ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2023. Т. 54, вып. 5. С. 1124–1130

ВИНТОВОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ: ОТ МАШИНОСТРОЕНИЯ ДО ТВИСТОРОВ

Р. Н. Рогалёв *

Институт физики высоких энергий им. А. А. Логунова
Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»,
Протвино, Россия

Обзорно излагается развитие концепции винтов, оказавшей в конечном счете влияние на создание твисторного исчисления.

In a short review the development of the concept of the screw is outlined and its impact on the creation of the twistor calculus is emphasized.

PACS: 03.30.+p; 45.40.−f; 45.20.D−; 01.65.+g

ВВЕДЕНИЕ

Развитие техники в XIX в. мотивировало развитие статики и вычислительной кинематики. Проблема сложения сил, действующих вдоль скрещивающихся прямых, привела к появлению концепций скользящих векторов и винтов и пониманию силы как винта, а описание множества сил, действующих на твердое тело, — к концепции грассманова многообразия. Анализ на грассмановых многообразиях столетием позже послужил основой для создания твисторного исчисления, поскольку была выявлена возможность интерпретации комплексифицированного пространства Минковского как грассманова многообразия в 4-мерном линейном пространстве над полем комплексных чисел (твисторным пространством). Твисторная техника успешно использовалась для классификации инстантонов в теории Янга–Миллса и для нахождения некоторых решений уравнений Эйнштейна.

Математические конструкции, использованные в этой линии развития физики, не получили должного внимания в образовательных программах. В данной работе сделана попытка дать простое и наглядное описание винтов и грассмановых многообразий. Подчеркивается «инженерное» происхождение упомянутых математических объектов, имеющих репутацию сложных и абстрактных.

* E-mail: rnr@ihep.ru

1. ЗАДАЧА О СЛОЖЕНИИ СИЛ И СКОЛЬЗЯЩИЕ ВЕКТОРЫ

Концепция винта возникла в прикладной механике при расчетах, требующих учета большого числа сил, действующих в сложных механизмах [1, 2]. Задачу о сложении сил в статике можно сформулировать так: требуется найти равнодействующую сил, действующих на твердое тело, чтобы момент этой равнодействующей относительно любой точки был равен сумме моментов.

В статике сила, действующая на твердое тело, характеризуется скользящим вектором, поскольку характеризуется не только величиной и направлением, но и линией действия.

Различие между фиксированными, свободными и скользящими векторами таково: свободный вектор определен с точностью до любых параллельных переносов, скользящий вектор — с точностью до параллельных переносов вдоль своего направления, фиксированный вектор находится во взаимно-однозначном соответствии с задающим его направленным отрезком. Более строго, скользящий вектор — это класс эквивалентности направленных отрезков, если эквивалентными считаются направленные отрезки, лежащие на одной прямой.

Можно определить операцию сложения скользящих векторов. Задача о сложении сил приводит к необходимости введения более общего, чем вектор, математического понятия для описания силы, действующей на твердое тело.

Сумма двух скользящих векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, действующих вдоль прямых (AB) и (CD), находится следующим образом: сначала складываем $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ как свободные векторы $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MG}$, затем уменьшаем произвол в выборе начала результирующего вектора (точки M).

• Если (AB) и (CD) пересекаются в точке P, то $M=P$ (т. е. линия действия результирующего вектора проходит через P).

• Если складываемые векторы сонаправлены: $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{CD}$, то M выбирается на отрезке $[AC]$ так, что

$$\frac{|AM|}{|MC|}=\frac{|CD|}{|AB|}. \tag{1}$$

• Если складываемые векторы противоположно направлены: $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ и $|AB|>|CD|$ $(|AB|<|CD|)$, точка M выбирается на части луча $[CA)\,([AC))$ вне отрезка $[AC]$ так, чтобы выполнялось соотношение (1).

• Вырожденный случай: $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ и $|AB|=|CD|$, предельный переход $|AB|\to|CD|$ приводит к $M\to\infty$ и $|MG|\to 0$, причем $|\overrightarrow{MG}\times\overrightarrow{AM}|\to|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|$. Результирующая сила стремится к нулю по величине, линия ее действия стремится к бесконечно удаленной прямой, причем ее момент относительно любой точки плоскости стремится к моменту пары сил $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Концепция «пары сил» (т. е. чистого момента) в статике используется для описания этой ситуации [3].

