

ПОЛУЖЕСТКИЕ ПРОЦЕССЫ КХД ЗА РАМКАМИ КОЛЛИНЕАРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

А. В. Липатов^{1,*}, *С. П. Баранов*^{2,**}, *М. А. Малышев*^{1,***}

¹ Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

² Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук, Москва

Излагаются основные положения k_T -факторизационного подхода КХД, основанного на уравнениях неколлинеарной глюонной эволюции типа ВФКЛ. Одно из преимуществ этого подхода связано с удобством учета значительной части поправок следующих порядков теории возмущений КХД. Приводятся явный вид и решения некоторых уравнений эволюции партонных распределений в лидирующем логарифмическом приближении. Представлены широко используемые в расчетах функции распределения глюонов и кварков, зависящие от поперечного импульса начальных взаимодействующих частиц. Обсуждаются различные методы вычисления амплитуд партонных подпроцессов вне массовой поверхности. Рассматривается применение k_T -факторизационного подхода к некоторым процессам КХД, которые активно изучаются в настоящее время в экспериментах на Большом адронном коллайдере, в частности, процессам одиночного и парного рождения тяжелых кварков, инклюзивного и ассоциативного (в сопровождении одной или нескольких адронных струй) рождения прямых фотонов (или калибровочных бозонов) в столкновениях протонов при высоких энергиях. Проводится сравнение результатов с предсказаниями, полученными в рамках стандартного (коллинеарного) подхода КХД в следующем за ведущим порядке теории возмущений. Обсуждаются основные возможности и характеристики современных Монте-Карло генераторов событий PEGASUS, CASCADE и KaTie.

We outline the main features and characteristics of the k_T -factorization QCD approach, which is based on BFKL-like noncollinear gluon evolution equations. One of the advantages of the described approach is connected with an easy way to take into account a significant part of higher order perturbative QCD corrections. The explicit expression and solutions of some parton density evolution equations in the leading logarithmic approximation are presented. Gluon and quark distribution functions, which depend on the transverse momenta of the initial interacting particles and are frequently used in calculations, are shown. We discuss various techniques to calculate off-shell amplitudes of parton subprocesses. We apply the k_T -factorization approach to some QCD processes that are intensively studied in modern experiments at the LHC, in particular, single and double heavy quark production, as well as inclusive and associated (with one or two hadron jets) prompt photon or heavy gauge

* E-mail: lipatov@theory.sinp.msu.ru

** E-mail: baranovsp@lebedev.ru

*** E-mail: malyshev@theory.sinp.msu.ru

boson production in proton collisions at high energies. A comparison of the obtained results with predictions made using the standard collinear factorization approach in the next-to-leading perturbative QCD order is presented. We also discuss basic features of modern Monte-Carlo event generators PEGASUS, CASCADE, and KaTie.

PACS: 12.38.–t; 12.38.Bx; 13.85.Qk; 14.65.–q; 14.70.Hp

ВВЕДЕНИЕ

Новые возможности для экспериментального и теоретического изучения свойств адронной материи открываются с ростом энергии вводимых в строй ускорителей. Запуск Большого адронного коллайдера (Large Hadron Collider, или ЛНС) и последовавшее за ним скорое экспериментальное обнаружение бозонов Хиггса ознаменовало собой начало новой эры в современной физике высоких энергий. В настоящее время коллайдер ЛНС (Run III) позволяет проводить эксперименты при энергии сталкивающихся протонов $\sqrt{s} = 13,6$ ТэВ, что предоставляет богатый потенциал для дальнейшего изучения хиггсовского механизма нарушения электрослабой симметрии, уточнения параметров Стандартной модели (СМ), поиска различных проявлений эффектов новой физики за ее пределами (таких как следствия суперсимметричных расширений СМ и моделей с дополнительными размерностями пространства-времени), проверки некоторых экзотических теорий.

Одну из ключевых ролей во всех аспектах физической программы ЛНС играет калибровочная теория сильного взаимодействия — квантовая хромодинамика (КХД), поскольку одним из основных объектов исследований на ЛНС являются жесткие процессы, происходящие в столкновениях протонов высоких энергий. В таких процессах присутствуют два или более характерных энергетических масштаба взаимодействия — «мягкий» адронный масштаб, определяемый величиной порядка Λ_{QCD} , и «жесткий» масштаб, который задается переданным во время взаимодействия импульсом. Типичными примерами являются процессы рождения тяжелых (c или b) кварков, их связанных состояний (кваркониев), инклюзивного или ассоциативного рождения калибровочных бозонов, хиггсовских частиц, струй адронов с большим поперечным импульсом и др. Наличие «жесткого» масштаба μ^2 позволяет отделить динамику взаимодействия на малых расстояниях от эффектов физики больших расстояний, поскольку в области $\Lambda_{\text{QCD}} \ll \mu$ бегущая константа связи КХД $\alpha_s(\mu^2)$ становится достаточно малой (явление асимптотической свободы в КХД). Последнее дает возможность применять хорошо известные методы теории возмущений для описания жесткого подпроцесса партонного рассеяния. Непертурбативная часть процесса, связанная с динамикой взаимодействия на больших расстояниях, присутствует в виде партонных (кварковых и/или глюонных) функций распределения в протоне и предполагается универсальной — она может быть определена в одном процессе и в дальнейшем использоваться для анализа других.

Для отделения (факторизации) пертурбативной части процесса от непертурбативной применяются так называемые теоремы о факторизации [1] (см. также [2, 3]), согласно которым сечения (или иные наблюдаемые) рассматриваемого процесса могут быть представлены в виде свертки сечения соответствующего жесткого подпроцесса партонного рассеяния, вычисленного в рамках теории возмущений КХД, и функций распределения партонов в сталкивающихся протонах. Наиболее часто в расчетах используется так называемая коллинеарная схема факторизации. Так, сечение процесса инклюзивного рождения частицы H в столкновениях двух протонов может быть представлено в виде

$$\sigma(pp \rightarrow H + X) = \sum_{a,b} f_a(x_1, \mu_F^2) f_b(x_2, \mu_F^2) \otimes \hat{\sigma}_{ab}(x_1, x_2, \mu_R^2, \mu_F^2), \quad (1)$$

где μ_R^2 и μ_F^2 — ренормализационный и факторизационный масштабы* процесса; при этом учитываются вклады от всех возможных взаимодействий партонов типа a и b ($a, b = q, \bar{q}$ или g). Как функции распределения $f_a(x_1, \mu_F^2)$ и $f_b(x_2, \mu_F^2)$, так и сечения партонных подпроцессов $\hat{\sigma}_{ab}(x_1, x_2, \mu_R^2, \mu_F^2)$ зависят от долей x_1 и x_2 продольных импульсов начальных протонов, а поперечными импульсами взаимодействующих глюонов и кварков пренебрегают. Функции распределения партонов определяют вероятность обнаружить внутри протона кварк или глюон, переносящий некоторую долю продольного импульса этого протона; сечения партонных подпроцессов определяют вероятность взаимодействия партонов a и b друг с другом. Кварковые и глюонные распределения содержат информацию о мягкой стадии процесса и, следовательно, не могут быть вычислены с помощью теории возмущений КХД. Тем не менее их зависимость от энергетического масштаба может быть рассчитана согласно теории возмущений и выражена в форме уравнений эволюции Докшицера–Грибова–Липатова–Альтарелли–Паризи (DGLAP) [4–7].

Впечатляющие результаты, полученные в рамках коллинеарной факторизации КХД с учетом вкладов высших порядков теории возмущений (а именно, следующего за ведущим (NLO) и даже, в некоторых случаях, двух последующих (NNLO и N³LO)) хорошо известны. В частности, отметим достигнутое великолепное согласие результатов теоретических расчетов с прецизионными экспериментальными данными для структурных функций протона $F_2(x, Q^2)$ [8, 9] и процессов рождения лептонных пар Дрелла–Яна [10, 11]. Тем не менее достаточно часто возникают существенные трудности (главным образом технического характера) при вычислении сечений ряда процессов, когда необходимо

* Как правило, в качестве этих масштабов принимается величина μ^2 , что тем самым устраняет вклады, пропорциональные $\ln \mu^2 / \mu_R^2$ и $\ln \mu^2 / \mu_F^2$, которые возникают при вычислении поправок следующих порядков к партонным сечениям, рассчитанным в ведущем порядке теории возмущений КХД.

принимать во внимание вклады еще более высоких порядков теории возмущений КХД. Действительно, по мере увеличения порядка количество фейнмановских диаграмм, которые должны быть учтены в расчетах, возрастает многократно, что, в свою очередь, приводит к весьма и весьма трудоемким расчетам. Один из методов учета поправок высших порядков сводится к следующему. Было замечено, что вклады различных диаграмм в сечение неодинаковы: некоторые из них оказываются усилены большими логарифмическими коэффициентами определенного вида, которые определяют поведение сечений в той или иной кинематической области. Например, в области небольших поперечных импульсов p_T главную роль играют судаковские вклады, пропорциональные $\alpha_s^n \ln^n m/p_T$ (где m — масса конечного состояния); в области высоких энергий \sqrt{s} основной вклад в сечение дают члены, пропорциональные $\alpha_s^n \ln^n s/\Lambda_{\text{QCD}}^2 \sim \alpha_s^n \ln^n 1/x$. Вклады диаграмм, усиленных большими логарифмическими коэффициентами, могут быть просуммированы во всех порядках теории возмущений с помощью соответствующих уравнений эволюции. Так, учет судаковских логарифмов может быть произведен в рамках подхода Коллинза–Сопера–Стермана (CSS) [12, 13] (см. также [1]), а учет вкладов, пропорциональных $\alpha_s^n \ln^n 1/x$, — с помощью уравнений Балицкого–Фадиной–Кураева–Липатова (BFKL) [14–16] или Катани–Чиафалони–Фиорани–Маркезини (CCFM) [17–20]. В обоих случаях факторизация сечений партонных подпроцессов рассеяния и функций распределения партонов обобщается за коллинеарное приближение:

$$\sigma(pp \rightarrow H + X) = \sum_{a,b} f_a(x_1, \mathbf{k}_{1T}^2, \mu_F^2) f_b(x_2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu_F^2) \otimes \hat{\sigma}_{ab}^*(x_1, x_2, \mathbf{k}_{1T}^2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu_F^2, \mu_F^2), \quad (2)$$

где $f_a(x_1, \mathbf{k}_{1T}^2, \mu_F^2)$ и $f_b(x_2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu_F^2)$ — функции распределения кварков и/или глюонов в протоне, зависящие от их поперечных импульсов \mathbf{k}_{1T}^2 и \mathbf{k}_{2T}^2 , — неинтегрированные, или TMD (Transverse Momentum Dependent) партонные распределения. Такую обобщенную факторизацию обычно называют TMD-факторизацией (главным образом в случае подхода CSS), или k_T -факторизацией (факторизацией при высоких энергиях, или high energy factorization) [21–24].

Теоретическое обоснование факторизации вида (2) было проведено для процессов полуинклюзивного глубоконеупругого рассеяния (Semi-Inclusive Deep Inelastic Scattering, или SIDIS), процессов рождения лептонных пар Дрелла–Яна в столкновениях адронов и процессов рождения адронов и струй в противоположных направлениях в e^+e^- -аннигиляции [12, 13, 25–34]. Подход k_T -факторизации, применимый в области высоких энергий, основан на работах [21–24], в которых рассматривались процессы рождения тяжелых (c и b) кварков в фотон-протонных, электрон-протонных и протон-протонных столкновениях. В настоящее время он достаточно широко применяется для

феноменологических расчетов сечений (и иных наблюдаемых) различных процессов КХД (см., например, [35–50]). Несомненное преимущество этого подхода связано с удобством учета значительной части поправок следующих порядков теории возмущений КХД в форме ТМД-функций распределения глюонов и/или кварков в протоне. Кроме того, в отличие от коллинеарного приближения учет поперечного импульса начальных кварков и глюонов в рамках факторизации (2) позволяет точно воспроизвести кинематику жестких подпроцессов уже в ведущем приближении.

Настоящий обзор посвящен краткому изложению основных свойств k_T -факторизационного формализма и анализу некоторых результатов, полученных в рамках этого подхода в последнее время.

1. УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ ПАРТОННЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ПРОТОНЕ

Как было отмечено выше, описание процессов с определенным масштабом виртуальности μ^2 с участием адронов (протонов) в начальном состоянии и выделенными частицами в конечном в рамках КХД производится с помощью функций распределения кварков или глюонов $a(x, \mu^2)$ в протоне ($a = q$ или g). Последние имеют простой физический смысл: в системе бесконечного импульса, в которой начальный протон является ультрарелятивистским (когда модуль его импульса p стремится к бесконечности), величина $a(x, \mu^2)dx$ представляет собой число партонов типа a , обладающих продольным импульсом родительского протона в интервале от xp до $(x + dx)p$. Физические наблюдаемые определяются сверткой партонных распределений в протоне и сечений соответствующих жестких подпроцессов рассеяния. В отличие от партонных сечений функции распределения содержат информацию о мягкой стадии процесса и поэтому не могут быть вычислены с помощью теории возмущений КХД. Однако их зависимость от масштаба μ^2 может быть рассчитана согласно теории возмущений и выражена в форме так называемых уравнений эволюции. Вид этих уравнений зависит от точности, с которой учитываются вклады больших логарифмов $\ln \mu^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2$ и/или $\ln s/\Lambda_{\text{QCD}}^2 \sim \ln 1/x$.

