\right]^2.$$

Тогда на ядре без спина при $m_\chi = 0$ полное когерентное сечение (104) можно записать так:

$$\frac{d\sigma^{\rm tot}_{{\rm coh},\,V\mp A,00}}{g_c dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{8\pi}\cos^2\frac{\theta}{2}\Big\{G_V^2(\mathbf{q})\widehat{C}_V(\theta)_0 + G_A^2(\mathbf{q})\widehat{C}_A(\theta)_0 \pm$$
$$\pm\, 2G_V(\mathbf{q})G_A(\mathbf{q})\widehat{C}_M(\theta)_0\Big\}. \quad (105)$$

На самом деле для безмассового лептона «полностью усредненное» когерентное сечение фактически содержит в себе только по одному слагаемому из формул (97). Для $V-A$-тока это *половина* сечения с «$--$»-спиральностью («$-$» — верхние индексы), для $V+A$-тока это *половина* сечения с «$++$»-спиральностью («$+$» — нижние индексы) из (97):

$$\frac{d\sigma^{\rm tot}_{{\rm coh},\,V\mp A,00}}{g_c dT_A} \equiv \frac{1}{2}\sum_{s's}\frac{d\sigma^{s's}_{\rm coh}}{g_c dT_A} = \frac{1}{2}\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{{\rm coh},V\mp A,00}}{g_c dT_A} =$$
$$= \frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\frac{G_F^2 m_A}{\pi}\Big[G_V(\mathbf{q})T_{V,0}(\theta) \pm G_A(\mathbf{q})T_{A,0}\Big]^2.$$

Параметры $T_{V,0}(\theta)$ и $T_{A,0}(\theta)$ при $m_\chi = 0$ принимают вид

$$T_{V,0}(\theta) \equiv \frac{m}{\sqrt{s}}\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{E_p}{\sqrt{s}}\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{s}} \to 1 - \left(1-\frac{m}{\sqrt{s}}\right)^2\frac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{2},$$

$$T_{A,0}(\theta) \equiv \left(\frac{E_p}{\sqrt{s}} - \frac{m}{\sqrt{s}}\right)\sin^2\frac{\theta}{2} \to \left(1-\frac{m}{\sqrt{s}}\right)^2\frac{\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{2}.$$

Параметры $T_{V,0}$ и $T_{A,0}$ полностью отвечают приведенному выше выражению (93) для когерентного сечения взаимодействия безмассового нейтрино с ядром из работы [3]. Последнее означает, что усредненное когерентное сечение $V-A$-взаимодействия безмассового лептона с левой спиральностью с бесспиновым ядром (105) представляет собой ровно половину чисто «нейтринного сечения» (93).

Некогерентные χA-сечения для слабых $V \mp A$-токов. Напомним, что нуклонные константы в случае слабых $V \mp A$-токов имеют вид (99)

$$\alpha_{V\mp A} \equiv \alpha_{\mp} = +g_V, \ \beta_{\mp} = -g_A, \ \gamma_{\mp} = \mp g_V, \ \delta_{\mp} = \pm g_A.$$

Тогда исходные разложения некогерентных χA-сечений (65) переходят в следующие «$V \mp A$-выражения» для рассеяния *без переворота спина лептона* :

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\text{inc}, V-A}}{g_i dT_A} &= \frac{\widehat{c}_A}{2} \sum_{f=p,n} A_f \widehat{F}^2_f \Big[g_V^2 \widetilde{V}^+_{\pm}(\theta) + g_A^2 \widetilde{A}^+_{\pm}(\theta) + g_V g_A \widetilde{M}^+_{\pm}(\theta) \pm \\
&\quad \pm \frac{\Delta A_f}{A_f} \big\{ g_V g_A \widetilde{M}^-_{\pm}(\theta) - g_V^2 \widetilde{V}^-_{\pm}(\theta) - g_A^2 \widetilde{A}^-_{\pm}(\theta) \big\} \Big], \\
\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\text{inc}, V+A}}{g_i \widehat{c}_A dT_A} &= \frac{\widehat{c}_A}{2} \sum_{f=p,n} A_f \widehat{F}^2_f \Big[g_V^2 \widetilde{V}^+_{\mp}(\theta) + g_A^2 \widetilde{A}^+_{\mp}(\theta) - g_V g_A \widetilde{M}^+_{\mp}(\theta) \mp \\
&\quad \mp \frac{\Delta A_f}{A_f} \big\{ g_V g_A \widetilde{M}^-_{\mp}(\theta) + g_V^2 \widetilde{V}^-_{\mp}(\theta) + g_A^2 \widetilde{A}^-_{\mp}(\theta) \big\} \Big].
\end{aligned} \tag{106}$$

В (106) введены обозначения:

$$\frac{\widetilde{V}^-_{\pm}(\theta)}{2} = \frac{F^-_{\alpha^2}(\theta)}{2} + \frac{F^-_{\gamma^2}(\theta)}{2} \pm \frac{F^-_{\alpha\gamma}(\theta)}{2} = \\
= -2(E_\chi \pm |\mathbf{k}|)^2 \left(|\mathbf{k}| \pm E_p \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) |\mathbf{k}| \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$\frac{\widetilde{A}^-_{\pm}(\theta)}{2} = \frac{F^-_{\beta^2}(\theta)}{2} + \frac{F^-_{\delta^2}(\theta)}{2} \pm \frac{F^-_{\beta\delta}(\theta)}{2} = \\
= -2(E_\chi \pm |\mathbf{k}|)^2 \left(E_p \pm |\mathbf{k}| \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) E_p \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$\frac{\widetilde{M}^-_{\pm}(\theta)}{4} = \frac{F^-_{\alpha\delta}(\theta)}{4} + \frac{F^-_{\beta\gamma}(\theta)}{4} \pm \left[\frac{F^-_{\alpha\beta}(\theta)}{4} + \frac{F^-_{\gamma\delta}(\theta)}{4} \right] = \\
= (E_\chi \pm |\mathbf{k}|)^2 \left[(E_p \pm |\mathbf{k}|)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \pm 2E_p |\mathbf{k}| \sin^4 \frac{\theta}{2} \right],$$

$$\frac{\widetilde{M}^+_{\pm}(\theta)}{4} = \frac{F^+_{\alpha\delta}(\theta)}{4} + \frac{F^+_{\beta\gamma}(\theta)}{4} \pm \left[\frac{F^+_{\alpha\beta}(\theta)}{4} + \frac{F^+_{\gamma\delta}(\theta)}{4} \right] = \\
= 2(E_\chi \pm |\mathbf{k}|)^2 \left(|\mathbf{k}| \cos^2 \frac{\theta}{2} \pm E_p \right) |\mathbf{k}| \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$\frac{\widetilde{A}^+_{\pm}(\theta)}{2} = \frac{F^+_{\beta^2}(\theta)}{2} + \frac{F^+_{\delta^2}(\theta)}{2} \pm \frac{F^+_{\beta\delta}(\theta)}{2} = \\
= (E_\chi \pm |\mathbf{k}|)^2 \left[(E_p \pm |\mathbf{k}|)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 \left(E_p^2 - |\mathbf{k}|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right],$$

$$\frac{\widetilde{V}^{+}_{\pm}(\theta)}{2} = \frac{F^{+}_{\alpha^2}(\theta)}{2} + \frac{F^{+}_{\gamma^2}(\theta)}{2} \pm \frac{F^{+}_{\alpha\gamma}(\theta)}{2} = \\ = (E_\chi \pm |\mathbf{k}|)^2 \left[2|\mathbf{k}|^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} + (E_p \pm |\mathbf{k}|)^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]. \qquad (107)$$

Формфакторные выражения (107) полностью определяют вид некогерентных χA-сечений *без переворота спина массивного χ-лептона* (106) в случае $V \mp A$-взаимодействия. Видно, что все параметры с нижним индексом «+» содержат общий множитель $(E_\chi + |\mathbf{k}|)^2$, а все параметры с нижним индексом «−» пропорциональны общему множителю $(E_\chi - |\mathbf{k}|)^2$, который сводит на нет сечение в релятивистском пределе, когда $E_\chi \simeq |\mathbf{k}|$. Поскольку

$$2^4 c_A (E_\chi \pm |\mathbf{k}|)^2 = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{(E_\chi \pm |\mathbf{k}|)^2}{m^2 |\mathbf{k}_\chi|^2} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{\varkappa_\pm(s, m_\chi^2)}{s},$$

где по аналогии с (90) введено обозначение

$$\varkappa(s, m_\chi^2)_\pm \equiv \varkappa(s, m^2, m_\chi^2)_\pm = \left[1 \pm \frac{s + m_\chi^2 - m^2}{\lambda(s, m^2, m_\chi^2)} \right]^2, \qquad (108)$$

набор некогерентных «$V \mp A$-сечений» без переворота спина массивного χ-лептона можно записать *окончательно* в виде следующих выражений:

$$\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\mathrm{inc},\,V-A}}{g_i dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \varkappa_\pm(s, m_\chi^2) \sum A_f \widehat{F}_f^2 \Big[g_V^2 V^{+}_{\pm}(\theta) + g_A^2 A^{+}_{\pm}(\theta) + \\ + g_V g_A M^{+}_{\pm}(\theta) \pm \frac{\Delta A_f}{A_f} \big\{ g_V g_A M^{-}_{\pm}(\theta) - g_V^2 V^{-}_{\pm}(\theta) - g_A^2 A^{-}_{\pm}(\theta) \big\} \Big], \qquad (109)$$

$$\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\mathrm{inc},\,V+A}}{g_i dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \varkappa_\mp(s, m_\chi^2) \sum A_f \widehat{F}_f^2 \Big[g_V^2 V^{+}_{\mp}(\theta) + g_A^2 A^{+}_{\mp}(\theta) - \\ - g_V g_A M^{+}_{\mp}(\theta) \mp \frac{\Delta A_f}{A_f} \big\{ g_V g_A M^{-}_{\mp}(\theta) + g_V^2 V^{-}_{\mp}(\theta) + g_A^2 A^{-}_{\mp}(\theta) \big\} \Big].$$

В формулах (109) параметры (107) переопределены в виде безразмерных величин:

$$V^{-}_{\pm}(\theta) \equiv \frac{\widetilde{V}^{-}_{\pm}(\theta)}{2s(E_\chi \pm |\mathbf{k}|)^2} = -\frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{s}} \left(\frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{s}} \pm \frac{E_p}{\sqrt{s}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$A^{-}_{\pm}(\theta) = \frac{\widetilde{A}^{-}_{\pm}(\theta)}{2s(E_\chi \pm |\mathbf{k}|)^2} = -2 \left(\frac{E_p^2}{s} \pm \frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{s}} \frac{E_p}{\sqrt{s}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$M^{-}_{\pm}(\theta) \equiv \frac{\widetilde{M}^{-}_{\pm}(\theta)}{2s(E_\chi \pm |\mathbf{k}|)^2} = 2 \frac{(E_p \pm |\mathbf{k}|)^2}{s} \cos^2 \frac{\theta}{2} \pm 4 \frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{s}} \frac{E_p}{\sqrt{s}} \sin^4 \frac{\theta}{2},$$

$$M^{+}_{\pm}(\theta) \equiv \frac{\widetilde{M}^{+}_{\pm}(\theta)}{2s(E_\chi \pm |\mathbf{k}|)^2} = 4 \frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{s}} \left(\frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{s}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \pm \frac{E_p}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$A^{+}_{\pm}(\theta) \equiv \frac{\widetilde{A}^{+}_{\pm}(\theta)}{2s(E_\chi \pm |\mathbf{k}|)^2} = \frac{(E_p \pm |\mathbf{k}|)^2}{s}\cos^2\frac{\theta}{2} + \\ + 2\left(\frac{E_p^2}{s} - \frac{|\mathbf{k}|^2}{s}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\sin^2\frac{\theta}{2}, \tag{110}$$

$$V^{+}_{\pm}(\theta) \equiv \frac{\widetilde{V}^{+}_{\pm}(\theta)}{2s(E_\chi \pm |\mathbf{k}|)^2} = 2\frac{|\mathbf{k}|^2}{s}\sin^4\frac{\theta}{2} + \frac{(E_p \pm |\mathbf{k}|)^2}{s}\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

Формулы (109) представляют собой выражения для сечений некогерентного рассеяния массивного χ-лептона на ядре *без переворота спина* одновременно за счет $V-A$- и $V+A$-токов. Существенным является то, что в первом случае «подавляется» сечение для лептона с положительной спиральностью (аналог антинейтрино), а во втором случае — для лептона с отрицательной спиральностью (аналог нейтрино).

Если в формулы (109) подставить параметры из (110) и ввести еще одно обозначение

$$\xi = \frac{|\mathbf{k}|}{E_p} = \frac{\lambda(s, m^2, m_\chi^2)}{s - m_\chi^2 + m^2},$$

то можно получить «более явные» выражения для «$V \mp A$»-некогерентных χA-сечений в следующем виде:

$$\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\mathrm{inc},\,V-A}}{g_i dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{E_p^2}{s}\varkappa_{\pm}(s, m_\chi^2)\sum A_f \widehat{F}_f^2\Bigg[(g_V^2 + g_A^2)(1 \pm \xi)^2\cos^2\frac{\theta}{2} + \\ + 2(g_V\xi \pm g_A)^2\sin^2\frac{\theta}{2} - 2(g_V - g_A)^2\xi^2\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} \pm \\ \pm \frac{\Delta A_f}{A_f}\bigg\{2g_V g_A(1 \pm \xi)^2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2(g_V\xi \pm g_A)^2\sin^2\frac{\theta}{2} \pm \\ \pm 2(g_V - g_A)^2\xi\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} - g_V^2\xi\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\xi \pm \cos^2\frac{\theta}{2}\right)\bigg\}\Bigg], \tag{111}$$

$$\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\mathrm{inc},\,V+A}}{g_i dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{E_p^2}{s}\varkappa_{\mp}(s, m_\chi^2)\sum A_f \widehat{F}_f^2\Bigg[(g_V^2 + g_A^2)(1 \mp \xi)^2\cos^2\frac{\theta}{2} + \\ + 2\big(g_V\xi \pm g_A\big)^2\sin^2\frac{\theta}{2} - 2(g_V + g_A)^2\xi^2\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} \mp \\ \mp \frac{\Delta A_f}{A_f}\bigg\{2g_V g_A(1 \mp \xi)^2\cos^2\frac{\theta}{2} - 2(g_V\xi \pm g_A)^2\sin^2\frac{\theta}{2} \pm \\ \pm 2(g_V + g_A)^2\xi\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} + g_V^2\xi\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\xi \mp \cos^2\frac{\theta}{2}\right)\bigg\}\Bigg].$$

На этом завершается обсуждение вариантов представления некогерентных сечений слабого $V \mp A$-взаимодействия массивного χ-лептона с ядром без переворота спина лептона.