• Если (AB) и (CD) скрещиваются, раскладываем каждый из складываемых векторов на компоненты следующим образом: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD}$, где $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{CF}$ параллельны $\overrightarrow{MG}$, $\overrightarrow{EB}$ и $\overrightarrow{FD}$ перпендикулярны $\overrightarrow{MG}$. При этом $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FD} = 0$, следовательно, $\overrightarrow{EB}$ и $\overrightarrow{FD}$ представляют чистый момент, параллельный $\overrightarrow{MG}$. Положение точки M определяется путем сложения параллельных векторов $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{CF}$ как скользящих: $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{MG}$.

2. ВИНТЫ И МНОГООБРАЗИЯ ГРАССМАНА

Скользящий вектор $\overrightarrow{AB}$ (силу) в 3-мерном аффинном пространстве можно представить бивектором $f = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ в расширенном 4-мерном пространстве $\mathtt{T}$:

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & x_A, & y_A, & z_A \\ 1, & x_B, & y_B, & z_B \end{pmatrix},$$

где O — начало координат в $\mathtt{T}$, а (x_A, y_A, z_A) и (x_B, y_B, z_B) — координаты A и B соответственно. Плюккеровы координаты бивектора $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$

$$p_{01} = \begin{vmatrix} 1 & x_A \\ 1 & x_B \end{vmatrix}, \quad p_{02} = \begin{vmatrix} 1 & y_A \\ 1 & y_B \end{vmatrix}, \quad p_{03} = \begin{vmatrix} 1 & z_A \\ 1 & z_B \end{vmatrix},$$

$$p_{12} = \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix}, \quad p_{13} = \begin{vmatrix} x_A & z_A \\ x_B & z_B \end{vmatrix}, \quad p_{23} = \begin{vmatrix} y_A & z_A \\ y_B & z_B \end{vmatrix}$$

содержат информацию как о векторе силы $F_i = p_{0i}$, так и о ее моменте относительно начала координат $M_i = \varepsilon_{ijk} p_{jk}$.

Таким образом, мы получили взаимно-однозначное соответствие между скользящими векторами в 3-мерном пространстве и разложимыми внешними формами (бивекторами) в 4-мерном пространстве, содержащими среди множителей хотя бы один вектор с ненулевой t-компонентой.

Поскольку сумма двух бивекторов не всегда есть разложимая форма, сумма сил не всегда может быть описана скользящим вектором.

Однако неразложимую форму вида $f_1 \wedge g_1 + f_2 \wedge g_2$ (из неразложимости следует линейная независимость f_1, g_1 и f_2, g_2) всегда можно представить в виде суммы $f'_1 \wedge g'_1 + f'_2 \wedge g'_2$, где $f'_1 = (0, \mathbf{f}'_1)$, $g'_1 = (1, \mathbf{g}'_1)$, $f'_2 = (0, \mathbf{f}'_2)$, $g'_2 = (0, \mathbf{g}'_2)$. При этом f'_1, g'_1, f'_2, g'_2 получаются из f_1, g_1, f_2, g_2 симплектическим преобразованием. Более того, симплектическое преобразование можно подобрать таким образом, чтобы $\widetilde{\mathbf{f}}_2 \times \widetilde{\mathbf{g}}_2 \parallel \mathbf{f}'_1$. Бивекторы $f'_2 \wedge g'_2$, у которых $g_2'^{(0)} = f_2'^{(0)} = 0$, отвечают паре сил (т. е. чистому моменту). Таким образом, сумма произвольных сил может быть представлена в виде комбинации силы (скользящего вектора) и чистого момента, параллельного ему (свободного вектора). Это утверждение впервые было доказано Л. Пуансо [3]. Такая комбинация получила название винта, сумма двух винтов снова является винтом. Можно определить понятие угла между винтами, скалярное произведение винтов и другие операции с винтами.

Таким образом, адекватное описание воздействия нескольких сил на твердое тело дается в терминах винтов, а не векторов. При этом особое значение имеет представление винтов 2-формами $p_{ij}e^i \wedge e^j$ в расширенном 4-мерном пространстве. Силы (т. е. скользящие векторы) представлены 2-формами, удовлетворяющими соотношению Плюккера

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0, \tag{2}$$

которое представляет собой условие ортогональности силы и ее момента относительно начала координат.