1.1. Уравнения DGLAP. В ведущем порядке теории возмущений КХД, в котором при вычислении любой наблюдаемой учитываются члены, пропорциональные $\alpha_s^n \ln^n \mu^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2$ (причем степени $\ln 1/x$ удерживаются в коэффициентах), уравнения эволюции партонных распределений называются уравнениями DGLAP [4–7] и могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial a(x, \mu^2)}{\partial \ln \mu^2} = \sum_b \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{ab} \left(\alpha_s(\mu^2), \frac{x}{z} \right) b(z, \mu^2). \quad (3)$$

В этом приближении учитываются вклады диаграмм кваркового и глюонного обмена лестничного типа, в которых поперечные импульсы испускаемых партонов строго упорядочены:

$$q_{1T}^2 \gg q_{2T}^2 \gg \dots \gg q_{nT}^2, \quad (4)$$

при этом предполагается, что величина q_{1T}^2 уже пренебрежимо мала. Всего функций распределения партонов различного типа насчитывается $2N_f + 1$, где N_f — число кварковых ароматов, участвующих в эволюции. Суммирование вкладов, пропорциональных $\alpha_s^n \ln^n \mu^2 / \Lambda_{\text{QCD}}^2$, связано с учетом партонных эмиссий в области малых углов между импульсами t -канальных и испускаемых партонов. Отметим, что соотношение (4) лежит в основе часто используемого в расчетах принципа коллинеарной факторизации (1) партонных распределений и амплитуд жесткого подпроцесса рассеяния кварков и/или глюонов. Функции расщепления $P_{ab}(\alpha_s(\mu^2), z)$ определяют вероятность испускания партоном b другого партона a , обладающего долей импульса z родительского партона, и могут быть представлены в виде разложения по степеням бегущей константы связи КХД:

$$P_{ab}(\alpha_s(\mu^2), z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} \right)^n P_{ab}^{(n-1)}(z). \quad (5)$$

Кроме того, они удовлетворяют определенным соотношениям [4–7], вытекающим из ароматовой симметрии группы $SU(N_f)$, инвариантности относительно преобразований зарядового сопряжения и закона сохранения энергии-импульса. Выражения для лидирующих членов разложения (5) хорошо известны [4–7]. В следующих порядках теории возмущений коэффициенты разложения зависят от выбора схемы перенормировки. Так, в схеме $\overline{\text{MS}}$ эти коэффициенты в двухпетлевом приближении приведены, например, в работах [51, 52], в трехпетлевом приближении их можно найти в работах [53, 54].

Численное или аналитическое решение уравнений (3) позволяет получить функции распределения партонов в протоне для любых значений μ^2 при заданных начальных условиях*. Так, в дважды логарифмическом приближении, в котором в коэффициентах при $\alpha_s^n \ln^n \mu^2 / \Lambda_{\text{QCD}}^2$ удерживается только старшая степень $\ln 1/x$, асимптотическое выражение для глюонной плотности имеет вид [4–7]

$$xg(x, \mu^2) \sim \exp \sqrt{\frac{48}{11 - 2N_f/3} \ln \frac{\ln \mu^2 / \Lambda_{\text{QCD}}^2}{\ln \mu_0^2 / \Lambda_{\text{QCD}}^2} \ln 1/x}, \quad (6)$$

* Начальные условия для кварковых и глюонных распределений не вычисляются в рамках пертурбативной КХД. Их можно определить, например, из экспериментов по глубоконеупругому ep -рассеянию.

где μ_0 — некоторый масштаб (порядка адронного масштаба, $\mu_0 \sim 1$ ГэВ), при котором определяются начальные распределения партонов. Как видно из (6), функция распределения глюонов в пределе $x \rightarrow 0$ растет быстрее, чем любая степень $\ln 1/x$. Аналогичный результат справедлив также и для морских кварков, поскольку основной вклад в распределения морских кварков в области малых x вносит процесс глюонного расщепления $g \rightarrow q\bar{q}$.

Быстрый рост партонных плотностей при $x \rightarrow 0$, пропорциональный, как следует из (6), энергии \sqrt{s} , приводит к нарушению условия унитарности [21] и ограничения Фруассара [55], согласно которому сечения процессов не могут возрастать быстрее, чем $\ln^2 s$ при $s \rightarrow \infty$. Это влечет за собой необходимость учета поправок высших порядков. Такой учет может быть проведен численно с помощью различных программных пакетов (например, QCDNUM [56], HORPET [57], APFEL [58], QCD-PEGASUS [59]), которые дают возможность получить решения уравнения эволюции DGLAP с точностью до NNLO вкладов. Отметим, что подход, основанный на использовании уравнений DGLAP с учетом поправок следующих порядков, приводит к хорошему описанию экспериментальных данных, в частности, для структурных функций протона, полученных на коллайдере HERA (см., например, [8, 9]).

1.2. Уравнение VFKL. Уравнения эволюции DGLAP позволяют просуммировать вклад слагаемых, усиленных в каждом порядке теории возмущений степенями $\ln \mu^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2$. Однако наряду с ними при малых значениях отношения μ^2/s существенную роль (как в функциях распределения партонов, так и в сечении жесткого подпроцесса рассеяния) начинают играть вклады, пропорциональные $\ln s/\Lambda_{\text{QCD}}^2 \sim \ln 1/x$, которые возникают при интегрировании по широкой области быстрот испущенных партонов. В области малых x их вклад оказывается даже важнее вкладов логарифмических членов, пропорциональных $\ln \mu^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2$. Задача их суммирования может быть выполнена в рамках подхода VFKL [14–16], основанного на гипотезе «реджезации» глюона. Эта гипотеза возникла в результате аналитических вычислений амплитуд рассеяния частиц в нескольких первых порядках теории возмущений. Оказалось, что при больших энергиях сталкивающихся частиц s и фиксированных переданных импульсах t (так называемый реджевский предел) амплитуды процессов с обменом глюоном в t -канале с учетом радиационных поправок имеют вид амплитуд рассеяния в борновском приближении, но с обменом скалярной частицей. К такому же результату приводит наличие особенностей парциальных амплитуд (полюсов Редже) в перекрестном канале (т.е. при $t = m^2$) в плоскости комплексного углового момента модели Редже [60]. Обмен полюсом Редже является обобщением обычного обмена частицей со спином J и массой m на комплексные значения J . Положение этих полюсов определяется траекторией Редже $\alpha(t)$, которая зависит от передачи импульса t и при

$t = m^2$ равна спину J соответствующей частицы; при этом значение $\alpha(0)$ называют интерсептом, а производную $\alpha'(0)$ — наклоном траектории Редже.

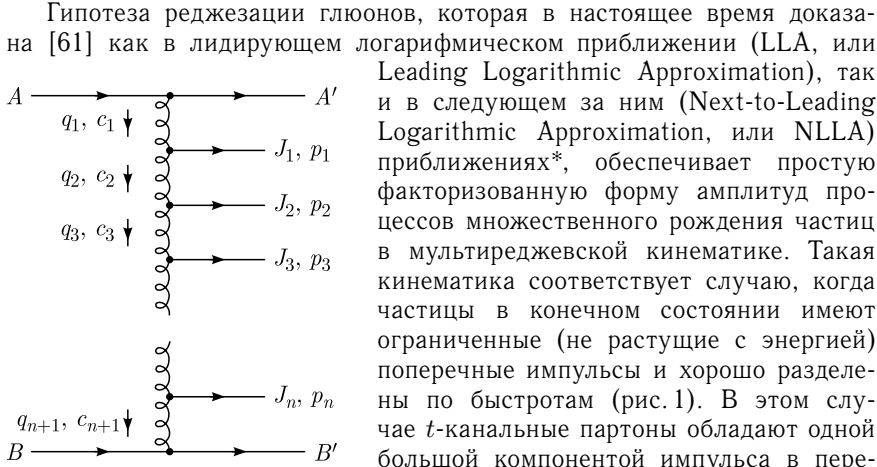


Рис. 1. Амплитуда процесса множественного рождения частиц $A + B \rightarrow A' + J_1 + \dots + J_n + B'$ в мультиреджевской кинематике

Гипотеза реджезации глюонов, которая в настоящее время доказана [61] как в лидирующем логарифмическом приближении (LLA, или Leading Logarithmic Approximation), так и в следующем за ним (Next-to-Leading Logarithmic Approximation, или NLLA) приближениях*, обеспечивает простую факторизованную форму амплитуд процессов множественного рождения частиц в мультиреджевской кинематике. Такая кинематика соответствует случаю, когда частицы в конечном состоянии имеют ограниченные (не растущие с энергией) поперечные импульсы и хорошо разделены по быстротам (рис. 1). В этом случае t -канальные партоны обладают одной большой компонентой импульса в переменных светового конуса, а также переносят поперечный импульс того же порядка. Соответствующие амплитуды выражаются через эффективные вершины взаимодействия реджезованных глюонов с обычными частицами и соответствующие реджевские траектории, причем вся энергетическая зависимость определяется последними (см. также [62]):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(A + B \rightarrow A' + J_1 + \dots + J_n + B') &\sim \\ &\sim \Gamma_{-AA'}^{c_1} \left(\prod_{i=1}^n \Gamma_{+-J_i}^{c_i c_{i+1}}(q_i, -q_{i+1}) \left[\frac{s_i}{s_0} \right]^{\omega(t_i)} \frac{1}{t_i} \right) \frac{1}{t_{n+1}} \left[\frac{s_{n+1}}{s_0} \right]^{\omega(t_{n+1})} \Gamma_{+BB'}^{c_{n+1}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $t_i = q_i^2$, $s_i = (p_i + p_{i+1})^2$, $\Gamma_{-AA'}^{c_1}$ и $\Gamma_{+BB'}^{c_{n+1}}$ — эффективные вершины рассеяния реджезованных глюонов и частиц A, A' и B, B' ; $\Gamma_{+-J}^{ab}(p, q)$ — эффективные вершины рождения частиц J в столкновении реджезованных глюонов, обладающих импульсами p и q и цветовыми индексами a и b . Здесь индексы \pm обозначают большую компоненту импульса, которую переносит реджезованный глюон. Все реджеонные вершины известны в настоящее время в главном и следующем за ним логарифмических

* В рамках лидирующего логарифмического приближения учитываются только члены, пропорциональные $\alpha_s^n \ln^n s / \Lambda_{\text{QCD}}^2$, а в рамках следующего за ним приближения — также и члены порядка $\alpha_s^{n+1} \ln^n s / \Lambda_{\text{QCD}}^2$.

приближениях [63]. В формуле (7) величина s_0 определяет масштаб энергии. В LLA ее значение не может быть зафиксировано, а в NLLA выбор s_0 зависит от определения реджеонных вершин. Реджевская траектория глюона $\omega(t_i) = 1 - \alpha(t_i)$ в LLA может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \omega(t) \equiv \omega(-\mathbf{k}_T^2) &= -\frac{\alpha_s N_c}{8\pi(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-2} \mathbf{q}_T \frac{\mathbf{k}_T^2}{\mathbf{q}_T^2 (\mathbf{k}_T - \mathbf{q}_T)^2} + O(\alpha_s^2) = \\ &= -\frac{\alpha_s N_c}{4\pi} \frac{\Gamma(1-\varepsilon) \Gamma^2(\varepsilon)}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(2\varepsilon)} (\mathbf{k}_T^2)^\varepsilon + O(\alpha_s^2), \quad (8) \end{aligned}$$

где \mathbf{k}_T и \mathbf{q}_T ортогональны 4-импульсам сталкивающихся частиц, $t = -\mathbf{k}_T^2$; $D = 4 + 2\varepsilon$ — размерность пространства-времени, взятая отличной от 4 для регуляризации инфракрасных расходимостей. В NLLA траектория глюона была вычислена в работах [64–69].

Выражение (7) определяет амплитуды процессов с глюонными квантовыми числами в t -канале. Асимптотический предел амплитуды упругого рассеяния $A + B \rightarrow A' + B'$ представляет собой линейную комбинацию амплитуд процессов со всеми возможными квантовыми числами в канале t_i , которые могут быть вычислены с помощью соотношений унитарности и аналитичности. Такие амплитуды можно представить в виде свертки импакт-факторов $\Phi_{AA'}$ и $\Phi_{BB'}$, описывающих переходы $A \rightarrow A'$ и $B \rightarrow B'$ с функцией Грина G двух реджезованных глюонов, которая удовлетворяет уравнению ВФКЛ [14–16] и представляет собой сумму лестничных диаграмм, изображенных на рис. 1. Зависимость от свойств взаимодействующих частиц A и B заключена в соответствующих импакт-факторах, а энергетическая зависимость — в функции Грина.