В безмассовом пределе, когда

$$m_\chi = 0, \quad \frac{E_p}{\sqrt{s}} = \frac{s+m^2}{2s}, \quad \xi = \frac{s-m^2}{s+m^2}, \quad \varkappa(s,0)_+ = 4, \quad \varkappa(s,0)_- = 0,$$

для лептонов с «неправильной спиральностью» сечения (111) обращаются в нуль:

$$\frac{d\sigma^{++}_{\text{inc}, V-A,0}}{dT_A} \propto \varkappa_-(s,0) = 0, \quad \frac{d\sigma^{--}_{\text{inc}, V+A,0}}{dT_A} \propto \varkappa_-(s,0) = 0.$$

Далее из (111) для безмассового лептона с «правильной спиральностью» получается следующее:

$$\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\text{inc}, V\mp A,0}}{g_i dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{4E_p^2}{s}\times \\ \times \sum A_f \widehat{F}_f^2 \Big[(g_V^2+g_A^2)(1+\xi)^2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2(g_V\xi \pm g_A)^2 \sin^2\frac{\theta}{2} - \\ - 2(g_V \mp g_A)^2 \xi^2 \cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{\Delta A_f}{A_f}\Big\{2g_V g_A(1+\xi)^2\cos^2\frac{\theta}{2} \pm \\ \pm 2(g_V\xi \pm g_A)^2\sin^2\frac{\theta}{2} \pm 2(g_V \mp g_A)^2 \xi\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} \mp \\ \mp g_V^2 \xi \sin^2\frac{\theta}{2}\Big(\xi + \cos^2\frac{\theta}{2}\Big)\Big\}\Big]. \quad (112)$$

Эта формула соответствует некогерентному рассеянию нейтрино и антинейтрино на ядре, которое обсуждалось в работе [3]. Они являются прямым следствием общего разложения по киральным константам (109), «$V-A$»-формула которого для безмассового нейтрино принимает вид*, совпадающий с приведенным ниже выражением из работы [3]:

$$\frac{d\sigma^{--}_{\text{inc}, V-A,0}}{dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{2\pi}\times \\ \times \sum_{f=p,n} A_f \widehat{F}_f^2 \Big[g_A^2\Big[2\Big(1-\frac{ys}{s-m^2}\Big) + y^2 + y\frac{4m^2}{s-m^2}\Big] + 2g_V g_A y(2-y) + \\ + g_V^2\Big[2\Big(1-\frac{ys}{s-m^2}\Big)+y^2\Big] + \frac{2\Delta A_f}{A_f}\Big\{g_V^2 y\Big(1-\frac{y}{2}\frac{s+m^2}{s-m^2}\Big) + \\ + g_A^2 y\Big(1-\frac{y}{2}\Big)\frac{s+m^2}{s-m^2} + g_V g_A\Big[2\Big(1-\frac{ys}{s-m^2}\Big) + y^2\frac{s+m^2}{s-m^2}\Big]\Big\}\Big]. \quad (113)$$

---

* Здесь у g_V^f и g_A^f опущен f-индекс, а также, как и в работе [3], принято, что $g_i \simeq 1$ и $y \equiv \sin^2\theta/2(1-m^2/s)$.

Посмотрим наконец, во что переходит некогерентное χA-сечение (73), отвечающее рассеянию безмассового лептона на бесспиновом ядре в $V \pm A$-приближении, т. е. когда

$$(\alpha \mp \gamma)_{V \mp A} = 2g_V, \quad (\beta \mp \delta)_{V \mp A} = -2g_A, \quad (\alpha \mp \gamma)_{V \pm A} = (\delta \mp \beta)_{V \pm A} = 0.$$

Подставляя эти соотношения в формулу (73), с учетом (46) получаем следствие формулы (73) в виде

$$\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\text{inc}, V\mp A,00}}{dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{2\pi} \sum_{f=p,n} \widehat{F}^2_f(\mathbf{q}) A_f \left[g_A^2 \left(2 + y^2 + 2y \frac{2m^2 - s}{s - m^2} \right) \pm \right.$$
$$\left. \pm 2 g_V g_A y(2-y) + g_V^2 \left(2 + y^2 - \frac{2ys}{s - m^2} \right) \right],$$
$$\frac{d\sigma^{\mp\mp}_{\text{inc}, V\pm A,00}}{dT_A} = 0.$$

Как и следовало ожидать, первая формула — некогерентное сечение рассеяния на ядре безмассового нейтрино (с отрицательной спиральностью) и безмассового антинейтрино (с положительной спиральностью) — совпадает (в своей бесспиновой части) с «нейтринной формулой» (113), а вторая формула — сечение рассеяния безмассового нейтрино по каналу $V + A$-тока и безмассового антинейтрино по каналу $V - A$-тока — равна нулю.

$V \mp A$-взаимодействие с изменением проекции спина массивного лептона. В этом случае общие разложения некогерентных χA-сечений (65) переходят в следующие выражения:

$$\frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\text{inc}, V-A}}{g_i \widehat{c}_A dT_A} = \frac{1}{2} \sum_{f=p,n} A_f \widehat{F}^2_f \left[g_V^2 \widehat{V}^+(\theta) + g_A^2 \widehat{A}^\pm_\mp(\theta) + g_V g_A \widehat{M}^\pm_\pm(\theta) + \right.$$
$$\left. + \frac{\Delta A_f}{A_f} \left\{ g_V g_A \widehat{M}^-_\pm(\theta) - g_V^2 \widehat{V}^-(\theta) - g_A^2 \widehat{A}^-_\mp(\theta) \right\} \right],$$
$$\frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\text{inc}, V+A}}{g_i \widehat{c}_A dT_A} = \frac{1}{2} \sum_{f=p,n} A_f \widehat{F}^2_f \left[g_V^2 \widehat{V}^+(\theta) + g_A^2 \widehat{A}^\pm_\pm(\theta) - g_V g_A \widehat{M}^\pm_\mp(\theta) + \right.$$
$$\left. + \frac{\Delta A_f}{A_f} \left\{ g_V g_A \widehat{M}^-_\mp(\theta) + g_V^2 \widehat{V}^-(\theta) + g_A^2 \widehat{A}^-_\pm(\theta) \right\} \right]. \tag{114}$$

Здесь все формфакторные комбинации, определяющие некогерентные χA-сечения в случае $V \mp A$-взаимодействия *с изменением проекции спина массивного лептона*, зависят от G-формфакторов из (67) и пропорциональны общему множителю $2m_\chi^2$:

$$\frac{\widehat{V}^-(\theta)}{2m_\chi^2} = \frac{G^-_{\alpha\gamma}(\theta)}{2m_\chi^2} = 2|\mathbf{k}| \left[m + 2(E_p - m) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$\frac{\widehat{V}^{+}(\theta)}{2m_\chi^2} = \frac{G^{+}_{\alpha^2}(\theta)}{2m_\chi^2} + \frac{G^{+}_{\beta\gamma}(\theta)}{2m_\chi^2} =$$
$$= m^2\sin^2\frac{\theta}{2} + |\mathbf{k}|^2\cos^2\frac{\theta}{2} = E_p^2\cos^2\frac{\theta}{2} + m^2\left(\sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right),$$
$$\frac{\widehat{A}^{-}_{\pm}(\theta)}{2m_\chi^2} = \frac{G^{-}_{\beta\delta}(\theta)}{2m_\chi^2} \pm \frac{G^{-}_{\delta^2}(\theta)}{2m_\chi^2} =$$
$$= 2\cos^2\frac{\theta}{2}\left\{|\mathbf{k}|\left[m + 2(E_p - m)\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\cos^2\frac{\theta}{2} \mp m^2\right\},$$
$$\frac{\widehat{M}^{-}_{\pm}(\theta)}{2m_\chi^2} = \frac{G^{-}_{\alpha\gamma}(\theta)}{2m_\chi^2} + \frac{G^{-}_{\beta\delta}(\theta)}{2m_\chi^2} \pm \frac{G^{-}_{\alpha\delta}(\theta)}{2m_\chi^2} =$$
$$= 2|\mathbf{k}|\cos^2\frac{\theta}{2}\left\{m + 4(E_p - m)\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right\} \mp 2m^2\sin^2\frac{\theta}{2},$$
$$\frac{\widehat{A}^{+}_{\pm}(\theta)}{2m_\chi^2} = \frac{G^{+}_{\delta^2}(\theta)}{2m_\chi^2} + \frac{G^{+}_{\beta\gamma}(\theta)}{2m_\chi^2} \pm \frac{G^{+}_{\beta\delta}(\theta)}{2m_\chi^2} =$$
$$= m^2 + (m - |\mathbf{k}|)^2\cos^2\frac{\theta}{2} \mp 4m|\mathbf{k}|\cos^4\frac{\theta}{2},$$
$$\frac{\widehat{M}^{+}_{\pm}(\theta)}{2m_\chi^2} = \frac{G^{+}_{\alpha\delta}(\theta)}{2m_\chi^2} - 2\frac{G^{+}_{\beta\gamma}(\theta)}{2m_\chi^2} \pm \frac{G^{+}_{\beta\delta}(\theta)}{2m_\chi^2} =$$
$$= -2|\mathbf{k}|\cos^2\frac{\theta}{2}\left[|\mathbf{k}| \mp m\left(\sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right].$$

С учетом (38) некогерентные χA-сечения рассеяния за счет $V \mp A$-токов с переворотом спина массивного лептона можно записать с безразмерными множителями у киральных констант g_A, g_V в следующем окончательном виде:

$$\frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\text{inc},\,V-A}}{dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2}\sum A_f \widehat{F}_f^2\left[(g_V^2 + g_A^2) + (g_A^2 - g_V^2)\cos^2\frac{\theta}{2} +\right.$$
$$+ \varepsilon^2(g_V - g_A)^2\cos^2\frac{\theta}{2} - 2g_A\varepsilon\left[(g_A \mp g_V) \mp 2(g_A - g_V)\cos^2\frac{\theta}{2}\right]\cos^2\frac{\theta}{2} +$$
$$+ \frac{2\Delta A_f}{A_f}\left\{\varepsilon(g_A - g_V)\left[g_A\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1 + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) +\right.\right.$$
$$\left. + g_V\left(1 + \cos^2\frac{\theta}{2} - 2\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\right]\cos^2\frac{\theta}{2} \mp$$
$$\left.\left. \mp g_A\left(g_V\sin^2\frac{\theta}{2} + g_A\cos^2\frac{\theta}{2}\right) - 2\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2}\,(g_V - g_A)^2\cos^4\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right\}\right],$$

$$\frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\text{inc},\,V+A}}{dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2}\sum A_f \widehat{F}_f^2\Bigg[(g_V^2+g_A^2)+(g_A^2-g_V^2)\cos^2\frac{\theta}{2} + \\ + \varepsilon^2(g_V+g_A)^2\cos^2\frac{\theta}{2} - 2g_A\varepsilon\left[(g_A\mp g_V)\pm 2(g_A+g_V)\cos^2\frac{\theta}{2}\right]\cos^2\frac{\theta}{2} + \\ + \frac{2\Delta A_f}{A_f}\Bigg\{\varepsilon(g_A+g_V)\Bigg[g_A\cos^2\frac{\theta}{2}\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+ \\ + g_V\left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}-2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\Bigg]\cos^2\frac{\theta}{2}\pm \\ \pm g_A\left[g_V\sin^2\frac{\theta}{2}-g_A\cos^2\frac{\theta}{2}\right]+2\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2}\,(g_V+g_A)^2\cos^4\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\Bigg\}\Bigg]. \tag{115}$$

Здесь введены вспомогательные обозначения $(|\mathbf{k}|E_p)/m^2 = \varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2}$, где $\varepsilon \equiv |\mathbf{k}|/m$. Сразу видно, что при $m_\chi \to 0$ обе формулы из (115) обращаются в нуль, как и следовало ожидать.

Предел $\varepsilon \to 0$ соответствует случаю, когда импульс падающего χ-лептона $|\mathbf{k}_\chi| \ll m$, в том числе когда $|\mathbf{k}_\chi| \leqslant m_\chi \ll m$. Тогда в этом пределе из формул (115) получается следующее приближение:

$$\frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\text{inc},\,V-A}}{dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2}\sum A_f \widehat{F}_f^2\Bigg[(g_V^2+g_A^2)+(g_A^2-g_V^2)\cos^2\frac{\theta}{2}\mp \\ \mp\frac{2\Delta A_f}{A_f}g_A\left\{g_V\sin^2\frac{\theta}{2}+g_A\cos^2\frac{\theta}{2}\right\}\Bigg],$$

$$\frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\text{inc},\,V+A}}{dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2}\sum A_f \widehat{F}_f^2\Bigg[(g_V^2+g_A^2)+(g_A^2-g_V^2)\cos^2\frac{\theta}{2}\pm \\ \pm\frac{2\Delta A_f}{A_f}g_A\left\{g_V\sin^2\frac{\theta}{2}-g_A\cos^2\frac{\theta}{2}\right\}\Bigg].$$

Из него видно, что на ядре с нулевым спином ($\Delta A_f = 0$) при $\varepsilon \simeq 0$ эти сечения совпадают:

$$\frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\text{inc},\,V-A}}{dT_A} = \frac{d\sigma^{\mp\pm}_{\text{inc},\,V+A}}{dT_A} = \\ = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi|^2}\sum A_f \widehat{F}_f^2(\mathbf{q})\left[(g_V^2+g_A^2)+(g_A^2-g_V^2)\cos^2\frac{\theta}{2}\right].$$

Однако это наблюдение не имеет практической пользы, поскольку при таких малых импульсах падающего лептона значение переданного импульса $\mathbf{q} \simeq 0$, что приводит к $\widehat{F}_f^2(\mathbf{q}) \simeq 0$. Иными словами, при достаточно малых переданных импульсах говорить о сколько-нибудь заметной роли неупругих (некогерентных) процессов рассеяния не приходится.

Полностью усредненное некогерентное «$V \mp A$»-сечение. Напомним, что полностью усредненное (усредненное по начальным и просуммированное по конечным спиральностям χ-частицы) *некогерентное* сечение χA-взаимодействия задано формулой (75).