Винт, т. е. эквивалент действия произвольного числа сил на твердое тело, однозначно задается парой $(\mathbf{F}, \mathbf{M})$, где $\mathbf{F}$ — сумма всех этих сил, предствленная скользящим вектором с произвольно выбранной линией действия $\parallel \mathbf{F}$, а $\mathbf{M}$ — сумма моментов всех сил относительно некоторой точки $\mathcal{O}$ на этой линии. Можно показать, что винт не зависит ни от двухпараметрического произвола в выборе линии действия $\mathbf{F}$, ни от выбора точки $\mathcal{O}$: M зависит от точки $\mathcal{O}$ таким образом, что совокупный эффект действия $\mathbf{F}$ и $\mathbf{M}$ на тело остается неизменным. При этом существует такая линия действия, что $\mathbf{M} = p\mathbf{F}$, и эта линия действия называется осью винта.

Помимо винтов, описывающих воздействие системы сил на твердое тело (называемых силовыми или динамическими), можно рассмотреть винты, описывающие движение твердого тела, — кинематические винты. Кинематический винт — это пара $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{v})$, где $\mathbf{\Omega}$ — скользящий вектор угловой скорости, линией действия которого служит мгновенная ось вращения, а $\mathbf{v}$ — свободный вектор скорости.

Концепция винтов и винтовое исчисление оказались исключительно полезными в технической механике [4] и робототехнике [5] для расчета различных механизмов. Подробное изложение теории с примерами практического применения можно найти в монографии [2].

3. ВИНТЫ И ТВИСТОРЫ

Имеет смысл рассмотреть винт, в некотором смысле дуальный к кинематическому. Движение твердого тела можно также характеризовать винтом $(\mathbf{p}, \mathbf{J})$, где $\mathbf{p}$ — скользящий вектор импульса, линия которого такова, что момент импульса относительно точек этой оси параллелен импульсу, а $\mathbf{J}$ — свободный вектор момента импульса. Этот винт назовем винтом количества движения. Сумма двух таких винтов отвечает винту количества движения составной системы, разность — относительному движению. В предельном случае, когда твердое тело становится материальной точкой, но его момент импульса сохраняет ненулевое значение, можно говорить о материальной точке со спином. Операции с винтами количества движения соответствуют описанию динамики системы, состоящей из материальных точек со спином (элементарных частиц в классическом нерелятивистском приближении). Однако винт количества движения замечателен тем, что он естественным образом обобщается на релятивистский случай: 3-вектор $\mathbf{p}$ заменяется на 4-вектор p_μ, а обычный момент $\mathbf{J}$ заменяется на форму, соответствующую генераторам группы Лоренца $J_{\mu\nu}$ (форму релятивистского углового момента). Как и в случае силового винта, изменение линии действия вектора импульса приводит к изменению углового момента согласно формуле

$$J_{\mu\nu} \to J_{\mu\nu} + x_\mu p_\nu - p_\mu x_\nu. \tag{3}$$

Среди множества релятивистских винтов количества движения особо выделено 7-мерное подмножество винтов, импульсы которых лежат на световом конусе. В этом случае тензорные величины $J_{\mu\nu}$ и p_μ могут быть выражены в терминах двух вейлевских 2-спиноров ω_A и $\pi_{\dot{A}}$:

$$\begin{aligned} p_\mu \sigma^\mu_{A\dot{A}} &= \overline{\pi}_A \pi_{\dot{A}}, \\ J_{\mu\nu} \sigma^\mu_{A\dot{A}} \sigma^\nu_{B\dot{B}} &= \imath(\omega^A \pi^B + \omega^B \pi^A)\varepsilon^{\dot{A}\dot{B}} - \imath\varepsilon^{AB}(\omega^{\dot{A}} \pi^{\dot{B}} + \omega^{\dot{B}} \pi^{\dot{A}}). \end{aligned} \tag{4}$$

При этом равенство (3) влечет за собой зависимость спинора ω от x:

$$\omega^A = \mathring{\omega}^A + x^{A\dot{A}}, \pi_{\dot{A}}, \tag{5}$$

где

$$x^{A\dot{A}} = \sigma^{A\dot{A}}_\mu x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - \imath x^2 \\ x^1 + \imath x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}.$$

Пара спиноров $(\omega_A, \pi_{\dot{A}})$, удовлетворяющая соотношению (5), получила название твистора [6, 7].