Уравнение ВФКЛ может быть представлено в виде интегрального уравнения эволюции для ТМД-функции распределения глюонов $f_g(x, \mathbf{k}_T^2)$. В лидирующем логарифмическом приближении (по степеням $\ln s/\Lambda_{\text{QCD}}^2 \sim \ln 1/x$) оно может быть записано в форме

$$\begin{aligned} f_g(x, \mathbf{k}_T^2) &= f_g^{(0)}(x, \mathbf{k}_T^2) + \frac{\alpha_s N_c}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \times \\ &\times \int_{\mathbf{k}_{0T}^2}^{\infty} \frac{d\mathbf{k}'_T{}^2}{\mathbf{k}'_T{}^2} \left[\frac{f_g(x/z, \mathbf{k}'_T{}^2) - f_g(x/z, \mathbf{k}_T^2)}{|\mathbf{k}'_T{}^2 - \mathbf{k}_T^2|} + \frac{f_g(x/z, \mathbf{k}'_T{}^2)}{\sqrt{4\mathbf{k}'_T{}^4 + \mathbf{k}_T^4}} \right], \quad (9) \end{aligned}$$

где $f_g^{(0)}(x, \mathbf{k}_T^2)$ — начальная функция распределения, известная при некотором значении $x = x_0$; при этом константа связи КХД считается фиксированной, $\alpha_s \simeq 0,2$. ТМД-функция распределения глюонов связана с обычным (коллинеарным) распределением приближенным соотношени-

ем следующего вида:

$$\int \frac{d^2 \mathbf{k}_T}{\pi \mathbf{k}_T^2} f_g(x, \mathbf{k}_T^2) \sim g(x, \mu^2). \quad (10)$$

Уравнение (9) предсказывает степенной рост глюонных распределений и, конечно, полных сечений с увеличением энергии: $\sigma \sim s^\Delta$ (см. [14–16, 70]), что соответствует результатам теории полюсов Редже при высоких энергиях. Таким образом, уравнение BFKL устанавливает связь между КХД и моделью Редже. Позднее подобный (степенной) рост сечений с энергией \sqrt{s} был обнаружен в первых экспериментах по глубоконеупругому рассеянию (ГНР) электронов на протонах при энергиях коллайдера HERA [71]. Отметим, что параметр $\Delta = 4\alpha_s N_c \ln 2/\pi \simeq 0,53$ связан с интерсептом померона*: $\alpha_P(0) = 1 + \Delta$. Как было показано [14–16, 72], в рамках подхода BFKL сечения физических процессов (с точностью до членов порядка, следующего за NNLA) могут быть записаны в простой k_T -факторизационной форме (2) — в виде свертки коэффициентов жесткого рассеяния и TMD-функций распределения глюонов в адроне (протоне). Подход BFKL применим не только к процессам ГНР, но также, например, к процессам рассеяния фотонов с виртуальностями одного порядка или процессам рождения нескольких адронных струй, обладающих сравнимыми поперечными импульсами и разделенных большими интервалами быстрот. Действительно, в таких процессах эволюция партонных распределений по виртуальности (эволюция DGLAP) отсутствует, тогда как в процессах ГНР или процессах рождения частиц в столкновении адронов, т.е. в процессах с двумя разными масштабами взаимодействия) динамика BFKL «затемняется» эволюцией DGLAP партонных распределений.

В приближении NLLA уравнение BFKL было получено в работах [73–76]. В этом приближении возникают, в частности, члены, соответствующие дважды логарифмическим вкладам в уравнения эволюции DGLAP [77]. Их учет в фиксированном порядке теории возмущений приводит к осцилляциям функции Грина уравнения BFKL и тем самым к возможности получения отрицательных сечений, а также весьма значительным поправкам к величине интерсепта померона Δ (см., например, [75, 76]). Однако в последующих работах [78–80] было показано, что такие вклады могут быть эффективно просуммированы во всех порядках с помощью метода ренормгруппы, и был предложен соответствующий алгоритм такого суммирования. Аналогичный подход для уравнений эволюции DGLAP был развит в работах [81–83]. В настоящее время

* В КХД померон представляет собой связанное состояние двух реджезованных глюонов и определяет полное сечение рассеяния частицы. Оддерон, отвечающий за разность сечений рассеяния частицы и античастицы, является связанным состоянием трех реджезованных глюонов.

предложен ряд методов, позволяющих использовать результаты NLLA BFKL для описания экспериментальных данных. Так, было показано, что радиационные поправки, пропорциональные α_s , значительно уменьшают величину Δ [75]. Эти поправки, конечно же, зависят от выбора схемы регуляризации и масштаба виртуальности (ренормализационного масштаба) в константе связи КХД. Предсказания [84, 85], полученные с использованием неабелевских физических схем перенормировок и подхода [86] для определения аргумента бегущей константы связи КХД, находятся в хорошем согласии с данными коллабораций OPAL и L3 для сечения взаимодействия двух глубоко виртуальных фотонов на коллайдере LEP2. Кроме того, в работе [84] было получено значение $\Delta \sim 0,17$, которое не зависит от масштаба виртуальности процесса (см. также [62]).

Как уже было отмечено выше, быстрый степенной рост глюонных плотностей при $x \rightarrow 0$ и, соответственно, сечений процессов в области высоких энергий, предсказываемый уравнением BFKL, приводит к нарушению условия унитарности и ограничения Фруассара. Следовательно, на определенном этапе эволюционная динамика должна измениться вследствие учета дополнительных факторов, таких как учет конечного поперечного размера партонов или эффектов их нелинейного взаимодействия внутри протона, которые приводят к замедлению роста (или насыщению) глюонных плотностей. Соответствующая динамика может быть описана с помощью нелинейного уравнения Балицкого–Ковчегова [87, 88]. Такие нелинейные взаимодействия приводят к образованию близкой к равновесной партонной системы с определенным значением среднего поперечного импульса и соответствующим масштабом насыщения $Q_s(x)$. Последняя может быть представлена как бозе-конденсат глюонов с достаточно медленным изменением полей (Color Glass Condensate) [89]. Однако подробное обсуждение подобных вопросов выходит за рамки настоящего обзора.

1.3. Уравнение CCFM. Как было отмечено выше, уравнение BFKL позволяет учесть вклады больших логарифмических членов, пропорциональных $\alpha_s^n \ln^n 1/x$, которые в значительной степени определяют поведение сечений в асимптотической области высоких энергий (или в области малых значений переменной x). В работах [17–20] предложен метод суммирования дополнительных вкладов, пропорциональных $\alpha_s^n \ln^n 1/(1-x)$, которые могут играть важную роль в области промежуточных энергий (или, что эквивалентно, в области промежуточных и больших значений x). Такое суммирование может быть выполнено с помощью уравнения глюонной эволюции CCFM, в рамках которого учитывается эффект цветовой когерентности между глюонами, испускаемыми в процессе эволюции.

Явление цветовой когерентности заключается в следующем. Допустим, что в процессе двух последовательных глюонных расщеплений угол θ_2 между импульсами четвертого и третьего глюонов больше

угла θ_1 , образованного импульсами второго и третьего глюонов, $\theta_2 > \theta_1$. Тогда поперечная компонента длины волны четвертого глюона будет больше поперечного пространственного разделения пары, образованной вторым и третьим глюонами. В этом случае четвертый глюон не может

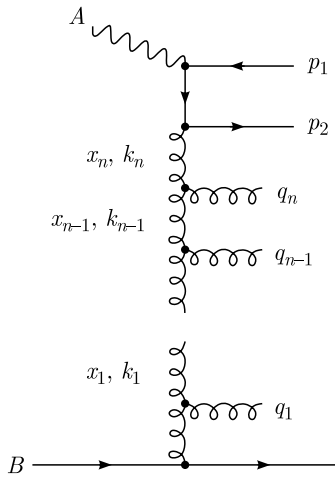


Рис. 2. Схематичное изображение каскада глюонной эволюции CCFM

разрешить цвета каждого глюона из этой пары, но может разрешить цвет первого распадающегося глюона. Таким образом, амплитуда процесса, включающего в себя два последовательных глюонных расщепления, будет идентична амплитуде процесса, в котором конечный глюон испускается непосредственно первичным глюоном под углом θ_2 . Учет явления цветовой когерентности приводит к тому, что последовательное испускание глюонов в процессе эволюции должно быть упорядочено по углам между импульсами глюонов, $\theta_i < \theta_{i-1}$, при этом максимально допустимый угол определяется жестким подпроцессом (рис. 2). Действительно, в переменных Судакова Υ и Ξ 4-импульс пары кварков, образующейся в жестком подпроцессе рассеяния, может быть записан как

$$p = p_1 + p_2 = \Upsilon(P_A + \Xi P_B) + Q_T, \tag{11}$$

где P_A и P_B — 4-импульсы начальных частиц и поперечный импульс пары кварков $Q_T = \mathbf{p}_{1T} + \mathbf{p}_{2T}$. Аналогично для глюонов, испускаемых в процессе эволюции каскада, имеем

$$q_i = v_i(P_A + \xi_i P_B) + q_{iT}, \quad \xi_i = \frac{q_{iT}^2}{sv_i^2}, \tag{12}$$

где $v_i = (1 - z_i)x_{i-1}$ и $x_i = z_i x_{i-1}$ — доли продольного импульса начального протона, переносимые i -м испущенным и i -м промежуточным глюонами, $s = (P_A + P_B)^2$. Переменные ξ_i связаны с углами θ_i испускания глюонов относительно направления импульса начального протона: $\xi_i = \cos^2 \theta_i$. Условие углового упорядочивания может быть представлено в виде

$$\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < \Xi \tag{13}$$

или

$$z_{i-1} \bar{q}_{i-1} < \bar{q}_i, \tag{14}$$

где

$$\bar{q}_i = x_{i-1} \sqrt{\xi_i s} = \frac{q_{iT}}{1 - z_i}. \tag{15}$$

Отметим, что при больших значениях z_i условие упорядочивания (14) переходит в условие строгого упорядочивания (4), тогда как в области малых $z_i \rightarrow 0$ поперечные импульсы испускаемых глюонов не упорядочены.

В лидирующем логарифмическом приближении уравнение ССФМ может быть представлено в виде [17–20]

$$f_g(x, \mathbf{k}_T^2, \bar{q}^2) = f_g^{(0)}(x, \mathbf{k}_T^2, q_0^2) \Delta_s(\bar{q}^2, q_0^2) + \int \frac{dz}{z} \int \frac{d^2 \mathbf{q}_T}{\pi \mathbf{q}_T^2} \theta(\bar{q} - z|\mathbf{q}_T|) \Delta_s(\bar{q}^2, z^2 \mathbf{q}_T^2) \times P_{gg}(z, \mathbf{q}_T^2, \mathbf{k}_T^2) f_g(x/z, \mathbf{k}_T^2, \mathbf{q}_T^2), \quad (16)$$

где, как и ранее, $f_g^{(0)}(x, \mathbf{k}_T^2, q_0^2)$ — некоторая начальная ТМД-функция распределения глюонов и $\mathbf{k}'_T = (1-z)/z \mathbf{q}_T + \mathbf{k}_T$. Функция расщепления ССФМ может быть записана в форме

$$P_{gg}(z, \mathbf{q}_T^2, \mathbf{k}_T^2) = \frac{N_c}{\pi} \alpha_s(\mathbf{q}_T^2 (1-z)^2) \left[\frac{1}{1-z} - 1 + \frac{z(1-z)}{2} \right] + \frac{N_c}{\pi} \alpha_s(\mathbf{k}_T^2) \left[\frac{1}{z} - 1 + \frac{z(1-z)}{2} \right] \Delta_{\text{ns}}(z, \mathbf{q}_T^2, \mathbf{k}_T^2). \quad (17)$$

Судаковский формфактор, необходимый для устранения коллинеарных расходимостей в функции расщепления глюонов ССФМ (возникающих в слагаемых вида $1/(1-z)$ при $z \rightarrow 1$), записывается в форме

$$\ln \Delta_s(p^2, q^2) = -\frac{N_c}{\pi} \int_{q^2}^{p^2} \frac{dk^2}{k^2} \int_0^{1-\Delta} \frac{\alpha_s(k^2 (1-z)^2)}{1-z}, \quad (18)$$

где $\Delta = |q|/|k|$. «Несудаковский» формфактор $\Delta_{\text{ns}}(z, \mathbf{q}_T^2, \mathbf{k}_T^2)$ в (17) имеет то же происхождение, что и реджевские факторы $(s/s_0)^{\omega(t)}$ в (7), и применяется для учета логарифмических поправок, пропорциональных $\ln 1/z$. Он может быть представлен в виде [90]

$$\ln \Delta_{\text{ns}}(z, \mathbf{q}_T^2, \mathbf{k}_T^2) = -\frac{N_c}{\pi} \alpha_s(\mathbf{k}_T^2) \int_z^1 \frac{dz'}{z'} \int_{z'|\mathbf{q}_T|}^{|\mathbf{k}_T|} \frac{dp^2}{p^2} = -\frac{N_c}{\pi} \alpha_s(\mathbf{k}_T^2) \ln\left(\frac{z_0}{z}\right) \ln\left(\frac{\mathbf{k}_T^2}{z_0 z \mathbf{q}_T^2}\right), \quad (19)$$

где $z_0 = 1$ при $|\mathbf{k}_T|/|\mathbf{q}_T| > 1$, $z_0 = |\mathbf{k}_T|/|\mathbf{p}_T|$ при $z < |\mathbf{k}_T|/|\mathbf{q}_T| < 1$ и $z_0 = z$ при $|\mathbf{k}_T|/|\mathbf{q}_T| < z$. Из выражения (17) видно, что в уравнении ССФМ учитывается мягкая сингулярность функции расщепления в области $z \rightarrow 1$ и эффекты ВФКЛ в лидирующем логарифмическом приближении. Дей-

ствительно, если в формуле (17) пренебречь членом, пропорциональным $1/(1-z)$, и опустить формфактор Судакова в (16), то уравнение ССФМ станет эквивалентным [20] уравнению ВФКЛ. Отметим, что на каждом шаге эволюции используется дополнительное условие кинематического соответствия [91]:

$$\mathbf{q}_T^2 < \frac{(1-z)\mathbf{k}_T^2}{z}. \quad (20)$$

Это условие позволяет учесть значительную часть поправок следующего порядка теории возмущений в области малых x .