В $V \mp A$-приближении, когда $\alpha_{\mp} = +g_V$, $\beta_{\mp} = -g_A$, $\gamma_{\mp} = \mp g_V$, $\delta_{\mp} = \pm g_A$, получается

$$\begin{gathered}
\alpha^2_{\mp} = \gamma^2_{\mp} = g^2_V, \quad \beta^2_{\mp} = \delta^2_{\mp} = g^2_A, \quad (\gamma^2 - \beta^2)_{\mp} = (g^2_V - g^2_A), \\
(\alpha - \delta)_{\mp} = (g_V \mp g_A), \quad (\beta - \gamma)_{\mp} = \pm(g_V \mp g_A), \\
(\alpha - \delta)\delta_{\mp} = \pm(g_V \mp g_A)g_A, \quad (\beta - \gamma)\beta_{\mp} = \mp(g_V \mp g_A)g_A, \\
(\alpha\gamma + \beta\delta)_{\mp} = \mp(g^2_V + g^2_A), \ (\alpha\delta + \beta\gamma)_{\mp} = \pm 2 g_V g_A, \ (\alpha\beta + \gamma\delta)_{\mp} = -2 g_V g_A.
\end{gathered} \tag{116}$$

Тогда суммы (81), определяющие полностью усредненные некогерентные χA-сечения, переходят в следующие «$V \pm A$»-выражения:

$$\begin{aligned}
\sum_{s',s} \frac{Q^{s's}_{+,V\mp A}}{2^6} &= (g^2_V + 3g^2_A) m^2 m^2_\chi \pm 4 g_V g_A |\mathbf{k}|^2 s + 4 g_A (g_A \mp g_V) \times \\
&\times m^2 |\mathbf{k}|^2 \sin^2\frac{\theta}{2} + (g_V \mp g_A)^2 |\mathbf{k}|^2 \left[4|\mathbf{k}|^2 \sin^4\frac{\theta}{2} + 2s\cos^2\frac{\theta}{2} + \right. \\
&\left. + m^2_\chi \left(\sin^2\frac{\theta}{2} + \sin^4\frac{\theta}{2} + \cos^4\frac{\theta}{2}\right)\right], \\
\sum_{s',s} \frac{Q^{s's}_{-,V\mp A}}{2^7|\mathbf{k}|} &= \mp(g_V \mp g_A)^2 \left[m^2_\chi E_p \cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) - \right. \\
&\left. - 2|\mathbf{k}|^2 \left(E_p \cos^2\frac{\theta}{2} + E_\chi\right)\sin^2\frac{\theta}{2}\right] \mp \\
&\mp (g^2_V - g^2_A) m^2_\chi m \cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + \\
&+ g^2_A \left[m m^2_\chi \cos^2\frac{\theta}{2}\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \pm 2m^2 E_\chi \sin^2\frac{\theta}{2}\right] + \\
&+ g_V g_A \left[m m^2_\chi \cos^2\frac{\theta}{2}\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + 2m^2_\chi E_p + \right. \\
&\left. + 4|\mathbf{k}|^2 (E_\chi + E_p) + 2m^2 E_\chi \cos^2\frac{\theta}{2}\right].
\end{aligned} \tag{117}$$

В результате полностью усредненное *некогерентное* сечение χA-взаимодействия (75) с учетом сумм из (117) принимает «$V \mp A$»-вид:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{\text{tot}}_{\text{inc},V\mp A}}{g_i dT_A} &= \frac{G^2_F m_A}{4\pi} \frac{1}{m^2 |\mathbf{k}_\chi|^2} \times \\
&\times \sum_{f=p,n} A_f \widehat{F}^2_f(\mathbf{q}) \left[\sum_{s's} \frac{Q^{s's}_{+,V\mp A}}{2^6} + \frac{2\Delta A_f}{A_f} |\mathbf{k}| \sum_{s's} \frac{Q^{s's}_{-,V\mp A}}{2^7|\mathbf{k}|}\right].
\end{aligned}$$

Далее, поскольку в $V \mp A$-пределе справедливы соотношения (116), то для параметров из (83) имеются выражения

$$\begin{aligned}
\Phi^{+}_{\alpha^2+3\delta^2}(\mathbf{q}) &= \Phi^{+}_{g_V^2} + 3\Phi^{+}_{g_A^2}(\mathbf{q}),\\
\Phi^{+}_{\gamma^2-\beta^2}(\mathbf{q}) &= \Phi^{+}_{g_V^2}(\mathbf{q}) - \Phi^{+}_{g_A^2}(\mathbf{q}),\\
\Phi^{+}_{(\beta-\gamma)^2}(\mathbf{q}) &= \Phi^{+}_{(g_V \mp g_A)^2}(\mathbf{q}),\\
\Phi^{+}_{(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2}(\mathbf{q}) &= 2\Phi^{+}_{(g_V \mp g_A)^2}(\mathbf{q}),\\
\Phi^{+}_{2(\alpha\delta+\beta\gamma)}(\mathbf{q}) &= \pm 4\Phi^{+}_{g_V g_A}(\mathbf{q}),\\
\Phi^{+}_{(\beta-\gamma)\beta}(\mathbf{q}) &= \Phi^{+}_{(\delta-\alpha)\delta}(\mathbf{q}) = \mp\Phi^{+}_{g_V g_A \mp g_A^2}(\mathbf{q}).
\end{aligned}$$

После подстановки их в общую формулу (83) для бесспинового ядра получается следующее:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{\text{tot}}_{\text{inc},\,V\mp A,0}}{g_i \widehat{c}_A dT_A} &= [\Phi^{+}_{g_V^2}(\mathbf{q}) + 3\Phi^{+}_{g_A^2}(\mathbf{q})] m_\chi^2 m^2 \pm 4\Phi^{+}_{g_V g_A}(\mathbf{q})|\mathbf{k}|^2 s + \\
&+ 4\Phi^{+}_{(g_A \mp g_V) g_A}(\mathbf{q}) m^2 |\mathbf{k}|^2 \sin^2\frac{\theta}{2} + \Phi^{+}_{(g_V \mp g_A)^2}(\mathbf{q})|\mathbf{k}|^2 \times \\
&\times \left[4|\mathbf{k}|^2 \sin^4\frac{\theta}{2} + 2s\cos^2\frac{\theta}{2} + m_\chi^2\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin^4\frac{\theta}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

Здесь по аналогии с определениями из (69) введены обозначения

$$\begin{aligned}
\Phi^{+}_{V^2}(\mathbf{q}) &\equiv \Phi^{+}_{g_V^2}(\mathbf{q}) = \sum_{f=p,n} \widehat{F}^2_f(\mathbf{q}) A_f [g_V^f]^2,\\
\Phi^{+}_{VA}(\mathbf{q}) &\equiv \Phi^{+}_{g_V g_A}(\mathbf{q}) = \sum_{f=p,n} \widehat{F}^2_f(\mathbf{q}) A_f g_A^f g_V^f,\\
\Phi^{+}_{A^2}(\mathbf{q}) &\equiv \Phi^{+}_{g_A^2}(\mathbf{q}) = \sum_{f=p,n} \widehat{F}^2_f(\mathbf{q}) A_f [g_A^f]^2.
\end{aligned} \tag{118}$$

С помощью этих обозначений полностью усредненное некогерентное χA-сечение на *бесспиновом* ядре в виде разложения по киральным константам связи g_V и g_A принимает вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{\text{tot}}_{\text{inc},\,V\mp A,0}}{g_i dT_A} &\equiv \frac{G_F^2 m_A}{4\pi m^2 |\mathbf{k}_\chi|^2} \times \\
&\times \left\{\Phi^{+}_{V^2}(\mathbf{q}) S_{V^2}(\theta) + \Phi^{+}_{A^2}(\mathbf{q}) S_{A^2}(\theta) \pm 2\Phi^{+}_{VA}(\mathbf{q}) S_{VA}(\theta)\right\},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
S_{V^2}(\theta) &\equiv m_\chi^2 m^2 + 4|\mathbf{k}|^4 \sin^4\frac{\theta}{2} + 2s|\mathbf{k}|^2 \cos^2\frac{\theta}{2} + \\
&+ m_\chi^2 |\mathbf{k}|^2 \left(\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin^4\frac{\theta}{2}\right),
\end{aligned}$$

$$S_{A^2}(\theta) \equiv 3m_\chi^2 m^2 + 4m^2|\mathbf{k}|^2 \sin^2\frac{\theta}{2} + |\mathbf{k}|^2\Bigg[4|\mathbf{k}|^2\sin^4\frac{\theta}{2} + 2s\cos^2\frac{\theta}{2} + \\ + m_\chi^2\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin^4\frac{\theta}{2}\right)\Bigg],$$

$$S_{VA}(\theta) \equiv |\mathbf{k}|^2\Bigg[2s - 2m^2\sin^2\frac{\theta}{2} - \Bigg[4|\mathbf{k}|^2\sin^4\frac{\theta}{2} + 2s\cos^2\frac{\theta}{2} + \\ + m_\chi^2\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin^4\frac{\theta}{2}\right)\Bigg]\Bigg]. \quad (119)$$

Для *безмассового* χ-лептона ($m_\chi = 0$) суммирование по всем спиральностям лептона (117) дает следующий результат:

$$\sum \frac{Q^{s's}_{+,V\mp A,0}}{2^7|\mathbf{k}|^2} = +2g_A^2 m^2\sin^2\frac{\theta}{2} \pm 2g_V g_A\left(s - m^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + \\ + (g_V \mp g_A)^2\left(2|\mathbf{k}|^2\sin^4\frac{\theta}{2} + s\cos^2\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\sum \frac{Q^{s's}_{-,V\mp A,0}}{2^7|\mathbf{k}|^2} = \pm 2g_A^2 m^2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2g_V g_A\left(s - m^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \pm \\ \pm (g_V \mp g_A)^2\left((s-m^2)\cos^2\frac{\theta}{2} + 2|\mathbf{k}|^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\sin^2\frac{\theta}{2}. \quad (120)$$

Тогда при $m_\chi = 0$ в $V \mp A$-варианте взаимодействия полностью усредненное некогерентное χA-сечение выглядит следующим образом:

$$\frac{d\sigma^{\rm tot}_{{\rm inc},\,V\mp A,0}}{g_i dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{2\pi}\sum_{f=p,n} A_f \widehat{F}_f^2(\mathbf{q})\Bigg\{2g_A^2\frac{m^2}{s}\sin^2\frac{\theta}{2} + (g_V \mp g_A)^2 \times \\ \times\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{m^2}{s}\right)^2\sin^4\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right] \pm 2g_V g_A\left(1 - \frac{m^2}{s}\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + \\ + \frac{\Delta A_f}{A_f}\Bigg[2g_V g_A\left(1-\frac{m^2}{s}\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \pm 2g_A^2\frac{m^2}{s}\sin^2\frac{\theta}{2} \pm \\ \pm (g_V \mp g_A)^2\left(1-\frac{m^2}{s}\right)\sin^2\frac{\theta}{2}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{m^2}{s}\right)\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right]\Bigg]\Bigg\}. \quad (121)$$

Это полностью усредненное по всем спиральностям лептона χA-сечение, как и выражения (120), отвечающие *безмассовому* лептону, несмотря на наличие суммы по спиральностям лептона, вообще говоря, содержат всего по одному слагаемому: для $V - A$-варианта это только вклад частицы с отрицательной *сохраняющейся* спиральностью (нейтрино совпадает с формулой (113)), для $V + A$-варианта это только вклад частицы с положительной *сохраняющейся* спиральностью (антинейтрино). Данное выражение совпадает с формулами для (анти)нейтрино из работы [3].

Полное усредненное χA-сечение для массивного лептона и $V \mp A$-токов. Оно представляет собой сумму двух слагаемых — полностью усредненного когерентного (104) и полностью усредненного некогерентного (119) сечений χA-взаимодействия за счет $V \mp A$-токов. Приведем это выражение для бесспинового ядра с учетом (46) в виде разложения по эффективным $V \mp A$-константам (при предположении, что $g_i \simeq g_c \simeq 1$):

$$\frac{d\sigma^{\rm tot}_{V\mp A,0}}{dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi}\Big\{\Phi^+_{V^2}(\mathbf{q})S_{V^2}(\theta) + \Phi^+_{A^2}(\mathbf{q})S_{A^2}(\theta) \pm 2\Phi^+_{VA}(\mathbf{q})S_{VA}(\theta) + \\ + G_V^2(\mathbf{q})C_V(\theta) + G_A^2(\mathbf{q})C_A(\theta) \pm 2G_V(\mathbf{q})G_A(\mathbf{q})C_M(\theta)\Big\}. \quad (122)$$

Здесь коэффициенты при эффективных $V \mp A$-константах переопределены путем включения в них общего множителя $(|\mathbf{k}|^2 s)^{-1}$, т. е. $S_{V^2}(\theta) \equiv S_{V^2}(\theta)/(|\mathbf{k}|^2 s)$ и т. п. Они имеют следующий вид:

$$S_{V^2}(\theta) = \frac{m_\chi^2 m^2}{|\mathbf{k}|^2 s} + 2\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{4|\mathbf{k}|^2}{s}\sin^4\frac{\theta}{2} + \frac{m_\chi^2}{s}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin^4\frac{\theta}{2}\right),$$

$$S_{A^2}(\theta) = \frac{3m_\chi^2 m^2}{|\mathbf{k}|^2 s} + \frac{4m^2}{s}\sin^2\frac{\theta}{2} + 2\cos^2\frac{\theta}{2} + \frac{4|\mathbf{k}|^2}{s}\sin^4\frac{\theta}{2} + \\ + \frac{m_\chi^2}{s}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin^4\frac{\theta}{2}\right),$$

$$S_{VA}(\theta) = 2\sin^2\frac{\theta}{2}\left(1 - \frac{m^2}{s}\right) - \frac{4|\mathbf{k}|^2}{s}\sin^4\frac{\theta}{2} - \frac{m_\chi^2}{s}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin^4\frac{\theta}{2}\right),$$

$$C_A(\theta) = \left(\frac{E_p}{\sqrt{s}} - \frac{m}{\sqrt{s}}\right)^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}|^2} + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

$$C_M(\theta) = 2\left(\frac{E_p}{\sqrt{s}} - \frac{m}{\sqrt{s}}\right)\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{E_\chi}{\sqrt{s}} + \frac{m}{\sqrt{s}}\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{E_p}{\sqrt{s}}\cos^2\frac{\theta}{2}\right),$$

$$C_V(\theta) = \left(\frac{m}{\sqrt{s}}\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{E_p}{\sqrt{s}}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^2\left(\frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}|^2} + 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) + \\ + \cos^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{m_\chi^2}{s} + \frac{2|\mathbf{k}|^2}{s} + \frac{4E_\chi}{\sqrt{s}}\left(\frac{m}{\sqrt{s}}\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{E_p}{\sqrt{s}}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

Формула (122) также может быть получена соответствующей подстановкой из общего выражения (86) для полного сечения слабого взаимодействия массивного лептона и ядра без спина. Остальные переменные, входящие в выражение (122), определены в тексте данного раздела формулами (100) и (118).