Другой подход, приводящий к концепции твисторов, возникает из описания множества световых лучей в 4-мерном пространстве-времени [8]. Использование координат Плюккера $(v_\mu, M_{\mu\nu} = v_\mu l_\nu - l_\mu v_\nu)$ для описания светового луча общего положения, где 4-вектор v направлен вдоль светового луча, а светоподобный вектор l соединяет начало координат с рассматриваемым световым лучом, вполне аналогично обсуждавшемуся выше рассмотрению динамических винтов и винтов количества движения. Светоподобные векторы v и l можно выразить в терминах 2-спиноров

$$v_\mu \sigma^\mu_{A\dot{A}} = \overline{v}_A v_{\dot{A}}, \quad l_\mu \sigma^\mu_{A\dot{A}} = \overline{\lambda}_A \lambda_{\dot{A}}, \tag{6}$$

5-мерное многообразие световых лучей естественным образом вкладывается в вещественно 8-мерное пространство твисторов $Z_\alpha = (\lambda^{\dot{A}}, v_A)$, где $\lambda^{\dot{A}} = (\overline{v}_A l^{A\dot{A}})/(\overline{v}_A \overline{\lambda}^A)$.

К концепции твистора можно подойти и с другой стороны, начиная не с построения твисторных аналогов каких-либо объектов в пространстве Минковского, а с представления точек пространства Минковского плоскостями в $\mathbf{C}^4$. Поставим каждой точке x матрицу (x^μ считаются комплексными)

$$X = \left(I, \sigma_\mu^{A\dot{A}} x^\mu\right) = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - \imath x^2 & 1 & 0 \\ x^1 + \imath x^2 & x^0 - x^3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и рассмотрим плоскость в $\mathbf{C}^4$, натянутую на строки этой матрицы. Так возникает реализация пространства Минковского как большой клетки Шуберта грассманова многообразия $Gr_2(\mathbf{C}^4)$. Этот подход подробно изложен в монографии [9].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Концепция грассманова многообразия возникает вполне естественно при решении задачи сложения сил, действующих на твердое тело. Произвольная система таких сил может быть представлена в виде винта: суперпозиции силы и пары сил. Пространство винтов изоморфно пространству внешних форм в $\mathbf{R}^4$, гиперплоскость $x^0 = 0$ в котором является 3-мерным пространством сил. Разложимые формы соответствуют «первичным» величинам: силам либо чистым моментам (парам сил). Таким образом, множество сил и пар сил представляет собой грассманов конус, проективизация которого представляет собой грассманово многообразие $Gr_2(\mathbf{R}^4)$. Такой подход позволяет рассматривать силы и пары сил как величины одной природы.

В дальнейшем внимание к теории грассмановых многообразий привело к наблюдению, что многообразие $Gr_2(\mathbf{C}^4)$ можно отождествить с комплексифицированным компактифицированным пространством Минковского, что позволяет выражать математические объекты в пространстве Минковского через таковые в исходном пространстве твисторов $\mathbf{C}^4$.

В то же время твисторное пространство возникает естественным образом, если момент и 4-импульс релятивистской системы, рассматриваемые как винт, выразить через вейлевские спиноры: пара спиноров, образующих твистор, имеют такую же зависимость от координат, как и пара векторов, образующих винт.

Таким образом, концепции винтов и грассмановых многообразий, сформировавшиеся в эпоху бурного развития прикладной механики, сыграли существенную роль в развитии теории твисторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ball R. S.* A Treatise on the Theory of Screws. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1900.
2. *Диментберг Ф. М.* Винтовое исчисление и его приложения к механике. М.: Наука, 1965.

3. *Пуансо Л.* Начала статики. Пг.: Науч.-техн. изд-во, 1920;
Poinsot L. Elèments de Statique. Paris, 1804.
4. *Котельников А. П.* Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике. Казань, 1895.
5. *Murray R. M., Li Z., Shankar Sastry S.* A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation. CRC Press, 1994.
6. *Penrose R., Ward R. S.* Twistors for Flat and Curved Space-Time. General Relativity and Gravitation / Ed. A. Held. V. 2. New York; London: Plenum Press, 1980. P. 283–328.
7. *Пенроуз Р., Риндлдер В.* Спиноры и пространство-время. Т. 2. М.: Мир, 1988.
8. *Penrose R.* Twistor Algebra // J. Math. Phys. 1967. V. 8. P. 345.
9. *Манин Ю. И.* Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984.