Функция распределения глюонов $f_g(x, \mathbf{k}_T^2, \bar{q}^2)$, удовлетворяющая уравнению (16), явно зависит от величины \bar{q}^2 . Последняя связана с переменной Судакова $\Xi = \cos\theta$, которая определяет максимально возможный угол испускания глюонов в процессе эволюции каскада согласно (13). Величина \bar{q}^2 в уравнении ССФМ играет роль, аналогичную роли масштаба μ^2 в уравнениях DGLAP, поскольку

$$\bar{q}^2 \simeq x^2 \Xi s = \hat{s} + \mathbf{Q}_T^2, \quad (21)$$

где \hat{s} — переменная Мандельштама для партонного подпроцесса. Соотношение (21) обычно определяет выбор факторизационного масштаба μ_F в феноменологических расчетах. Ниже мы будем полагать $\bar{q}^2 = \mu^2$.

Подход ССФМ применим к процессам, в которых динамика взаимодействия проявляется на двух различных характерных масштабах. Типичным примером может служить процесс рождения струй адронов, обладающих большим поперечным импульсом p_T в глубоконеупругом ep -рассеянии при высоких энергиях. Действительно, в этом случае взаимодействие частиц определяется величинами порядка Q^2 и p_T^2 . Другим примером может являться процесс рассеяния двух виртуальных фотонов с близкими виртуальностями $Q_1^2 \sim Q_2^2 \sim Q^2$, которые значительно меньше полной энергии взаимодействия: $\Lambda_{\text{QCD}}^2 \ll Q^2 \ll s$.

Решение уравнения ССФМ может быть получено численно с помощью различных программных пакетов (например, UPDFEVOLVE [92]). На основе этого уравнения был создан генератор событий Монте-Карло CASCADE [93], позволяющий выполнять расчеты сечений различных процессов КХД при высоких энергиях и проводить количественное сравнение с экспериментальными данными. Учет динамики ССФМ глюонных распределений в протоне может производиться также с помощью разработанного недавно Монте-Карло генератора событий PEGASUS [94].

1.4. Подход КМР. В работах [95, 96] был предложен метод получения ТМД партонных распределений $f_a(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2)$ из обычных (коллинеарных) функций распределения $a(x, \mu^2)$, которые удовлетворяют уравнениям эволюции DGLAP — так называемый подход Кимбера–Мартина–Рыскина (КМР). Этот метод основан на ключевом предположении о том, что зависимость от поперечного импульса входит в партонные

распределения лишь на последнем шаге эволюции (в отличие от подхода ССФМ, в котором поперечный импульс возникает в результате большого числа расщеплений), а также позволяет учесть условие углового упорядочивания партонов в процессе эволюции партонного каскада*.

Процедура KMR в ведущем порядке теории возмущений состоит в следующем. Полагая характерный энергетический масштаб партонного подпроцесса (факторизационный масштаб) равным некоторому значению $\mu^2 = \mathbf{k}_T^2$, уравнения эволюции DGLAP (3) можно представить в виде

$$\frac{\partial a(x, \mathbf{k}_T^2)}{\partial \ln \mathbf{k}_T^2} = \frac{\alpha_s(\mathbf{k}_T^2)}{2\pi} \times \sum_b \left[\int_x^{1-\Delta} \frac{dz}{z} P_{ab}^{(0)}(z) b\left(\frac{x}{z}, \mathbf{k}_T^2\right) - a(x, \mathbf{k}_T^2) \int_0^{1-\Delta} dz z P_{ba}^{(0)}(z) \right], \quad (22)$$

где, как и ранее, $P_{ab}^{(0)}(z)$ — функции расщепления DGLAP в ведущем порядке и $a, b = q, g$. Первое слагаемое в правой части выражения (22) соответствует реальным партонным излучениям в области $\mu^2 < \mathbf{k}_T^2 < \mu^2 + \delta\mu^2$, а второе отвечает вкладом от виртуальных эмиссий. Отметим, что введение параметра обрезания Δ необходимо для устранения коллинеарных расходимостей, возникающих при $z \rightarrow 1$ в обоих интегралах, входящих в уравнение (22). Последнее может быть переписано в форме

$$\frac{\partial}{\partial \ln \mathbf{k}_T^2} [T_a(\mathbf{k}_T^2, \mu^2) a(x, \mathbf{k}_T^2)] = T_a(\mathbf{k}_T^2, \mu^2) \frac{\alpha_s(\mathbf{k}_T^2)}{2\pi} \times \sum_b \int_x^{1-\Delta} \frac{dz}{z} P_{ab}^{(0)}(z) b\left(\frac{x}{z}, \mathbf{k}_T^2\right), \quad (23)$$

где $T_a(\mathbf{k}_T^2, \mu^2)$ — формфактор Судакова, который определяет вероятность того, что партон a , обладающий поперечным импульсом \mathbf{k}_T^2 , не испустит другой партон в процессе КХД-эволюции до масштаба μ^2 :

$$\ln T_a(\mathbf{k}_T^2, \mu^2) = - \int_{\mathbf{k}_T^2}^{\mu^2} \frac{dp_T^2}{p_T^2} \frac{\alpha_s(p_T^2)}{2\pi} \sum_b \int_0^{1-\Delta} dz z P_{ba}^{(0)}(z). \quad (24)$$

* Способ вычисления TMD кварковых и глюонных распределений в протоне с помощью численного решения уравнений эволюции DGLAP был предложен в рамках так называемого подхода PB (Parton Branching Approach) [97, 98] (см. также [99, 100]).

Здесь мы используем обозначения, принятые в работах [95, 96]. Выполняя интегрирование обеих частей уравнения (23) по \mathbf{k}_T^2 в пределах $\mu_0^2 < \mathbf{k}_T^2 < \mu^2$ и учитывая очевидное соотношение $T_a(\mu^2, \mu^2) = 1$, легко получить, что

$$a(x, \mu^2) = T_a(\mu_0^2, \mu^2) a(x, \mu_0^2) + \int_{\mu_0^2}^{\mu^2} d\mathbf{k}_T^2 \left[T_a(\mathbf{k}_T^2, \mu^2) \frac{\alpha_s(\mathbf{k}_T^2)}{2\pi} \sum_b \int_x^{1-\Delta} \frac{dz}{z} P_{ab}^{(0)}(z) b\left(\frac{x}{z}, \mathbf{k}_T^2\right) \right], \quad (25)$$

где $\mu_0^2 \sim 1 \text{ ГэВ}^2$ — начальный масштаб, при котором начинается эволюция DGLAP партонных распределений $a(x, \mu^2)$. Выражение в квадратных скобках определяет TMD-функцию распределения партона a в так называемой интегральной формулировке процедуры KMR:

$$f_a(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2) = T_a(\mathbf{k}_T^2, \mu^2) \frac{\alpha_s(\mathbf{k}_T^2)}{2\pi} \sum_b \int_x^{1-\Delta} \frac{dz}{z} P_{ab}^{(0)}(z) b\left(\frac{x}{z}, \mathbf{k}_T^2\right), \quad (26)$$

при $\mathbf{k}_T^2 \geq \mu_0^2$. Кроме того, из соотношений (23) и (26) легко получить, что

$$f_a(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2) = \frac{\partial}{\partial \ln \mathbf{k}_T^2} [T_a(\mathbf{k}_T^2, \mu^2) a(x, \mathbf{k}_T^2)]. \quad (27)$$

Выражение (27) представляет собой так называемую дифференциальную формулировку процедуры KMR для TMD-функции распределения партона a . В области малых $\mathbf{k}_T^2 < \mu_0^2$ партонные распределения обычно определяются как

$$\frac{1}{\mathbf{k}_T^2} f_a(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2)|_{\mathbf{k}_T^2 < \mu_0^2} = \frac{1}{\mu_0^2} a(x, \mu_0^2) T_a(\mu_0^2, \mu^2), \quad (28)$$

что в точности обеспечивает выполнение условия нормировки:

$$\int_0^{\mu^2} \frac{d^2 \mathbf{k}_T}{\pi \mathbf{k}_T^2} f_a(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2) = a(x, \mu^2). \quad (29)$$

Значение параметра Δ , который входит как в выражение для формфактора Судакова (24), так и в выражение для TMD-функции распределения партонных (26), может быть определено различными способами [95, 96]. Так, условию строгого упорядочивания поперечных импульсов испускаемых партонных в уравнениях эволюции DGLAP отвечает величина

$$\Delta = |\mathbf{k}_T|/\mu, \quad (30)$$

в этом случае область применения распределений КМР ограничена условием $|\mathbf{k}_T| < \mu(1 - x)$. Другой выбор, а именно

$$\Delta = \frac{|\mathbf{k}_T|}{|\mathbf{k}_T| + \mu}, \quad (31)$$

соответствует условию упорядочивания по углу θ (или, что то же самое, по скорости y) между последним партоном, излученным в процессе КХД-эволюции каскада, и частицами, рождающимися в жестком подпроцессе. При таком значении параметра Δ допустимая область изменения поперечного импульса $|\mathbf{k}_T|$ определяется условием $|\mathbf{k}_T| < \mu(1/x - 1)$ и, следовательно, партонные распределения КМР могут быть использованы также при $\mathbf{k}_T^2 > \mu^2$ (в этом случае формфактор Судакова полагается равным 1). Конечно, в обычном коллинеарном приближении КХД такая кинематическая область является недоступной ввиду условия строгого упорядочивания партонов по виртуальности в уравнениях эволюции DGLAP.

Как было показано в работе [101], выражения для TMD-распределений партонов в интегральной (26) и дифференциальной (27) формулировках процедуры КМР полностью эквивалентны при использовании в качестве начальных условий коллинеарных распределений, при вычислении которых мягкие сингулярности устраняются с помощью параметра Δ . Однако в случае использования распределений, предложенных группами NNPDF [102], MMHT [103] или STEQ [104] для вычисления TMD-распределений партонов должна применяться интегральная формулировка (26).

Учет поправок следующего порядка (NLO) к формулам (24) и (26) был проведен в работе [105]. Показано, что основной эффект этих поправок связан с необходимостью более точного определения масштаба \mathbf{k}_T^2 , при котором вычисляются коллинеарные распределения, а именно: $\mathbf{k}_T^2 = \mathbf{k}_T^2/(1 - z)$. Кроме того, сами функции распределения партонов также должны включать в себя вклады порядка NLO. Роль поправок следующего порядка к функциям расщепления $P_{ab}^{(0)}(z)$ оказалась достаточно невелика [105].

2. TMD-ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРТОНОВ В ПРОТОНЕ

В настоящее время при проведении численных расчетов используется значительное число различных TMD-распределений партонов в протоне, полученных с помощью численных или аналитических решений уравнений КХД-эволюции BFKL-типа. Большинство из этих наборов включено в библиотеку TMDLIB [106]. Ключевые особенности некоторых (наиболее часто используемых) TMD-распределений глюонов и кварков рассмотрены ниже.

2.1. Функции распределения А0 и В0. В одной из пионерских работ [107] было получено численное решение уравнения ССФМ с учетом только сингулярных (пропорциональных $\ln 1/z$ и $\ln 1/(1-z)$) членов в функции расщепления (17). Начальная функция распределения глюонов в протоне $f_g^{(0)}(x, \mathbf{k}_T^2, q_0^2)$ была выбрана в следующем виде:

$$f_g^{(0)}(x, \mathbf{k}_T^2, q_0^2) = N x^{p_0} (1-x)^{p_1} \exp\left(-\frac{\mathbf{k}_T^2}{q_0^2}\right), \quad (32)$$

при этом численные значения параметров N , p_0 и p_1 определены из условия наилучшего описания экспериментальных данных коллабораций H1 и ZEUS для структурной функции протона $F_2(x, Q^2)$ в области $x < 5 \cdot 10^{-3}$ и $Q^2 > 4,5 \text{ ГэВ}^2$. Как уже было отмечено выше, коллинеарные расходимости, возникающие при $z \rightarrow 1$ в выражениях (17) и (18), устранялись ограничением соответствующих областей интегрирования до некоторого верхнего значения $z_{\max} = 1 - q_0/|\mathbf{q}_T|$, где \mathbf{q}_T — поперечный импульс испущенного глюона, см. (12). Такой подход аналогичен методу, применяемому в рамках формализма КМР. Кроме того, в процессе эволюции глюонного каскада постулировалось отсутствие глюонных эмиссий в области $|\mathbf{k}_T| < k_T^{\text{cut}}$ и $|\mathbf{q}_T| < q_0$. Это приближение представляется достаточно разумным, поскольку в области небольших масштабов $\mu^2 \sim q_0^2$ и малых поперечных импульсов k_T эффекты насыщения глюонных распределений и рекомбинации глюонов, останавливающие рост глюонных плотностей и, соответственно, сечений физических процессов, становятся существенными.

Функции распределения А0, предложенной в работе [107], отвечают следующие значения параметров начального распределения (32): $q_0 = k_T^{\text{cut}} = 1,33 \text{ ГэВ}$, $p_0 = 0$ и $p_1 = 4$. Функция В0 была получена при $q_0 = 0,8 \text{ ГэВ}$, $k_T^{\text{cut}} = 0,25 \text{ ГэВ}$, $p_0 = 0$ и $p_1 = 4$. Значения χ^2/dof , достигаемые при описании экспериментальных данных для структурной функции $F_2(x, Q^2)$ с использованием этих распределений, составляют 1,1 и 1,4 [107]. Отметим, что при определении численных параметров из данных использовалось однопетлевое выражение для бегущей константы связи КХД, факторизационный масштаб определялся согласно (21), а ренормализационный масштаб полагался равным поперечной массе конечных частиц. Для оценки неопределенностей результатов феноменологических расчетов, связанных с выбором ренормализационного масштаба μ_R , в работе [107] предложены функции распределения А0(В0)+ и А0(В0)–, параметры которых были определены при значениях $\mu_R \rightarrow 2\mu_R$ и $\mu_R \rightarrow \mu_R/2$ соответственно.