Отметим, что выражение (122) можно считать *новым предписанием* для вычисления сечения рассеяния (массивного) лептона на ядре за счет слабого $V \mp A$-взаимодействия при энергиях не более нескольких сотен мегаэлектронвольт. Например, такие современные программные продукты, как Achilles из работы [17], претендующие на прецизионное описание и моделирование в том числе и рассмотренных в данной работе слабых процессов, должны, по всей видимости, принять во внимание полученные здесь результаты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изложены все элементы теоретического подхода к описанию рассеяния *массивного* (нейтрального) лептона на ядре как объекта, внутренняя структура которого обусловлена взаимодействующими друг с другом нуклонами. Это изложение представляет собой естественное обобщение новой концепции в теории рассеяния (анти)нейтрино на ядре как составной системе, предложенной совместно с Д. В. Наумовым в цикле работ [1–3, 9]. Граничным условием применимости подхода является требование сохранения целостности ядра после взаимодействия. Ядро как сложная квантовая система может «возбуждаться», переходить из одного квантового состояния в другое, но в каноническом варианте данного подхода ядро не должно разваливаться «на куски». Это требование накладывает ограничения на величину переданного лептоном ядру импульса, который не должен быть столь большим, чтобы полностью «развалить ядро». Помимо этого применимость подхода, строго говоря, ограничена также сделанными приближениями, которые, в свою очередь, явно сформулированы в тексте, выглядят достаточно естественно и при необходимости могут быть специально исследованы и приняты во внимание в качестве, например, поправочных коэффициентов или вкладов.

В подходе конструктивно использовано так называемое условие полноты квантовых состояний ядра (или условия сохранения вероятности), которое на основе суммирования по всем возможным начальным и конечным состояниям ядра позволяет явным образом отделить упругий процесс от всех остальных неупругих процессов, способных давать вклад в полное наблюдаемое сечение χA-рассеяния. Подход далее опирается на микроскопическое описание ядра как связанного состояния составляющих его нуклонов на базе многочастичной волновой функции ядра. Фундаментальным считается *слабое* взаимодействие точечного χ-лептона с бесструктурными протонами и нейтронами ядра. Это взаимодействие параметризуется в виде разложения скалярного произведения лептонного и нуклонного токов по четырем эффективным константам связи, отражающим в общем виде аксиально-векторный характер слабого взаимодействия:

$$(l^{w}_{s's}\, h^{w,f}_{r'r}) = \alpha_f(l^{v}_{s's}\, h^{v}_{r'r}) + \beta_f(l^{v}_{s's}\, h^{a}_{r'r}) + \gamma_f(l^{a}_{s's}\, h^{v}_{r'r}) + \delta_f(l^{a}_{s's}\, h^{a}_{r'r}).$$

В работе получены *релятивистские* выражения для сечений рассеяния массивного (нейтрального) χ-лептона на ядре. Показано, что *наблюдаемое* экспериментально сечение процесса $\chi A \to \chi A^{(*)}$ (86) включает в себя упругий (или когерентный) вклад (58), когда ядро остается в своем первоначальном квантовом состоянии, и неупругий (некогерентный) вклад (65), когда ядро переходит в другое (возбужденное) квантовое состояние. Переход от упругого режима рассеяния к неупругому режиму рассеяния *автоматически* определяется зависимостью нуклон-ядерных формфакторов $F_{p/n}(\mathbf{q})$ от переданного ядру импульса $\mathbf{q}$. При малых $\mathbf{q}$ доминирует упругое рассеяние, с увеличением $\mathbf{q}$ возрастает доля неупругого рассеяния, которое, в свою очередь, доминирует при достаточно больших значениях $\mathbf{q}$. Такое *автоматическое поведение* кардинальным образом отличает данный подход от концепции когерентности Фридмана [6, 7], в рамках которой, прежде чем использовать формулу для когерентного рассеяния (анти)нейтрино на ядре, необходимо заранее убедиться, что это можно делать, т. е. что произведение характерного радиуса ядра-мишени и некоторого характерного переданного ядру импульса заметно меньше единицы ($|\mathbf{q}|R \ll 1$). В данном подходе такой вопрос вообще не возникает.

В качестве важного приложения общих формул подробно рассмотрено рассеяние *массивных* (анти)нейтрино, взаимодействующих с нуклонами по каналу $V \mp A$-токов Стандартной модели. Слабому $V-A$-взаимодействию с ядром отвечает массивный аналог нейтрино (спиральность отрицательная), а слабому $V+A$-взаимодействию — массивный аналог антинейтрино (спиральность положительная). Получен полный набор выражений для соответствующих сечений (например, формулы (103) и (111)). Прослежен переход этих формул в формулы из работы [3], отвечающие рассеянию *безмассового* (анти)нейтрино Стандартной модели на ядре.

Благодаря ненулевой массе (анти)нейтрино возникает дополнительный канал для упругого (когерентного) и неупругого (некогерентного) рассеяния (анти)нейтрино на ядрах, обусловленный возможностью изменения спиральности у массивных (анти)нейтрино. Например, несмотря на малость массы нейтрино при кинетических энергиях (анти)нейтрино, значительно меньших массы нейтрино (например, реликтовых), сечение их взаимодействия с ядром оказывается многократно усиленным «эффектом когерентности ядра».

В практическом плане полученные выражения могут быть использованы, например, при анализе результатов экспериментов по прямому детектированию нейтральных массивных слабовзаимодействующих релятивистских и нерелятивистских частиц темной материи, поскольку в отличие от общепринятого случая одновременно принимается во внимание как упругое, так и неупругое взаимодействие таких частиц с ядром-мишенью. При этом наличие «неупругого сигнала» с его характерной сигнатурой в виде γ-квантов от снятия возбуждения ядра может оказаться единственным регистрируемым свидетельством акта взаимодействия частицы темной материи.

Автор выражает глубокую благодарность В. А. Кузьмину, Д. В. Наумову, Е. А. Якушеву и другим коллегам за важные замечания и обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Волновые функции. Напомним [1–3], что состояние ядра обозначено символом $|P_l\rangle$, который означает, что ядро имеет 4-импульс P_l, находится в некотором l-м внутреннем квантовом состоянии ($l = n, m$) и представляет собой суперпозицию свободных нуклонов $|\{p\}\rangle$, умноженную на волновую функцию связанного состояния $\widetilde{\psi}'_n(\{p\})$. Последняя — произведение волновой функции $\widetilde{\psi}_n(\{p^\star\})$, описывающей внутреннюю структуру ядра в его системе покоя (соответствующие импульсы отмечены индексом $\star$), и волновой функции $\Phi_n(p)$, отвечающей за движение ядра как целого с импульсом $\mathbf{p} = \sum\limits_{i=1}^{A} \mathbf{p}_i$ и проекцией спина ядра s:

$$\widetilde{\psi}'_n(\{p\}) = \widetilde{\psi}_n(\{p^\star\})\Phi_n(p), \quad \text{где} \quad p = (\mathbf{p}, s). \tag{П.1}$$

Функция $\Phi_n(p)$ завит от $(A-1)$ штук 3-импульсов, поскольку одна комбинация из A штук 3-импульсов используется для описания движения ядра в целом. С учетом (П.1) для состояния $|P_n\rangle$, полностью характеризующего ядро A, будем использовать (антисимметризованное) выражение (13) из основного текста.

Для ядерных состояний $|n\rangle$, описывающих покоящееся ядро, которое находится в n-м внутреннем квантовом состоянии (n-м уровне), принято условие нормировки

$$\langle m|n\rangle \equiv \int \left(\prod_i^A \frac{d\mathbf{p}_i^\star}{(2\pi)^3}\right) \widetilde{\psi}_n(\{p^\star\})\widetilde{\psi}^*_m(\{p^\star\})(2\pi)^3\delta^3\left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^\star\right) = \delta_{mn}. \tag{П.2}$$

Для ядерных состояний $|P_n\rangle$ из (13) оно дает нормировочное условие

$$\langle P'_m|P_n\rangle = (2\pi)^3 2P_n^0\delta^3(\mathbf{P} - \mathbf{P}')\delta_{mn}. \tag{П.3}$$

Формальное определение $|n\rangle$-состояния, удовлетворяющего (П.2), можно дать в виде

$$|n\rangle = \int \left(\prod_{i=1}^A d\widetilde{\mathbf{p}}_i^\star\right) \frac{\widetilde{\psi}_n(\{p^\star\})}{\sqrt{A!}} \left[(2\pi)^3\delta^3\left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^\star\right)\right]^{1/2} |\{p^\star\}\rangle. \tag{П.4}$$

Формула для адронного тока $h^\mu_{mn}(q)$. В низшем порядке по константе взаимодействия определение матричного элемента через лагранжиан $\mathcal{L}_{\rm int}(x) = (G_F/\sqrt{2}\,)H^\mu(x)\,L_\mu(x)$ имеет вид

$$i(2\pi)^4\delta^4\left(\sum p_i - \sum p_f\right)\mathcal{M} \equiv \langle \mathrm{f}|i\int d^4x\mathcal{L}_{\rm int}(x)|\mathrm{i}\rangle =$$
$$= \langle \mathrm{f}|\frac{iG_F}{\sqrt{2}}\int d^4x \,{:}H^\mu(x)L_\mu(x){:}\,|\mathrm{i}\rangle. \tag{П.5}$$

В случае $\chi A \to \chi A^{(*)}$-рассеяния начальное и конечное состояния таковы:

$$|\mathrm{i}\rangle = |\chi(k,s), A(P_n)\rangle = (2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_\chi}\; a^+_\chi(\mathbf{k},s)|0\rangle|P_n\rangle,$$
$$\langle \mathrm{f}| = \langle \chi(k',s'), A^{(*)}(P'_m)| = (2\pi)^{3/2}\sqrt{2E_{\chi'}}\; \langle 0|a_\chi(\mathbf{k}',s')\langle P'_m|. \quad (\Pi.6)$$

Поэтому выражение (П.5) для процесса $\chi A \to \chi A^{(*)}$ принимает вид

$$(2\pi)^4\delta^4(k + P_n - k' - P'_m)i\mathcal{M}_{mn} = \frac{iG_F}{\sqrt{2}}\int d^4x H^\mu_{mn}(x) L^\chi_\mu(x),$$

где

$$H^\mu_{mn}(x) \equiv \langle P'_m| : \widehat{H}^\mu(x) : |P_n\rangle, \quad (\Pi.7)$$
$$L^\chi_\mu(x) \equiv (2\pi)^3\sqrt{2E_{\chi'}2E_\chi}\; \langle 0|a_\chi(\mathbf{k}',s') : \widehat{L}_\mu(x) : a^+_\chi(\mathbf{k},s)|0\rangle.$$

Используя *фермионные* квантово-полевые операторы χ-частицы и нуклона

$$\overline{\widehat{\psi}}(x) = \int \frac{d\mathbf{y}'\,\mathrm{e}^{iy'x}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{y}'}}}\sum_{s=1,2} a^+_s(\mathbf{y}')\,\overline{u}(\mathbf{y}',s),$$
$$\widehat{\psi}(x) = \int \frac{d\mathbf{y}\,\mathrm{e}^{-iyx}}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{y}}}}\sum_{r=1,2} a_r(\mathbf{y})\,u(\mathbf{y},r), \quad (\Pi.8)$$

нуклонный $\widehat{H}^\mu(x)$ и лептонный $\widehat{L}_\mu(x)$ операторы можно записать следующим образом:

$$\widehat{H}^\mu(x) \equiv \sum_k^A \overline{\widehat{\psi}}_k(x)\,O^\mu_k\,\widehat{\psi}_k(x) \quad \text{и} \quad \widehat{L}_\mu(x) \equiv \overline{\widehat{\psi}}_\chi(x)\,O_\mu\,\widehat{\psi}_\chi(x),$$

где O^μ — комбинация γ-матриц, отвечающая конкретной лоренц-структуре взаимодействия. Тогда лептонный элемент из формулы (П.7) преобразуется следующим образом:

$$L^\chi_\mu(x) = \sqrt{E_{k'}E_k}\int \frac{d\mathbf{y}'\,d\mathbf{y}\,\mathrm{e}^{ix(y'-y)}}{\sqrt{E_{\mathbf{y}'}E_{\mathbf{y}}}}\times$$
$$\times \sum_{r,r'=1,2}\langle 0|a_{s'}(\mathbf{k}') : a^+_{r'}(\mathbf{y}')\overline{u}(\mathbf{y}',r')O_\mu a_r(\mathbf{y})u(\mathbf{y},r) : a^+_s(\mathbf{k})|0\rangle.$$

Далее, поскольку $a_{s'}(\mathbf{k}')a^+_{r'}(\mathbf{y}') = \delta_{s',r'}\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{y}')$ и $a_r(\mathbf{y})a^+_s(\mathbf{k}) = \delta_{s,r}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{y})$, получаем

$$L^\chi_\mu(x) = \mathrm{e}^{ix(k'-k)}\overline{u}_\chi(\mathbf{k}',s')O_\mu u_\chi(\mathbf{k},s) \equiv \mathrm{e}^{-ixq}\overline{u}_\chi(\mathbf{k}',s')O_\mu u_\chi(\mathbf{k},s). \quad (\Pi.9)$$

Согласно (13) начальная и конечная волновые функции ядра задаются формулами

$$\begin{aligned}\langle P'_m| &= \int\Bigl(\prod_j^A d\widetilde{\mathbf{p}'}^{\star}_j\Bigr)\frac{\widetilde{\psi}^*_m(\{p'^{\star}\})}{\sqrt{A!}}\Phi^*_m(p')\langle\{p'^{\star}\}|,\\ |P_n\rangle &= \int\Bigl(\prod_i^A d\widetilde{\mathbf{p}}^{\star}_i\Bigr)\frac{\widetilde{\psi}_n(\{p^{\star}\})}{\sqrt{A!}}\Phi_n(p)|\{p^{\star}\}\rangle.\end{aligned} \tag{П.10}$$