Зависимость функций распределения А0 и В0 от переменной x и поперечного импульса \mathbf{k}_T^2 для различных значений μ^2 приведена на рис. 3. Как легко видеть, величина k_T^{cut} в значительной степени определяет форму глюонных распределений в области небольших \mathbf{k}_T^2 . Кроме того, область малых поперечных импульсов наиболее чувствительна к на-

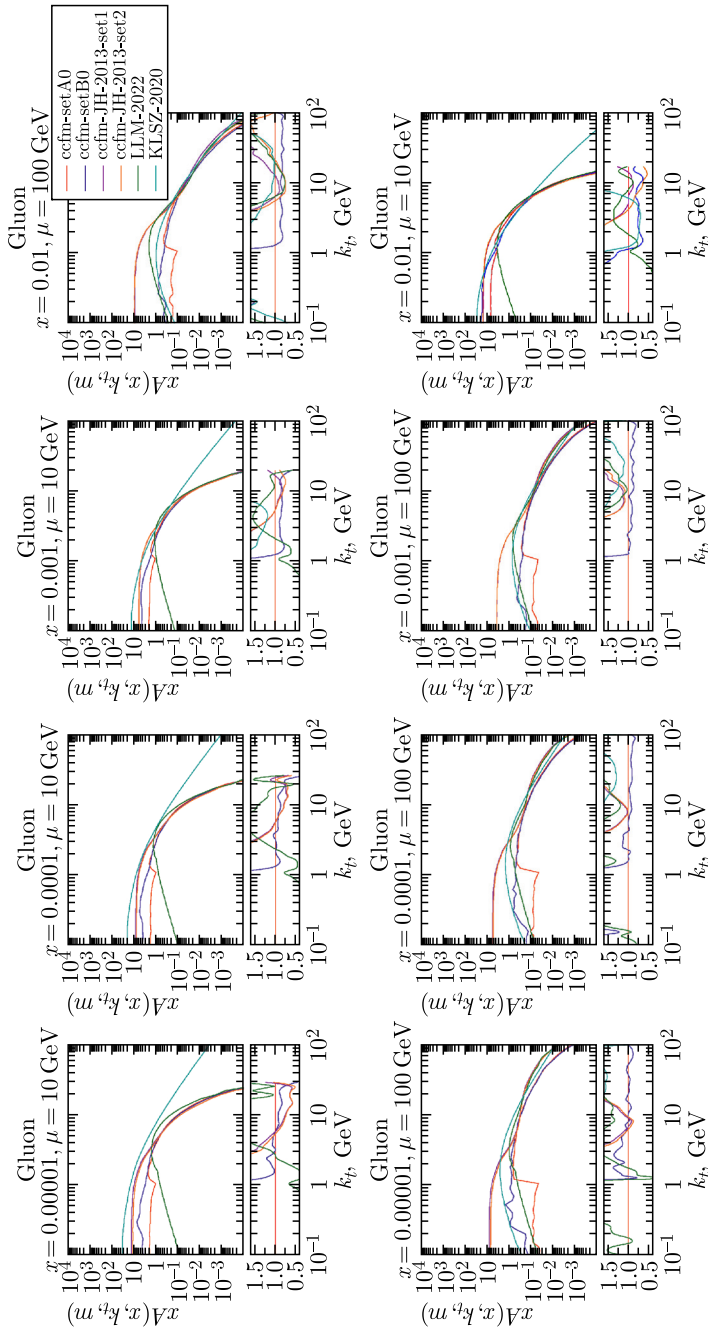


Рис. 3. Зависимость некоторых TMD-функций распределения глюонов от переменной x и поперечного импульса \mathbf{k}_T^2 для различных значений μ^2 . Рисунок сделан с помощью онлайн-сервиса <http://tmdplotter.desy.de>, составной части проекта TMDLIB [106]

чальному распределению (32), которое представляет собой непертурбативную часть глюонной плотности. При достаточно больших значениях k_T^2 поведение функций распределения глюонов определяется главным образом уравнением эволюции CCFM. Отметим, что распределение A0 показало лучшие результаты при описании экспериментальных данных для широкого класса процессов рождения частиц при высоких энергиях. Обе функции A0 и B0 включены в состав библиотеки TMDLIB [106] и Монте-Карло генератора событий PEGASUS [94].

2.2. Функции распределения JH'2013 set 1 и set 2. Как было отмечено выше, в ранней работе [107] уравнение эволюции CCFM было решено численно с учетом только вкладов сингулярных членов (первых слагаемых в квадратных скобках) в функции расщепления глюонов (17). Такое приближение может быть применимо с достаточной точностью при высоких энергиях, где $x \rightarrow 0$. В области промежуточных значений переменной x возрастает роль несингулярных членов в функции расщепления (17). Учет этих вкладов был проведен в работе [108], в которой представлены два новых набора TMD глюонных распределений: JH'2013 set 1 и JH'2013 set 2; при этом в обоих случаях в качестве начального распределения использовалась функция вида (32). Численные значения соответствующих параметров были определены из условия наилучшего описания недавних прецизионных данных [8, 9] коллабораций H1 и ZEUS для структурных функций протона $F_2(x, Q^2)$ и/или $F_2^c(x, Q^2)$. Так, параметры функции распределения JH'2013 set 1 (а именно $p_0 = -0,18074$, $p_1 = 6,5732$, $q_0 = k_T^{\text{cut}} = 2,2$ ГэВ) были получены с помощью данных для функции $F_2(x, Q^2)$ в области $x < 5 \cdot 10^{-3}$ и $Q^2 > 5$ ГэВ², тогда как для определения их значений в случае распределения JH'2013 set 2 ($p_0 = -0,14739$, $p_1 = 11,431$, $q_0 = k_T^{\text{cut}} = 2,2$ ГэВ) дополнительно использовались результаты измерений структурной функции $F_2^c(x, Q^2)$ при $Q^2 > 2,5$ ГэВ². Во всех расчетах применялось двухпетлевое выражение для константы связи КХД. Отметим, что полученные значения приводят к достаточно хорошему описанию экспериментальных данных для структурных функций протона: действительно, величина χ^2/dof составляет 1,18 в случае функции $F_2(x, Q^2)$ и 1,43 в случае ее комбинации с функцией $F_2^c(x, Q^2)$. По описанному ранее подходу [107] для оценки неопределенностей результатов феноменологических расчетов, связанных с выбором ренормализационного и факторизационного масштабов, в работе [108] предложены функции распределения JH'2013 $\mu_{R+}(\mu_{F+})$ и JH'2013 $\mu_{R-}(\mu_{F-})$, параметры которых были определены при значениях $\mu_R \rightarrow 2\mu_R$ ($\mu_F \rightarrow 2\mu_F$) и $\mu_R \rightarrow \mu_R/2$ ($\mu_F \rightarrow \mu_F/2$) соответственно.

Зависимость TMD-функций распределения JH'2013 set 1 и set 2 от переменной x и поперечного импульса k_T^2 для различных значений μ^2 приведена на рис. 3. Видно, что глюонные распределения набора JH'2013 существенно отличаются от функций A0 и B0 как по форме, так и по

абсолютной величине. Эти отличия тесно связаны с учетом различных вкладов в эволюцию глюонного каскада в рассматриваемых подходах. Как и распределения A_0 и B_0 , функции JH'2013 set 1 и set 2 включены в состав библиотеки TMDLIB [106] и Монте-Карло генератора событий PEGASUS [94].

2.3. Функция распределения LLM'2022. Как было отмечено выше (см. также [107, 108]), в области небольших значений поперечного импульса \mathbf{k}_T^2 поведение глюонной плотности определяется главным образом поведением соответствующего начального распределения, которое представлено первым слагаемым в уравнении эволюции (16). Это позволяет непосредственно определить начальную функцию $f_g^{(0)}(x, \mathbf{k}_T^2, q_0^2)$ из экспериментальных данных, полученных в области малых поперечных импульсов для процессов, сечения которых достаточно чувствительны к глюонным распределениям в протоне. Конечно, подобные вычисления должны учитывать эффекты рекомбинации, взаимодействия глюонов из различных партонных каскадов, которые обычно интерпретируются как эффекты насыщения глюонной плотности, приводящие к восстановлению условия унитарности (см. также [21]).

Одной из наиболее известных моделей, предложенных для описания эффектов насыщения глюонной плотности при $x \rightarrow 0$, является так называемая модель Гоек-Берната и Вустхофа (GBW) [109, 110], основанная на дипольной модели [111]. Модель GBW успешно применялась для описания процессов инклюзивного [109] и дифракционного [110] глубоко-конеупругого рассеяния при энергиях коллайдера HERA. Так, в рамках дипольной модели [111] сечение взаимодействия фотона с виртуальностью Q^2 и протона может быть представлено в форме

$$\sigma_{T,L}(x, Q^2) = \int d^2\mathbf{r} \int_0^1 dz |\Psi_{T,L}(z, \mathbf{r})|^2 \hat{\sigma}(x, r^2), \quad (33)$$

где \mathbf{r} — расстояние между кварком и антикварком в цветном диполе, который образуется в процессе расщепления $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$. Динамика насыщения описывается эффективным сечением взаимодействия $\hat{\sigma}(x, r^2)$ диполя и протона, при этом кварк обладает долей z продольного импульса начального виртуального фотона. Квадраты волновых функций для поперечно-поляризованных и продольно-поляризованных фотонов могут быть записаны как

$$\begin{aligned} |\Psi_T(z, \mathbf{r})|^2 &= \frac{6\alpha}{4\pi^2} \sum_q e_q^2 \left[(z^2 + (1-z)^2) \bar{Q}^2 K_1^2(\bar{Q}r) + m_q^2 K_0^2(\bar{Q}r) \right], \\ |\Psi_L(z, \mathbf{r})|^2 &= \frac{6\alpha}{4\pi^2} \sum_q e_q^2 4z^2(1-z)^2 Q^2 K_0^2(\bar{Q}r), \end{aligned} \quad (34)$$

где $K_0(x)$ и $K_1(x)$ — функции Мак-Дональда и $\bar{Q}^2 = z(1-z)Q^2 + m_q^2$. В работе [109] было получено следующее выражение для эффективного сечения рассеяния $\hat{\sigma}(x, r^2)$:

$$\hat{\sigma}(x, r^2) = \sigma_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4R_0^2(x)}\right) \right], \quad (35)$$

где

$$R_0(x) = \frac{1}{Q_0} \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\lambda/2}. \quad (36)$$

В рамках модели насыщения ТМД-функция распределения глюонов связана с эффективным сечением $\hat{\sigma}(x, r^2)$ следующим соотношением:

$$\hat{\sigma}(x, r^2) = \frac{4\pi^2\alpha_s}{3} \int \frac{d\mathbf{k}_T^2}{\mathbf{k}_T^2} [1 - J_0(\mathbf{k}_T^2 r)] f_g(x, \mathbf{k}_T^2), \quad (37)$$

из которого, учитывая (35), можно получить аналитическое выражение для глюонной плотности (функции распределения GBW):

$$f_g(x, \mathbf{k}_T^2) = \frac{3\sigma_0}{4\pi^2\alpha_s} R_0^2(x) \mathbf{k}_T^2 \exp(-R_0^2(x) \mathbf{k}_T^2). \quad (38)$$

Значения феноменологических параметров $\sigma_0 = 29,12$ мб, $\lambda = 0,277$, $\alpha_s = 0,2$, $Q_0 = 1$ ГэВ и $x_0 = 4,1 \cdot 10^{-5}$ были определены [109] из условия наилучшего описания поведения сечения взаимодействия виртуального фотона и протона $\sigma(\gamma^* p)$. При малых Q^2 сечение $\sigma(\gamma^* p)$, полученное в рамках модели насыщения GBW, перестает расти при $QR_0(x) < 1$. Таким образом, величина $Q_s \sim 1/R_0(x)$ представляет собой характерный масштаб насыщения глюонной плотности.

В последующих работах [112–117] предлагалось использовать выражение (38) в несколько измененной форме. В частности, в недавней работе [117] предложено следующее выражение:

$$f_g(x, \mathbf{k}_T^2) = c_g (1-x)^{b_g} \sum_{n=1}^3 (c_n R_0(x) |\mathbf{k}_T|)^n e^{-R_0(x) |\mathbf{k}_T|}, \quad (39)$$

$$b_g = b_g(0) + \frac{4C_A}{\beta_0} \ln \frac{\alpha_s(Q_0^2)}{\alpha_s(\mathbf{k}_T^2)},$$

где $C_A = N_c = 3$ и $\beta_0 = 11 - 2N_f/3$. Это выражение позволяет описать в рамках модели кварк-глюонных струн (см. [118]) экспериментальные данные для сечений рождения заряженных адронов в столкновениях протонов на коллайдере LHC в области небольших поперечных импульсов. Значения параметров $c_1 = 5$, $c_2 = 3$, $c_3 = 2$, $Q_0 = 1,233$ ГэВ были определены* из экспериментальных данных коллабораций ATLAS

* Подробное описание соответствующих вычислений приведено в работе [118].

и CMS для спектров заряженных частиц в области центральных быстрот и $p_T \leq 1$ ГэВ. С целью уточнения значения параметра $b_g(0)$, который определяет глюонную плотность (39) главным образом в области промежуточных и больших x , были использованы экспериментальные данные для ряда жестких процессов КХД, изучаемых в протон-протонных или электрон-протонных столкновениях высоких энергий. В частности, были использованы данные для процессов инклюзивного рождения b -струй, хиггсовских частиц на коллайдере LHC и данные для сечений рождения тяжелых (c и b) кварков на коллайдере HERA (см. подробнее [117]). Функция распределения (39) отличается от функции GBW в области малых $|\mathbf{k}_T| \leq 1,5$ ГэВ и практически совпадает с последней при $|\mathbf{k}_T| \geq 1,5$ ГэВ. Как было показано в работе [117], режим насыщения глюонной плотности, при котором эффективное сечение рассеяния перестает зависеть от поперечного размера r цветного диполя, в случае распределения (39) достигается при несколько меньшем значении r по сравнению с функцией GBW.

Быстрое падение функции распределения (39) с ростом поперечного импульса \mathbf{k}_T^2 дает возможность рассматривать ее в качестве начального условия для эволюции CCFM (см. [107]). Так, с помощью программы UPDFEVOLVE [92] это уравнение было решено численно, что позволило определить TMD-функцию распределения глюонов в протоне в широкой области изменения переменных x , \mathbf{k}_T^2 и μ^2 . В дальнейшем мы будем называть ее функцией распределения LLM'2022. Было показано [119], что использование этой функции позволяет достичь хорошего согласия с экспериментальными данными коллабораций H1 [120] и ZEUS [121] для продольной структурной функции $F_L(x, Q^2)$ при $1 \lesssim Q^2 \lesssim 100$ ГэВ². Более того, функция LLM'2022 обеспечивает лучшее описание экспериментальных данных HERA для процессов ассоциативного рождения прямых фотонов и струй в электрон-протонных столкновениях, чем функция распределения JH'2013 [122].

Зависимость TMD-распределения глюонов LLM'2022 от переменной x и поперечного импульса \mathbf{k}_T^2 для различных значений μ^2 приведена на рис. 3. Отметим, что предложенный подход, при котором различные параметры начального глюонного распределения определяются в соответствующих кинематических областях, позволяет существенно уменьшить теоретические неопределенности рассчитанной в конечном итоге глюонной плотности. Функция распределения глюонов LLM'2022 входит в состав общедоступной библиотеки TMDLIB [106] и Монте-Карло генератора PEGASUS [94].

2.4. Аналитические выражения для TMD-распределений партонов в приближении двойного скейлинга. Как было показано в работе [123], в рамках формализма KMR могут быть получены аналитические выражения для TMD-функций распределения партонов с использованием в качестве начальных условий коллинеарных партонных плотностей,

вычисленных в так называемом приближении двойного скейлинга КХД (DAS, или Double Asymptotic Scaling Approximation) [124–126]. Это приближение основано на свойствах асимптотического поведения решений уравнений эволюции DGLAP при $x \rightarrow 0$ [127]. Так, в рамках подхода DAS функции распределения морских кварков и глюонов в протоне при начальном масштабе $\mu_0^2 \sim 1 \text{ ГэВ}^2$ предполагаются плоскими (независящими от x):

$$xa(x, \mu_0^2) = A_a, \quad (40)$$

где $a = q_s$ или g . В работах [124, 125, 128] были получены простые аналитические выражения для решений уравнений DGLAP в ведущем и следующем за ним порядках теории возмущений КХД в области малых x с использованием начальных условий (40). В ведущем порядке эти выражения имеют вид

$$a(x, \mu^2) = a^+(x, \mu^2) + a^-(x, \mu^2), \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} xq_s^+(x, \mu^2) &= \frac{\phi}{3} (A_g + CA_q) \tilde{I}_1(\sigma) e^{-\bar{d}_+ s} + O(\rho), \\ xq_s^-(x, \mu^2) &= A_q e^{-d_- s} + O(x), \\ xg^+(x, \mu^2) &= (A_g + CA_q) \bar{I}_0(\sigma) e^{-\bar{d}_+ s} + O(\rho), \\ xg^-(x, \mu^2) &= -CA_q e^{-d_- s} + O(x) \end{aligned} \quad (42)$$

и

$$\tilde{I}_n(\sigma) = \begin{cases} \rho^n I_n(\sigma), & \text{если } s \geq 0, \\ (-\tilde{\rho})^n J_n(\tilde{\sigma}), & \text{если } s < 0, \end{cases} \quad (43)$$

$$\bar{I}_n(\sigma) = \begin{cases} \rho^{-n} I_n(\sigma), & \text{если } s \geq 0, \\ \tilde{\rho}^{-n} J_n(\tilde{\sigma}), & \text{если } s < 0, \end{cases} \quad (44)$$

при этом

$$\begin{aligned} s &= \ln \left(\frac{\alpha_s(\mu_0^2)}{\alpha_s(\mu^2)} \right), \quad \rho = \frac{\sigma}{2 \ln(1/x)}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\tilde{\sigma}}{2 \ln(1/x)}, \\ \sigma &= 2\sqrt{|\hat{d}_+| s \ln(1/x)}, \quad \tilde{\sigma} = 2\sqrt{-|\hat{d}_+| s \ln(1/x)}, \quad \phi = \frac{N_f}{C_A}, \quad C = \frac{C_F}{C_A}, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \hat{d}_+ &= -\frac{4C_A}{\beta_0}, \quad \bar{d}_+ = 1 + \frac{4N_f(1-C)}{3\beta_0}, \\ d_- &= \frac{4C_F}{3\beta_0}, \quad \beta_0 = 11 - \frac{2}{3}N_F. \end{aligned}$$

Функции $J_n(x)$ и $I_n(x)$ в выражениях (43) и (44) — обычные и модифицированные функции Бесселя первого рода порядка n . Численные

значения параметров A_a и μ_0^2 были определены [128–130] из экспериментальных данных HERA для структурной функции протона $F_2(x, Q^2)$ при $Q^2 < 18$ ГэВ². Отметим, что для описания данных в области малых $Q^2 \sim 0,5$ ГэВ² ренормализационный масштаб полагался равным $\mu^2 \rightarrow \mu^2 + m_\rho^2$, где m_ρ — масса ρ -мезона: $\alpha_s(\mu^2) \rightarrow \alpha_{\text{fr}}(\mu^2) = \alpha_s(\mu^2 + m_\rho^2)$. Кроме того, значения этих параметров также были определены с помощью аналитического выражения для константы связи КХД, предложенного в работах [131, 132]:

$$\alpha_s(\mu^2) \rightarrow \alpha_{\text{an}}(\mu^2) = \alpha_s(\mu^2) - \frac{4\pi}{\beta_0} \frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{\mu^2 - \Lambda_{\text{QCD}}^2}. \quad (46)$$

Как было отмечено выше, партонные плотности (41) и (42) могут быть использованы для вычисления ТМД-функций распределения партонов с помощью метода КМР. Такие расчеты были проведены в работе [123]. Аналитические результаты, полученные с использованием интегральной формулировки (26) процедуры КМР, имеют вид

$$f_a(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2) = 4C_a T_a(\mathbf{k}_T^2, \mu^2) \frac{\alpha_s(\mathbf{k}_T^2)}{4\pi} \times \\ \times \left[\overline{D}_a(\Delta) a \left(\frac{x}{x_0}, \mathbf{k}_T^2 \right) + \overline{D}_a^+(\Delta) a^+ \left(\frac{x}{x_0}, \mathbf{k}_T^2 \right) \right], \quad (47)$$

где

$$\overline{D}_a(\Delta) = D_a(\Delta) + D_a^-(\Delta), \quad \overline{D}_a^+(\Delta) = D_a^+(\Delta) - D_a^-(\Delta), \quad (48)$$

и

$$D_q(\Delta) = \ln \left(\frac{1}{\Delta} \right) - \frac{1-\Delta}{4}(3-\Delta), \\ D_q^-(\Delta) = -\frac{(1-\Delta)\phi}{6}(2-\Delta+2\Delta^2), \\ D_q^+(\Delta) = \frac{3(1-\Delta)}{2C} \left[\frac{2-\Delta+2\Delta^2}{3\bar{\rho}_q} - \frac{13+\Delta+3\Delta^2}{18} \right], \\ D_g(\Delta) = \ln \left(\frac{1}{\Delta} \right) - \frac{1-\Delta}{12}(13-5\Delta+4\Delta^2), \quad (49) \\ D_g^-(\Delta) = 0, \quad D_g^+(\Delta) = \frac{1}{\bar{\rho}_g} + \frac{-3+2\Delta+\Delta^2}{4} + \frac{C\phi}{3}, \\ C_q = C_F, \quad C_g = C_A, \quad \bar{\rho}_a = \rho_a(x \rightarrow x/x_0), \quad x_0 = 1-\Delta, \\ \rho_g = \frac{\overline{I}_0(\sigma)}{\overline{I}_1(\sigma)}, \quad \rho_q = \frac{\tilde{I}_1(\sigma)}{\overline{I}_0(\sigma)}.$$

Значения параметра Δ определяются в соответствии с условиями сильного упорядочивания (30) или углового упорядочивания (31) партон-

ных эмиссий. Следует отметить, что, согласно (47)–(49), использование обычных предположений (28) подхода КМР относительно поведения TMD-распределений партонов в области малых \mathbf{k}_T^2 не требуется.

Выражения (41)–(45) и, следовательно, аналитические выражения (47)–(49) для TMD-распределений партонов справедливы в асимптотической области малых $x \leq 5 \cdot 10^{-2}$. Как было показано, например, в работах [133–135], функции распределения $a(x, \mu^2)$ при больших значениях $x \sim 0,1–0,2$ могут быть получены из (41) заменой вида

$$a(x, \mu^2) \rightarrow a(x, \mu^2)(1-x)^{\beta_a(s)}, \quad \beta_a(s) = \beta_a(0) + \frac{4C_a s}{\beta_0}, \quad (50)$$

при этом, согласно [136–138], справедлива оценка

$$\beta_{q_v}(0) \sim 3, \quad \beta_{q_s}(0) \sim \beta_{q_v}(0) + 2 \sim 5, \quad \beta_g(0) \sim \beta_{q_v}(0) + 1 \sim 4. \quad (51)$$

Однако значения $\beta_a(0)$ обычно определяются из экспериментальных данных [139–141]. Следуя (50), в дальнейших расчетах предполагается, что в области $x > 5 \cdot 10^{-2}$ TMD-распределения партонов могут быть представлены в виде

$$f_a(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2) \rightarrow f_a(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2)(1-x/x_0)^{\beta_a(s)}. \quad (52)$$

Из условия наилучшего описания экспериментальных данных коллабораций CMS [142] и ATLAS [143] для процессов инклюзивного рождения струй b -кварков в протон-протонных столкновениях на коллайдере LHC при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ были получены значения $\beta_g(0) = 5,77$ и $\beta_g(0) = 3,84$, которые соответствуют использованию в расчетах выражений $\alpha_{\text{fr}}(\mu^2)$ и $\alpha_{\text{an}}(\mu^2)$ для константы связи КХД. Подробное описание соответствующих вычислений в рамках k_T -факторизационного подхода приведено в работах [144, 145]. Отметим, что функция, параметры которой были определены при выборе условия (31) и константы связи КХД $\alpha_{\text{fr}}(\mu^2)$, входит в состав библиотеки TMDLIB [106] (функция KLSZ'2020, см. рис. 3) и Монте-Карло генератора событий PEGASUS [94].

3. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ В РАМКАХ k_T -ФАКТОРИЗАЦИОННОГО ПОДХОДА

Ниже обсуждаются методы вычислений калибровочно-инвариантных амплитуд партонных подпроцессов вне массовой поверхности и сечений физических процессов. Приводится краткое описание основных возможностей современных Монте-Карло генераторов событий PEGASUS, CASCADE и KaTie.

3.1. Амплитуды партонных подпроцессов вне массовой поверхности. Согласно (2) сечения (и иные характеристики) различных физических процессов в рамках k_T -факторизационного подхода КХД определяются сверткой TMD-распределений партонов в адроне (протоне)

и амплитуд соответствующих жестких подпроцессов рассеяния. Ввиду отсутствия в общем случае условия строгого упорядочивания по поперечным импульсам партонов, испускаемых во время КХД-эволюции партонного каскада, в расчетах становится необходимым учитывать зависимость этих амплитуд от виртуальности начальных частиц, т. е. вычислять их более точно, без обычных упрощений коллинеарного приближения КХД.