При этом произведение «внешних» волновых функций таково:

$$\Phi^*_m(p')\Phi_n(p) = (2\pi)^3\sqrt{2P^{0\prime}_m}\,\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{P}'_m)(2\pi)^3\sqrt{2P^0_n}\,\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{P}_n), \tag{П.11}$$

где $\mathbf{P}_n$ и $\mathbf{P}'_m$ — 3-импульсы движения всего ядра как целого, а $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ — переменные аргументы волновых функций, имеющие смысл $\sum\limits_i^A \mathbf{p}_i$ и $\sum\limits_i^A \mathbf{p}'_i$ соответственно. В силу (П.10) нуклонный элемент из формулы (П.7) с учетом суммирования по всем A нуклонам приобретает вид

$$\begin{aligned}H^{\mu}_{mn}(x) = \sum_k^A\sum_{s_k,r_k}^{1,2}\int\frac{d\mathbf{y}'_k\,d\mathbf{y}_k\,\mathrm{e}^{ix(y'_k-y_k)}}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\mathbf{y}_k}2E_{\mathbf{y}'_k}}}\int\Bigl(\prod_j^A d\widetilde{\mathbf{p}'}^{\star}_j\Bigr)\frac{\widetilde{\psi}^*_m(\{p'^{\star}\})}{\sqrt{A!}}\Phi^*_m(p')\times\\ \times\int\Bigl(\prod_i^A d\widetilde{\mathbf{p}}^{\star}_i\Bigr)\frac{\widetilde{\psi}_n(\{p^{\star}\})}{\sqrt{A!}}\Phi_n(p)\langle\{p'^{\star}\}|a^+_{s_k}(\mathbf{y}'_k)\times\\ \times\bigl\{\overline{u}(\mathbf{y}'_k,s_k)O^{\mu}_k u(\mathbf{y}_k,r_k)\bigr\}a_{r_k}(\mathbf{y}_k)|\{p^{\star}\}\rangle.\end{aligned} \tag{П.12}$$

Для дальнейшего преобразования выражения (П.12) необходимо вычислить матричный элемент одночастичного (k-го) нуклонного тока

$$h^{\mu}_k(\mathbf{y}'_k,r'_k,\mathbf{y}_k,r_k) \equiv \overline{u}(\mathbf{y}'_k,r'_k)O^{\mu}_k u(\mathbf{y}_k,r_k) \tag{П.13}$$

по многочастичному состоянию из A свободных нуклонов:

$$w^k_A \equiv \langle\{p'^{\star}\}|a^+_{r'_k}(\mathbf{y}'_k)\bigl\{h^{\mu}_k(\mathbf{y}'_k,r'_k,\mathbf{y}_k,r_k)\bigr\}a_{r_k}(\mathbf{y}_k)|\{p^{\star}\}\rangle. \tag{П.14}$$

Здесь и далее сделано переобозначение: $r'_k \equiv s_k$. Состояния $\langle\{p'^{\star}\}|$ и $|\{p^{\star}\}\rangle$ можно записать, выделив активный k-й нуклон, например, в виде

$$\begin{aligned}{}_A\langle\{p'^{\star}\}| &= \langle 0|(\ldots,p'^{\star}_k,\ldots);\ldots,a_{s_{p'}}(\mathbf{p}'^{\star}_k),\ldots|,\\ |\{p^{\star}\}\rangle_A &= |\ldots,a^+_{r_p}(\mathbf{p}^{\star}_k),\ldots;(\ldots,p^{\star}_k,\ldots)|0\rangle.\end{aligned}$$

Тогда выражение (П.14) может быть представлено следующим образом:

$$w^k_A = {}_{A-1}\langle\{p'^{\star}\}||\{p^{\star}\}\rangle_{A-1}\times w^k_1, \tag{П.15}$$

где

$$w^k_1 \equiv \langle\mathbf{p}'^{\star}_k,s_{p'}|a^+_{r'_k}(\mathbf{y}'_k)\bigl\{\overline{u}(\mathbf{y}'_k,r'_k)O^{\mu}_k u(\mathbf{y}_k,r_k)\bigr\}a_{r_k}(\mathbf{y}_k)|\mathbf{p}^{\star}_k,r_p\rangle \tag{П.16}$$

— матричный элемент одночастичного тока (П.13) по однонуклонному (k-му) состоянию, а

$$
{}_{A-1}\langle\{p'^{\star}\}||\{p^{\star}\}\rangle_{A-1} \equiv \langle 0|(\ldots,p'^{\star}_{k-1},p'^{\star}_{k+1},\ldots)|(\ldots,p^{\star}_{k-1},p^{\star}_{k+1},\ldots)|0\rangle = \\
= (A-1)!\left(\prod_{l\neq k}^{A-1}(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}^{\star}_l}\delta^3(\mathbf{p}^{\star}_l-\mathbf{p}'^{\star}_l)\delta_{r_l,r'_l}\right)
$$

представляет собой нормировочное условие для состояния из $(A-1)$ штук свободных нуклонов.

Одночастичный матричный элемент w_1^k (П.16) с учетом нормировочного множителя $(2\pi)^3\sqrt{2E_{p^{\star}_k}2E_{p'^{\star}_k}}$ для одночастичного начального и конечного k-го нуклонного состояния, коммутационных условий для операторов рождения и уничтожения

$$
a_{s_{p'}}(\mathbf{p}'^{\star}_k)a^{+}_{r'_k}(\mathbf{y}'_k) = \delta^3(\mathbf{p}'^{\star}_k-\mathbf{y}'_k)\delta_{r'_k,s_{p'}}, \quad a_{r_k}(\mathbf{y}_k)a^{+}_{r_p}(\mathbf{p}^{\star}_k) = \delta^3(\mathbf{p}^{\star}_k-\mathbf{y}_k)\delta_{r_k,r_p}
$$

и нормировки вакуума $\langle 0|0\rangle = 1$ преобразуется следующим образом:

$$
w_1^k = (2\pi)^3\sqrt{2E_{p^{\star}_k}2E_{p'^{\star}_k}}\,\delta^3(\mathbf{p}'^{\star}_k-\mathbf{y}'_k)\delta_{r'_k,s_{p'}}\delta^3(\mathbf{p}^{\star}_k-\mathbf{y}_k)\times \\
\times\delta_{r_k,r_p}\big\{\overline{u}(\mathbf{y}'_k,r'_k)\,O^{\mu}_k u(\mathbf{y}_k,r_k)\big\}.
$$

С учетом этого выражения для w_1^k матричный элемент (k-го) нуклонного тока по состоянию из A свободных нуклонов (П.15) принимает вид

$$
w_A^k = (A-1)!\left(\prod_{l\neq k}^{A-1}(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}^{\star}_l}\delta^3(\mathbf{p}^{\star}_l-\mathbf{p}'^{\star}_l)\delta_{r_l,r'_l}\right)\big\{\overline{u}(\mathbf{y}'_k,r'_k)\,O^{\mu}_k u(\mathbf{y}_k,r_k)\big\}\times \\
\times(2\pi)^3\sqrt{2E_{p^{\star}_k}2E_{p'^{\star}_k}}\,\delta^3(\mathbf{p}'^{\star}_k-\mathbf{y}'_k)\delta_{r'_k,s_{p'}}\delta^3(\mathbf{p}^{\star}_k-\mathbf{y}_k)\delta_{r_k,r_p}.
$$

Подставляя это выражение в формулу для адронного тока (П.12) и учитывая, что активный k-й нуклон может быть на любом из A мест в ядре, что дает множитель A, получаем

$$
H^{\mu}_{mn}(x) = \sum_k^A\int\left[\prod_{j,i}^A\frac{d\mathbf{p}'^{\star}_j\,d\mathbf{p}^{\star}_i}{(2\pi)^6\sqrt{4E_{\mathbf{p}'^{\star}_j}E_{\mathbf{p}^{\star}_i}}}\right]\left[\prod_{l\neq k}^{A-1}(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}^{\star}_l}\delta^3(\mathbf{p}^{\star}_l-\mathbf{p}'^{\star}_l)\delta_{r_l,r'_l}\right]\times \\
\times\widetilde{\psi}^*_m(\{p'^{\star}\})\widetilde{\psi}_n(\{p^{\star}\})\Phi^*_m(p')\Phi_n(p)\times \\
\times\int\frac{d\mathbf{y}'_k\,d\mathbf{y}_k\,\mathrm{e}^{ix(y'_k-y_k)}\delta^3(\mathbf{p}'^{\star}_k-\mathbf{y}'_k)\delta^3(\mathbf{p}^{\star}_k-\mathbf{y}_k)}{\sqrt{4E_{\mathbf{y}_k}E_{\mathbf{y}'_k}}}\times \\
\times\sqrt{4E_{p^{\star}_k}E_{p'^{\star}_k}}\,[\overline{u}(\mathbf{y}'_k,k'_k)O^{\mu}_k u(\mathbf{y}_k,r_k)].
$$

Интегрирование в этом выражении по $d\mathbf{y}'_k\, d\mathbf{y}_k$, суммирование по совпадающим спиновым индексам нуклонов-спектаторов и выделение отдельным множителем интегрирование по $\mathbf{p}^\star_k$ и $\mathbf{p}'^\star_k$ дает выражение

$$H^\mu_{mn}(x) = \sum_k^A \int \left[\prod_{j,i\neq k}^A \frac{d\mathbf{p}'^\star_j\, d\mathbf{p}^\star_i\, \mathrm{e}^{ix(p'^\star_j - p^\star_i)} \delta^3(\mathbf{p}^\star_i - \mathbf{p}'^\star_j)}{(2\pi)^3 \sqrt{E_{\mathbf{p}'^\star_j} E_{\mathbf{p}^\star_i}}} E_{\mathbf{p}^\star_i} \right] \times$$
$$\times \left\{ \overline{u}(\mathbf{p}'^\star_k, r_{p'_k})\, O^\mu_k u(\mathbf{p}^\star_k, r_{p_k}) \right\} \widetilde{\psi}^*_m(\{p'^\star\}) \widetilde{\psi}_n(\{p^\star\}) \times$$
$$\times \left[\Phi^*_m(p')\Phi_n(p)\right] \frac{d\mathbf{p}'^\star_k\, d\mathbf{p}^\star_k}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\mathbf{p}'^\star_k} E_{\mathbf{p}^\star_k}}},$$

в котором далее после интегрирования по $d\mathbf{p}'^\star_j$ (кроме $\mathbf{p}'^\star_k$) получается

$$H^\mu_{mn}(x) = \left[\sqrt{4P^{0\prime}_m P^0_n}\, \delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{P}_n - \mathbf{P}'_m) \delta^3\left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}^\star_i \right) \right] \times$$
$$\times \sum_k^A \int \left[\prod_{i\neq k}^A \frac{E_{\mathbf{p}^\star_i}\, d\mathbf{p}^\star_i}{(2\pi)^3 \sqrt{E_{\mathbf{p}^\star_i} E_{\mathbf{p}^\star_i}}} \right] \widetilde{\psi}^*_m(\{p^{(k)}_\star\}) \widetilde{\psi}_n(\{p^\star\}) \times$$
$$\times \left\{ \overline{u}(\mathbf{p}'^\star_k, r_{p'_k}) O^\mu_k u(\mathbf{p}^\star_k, r_{p_k}) \right\} \frac{d\mathbf{p}'^\star_k\, d\mathbf{p}^\star_k\, \mathrm{e}^{ix(p'^\star_k - p^\star_k)}}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}'^\star_k} E_{\mathbf{p}^\star_k}}}.$$

Здесь произведение «внешних» функций (П.11) записано как [1, 3]

$$\Phi^*_m(p')\Phi_n(p) = (2\pi)^6 \sqrt{4P^{0\prime}_m P^0_n}\, \delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{P}_n - \mathbf{P}'_m) \delta^3\left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}^\star_i \right), \qquad (\text{П.17})$$

а также введено обозначение $\widetilde{\psi}^*_m(\{p^{(k)}_\star\}) \equiv \widetilde{\psi}^*_m\ (\{p^\star\}, \mathbf{p}'^\star_k \neq \mathbf{p}^\star_k, r_{p'_k} \neq r_{p_k})$, где аргумент $\{p^{(k)}_\star\}$ совпадает с $\{p^\star\}$, за исключением того, что на k-м месте в $\{p^{(k)}_\star\}$ стоит не пара $(\mathbf{p}^\star_k, r_{p_k})$, а другая пара: $(\mathbf{p}'^\star_k, r_{p'_k}) \neq (\mathbf{p}^\star_k, r_{p_k})$.

Следующий этап — интегрирование по x выражения* (П.7), которое после еще одного интегрирования по $d\mathbf{p}'^\star_k$ за счет $\delta^3(\mathbf{p}^\star_k + \mathbf{q} - \mathbf{p}'^\star_k)$ приводит интеграл $\int d^4x\, H^\mu_{mn}(x)\, L^\chi_\mu(x)$ к виду

$$(2\pi)^4 \left[\sqrt{4P^{0\prime}_m P^0_n}\, \delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{P}_n - \mathbf{P}'_m) \delta^3\left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}^\star_i \right) \right] \overline{u}_\chi(\mathbf{k}', s')\, O_\mu u_\chi(\mathbf{k}, s) (2\pi)^3 \times$$
$$\times \sum_k^A \int \left(\prod_i^A \frac{d\mathbf{p}^\star_i}{(2\pi)^3} \right) \delta(p^\star_{0,k} + q_0 - p'^\star_{0,k}) \times$$

* Поскольку $\displaystyle\int d^4x\, \mathrm{e}^{ix(p'^\star_k - p^\star_k - q)} = (2\pi)^4 \delta^4(p^\star_k + q - p'^\star_k)$.

$$\times \frac{\overline{u}(\mathbf{p}'^{\star}_k = \mathbf{p}^{\star}_k + \mathbf{q}, r_{p'_k})\, O^{\mu}_k u(\mathbf{p}^{\star}_k, r_{p_k})}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}'^{\star}_k = \mathbf{p}^{\star}_k + \mathbf{q}} E_{\mathbf{p}^{\star}_k}}} \widetilde{\psi}^{*}_m \left(\{p^{(k)}_{\star}\},\ \mathbf{p}'^{\star}_k = \mathbf{p}^{\star}_k + \mathbf{q}\right) \widetilde{\psi}_n(\{p^{\star}\}).$$

Приравнивая этот интеграл определению матричного элемента (П.7) с учетом $\delta^4(k + P_n - k' - P'_m) = \delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{P}_n - \mathbf{P}'_m)\delta(q_0 + P_{0,n} - P'_{0,m})$ и $q = k - k'$, а также обозначения для лептонного тока $l_{\mu}(k', k, s', s) \equiv \equiv \overline{u}_{\chi}(\mathbf{k}', s')\, O_{\mu} u_{\chi}(\mathbf{k}, s)$, получаем матричный элемент в виде

$$i\mathcal{M}_{mn}\delta(q_0 + P_{0,n} - P'_{0,m}) = \frac{iG_F}{\sqrt{2}} l_{\mu}(k', k, s', s)\sqrt{4P^{0\prime}_m P^0_n} \times \\ \times \sum_k^A \int \left[\prod_i^A \frac{d\mathbf{p}^{\star}_i}{(2\pi)^3}\right] (2\pi)^3 \delta^3\left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}^{\star}_i\right) \delta(q_0 + p^{\star}_{0,k} - p'^{\star}_{0,k}) \times \\ \times \frac{\overline{u}(\mathbf{p}^{\star}_k + \mathbf{q}, r_{p'_k})\, O^{\mu}_k u(\mathbf{p}^{\star}_k, r_{p_k})}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}^{\star}_k + \mathbf{q}} E_{\mathbf{p}^{\star}_k}}} \widetilde{\psi}^{*}_m(\{p^{(k)}_{\star}\}, \mathbf{p}^{\star}_k + \mathbf{q}) \widetilde{\psi}_n(\{p^{\star}\}).$$

В этом соотношении дельта-функции (от общего аргумента q_0), стоящие справа и слева, сокращаются только в том случае, когда выполняется условие целостности ядра (17):

$$P_{0,n} - P'_{0,m} \equiv -T_A - \Delta\varepsilon_{mn} = p^{\star}_{0,k} - p'^{\star}_{0,k} \equiv \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^{\star 2}_k} - \sqrt{m^2 + (\mathbf{p}^{\star}_k + \mathbf{q})^2}.$$

Тогда интегрирование по $\mathbf{p}^{\star}_k$ в h^{μ}_{mn} может быть снято за счет дельта-функции вида

$$\delta\left(-T_A - \Delta\varepsilon_{mn} + \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^{\star 2}_k} - \sqrt{m^2 + (\mathbf{p}^{\star}_k + \mathbf{q})^2}\right) \equiv \delta\big(f(\mathbf{p}^{\star}_k)\big) = 1. \tag{П.18}$$

Это позволяет вынести за знак интегрирования одночастичный адронный ток при $\overline{\mathbf{p}}^{\star}_k$, где $\overline{\mathbf{p}}^{\star}_k(\mathbf{q})$ — *зависящее от* $\mathbf{q}$ решение уравнения $f(\overline{\mathbf{p}}^{\star}_k) = 0$, и получить окончательно

$$h^{\mu}_{mn} = \sum_k^A \frac{\overline{u}(\overline{\mathbf{p}}^{\star}_k + \mathbf{q}, s_{p_k})\, O^{\mu}_k u(\overline{\mathbf{p}}^{\star}_k, r_{p_k})}{\sqrt{4E_{\overline{\mathbf{p}}^{\star}_k} E_{\overline{\mathbf{p}}^{\star}_k + \mathbf{q}}}} \times \\ \times \int \prod_{i \neq k}^A \frac{d\mathbf{p}^{\star}_i}{(2\pi)^3} \widetilde{\psi}^{*}_m(\{p^{(k)}_{\star}\}, \overline{\mathbf{p}}^{\star}_k + \mathbf{q}) \widetilde{\psi}_n(\{p^{(k)}_{\star}\}, \overline{\mathbf{p}}^{\star}_k)(2\pi)^3 \delta^3\left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}^{\star}_i\right).$$

Формально можно восстановить интегрирование по A импульсам в виде

$$h^{\mu}_{mn} = \sum_k^A \frac{\overline{u}(\overline{\mathbf{p}}^{\star}_k + \mathbf{q}, s_{p_k})\, O^{\mu}_k u(\overline{\mathbf{p}}^{\star}_k, r_{p_k})}{\sqrt{4E_{\overline{\mathbf{p}}^{\star}_k} E_{\overline{\mathbf{p}}^{\star}_k + \mathbf{q}}}} \times \\ \times \int \prod_{i=1}^A \frac{d\mathbf{p}^{\star}_i \delta\big(f(\mathbf{p}^{\star}_k)\big)}{(2\pi)^3} \widetilde{\psi}^{*}_m(\{p^{(k)}_{\star}\}, \mathbf{p}^{\star}_k + \mathbf{q}) \widetilde{\psi}_n(\{p^{\star}\})(2\pi)^3 \delta^3\left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}^{\star}_i\right). \tag{П.19}$$

Формула для адронной структуры $f^k_{mn}(\mathbf{q})$. Покажем, что многомерный интеграл в формуле (П.19) представляет собой матричный элемент $\langle m|\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k}|n\rangle$. Отметим, что оператор $\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}}$ увеличивает 3-импульс $\mathbf{p}$ состояния $|\mathbf{p}\rangle$ на величину $\mathbf{q}$, переводя состояние $|\mathbf{p}\rangle$ в состояние $|\mathbf{p}+\mathbf{q}\rangle$ путем операции*

$$\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}}|\mathbf{p}\rangle = \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}}|\mathbf{p}+\mathbf{q}\rangle. \qquad \text{(П.20)}$$

Из (П.20) и нормировки одночастичных состояний $\langle\mathbf{k}|\mathbf{p}\rangle = (2\pi)^3 \times \times\, 2E_{\mathbf{p}}\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{k})$ имеем

$$\langle\mathbf{k}|\,\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}}|\mathbf{p}\rangle = \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}}\langle\mathbf{k}|\mathbf{p}+\mathbf{q}\rangle = (2\pi)^3\sqrt{2E_{\mathbf{p}}2E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}\,\delta^3(\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{k}). \qquad \text{(П.21)}$$

По определению $\langle m|\,\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k}|n\rangle$ следует вычислять в системе покоя ядра, где волновые функции ядерных состояний $|n\rangle$ заданы формулой (П.4). Запишем их в виде

$$\begin{aligned}\langle m| &= \int \varphi^*_m(0)\left(\prod_j^A d\widetilde{\mathbf{p}}'^{\star}_j\right)\frac{\widetilde{\psi}^*_m(\{p'_\star\})}{\sqrt{A!}}\langle\{p'_\star\}| \\ \text{и}\quad |n\rangle &= \int\varphi_n(0)\left(\prod_i^A d\widetilde{\mathbf{p}}^{\star}_i\right)\frac{\widetilde{\psi}_n(\{p_\star\})}{\sqrt{A!}}|\{p_\star\}\rangle.\end{aligned} \qquad \text{(П.22)}$$

Тогда матричный элемент $f^k_{mn} \equiv \langle m|\,\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k}|n\rangle$ принимает вид

$$f^k_{mn}(\mathbf{q}) = \int C\left(\prod_{j,i}^A \frac{d\mathbf{p}'^{\star}_j d\mathbf{p}^{\star}_i}{(2\pi)^6\sqrt{2E_{\mathbf{p}'^{\star}_j}2E_{\mathbf{p}^{\star}_i}}}\right)\frac{\widetilde{\psi}^*_m(\{p'_\star\})\widetilde{\psi}_n(\{p^\star\})}{A!}\,Q_k(\mathbf{q}), \qquad \text{(П.23)}$$

где $C \equiv \varphi^*_m(0)\varphi_n(0) \equiv (2\pi)^3\delta^3\Big(\sum\limits_j^A \mathbf{p}^{\star}_j\Big)$, и введен матричный элемент оператора сдвига k-го нуклона $\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k}$ по многочастичному состоянию свободных нуклонов:

$$Q_k(\mathbf{q}) \equiv \langle\{p'_\star\}|\,\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k}|\{p_\star\}\rangle = \langle\ldots,p'^{\star}_k,\ldots|\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k}|\ldots,p^{\star}_k,\ldots\rangle. \qquad \text{(П.24)}$$

Его можно представить в виде произведения $(A-1)$ невзаимодействующих нуклонов

$$\langle\ldots,p'^{\star}_{k-1},p'^{\star}_{k+1},\ldots|\ldots,p^{\star}_{k-1},p^{\star}_{k+1},\ldots\rangle = \\ = (A-1)!\left[\prod_{l\neq k}^{A-1}(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}^{\star}_l}\delta^3(\mathbf{p}^{\star}_l-\mathbf{p}'^{\star}_l)\delta_{r_l,r'_l}\right]$$

* Обоснование формулы (П.20) можно найти в работе [3].

и матричного элемента действия оператора $e^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k}$ на k-й нуклон

$$Q_k(\mathbf{q}) = \\ = \langle \ldots, p'^{\star}_{k-1}, p'^{\star}_{k+1}, \ldots | \ldots, p^{\star}_{k-1}, p^{\star}_{k+1}, \ldots \rangle \langle \mathbf{p}'^{\star}_k | \, e^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k} |\mathbf{p}^{\star}_k \rangle \delta_{r_k, r'_k}. \quad (\text{П.25})$$

Из формулы (П.21) для оператора сдвига одночастичного нуклонного состояния получается

$$\langle \mathbf{p}'^{\star}_k | e^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k} |\mathbf{p}^{\star}_k \rangle = (2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}^{\star}_k} 2E_{\mathbf{p}^{\star}_k + \mathbf{q}}}\, \delta^3(\mathbf{p}^{\star}_k + \mathbf{q} - \mathbf{p}'^{\star}_k). \quad (\text{П.26})$$

Тогда формула (П.25) приобретает вид

$$Q_k(\mathbf{q}) = A! \left[\prod_{l \neq k}^{A-1} (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}^{\star}_l} \delta^3(\mathbf{p}^{\star}_l - \mathbf{p}'^{\star}_l) \delta_{r_l, r'_l} \right] \times \\ \times \delta_{r_k, r'_k} \sqrt{2E_{\mathbf{p}^{\star}_k} 2E_{\mathbf{p}^{\star}_k + \mathbf{q}}}\, (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}^{\star}_k + \mathbf{q} - \mathbf{p}'^{\star}_k), \quad (\text{П.27})$$

где принято во внимание, что k-й нуклон может располагаться на любой из A возможных положений в A-ядре, что дает дополнительный перестановочный множитель A. Из формулы (П.27) следует, что матричный элемент $Q_k(\mathbf{q})$ не зависит от спиновых индексов.

Далее, из факторизации спиновой и импульсной зависимостей (19) и условия нормировки (20) следует, что величина (П.23) отлична от нуля только тогда, когда спиновые волновые функции начального и конечного состояний совпадают, т. е. спиновая структура ядра не меняется под действием оператора сдвига. В результате произведение ядерных волновых функций входит в формулу (П.23) только своей «импульсной составляющей»:

$$\widetilde{\psi}^*_m(\{\mathbf{p}'_\star\}) \chi^*_m(\{r'\})\, \widetilde{\psi}_n(\{\mathbf{p}_\star\}) \chi_n(\{r\}) \prod_l^A \delta_{r_l, r'_l} = \widetilde{\psi}^*_m(\{\mathbf{p}'_\star\}) \widetilde{\psi}_n(\{\mathbf{p}_\star\}). \quad (\text{П.28})$$

Подставляя с учетом (П.28) выражение (П.25) в (П.23), после интегрирования по $d\mathbf{p}'^{\star}_j$ (без $d\mathbf{p}'^{\star}_k$) за счет $\delta^3(\mathbf{p}^{\star}_l - \mathbf{p}'^{\star}_l)$ можно получить

$$f^k_{mn}(\mathbf{q}) = \int \left[\frac{d\mathbf{p}^{\star}_k}{(2\pi)^3} \prod_{i \neq k}^A \frac{C\, d\mathbf{p}^{\star}_i}{(2\pi)^3} \right] \frac{\langle \mathbf{p}'^{\star}_k | \, e^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k} |\mathbf{p}^{\star}_k \rangle}{(2\pi)^3 \sqrt{4E_{\mathbf{p}'^{\star}_k} E_{\mathbf{p}^{\star}_k}}} \widetilde{\psi}^*_m \times \\ \times \, (\{\mathbf{p}_\star\}, \mathbf{p}'^{\star}_k \neq \mathbf{p}^{\star}_k) \widetilde{\psi}_n(\{\mathbf{p}_\star\}) d\mathbf{p}'^{\star}_k. \quad (\text{П.29})$$

Учет явного выражения для одночастичного матричного элемента (П.26), пропорционального $\delta(\mathbf{p}^{\star}_k - \mathbf{p}'^{\star}_k + \mathbf{q})$, и последующее интегрирование по $d\mathbf{p}'^{\star}_k$ приводит к сокращению нормировочных множителей

$(2\pi)^3\sqrt{4E_{\mathbf{p}'^{\star}_k}E_{\mathbf{p}^{\star}_k}}$ и к «сдвигу» аргумента волновой функции конечного состояния ядра $\mathbf{p}^{\star}_k \to \mathbf{p}^{\star}_k + \mathbf{q}$. В результате получается, что

$$f^k_{mn}(\mathbf{q}) = \int \left[\prod_i^A \frac{d\mathbf{p}^{\star}_i}{(2\pi)^3}\right] \widetilde{\psi}^*_m(\{\mathbf{p}^{(k)}_{\star}\}, \mathbf{p}^{\star}_k + \mathbf{q})\widetilde{\psi}_n(\{\mathbf{p}_{\star}\})(2\pi)^3\delta^3\left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}^{\star}_i\right). \tag{П.30}$$