Такие вычисления могут быть выполнены в рамках формализма, основанного на эффективной теории поля в мультiredжевской кинематике [146–148] (см. также [149]). Эффективное действие для реджезованных глюонов и кварков обеспечивает t -канальную факторизацию древесных амплитуд в этом пределе и их калибровочную инвариантность во всех порядках теории возмущений. Согласно (7) асимптотическое выражение для амплитуды множественного рождения состоит из калибровочно-инвариантных эффективных вершин, описывающих процесс рождения обычных частиц, отделенных друг от друга большими интервалами по быстрой. Эти вершины связаны друг с другом с помощью обменов t -канальными виртуальными степенями свободы — реджезованными глюонами (R^\pm) и кварками (Q^\pm). Как и ранее, индексы \pm обозначают большую компоненту импульса (в переменных светового конуса), которую переносит реджезованный партон, обладающий также и поперечным импульсом того же порядка. Эффективные вершины взаимодействия включают в себя нелокальные индуцированные вклады, обеспечивающие калибровочную инвариантность амплитуд в реджевском пределе, несмотря на виртуальность взаимодействующих партонов. Так, например, вершина R^+R^-g для процесса рождения янг-миллсовского глюона с импульсом $k = k_1 + k_2$ в столкновении двух реджезованных глюонов R^+ и R^- , обладающих импульсами k_1 и k_2 и цветовыми индексами a и b , имеет вид [150]

$$\Gamma_{+\mu-}^{abc}(k_1, k_2) = -2gf^{abc} \times \\ \times \left[(k_2 - k_1)_\mu + \left(\frac{k_1^2}{k_2^-} + k_1^+ \right) n^-_\mu - \left(\frac{k_2^2}{k_1^+} + k_2^- \right) n^+_\mu \right]. \quad (53)$$

Вершины взаимодействия реджезованных глюонов и кварков, $R^\pm qq$, записываются как

$$\Gamma_\pm^a = gt^a \hat{n}^\mp, \quad (54)$$

а вершины рассеяния с участием реджезованных кварков, $Q^\pm qq$, могут быть представлены в форме [63, 151, 152]

$$\Gamma_{\pm\mu}^a(k, q) = gt^a \left(\gamma_\mu + n_\mu^\mp \frac{\hat{k}}{q^\mp} \right), \quad (55)$$

где k и q — импульсы реджезованного кварка и янг-миллсовского глюона с цветовым индексом a соответственно. В системе центра масс столк-

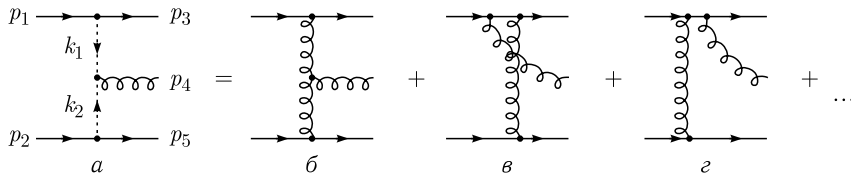


Рис. 4. Схематичное изображение амплитуды процесса $q + q' \rightarrow q + g + q'$ в мультиреджевской кинематике и соответствующие фейнмановские диаграммы. Две диаграммы, в которых конечный глюон испускается из нижней кварковой линии, не показаны

вающихся частиц 4-векторы n^\pm направлены вдоль оси взаимодействия z , $n^\pm = (1, 0, 0, \mp 1)$. Правила Фейнмана для эффективной теории поля приведены и детально обсуждаются в работе [153].

Наиболее часто в последующих расчетах будут встречаться различные подпроцессы, при вычислении амплитуд вне массовой поверхности которых необходимо использовать эффективные вершины взаимодействия вида (53) с участием двух реджезованных глюонов. В качестве примера можно привести процесс рассеяния $q(p_1) + q'(p_2) \rightarrow q(p_3) + g(p_4) + q'(p_5)$. Калибровочно-инвариантный набор фейнмановских диаграмм, дающих вклад в амплитуду этого процесса, изображен на рис. 4. Непосредственными вычислениями нетрудно показать, что в мультиреджевском пределе соответствующая амплитуда может быть представлена в факторизованной форме (7) с обменом реджезованными глюонами в t -канале (см., например, [154]):

$$\mathcal{A}(q + q' \rightarrow q + g + q') \sim [\bar{u}(p_3)\Gamma_-^a u(p_1)] \frac{1}{t_{13}} \Gamma_{+\mu-}^{abc}(k_1, k_2) \varepsilon_c^\mu(p_4) \frac{1}{t_{25}} [\bar{u}(p_5)\Gamma_+^b u(p_2)]. \quad (56)$$

Выражение (56), конечно, удовлетворяет тождеству Славнова–Тейлора, поскольку $\Gamma_{+\mu-}^{abc}(k_1, k_2)(k_1 + k_2)^\mu = 0$.

В дальнейших расчетах широко используется метод, предложенный в работах [23, 24] (см. также [21, 22]). В рамках этого метода реджезованные глюоны, обладающие импульсами $k_1 = z_1 p_1 + k_{1T}$ и $k_2 = z_2 p_2 + k_{2T}$, рассматриваются как начальные виртуальные частицы, участвующие в жестком взаимодействии. Полагая светоподобные векторы n^\pm равными $n^+_\mu = 2p_{2\mu}/\sqrt{s}$, $n^-_\mu = 2p_{1\mu}/\sqrt{s}$ и выбирая специальную физическую (аксиальную) калибровку, $q_\mu A^\mu = 0$, в которой поляризаационный тензор глюона с импульсом k имеет вид

$$d^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu k^\nu + q^\nu k^\mu}{(k \cdot q)} - q^2 \frac{k^\mu k^\nu}{(k \cdot q)^2}, \quad (57)$$

где q — некоторый 4-вектор, легко заметить, что

$$p_1^\mu d_{\mu\nu}(k_1) = \frac{k_{1T}^\nu}{z_1}, \quad p_2^\mu d_{\mu\nu}(k_2) = \frac{k_{2T}^\nu}{z_2}. \quad (58)$$

Из соотношений (58) следует, что специальный выбор вектора поляризации для реджезованного глюона с импульсом k (а именно $\varepsilon^\mu(k) = k_T^\mu/|\mathbf{k}_T|$) позволяет исключить вклад диаграмм v и z , изображенных на рис. 4 (а также аналогичной группы диаграмм, в которых конечный глюон испускается из нижней кварковой линии) в амплитуду рассматриваемого процесса. Более того, в этом случае эффективная вершина взаимодействия (53) может быть заменена обычной трехглюонной вершиной (см., например, [155]):

$$C_{\mu\nu\lambda}^{abc}(q_1, q_2, q_3) = g f^{abc} \times \\ \times \left[(q_2 - q_1)^\lambda g^{\mu\nu} + (q_3 - q_2)^\mu g^{\nu\lambda} + (q_1 - q_3)^\nu g^{\mu\lambda} \right], \quad (59)$$

при этом, несмотря на виртуальность начальных глюонов, калибровочная инвариантность амплитуды рассеяния сохраняется [23, 24]. В случае абелевского взаимодействия структура эффективной вершины (54) также обеспечивает калибровочную инвариантность рассчитанных амплитуд.

Отметим, что выражение для поляризационного тензора виртуальных глюонов также можно получить, рассматривая процесс испускания такого глюона находящимся на массовой поверхности кварком: $q(p) \rightarrow q'(p') + g(k)$. Действительно,

$$\sum \varepsilon^\mu(k) \varepsilon^{*\nu}(k) \sim L^{\mu\nu} = g^2 \frac{1}{k^2} \text{tr}[(\hat{p}' + m_q) \gamma^\mu (\hat{p} + m_q) \gamma^\nu] = \\ = g^2 \frac{1}{k^2} [8p^\mu p^\nu - 4(p \cdot k) g^{\mu\nu}], \quad (60)$$

где m_q — масса кварка. Пренебрегая вторым слагаемым в правой части соотношения (60) в рассматриваемой кинематической области, $k \ll p$, а также полагая в этом пределе $k = zp + k_T$, легко получить, что

$$\sum \varepsilon^\mu(k) \varepsilon^{*\nu}(k) = \frac{k_T^\mu k_T^\nu}{\mathbf{k}_T^2}. \quad (61)$$

В пределе $|\mathbf{k}_T| \rightarrow 0$ выражение (61) переходит в обычное выражение для матрицы плотности глюонов, находящихся на массовой поверхности: $\sum \varepsilon^\mu(k) \varepsilon^{*\nu}(k) \rightarrow -g^{\mu\nu}/2$. Следует подчеркнуть, что предложенный подход [23, 24] и, в частности, тензор поляризации (61) активно применяется при проведении различных феноменологических расчетов (см., например, [39, 40, 46, 47, 156]). Кроме того, в недавней работе [157] был предложен метод автоматического вычисления амплитуд вне массовой поверхности (в древесном приближении) для определенного класса партонных подпроцессов. Этот метод, основанный на соотношениях рекурсии Бритто–Качасо–Фен–Виттена (BCFW), используется в Монте-Карло генераторе KaTie [158].

3.2. Сечение физических процессов. Как уже было упомянуто выше, в рамках k_T -факторизационного подхода сечение физических про-

цессов определяется сверткой TMD-распределений партонов в протоне и сечений соответствующих жестких партонных подпроцессов вне массовой поверхности. В общем случае рождения n частиц формула для сечения имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma(pp \rightarrow p_1 + \dots + p_n + X) = & \frac{\pi}{\widehat{s}F} (4\pi)^{2-2n} \sum_{a,b} |\mathcal{A}(a + b \rightarrow p_1 + \dots + p_n)|^2 \times \\ & \times f_a(x_1, \mathbf{k}_{1T}^2, \mu^2) f_b(x_2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu^2) \times \\ & \times d\mathbf{k}_{1T}^2 d\mathbf{k}_{2T}^2 d\mathbf{p}_{1T}^2 \dots d\mathbf{p}_{(n-1)T}^2 dy_1 \dots dy_n \frac{d\phi_1}{2\pi} \dots \frac{d\phi_{n-1}}{2\pi}, \quad (62) \end{aligned}$$

где $\widehat{s} = (k_1 + k_2)^2$, а \mathbf{p}_{iT} , y_i и ϕ_i — поперечные импульсы, быстроты (в системе центра масс сталкивающихся протонов) и азимутальные углы конечных частиц. В формуле (62) $|\mathcal{A}(a + b \rightarrow p_1 + \dots + p_n)|^2$ — квадрат амплитуды вне массовой поверхности жесткого подпроцесса рассеяния, где, как обычно, проведено суммирование по поляризациям конечных частиц и усреднение по поляризациям начальных. Доли продольных импульсов начальных протонов x_1 и x_2 могут быть вычислены с помощью закона сохранения энергии-импульса:

$$x_1 \sqrt{s} = \sum_{i=1}^n m_{iT} \exp(y_i), \quad x_2 \sqrt{s} = \sum_{i=1}^n m_{iT} \exp(-y_i), \quad (63)$$

где поперечная масса i -й частицы $m_{iT}^2 = m_i^2 + \mathbf{p}_{iT}^2$. Выражение для инвариантного потока F обычно выбирается в соответствии с общим определением [159]:

$$F = 2\lambda^{1/2}(\widehat{s}, k_1^2, k_2^2), \quad \lambda(x, y, z) = (x - y - z)^2 - 4yz. \quad (64)$$

Отметим, что выражение (62) используется, в частности, в Монте-Карло генераторе событий PEGASUS [94].

3.3. Монте-Карло генераторы событий. Как известно, различные Монте-Карло генераторы событий широко используются в настоящее время как теоретическими группами, так и экспериментальными коллаборациями для анализа данных по рождению и распаду частиц на современных коллайдерах. Такие генераторы, как PYTHIA 8.2 [160], MCFM 9.0 [161], MadGraph5_aMC@NLO [162], SHERPA 2.2 [163] и др., позволяют проводить вычисления в рамках коллинеарного приближения КХД в ведущем или следующем за ним порядках теории возмущений. Различные алгоритмы численного моделирования партонных ливней в начальном и/или конечном состоянии расширяют возможности Монте-Карло генераторов и позволяют уточнить соответствующие предсказания (см., например, [164–167]). В последнее время были разработаны генераторы событий CASCADE [93] и KaTie [158], в которых применяется k_T -факторизационный подход КХД для расчетов сечений жестких процессов при высоких энергиях. В основе генератора CASCADE

лежит уравнение глюонной эволюции CCFM; в последней версии (3.0) также появилась возможность использовать подход РВ для вычисления TMD-распределений как глюонов, так и кварков всех ароматов. С помощью генератора KaTie могут быть рассчитаны в автоматическом режиме амплитуды вне массовой поверхности для произвольных процессов Стандартной модели (с участием до четырех частиц в конечном состоянии) в древесном приближении, при этом используется метод, основанный на соотношениях рекурсии BCFW [157]. Интерфейс к TMD-функциям распределения партонов в протоне обеспечивает пакет TMDLIB [106].

Недавно был разработан новый генератор событий PEGASUS (Particle Event Generator: A Simple-in-Use System) [94] (см. рис. 5). Он предназначен для проведения расчетов сечений широкого ряда процессов КХД в pp -, $p\bar{p}$ - или ep -столкновениях высоких энергий (которые изучаются или будут изучаться в экспериментах на современных коллайдерах и коллайдерах следующего поколения) с учетом TMD-динамики партоновых распределений. В его состав входит библиотека, включающая в себя значительное число амплитуд вне массовой поверхности различных подпроцессов взаимодействия кварков и глюонов, а также набор TMD-функций распределения партонов в протоне, которые наиболее часто применяются в феноменологических исследованиях в настоящее время. Сгенерированные события (взвешенные или невзвешенные, в зависимости от желания пользователя) могут быть записаны в выходной файл в формате Les Houches Event (*.lhe) [168] для их дальнейшей обработки. PEGASUS является первым и (пока) единственным Монте-Карло генератором событий, в котором используется удобный и интуитивно понятный графический интерфейс для задания различных параметров численных расчетов, таких, например, как массы частиц, относительные вероятности их распадов и др. Встроенный инструмент PEGASUS PLOTTER позволяет отображать (и даже использовать) результаты расчетов непосредственно во время набора статистики. Предусмотрена возможность работы с генератором из командной строки (в терминале), что может быть удобно в случае необходимости накопления достаточно большого числа событий. Кроме того, PEGASUS не требует специальной процедуры установки и свободно распространяется в виде исполняемого файла (вместе с несколькими необходимыми библиотеками) для компьютеров под управлением операционной системы Linux. Эти отличительные особенности, а также отсутствие необходимости для пользователя обладать специальными навыками программирования и/или опытом работы с другими генераторами, выгодно выделяют PEGASUS из ряда аналогичных программных средств. Несмотря на то, что PEGASUS был разработан относительно недавно, он уже был использован коллаборацией ALICE при анализе последних экспериментальных данных для сечений процесса инклюзивного рождения мезонов J/ψ в протон-протонных столкновениях на коллайдере LHC при энергиях $\sqrt{s} = 5,02$ и 13 ТэВ [169, 170].