Вернемся к *условию одновременного сохранения энергии и целостности ядра*. Необходимость применения этого условия к выражению $\langle m|\,\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k}|n\rangle$ следует из неявного предположения о том, что действие оператора $\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k}$, осуществляемое как сдвиг импульса k-го нуклона в начальном $|n\rangle$-состоянии ядра на величину $\mathbf{q}$, не приводит к разрушению ядра (ядро сохраняет свою целостность). В противном случае использование конечного состояния ядра в виде волновой функции $\langle m|$ становится бессмысленным. Грубо говоря, нечто извне наносит удар по k-му нуклону ядра в $|n\rangle$-состоянии, увеличивая импульсы как этого нуклона, так и всего ядра на величину $\mathbf{q}$, в результате ядро, сохраняя свою целостность, переходит в $\langle m|$-состояние. Условием именно такого «хода вещей» и является соотношение (П.18). Тогда интегрирование по $\mathbf{p}^{\star}_k$ в выражении (П.30) должно быть снято дельта-функцией $\delta(f(\mathbf{p}^{\star}_k))$, его можно переписать в виде

$$\overline{f}^k_{mn}(\mathbf{q}) = \int \left[\prod_i^A \frac{d\mathbf{p}^{\star}_i}{(2\pi)^3}\delta\big(f(\mathbf{p}^{\star}_k)\big)\right] \widetilde{\psi}^*_m(\{\mathbf{p}^{(k)}_{\star}\}, \mathbf{p}^{\star}_k + \mathbf{q}) \times \\ \times\ \widetilde{\psi}_n(\{\mathbf{p}^{\star}\})(2\pi)^3\delta^3\left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}^{\star}_i\right). \tag{П.31}$$

Отметим, что выражение (П.31) при $\mathbf{q} = 0$ превращается в условие нормировки ядерных состояний в системе покоя ядра (П.2). Действительно, при $\mathbf{q} = 0$ имеет $q_0 = 0$ и из условия $\delta(q_0 + P_{0,n} - P'_{0,m}) = 1$ следует $P_{0,n} - P'_{0,m} = -T_A - \Delta\varepsilon_{mn} = 0$, т. е.

$$f(\mathbf{p}^{\star}_k) = -T_A - \Delta\varepsilon_{mn} + \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^{\star 2}_k} - \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^{\star 2}_k} \equiv \\ \equiv -T_A - \Delta\varepsilon_{mn} = 0 \ \text{ при любых } \ \mathbf{p}^{\star}_k,$$

по этой причине $\delta(f(\mathbf{p}^{\star}_k)) \equiv 1$ выносится из-под знака интеграла по переменной $\mathbf{p}^{\star}_k$ и формула (П.31) принимает вид

$$\overline{f}^k_{mn}(\mathbf{0}) = \langle m|\,\mathrm{e}^{i\mathbf{0}\widehat{\mathbf{X}}_k}|n\rangle = \int \left[\prod_i^A \frac{d\mathbf{p}^{\star}_i}{(2\pi)^3}\right] \widetilde{\psi}^*_m(\{\mathbf{p}^{(k)}_{\star}\}, \mathbf{p}^{\star}_k)\widetilde{\psi}_n(\{\mathbf{p}^{\star}\}) \times \\ \times\ (2\pi)^3\delta^3\left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}^{\star}_i\right) \equiv \langle m|n\rangle = \delta_{mn}.$$

Последнее означает, что формула (П.31) имеет такой же смысл, как и выражение (без дельта-функции), т. е. формула (П.30).

С помощью формулы (П.31) для $\overline{f}^k_{mn}(\mathbf{q})$ адронный ток (П.19) можно записать в виде

$$\overline{h}^\mu_{mn}(\mathbf{q}) = \sum_k^A \frac{\overline{u}(\overline{\mathbf{p}}^\star_k + \mathbf{q}, r'_k)\, O^\mu_k\, u(\overline{\mathbf{p}}^\star_k, r_k)}{\sqrt{4E_{\overline{\mathbf{p}}^\star_k} E_{\overline{\mathbf{p}}^\star_k+\mathbf{q}}}} \overline{f}^k_{mn}(\mathbf{q})\, \lambda^{mn}(r', r), \qquad (\text{П.32})$$

где $\overline{\mathbf{p}}^\star_k$ есть решение уравнения (П.18). Выражение (П.32) имеет смысл сравнить с аналогичной формулой из работ [1, 3], имеющей вид

$$h^\mu_{mn}(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^A \frac{\overline{u}(\overline{\mathbf{p}} + \mathbf{q}, r'_k)\, O^\mu_k u(\overline{\mathbf{p}}, r_k)}{\sqrt{4E_{\overline{\mathbf{p}}} E_{\overline{\mathbf{p}}+\mathbf{q}}}} f^k_{mn}(\mathbf{q}) \lambda^{mn}(r', r),$$

где

$$f^k_{mn}(\mathbf{q}) \equiv \int \left[\prod_{j=1}^A \frac{d\mathbf{p}^\star_j}{(2\pi)^3}\right] \widetilde{\psi}^*_m(\{\mathbf{p}^{(k)}_\star\}) \widetilde{\psi}_n(\{\mathbf{p}_\star\})(2\pi)^3 \delta^3\left(\sum_{l=1}^A \mathbf{p}^\star_l\right). \qquad (\text{П.33})$$

Для получения (П.33) было сделано *специальное* предположение о возможности вынесения за знак интегрирования одночастичного матричного элемента $\dfrac{\overline{u}(\overline{\mathbf{p}} + \mathbf{q}, r'_k) O^\mu_k u(\overline{\mathbf{p}}, r_k)}{\sqrt{4E_{\overline{\mathbf{p}}} E_{\overline{\mathbf{p}}+\mathbf{q}}}}$ как раз в точке решения уравнения (П.18). В формуле (П.32) такой фактор получается автоматически, однако приходится несколько переопределить формфакторную функцию, т. е. вместо $f^k_{mn}(\mathbf{q})$ из (П.29) взять $\overline{f}^k_{mn}(\mathbf{q})$ из (П.31). В контексте последующего обсуждения это «переопределение» не играет роли, поскольку «физические» ядерные формфакторы протонов и нейтронов $F_{p/n}(\mathbf{q})$ определяются через функции $f^k_{mn}(\mathbf{q})$ чисто формально (см., например, формулу (30)), т. е. *без явного вычисления приведенных выше многомерных интегралов*.

Исходя из определения $f^k_{mn}(\mathbf{q})$, например в виде (П.33), и свойств симметрии ядерной волновой функции, можно заключить [1, 3], что структурный фактор f^k_{mn} не зависит от значения числа k, а зависит только от того, протону или нейтрону соответствует это k. Это свойство используется ниже.

Разделение сечения $\chi A \to \chi A^{(*)}$ на когерентное и некогерентное слагаемые. Измеренное экспериментально дифференциальное сечение процесса $\chi A \to \chi A^{(*)}$ можно получить, усреднив по всем возможным начальным состояниям ядра-мишени $|n\rangle$ и просуммировав по всем допустимым конечным состояниям ядра отдачи $|m\rangle$ дифференциальное сечение перехода ядра из начального состояния $|n\rangle$ в конечное состояние $|m\rangle$ за счет взаимодействия с χ-частицей (11):

$$\frac{d\sigma}{dT_A}(\chi A \to \chi A^{(*)}) = \sum_{n,m} \omega_n \frac{|i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5 \pi |\mathbf{k}^l_\chi|^2 m_A} C_{mn}, \quad \text{где} \quad \sum_n \omega_n = 1. \quad (\text{П.34})$$

С учетом матричного элемента из формулы (11), просуммированного по спиновым индексам нуклонов [1–4]

$$i\mathcal{M}^{s's}_{mn} = i\frac{G_F}{\sqrt{2}}\frac{m_A}{m_n}C^{1/2}_{1,mn}\sum_{k=1}^{A}\sum_{r'r} f^k_{mn}\lambda^{mn}(r',r)(l_{s's}\, h^k_{r'r}), \tag{П.35}$$

дифференциальное сечение (П.34) можно записать в виде суммы двух слагаемых из (27):

$$T^{s's}_{m=n} \equiv g_c \sum_{k,j}^{A}\sum_{n}\omega_n\left[f^k_{nn}f^{j*}_{nn}\sum_{r}(l_{s's}\, h^k_{rr})\sum_{x}(l_{s's}\, h^j_{xx})^*\right] \tag{П.36}$$

и $$T^{s's}_{m\neq n} \equiv g_i \sum_{k,j}^{A}\sum_{n}\omega_n\left[\sum_{m\neq n} f^k_{mn}f^{j*}_{mn}\sum_{r'r}\lambda^{mn}_{r'r}(l_{s's}\, h^k_{r'r})\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{x'x}\lambda^{mn}_{x'x}(l_{s's}\, h^j_{x'x})\right)^{\dagger}\right]. \tag{П.37}$$

Здесь введены поправочные коэффициенты, определенные как

$$g_{i/c} \equiv C_{1,mn}C_{mn} \simeq \frac{\left(1+\dfrac{\varepsilon_n}{m_A}\right)\left(1+\dfrac{\varepsilon_m+T_A}{m_A}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{\overline{\mathbf{p}}^2}{m^2}}\left(\sqrt{1+\dfrac{\overline{\mathbf{p}}^2}{m^2}}+\dfrac{T_A+\Delta\varepsilon_{mn}}{m}\right)}\times$$

$$\times\frac{\left(1+\dfrac{T_A}{m_A}\right)\Big/\left(1+\dfrac{T_A+\varepsilon_m}{m_A}\right)}{1+\dfrac{\varepsilon_n}{m_A}\left(1+\dfrac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}^{\mathbf{l}}_\chi|^2}\right)}, \tag{П.38}$$

которые отличаются от 1 на уровне $O(10^{-3})$ и с этой же точностью не зависят от индексов ядра m, n и энергии отдачи ядра T_A*. По этой причине суммирование по индексу n в формуле (П.36) можно трактовать как возникновение формфакторов, усредненных по всем возможным начальным состояниям ядра, что представлено формулой (30) из основного текста. Это позволяет выражение (П.36) «расписать» по отдельным вкладам протонов и нейтронов как

$$\frac{T^{s's}_{m=n}}{g_c} = \sum_{k,j}^{Z} F_p\sum_{r=1}^{2}(l_{s's}\, h^p_{rr})F^*_p\sum_{x=1}^{2}(l_{s's}\, h^p_{xx})^* + \sum_{k,j}^{N} F_n\sum_{r=1}^{2}(l_{s's}\, h^n_{rr})F^*_n\times$$

* Поскольку в рассматриваемом приближении $(\varepsilon_m + T_A)/m_A \leqslant 10^{-3}$, $(\Delta\varepsilon_{mn} + T_A)/m \leqslant 10^{-3}$ и $|\overline{\mathbf{p}}|^2/m^2 \leqslant 0{,}01$.

$$\times \sum_{x=1}^{2}(l_{s's}\, h^n_{xx})^* + \sum_k^Z \sum_j^N F_p \sum_{r=1}^{2}(l_{s's}\, h^p_{rr}) F^*_n \sum_{x=1}^{2}(l_{s's}\, h^n_{xx})^* + \\ + \sum_k^N \sum_j^Z F_n \sum_{r=1}^{2}(l_{s's}\, h^n_{rr}) F^*_p \sum_{x=1}^{2}(l_{s's}\, h^p_{xx})^*,$$

что уже представимо в виде квадрата модуля суммы вкладов протонов и нейтронов:

$$T^{s's}_{m=n} = g_c \left| \sum_k^Z \sum_r (l_{s's}\, h^p_{rr}) F_p + \sum_j^N \sum_r (l_{s's}\, h^n_{rr}) F_n \right|^2 = \\ = g_c \left| \sum_{f=p,n} \sum_{k=1}^{A_f} \sum_r (l_{s's}\, h^f_{rr}) F_f \right|^2. \quad (\text{П.39})$$

Второе (некогерентное) слагаемое из (27), или (П.37), содержит суммирование по двум индексам: m и n. Чтобы провести это суммирование и продолжить преобразования слагаемого $T_{m\neq n}$, необходимо сделать определенные предположения по поводу неизвестного поведения множителей $\lambda^{mn}_{r'r}$. Напомним, что спиновые функции ядра нормированы условием (20):

$$\chi^*_m(\{r\})\chi_n(\{r\}) = \delta_{mn}, \quad \chi^*_n(\{r'\})\chi_n(\{r\}) = \delta_{\{r'\}\{r'\}}.$$

Для произведений этих спиновых волновых функций было принято определение (21). Поскольку формула (21) считается справедливой для любого возможного значения k, в ней индекс k у r'_k и r_k был опущен. Если удержать индекс k, то (21) примет вид

$$\chi^*_m(\{r^{(k)}\}, r'_k)\chi_n(\{r\}, r_k) \equiv \lambda^{mn}(r'_k, r_k) = \delta_{mn}\delta_{r'_k r_k} + (1-\delta_{mn})\lambda^{mn}_{r'_k r_k}.$$

Здесь $\{r\} \equiv \{r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots, r_A\}$ — набор всех значений проекций спинов нуклонов начального ядра A, а $\{r^{(k)}\} = \{r\}$ — аналогичный набор для конечного ядра, отличающийся только тем, что на k-м месте в наборе $\{r^{(k)}\}$ стоит другое число r'_k, не равное r_k из $\{r\}$, а все остальные значения проекций совпадают. Иными словами, $\{r^{(k)}\} \equiv \{r_1, r_2, \ldots, r'_k, \ldots, r_A\}$. Видно, что при $m = n$ имеем

$$\chi^*_n(\{r^{(k)}\}, r'_k)\chi_n(\{r\}, r_k) = \delta_{r'_k r_k}, \quad (\text{П.40})$$

т. е. все значения в двух наборах спиновых индексов-переменных $\{r^{(k)}\}$ и $\{r\}$ должны полностью совпадать, если спиновые амплитуды относятся к одному и тому же (n-му) внутреннему квантовому состоянию ядра. Другими словами, если ядро не изменилось, то все значения спиновых индексов ядра $\{r\}$ также должны остаться неизменными.

Далее, рассмотрим формально входящее в квадрат модуля матричного элемента (П.37) произведение спиновых функций для *одного и того же* активного k-го нуклона (при $m \neq n$)

$$\lambda^{mn}_{r'_k r_k}[\lambda^{mn}_{x'_k x_k}]^* = \chi^*_m(\{r^{(k)}\}, r'_k)\chi_n(\{r\}, r_k)[\chi^*_m(\{x^{(k)}\}, x'_k)\chi_n(\{x\}, x_k)]^*.$$

Выполняя комплексное сопряжение и переставляя функции, получаем

$$\lambda^{mn}_{r'_k,r_k}[\lambda^{mn}_{x'_k,x_k}]^* = \left[\chi^*_m(\{r^{(k)}\}, r'_k)\chi_m(\{x^{(k)}\}, x'_k)\right]\left[\chi_n(\{r\}, r_k)\chi^*_n(\{x\}, x_k)\right].$$

Тогда согласно (П.40) для отличия от нуля каждого из этих двух произведений, отвечающих одному и тому же состоянию ядра (m и n соответственно), наборы спиновых индексов в каждой паре произведений должны полностью совпадать, т. е. $\{r^{(k)}\} = \{x^{(k)}\}$ и $\{r\} = \{x\}$. Иными словами, *для любого* k должно быть

$$\chi^*_m(\{r^{(k)}\}, r'_k)\chi_m(\{x^{(k)}\}, x'_k) = \delta_{r'_k,x'_k} \quad \text{и} \quad \chi_n(\{r\}, r_k)\chi^*_n(\{x\}, x_k) = \delta_{r_k,x_k}.$$

В результате получается, что

$$[\lambda^{mn}_{r'_k r_k}][\lambda^{mn}_{x'_k x_k}]^* = \delta_{r'_k,x'_k}\delta_{r_k,x_k} \quad \text{и} \quad |\lambda^{mn}_{r'_k r_k}|^2 = 1. \qquad (\text{П}.41)$$

Здесь индекс k явным образом учитывает неизменность типа и номера этого активного нуклона. Последнее равенство в (П.41) означает, что в случае рассеяния на *одном и том же активном нуклоне* независимо от его номера k и независимо от изменения состояния ядра $|n\rangle \to |m\rangle$ для любой начальной ориентации спина активного нуклона (индекс r_k) с одинаковой вероятностью возможна любая конечная ориентация спина этого нуклона (индекс r'_k). С формальной точки зрения этот результат представляет собой следствие условия нормировки спиновых волновых функций (П.40). Отсутствует также какой-либо изменяющий спин нуклона оператор, который бы *остался стоять* между этими спиновыми функциями и препятствовал бы «работе» условия нормировки последних. Действительно, если *взаимодействие не произошло*, то начальное состояние $|n\rangle$ и конечное $|m\rangle$ совершенно независимы, поэтому в этих состояниях не должно быть никакой корреляции между направлениями спина «активного» нуклона (понятие которого не определено в такой ситуации). Когда *произошло взаимодействие*, переводящее ядро из $|n\rangle$-состояния в $|m\rangle$, между r- и r'-спинами активного нуклона возникает корреляция, *интенсивность* которой (вплоть до нулевой) задается скалярным произведением $(l_{s's}\, h_{r'r})$.

Итак, можно считать, что произведения $\lambda^{mn}_{r'r}$, отвечающие рассеянию на одном и том же активном нуклоне, не зависят от индексов m и n

и равны некоторым средним их значениям для протонов и нейтронов*:

$$\lambda^{mn}_{r'r} \simeq \lambda^{p/n}_{r'r}. \tag{П.42}$$

Поэтому в силу (П.42) спиновые множители $\lambda^{mn}_{r'r} \equiv \lambda^{f}_{r'r}$ (вместе со скалярными произведениями) можно вынести за знак суммы по m, n.

С учетом условий (П.41) и (П.42) в формуле (П.37) можно снять часть суммирования по индексам x', x (когда $k = j$), «разделить» протоны и нейтроны и получить выражение

$$\begin{aligned}\frac{T^{s's}_{m\neq n}}{g_i} = \sum_{k=j}^{Z}\sum_{n}\omega_n \sum_{m\neq n} f^{p}_{mn} f^{p*}_{mn} \sum_{r'_k r_k} |(l_{s's}\, h^{p}_{r'_k r_k})|^2 +\\ + \sum_{k=j}^{N}\sum_{n}\omega_n \sum_{m\neq n} f^{n}_{mn} f^{n*}_{mn} \sum_{r'_k r_k} |(l_{s's}\, h^{n}_{r'_k r_k})|^2 +\\ + \sum_{k\neq j}^{Z}\sum_{n}\omega_n \sum_{m\neq n} f^{k}_{mn} f^{j*}_{mn} \sum_{r'_k r_k}\sum_{x'_j x_j} \lambda^{p}_{r'_k r_k}[\lambda^{p}_{x'_j x_j}]^*(l_{s's}\, h^{p}_{r'_k r_k})(l_{s's}\, h^{p}_{x'_j x_j})^\dagger +\\ + \sum_{k\neq j}^{N}\sum_{n}\omega_n \sum_{m\neq n} f^{k}_{mn} f^{j*}_{mn} \sum_{r'_k r_k}\sum_{x'_j x_j} \lambda^{n}_{r'_k r_k}[\lambda^{n}_{x'_j x_j}]^*(l_{s's}\, h^{n}_{r'_k r_k})(l_{s's}\, h^{n}_{x'_j x_j})^\dagger +\\ + \sum_{k}^{Z}\sum_{j}^{N}\sum_{n}\omega_n \sum_{m\neq n} f^{p}_{mn} f^{n*}_{mn} \sum_{r'r}\sum_{x'x} \lambda^{p}_{r'r}[\lambda^{n}_{x'x}]^*(l_{s's}\, h^{p}_{r'r})(l_{s's}\, h^{n}_{x'x})^\dagger,\end{aligned} \tag{П.43}$$

где в первых двух слагаемых осталось суммирование только по одному индексу, поскольку оба индекса (k и $j = k$) «указывают» на один и тот же нуклон: в первом слагаемом — на протон, во втором — на нейтрон. В третьем и четвертом слагаемых индексы k и j указывают также на нуклоны одного и того же типа, однако эти нуклоны разные: $k \neq j$. В последней строке индекс k указывает на протон, а j — на нейтрон.

* Когда $x_k = r_k$ и $x'_k = r'_k$, физический смысл квадрата $|\lambda^{mn}_{r'_k r_k}|^2 \equiv \equiv \lambda^{mn}_{r'_k r_k}[\lambda^{mn}_{x'_k = r'_k, x_k = r_k}]^*$ — вероятность k-му нуклону встретить лептон с проекцией своего спина r_k и проводить с проекцией спина r'_k при условии, что ядра переходят из $|n\rangle$-состояния в $|m\rangle$. Смысл же произведения $\lambda^{mn}_{+-}[\lambda^{mn}_{++}]^*$, где начальный индекс спина $r_k = -1$ не совпадает с начальным индексом спина $x_k = +1$, непонятен, если *смотреть на это произведение с точки зрения одного и того же активного нуклона*. Такая ситуация может, видимо, реализоваться, когда λ^{mn}_{+-} относится к одному нуклону, а $[\lambda^{mn}_{++}]^*$ — к *другому* нуклону, т. е. когда в процессе рассеяния участвуют *два разных активных нуклона*. Как будет показано ниже, такой сценарий дает пренебрежимо малый вклад.

Учитывая условие (П.42), вычисление сумм в (П.43) начнем с первой строки, когда индексы k и j «указывают» на один и тот же протон. Поскольку $k = j$, с учетом условия полноты ядерных состояний $\sum\limits_m |m\rangle\langle m| = \widehat{I}$, условия сохранения вероятностей $\sum\limits_n \omega_n = 1$, условия нормировки ядерных состояний $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$, определения функций $f^k_{mn}(\mathbf{q}) = \langle m|\,\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k}|n\rangle$ и выражений для их квадратов (30) можно выполнить суммирование по n и m в первом слагаемом формулы (П.43) и получить следующую последовательность выражений:

$$\sum_n \omega_n \sum_{m\neq n} f^k_{mn} f^{k*}_{mn} = \sum_n \omega_n \left[\sum_m f^k_{mn} f^{k*}_{mn} - f^k_{nn} f^{k*}_{nn}\right] = \\ = \sum_n \omega_n \left[\langle n|\,\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\mathbf{X}_k} \sum_m |m\rangle\langle m|\,\mathrm{e}^{-i\mathbf{q}\mathbf{X}_k}|n\rangle\right] - \\ - |F_p(\mathbf{q})|^2 = 1 - |F_p(\mathbf{q})|^2. \quad (\text{П.44})$$

Для второго слагаемого формулы (П.43) получается аналогичное выражение: $1 - |F_n(\mathbf{q})|^2$. Для второй (протонной) строки из (П.43) имеем $k \neq j$, т. е. эти индексы указывают на *разные* протоны, тогда, учитывая все вышеперечисленные условия, как и в случае с выводом выражения (П.44), для протонов (индекс p) можно записать выражение

$$\sum_n \omega_n \sum_{m\neq n} f^k_{mn} f^{j*}_{mn} = \langle \mathrm{cov}(\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k},\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_j})\rangle_p, \quad (\text{П.45})$$

введя оператор ковариации операторов сдвига $\mathrm{e}^{-i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_j}$ и $\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k}$ по состоянию $|n\rangle$ в виде

$$\mathrm{cov}_{nn}(\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k}, \mathrm{e}^{-i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_j}) \equiv \langle n|\,\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k}\,\mathrm{e}^{-i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_j}|n\rangle - \\ - \langle n|\,\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k}|n\rangle\langle n|\,\mathrm{e}^{-i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_j}|n\rangle, \quad (\text{П.46})$$

с учетом суммирования по начальным состояниям с факторами ω_n следующим образом:

$$\langle \mathrm{cov}(\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k},\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_j})\rangle_p \equiv \sum_n \omega_n\, \mathrm{cov}_{nn}(\mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k}, \mathrm{e}^{-i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_j}). \quad (\text{П.47})$$

При выводе формул (П.44) и (П.45) было использовано то, что «неполную» сумму по m, т. е. $\sum\limits_{m\neq n} f^k_{mn} f^{j*}_{mn}$, можно «дополнить до полной» и представить как $\sum\limits_m f^k_{mn} f^{j*}_{mn} - \sum\limits_{m=n} f^k_{mn} f^{j*}_{mn}$. Воспользовавшись далее условием полноты $\sum\limits_m |m\rangle\langle m| = \widehat{I}$, приходим к выражению (П.46):

$$\sum_{m\neq n} f^k_{mn} f^{j*}_{mn} = \sum_m \langle n|\, \mathrm{e}^{i\mathbf{q}\mathbf{X}_k} |m\rangle\langle m|\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{q}\mathbf{X}_j} |n\rangle - \\ - \sum_{m=n} \langle n|\, \mathrm{e}^{i\mathbf{q}\mathbf{X}_k} |m\rangle\langle m|\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{q}\mathbf{X}_j} |n\rangle = \\ = \langle n|\, \mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k}\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_j} |n\rangle - \langle n|\, \mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k} |n\rangle\langle n|\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_j} |n\rangle.$$

Выражение (П.47) обращается в нуль как при малых переданных импульсах $\mathbf{q} \to 0$, так и при больших $\mathbf{q} \to \infty$, т. е. $\lim_{\mathbf{q}\to 0}\langle \mathrm{cov}\,(\mathrm{e}^{-i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_j}, \mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k})\rangle_p = 0$ и $\lim_{\mathbf{q}\to\infty}\langle \mathrm{cov}\,(\mathrm{e}^{-i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_j}, \mathrm{e}^{i\mathbf{q}\widehat{\mathbf{X}}_k})\rangle_p = 0$. Аналогичное рассмотрение проходит для *разных* нейтронов (3-я строка формулы (П.43)) и обобщается на совместный случай протонов и нейтронов (последняя строка формулы (П.43)). Итак, «некогерентное» слагаемое (П.37) можно записать окончательно в виде формулы (36).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bednyakov V. A., Naumov D. V.* Coherency and Incoherency in Neutrino-Nucleus Elastic and Inelastic Scattering // Phys. Rev. D. 2018. V. 98, No. 5. P. 053004; arXiv:1806.08768.
2. *Bednyakov V. A., Naumov D. V.* On Coherent Neutrino and Antineutrino Scattering off Nuclei // Phys. Part. Nucl. Lett. 2019. V. 16, No. 6. P. 638–646; arXiv:1904.03119.
3. *Bednyakov V. A., Naumov D. V.* Concept of Coherence in Neutrino and Antineutrino Scattering off Nuclei // Phys. Part. Nucl. 2021. V. 52, No. 1. P. 39–154.
4. *Bednyakov V. A.* Coherence in Scattering of Massive Weakly Interacting Neutral Particles off Nuclei // Phys. Part. Nucl. 2023. V. 54, No. 2. P. 273–339.
5. *Бедняков В. А.* О значимости неупругого взаимодействия в прямом поиске частиц темной материи // ЯФ. 2023. Т. 86, № 6. С. 691–726;
Bednyakov V. A. On Underestimation of the Inelastic Interactions in the Direct Dark Matter Search. hep-ph: 2305.02050. 2023.
6. *Freedman D. Z.* Coherent Effects of a Weak Neutral Current // Phys. Rev. D. 1974. V. 9. P. 1389–1392.
7. *Freedman D. Z., Schramm D. N., Tubbs D. L.* The Weak Neutral Current and Its Effects in Stellar Collapse // Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 1977. V. 27. P. 167–207.
8. *Akimov D. et al. (COHERENT Collab.).* Observation of Coherent Elastic Neutrino-Nucleus Scattering // Science. 2017. V. 357(6356). P. 1123–1126; arXiv:1708.01294.
9. *Bednyakov V. A., Naumov D. V., Titkova I. V.* On the Possibility of Separating Coherent and Incoherent (Anti)Neutrino Scattering on Nuclei // Phys. At. Nucl. 2021. V. 84, No. 3. P. 314–327.
10. *Tanabashi M. et al. (Particle Data Group Collab.).* Review of Particle Physics // Phys. Rev. D. 2018. V. 98, No. 3. P. 030001.
11. *Peskin M. E., Schroeder D. V.* An Introduction to Quantum Field Theory. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995.

12. *Bilenky S. M.* Introduction to Feynman Diagrams and Electroweak Interactions Physics. Gif-sur-Yvette, 1995. P. 1–365.
13. *Блохинцев Д. И.* Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976. 664 с.
14. *Bohr A., Mottelson B. R.* Nuclear Structure. V. I and II. New York; Amsterdam: W. A. Benjamin. Inc., 1974;
Бор О., Моттельсон Б. Структура атомного ядра. М.: Мир, 1977. Т. 1 и 2.
15. *Lyon S. A., Castoria K., Kleinbaum E., Qin Z., Persaud A., Schenkel T., Zurek K.* Single Phonon Detection for Dark Matter via Quantum Evaporation and Sensing of ^{3}Helium. arXiv:2201.00738.
16. *Bednyakov V. A.* Scalar Products of Fermion Currents // Phys. Part. Nucl. 2021. V. 52, No. 5. P. 847–898.
17. *Isaacson J., Jay W. I., Lovato A., Machado P. A. N., Rocco N.* ACHILLES: A Novel Event Generator for Electron- and Neutrino-Nucleus Scattering. arXiv:2205.06378.