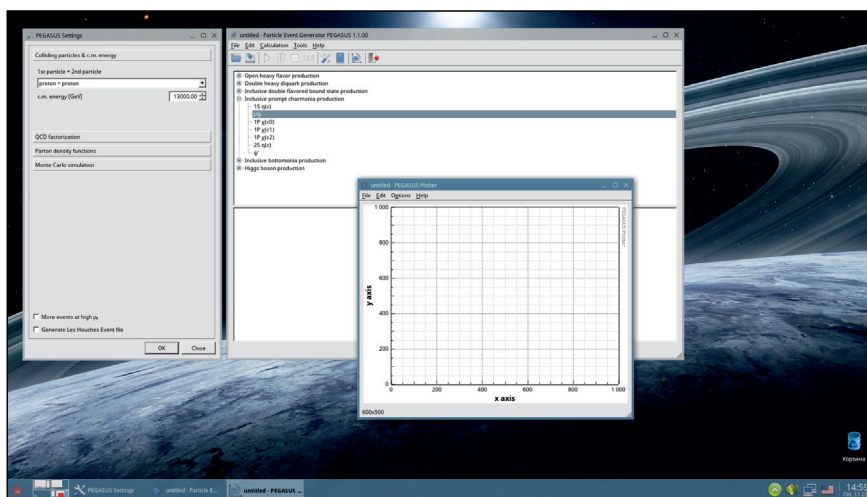


Рис. 5. Главное окно Монте-Карло генератора событий PEGASUS

Программный код генератора написан на языке C++ с использованием ряда подпрограмм, написанных на языке FORTRAN. Интерфейс к некоторым функциям распределения партонов в протоне обеспечивается с помощью свободно распространяемых программ группы MMHT [103] и коллаборации STEQ [104, 171], которые включены в состав генератора. Для выполнения численного интегрирования методом Монте-Карло применяется программа VEGAS [172]. Кроме того, генератор использует библиотеку QWTPLOT версии 6.1.3 (<https://qwt.sourceforge.io>). Вся актуальная информация о последней версии генератора и его новых возможностях публикуется на официальном сайте*.

3.4. Реконструкция кинематики адронных струй. При описании сечений процессов, происходящих с образованием струй адронов в конечном состоянии, принципиальные отличия между теоретическими подходами к вычислению сечений и/или иных характеристик таких процессов проявляются наиболее ярко. Так, в рамках обычной теории возмущений КХД для описания сечений процессов с образованием N струй необходимо вычислить матричный элемент как минимум N -частичного конечного состояния, что, вообще говоря, представляет собой весьма серьезную задачу в случае достаточно большого N . При использовании k_T -факторизационного подхода мы имеем принципиально иную картину: значительное число струй адронов формируется в процессе эволюции начального глюонного каскада, что позволяет при вычислении матрич-

* <https://theory.sinp.msu.ru/doku.php/pegasus/news>.

ного элемента партонного взаимодействия ограничиться только ведущим порядком, тем самым значительно упрощая расчеты. В этом случае кинематические свойства адронных струй описываются с помощью соответствующего уравнения глюонной эволюции, тогда как в обычной теории возмущений КХД они определяются только амплитудой партонного рассеяния. Таким образом, исследование таких процессов и, в частности, изучение различных наблюдаемых, связанных с кинематикой струй адронов в рамках k_T -факторизационного подхода КХД, позволяет получить дополнительную информацию о динамике глюонной эволюции в протоне.

Долгое время значительным лимитирующим фактором при использовании k_T -факторизационного подхода КХД для вычисления сечений процессов ассоциативного рождения частиц и струй адронов была практическая сложность правильного учета кинематики струй, образующихся в результате излучения кварков и глюонов в начальном состоянии. Недавно эта проблема получила решение благодаря новой версии Монте-Карло генератора событий CASCADE [93], с помощью которого вычисления на партонном уровне могут быть дополнены моделированием вкладов TMD партонных ливней. Это открывает новые возможности для изучения таких процессов, как процессы ассоциативного рождения прямых фотонов, бозонов Хиггса или лептонных пар Дрелла–Яна и адронных струй, что тем самым существенно расширяет область применимости k_T -факторизационного подхода КХД.

В работах [122, 173, 174] был предложен и использован следующий способ вычисления сечений процессов с образованием адронных струй, основанный на механизме численной реконструкции кинематики последних. Так, вычисление полных и дифференциальных сечений рассматриваемых процессов выполняется в два этапа. На первом этапе применяется Монте-Карло генератор событий PEGASUS [94], с помощью которого производятся численные расчеты в соответствии с (62). Сгенерированные события записываются в файл *.lhe (формат Les Houches Event [168]). На следующем этапе подготовленный файл *.lhe используется для численной реконструкции цепочки эволюции глюонных распределений. С этой целью проводится моделирование процессов излучения глюонов в начальном состоянии с помощью алгоритма TMD-генерации партонных ливней (в соответствии с уравнением эволюции CCFM) программы CASCADE [93], что позволяет вести отбор событий с любым числом адронных струй согласно критериям экспериментального анализа.

4. ПРИМЕНЕНИЕ k_T -ФАКТОРИЗАЦИОННОГО ПОДХОДА К НЕКОТОРЫМ ПРОЦЕССАМ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Ниже обсуждаются результаты, полученные за последнее время в рамках k_T -факторизационного подхода для полных и дифференциальных сечений некоторых процессов КХД, которые определяются главным

образом подпроцессами фотон-глюонного или глюон-глюонного слияния и которые являются наиболее чувствительными к функциям распределения глюонов в протоне. Проводится сравнение с предсказаниями, полученными в рамках стандартного (коллинеарного) подхода КХД в следующем за ведущим порядке теории возмущений.

4.1. Структурные функции глубоконеупругого рассеяния. Как известно, одним из основных инструментов исследования структуры протона являются процессы глубоконеупругого лептон-протонного рассеяния (ГНР). Лептоны, участвующие в таких процессах, являются либо заряженными лептонами (электронами или мюонами), либо нейтрино, которые рассеиваются на нуклонах мишени посредством электромагнитных или слабых взаимодействий соответственно. Так, в случае заряженных лептонов ГНР представляет собой «зондирование» структуры мишени виртуальными фотонами. Из принципа неопределенности следует, что фотон с виртуальностью Q^2 позволяет определить структуру в масштабе длин порядка $1/\sqrt{Q^2}$. С увеличением массы виртуального фотона структура протона «прощупывается» на все более малых расстояниях. Исследование вкладов тяжелых (c или b) кварков в структурные функции протона, в частности, в функцию $F_2(x, Q^2)$, дает возможность напрямую получать информацию о глюонной составляющей протона, поскольку, как было отмечено выше, тяжелые кварки рождаются главным образом в подпроцессе фотон-глюонного слияния*.

Пренебрегая массами электрона и протона по сравнению с массой тяжелого кварка и/или передаваемым импульсом, дифференциальное сечение процесса глубоконеупругого рассеяния электрона на протоне $e(k) + p(p) \rightarrow e'(k') + Q(p_1) + \bar{Q}(p_2) + X(p_X)$, где импульсы всех частиц указаны в скобках, можно представить в виде (см., например, [1])

$$\frac{d\sigma(ep \rightarrow e' + Q + \bar{Q} + X)}{dx dy} = \frac{2\pi\alpha^2}{xQ^4} \times \left[\left(1 - y + \frac{y^2}{2} \right) F_2^Q(x, Q^2) - \frac{y^2}{2} F_L^Q(x, Q^2) \right]. \quad (65)$$

Здесь $F_2^Q(x, Q^2)$ и $F_L^Q(x, Q^2)$ — вклады тяжелого кварка в соответствующие структурные функции протона. Переменные $x = Q^2/2(p \cdot q)$ и $y = (p \cdot q)/(p \cdot k)$ представляют собой долю продольного импульса начального протона, уносимую глюоном, и долю энергии электрона, переданную протону соответственно; при этом передаваемый импульс $q = k - k'$ и $Q^2 = -q^2$. Согласно общей формуле (2) структурные функ-

* Различные методы вычисления глюонной плотности (в ведущем и следующем за ним порядках теории возмущений КХД) из экспериментальных данных для функций $F_2(x, Q^2)$, $F_L(x, Q^2)$ и логарифмической производной $\partial F_2(x, Q^2)/\partial \ln Q^2$ были предложены, например, в работах [175–179].

ции $F_2^Q(x, Q^2)$ и $F_L^Q(x, Q^2)$ в рамках k_T -факторизационного подхода КХД могут быть представлены в виде [180, 181]

$$F_k^Q(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dz}{z} \int \frac{d\mathbf{k}_T^2}{\mathbf{k}_T^2} C_k\left(\frac{x}{z}, \mathbf{k}_T^2, m_Q^2, Q^2, \mu^2\right) f_g(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2), \quad (66)$$

где $f_g(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2)$ — TMD-функция распределения глюонов в протоне и $k = 2, L$. Коэффициентные функции $C_k(x, \mathbf{k}_T^2, m_Q^2, Q^2, \mu^2)$ определяются подпроцессом $\gamma^* + g^* \rightarrow Q + \bar{Q}$ и были вычислены в работе [180]. Эти выражения были использованы [123, 182] при вычислении вкладов c - и b -кварков в структурные функции протона $F_2^Q(x, Q^2)$ и $F_L^Q(x, Q^2)$,

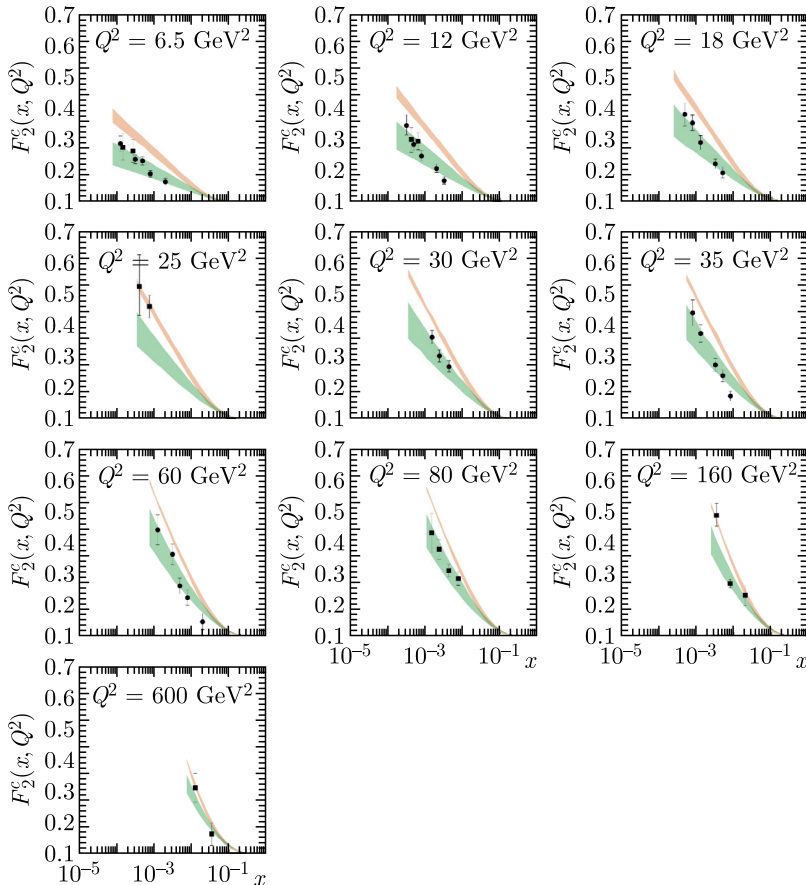


Рис. 6. Зависимость структурной функции протона $F_2^c(x, Q^2)$ от переменной x , рассчитанная для различных значений Q^2 . Экспериментальные данные коллабораций ZEUS [184] и H1 [185, 186]

а также при вычислении величины $\sigma_{\text{red}}^Q(x, Q^2)$:

$$\sigma_{\text{red}}^Q(x, Q^2) = F_2^Q(x, Q^2) - \frac{y^2}{1 + (1 - y)^2} F_L^Q(x, Q^2), \quad (67)$$

экспериментальные данные для которой были получены коллаборациями ZEUS и H1 на коллайдере HERA при $3 \cdot 10^{-5} < x < 5 \cdot 10^{-2}$, $2,5 < Q^2 < 2000 \text{ ГэВ}^2$ и $\sqrt{s} = 318 \text{ ГэВ}$ [183]. Измерения структурных функций $F_2^c(x, Q^2)$ и $F_2^b(x, Q^2)$ в аналогичной кинематической области также были представлены коллаборациями ZEUS [184] и H1 [185, 186].

На рис. 6–8 приведены результаты расчетов структурных функций $F_2^c(x, Q^2)$, $F_2^b(x, Q^2)$ и продольной функции $F_L(x, Q^2)$, которые были

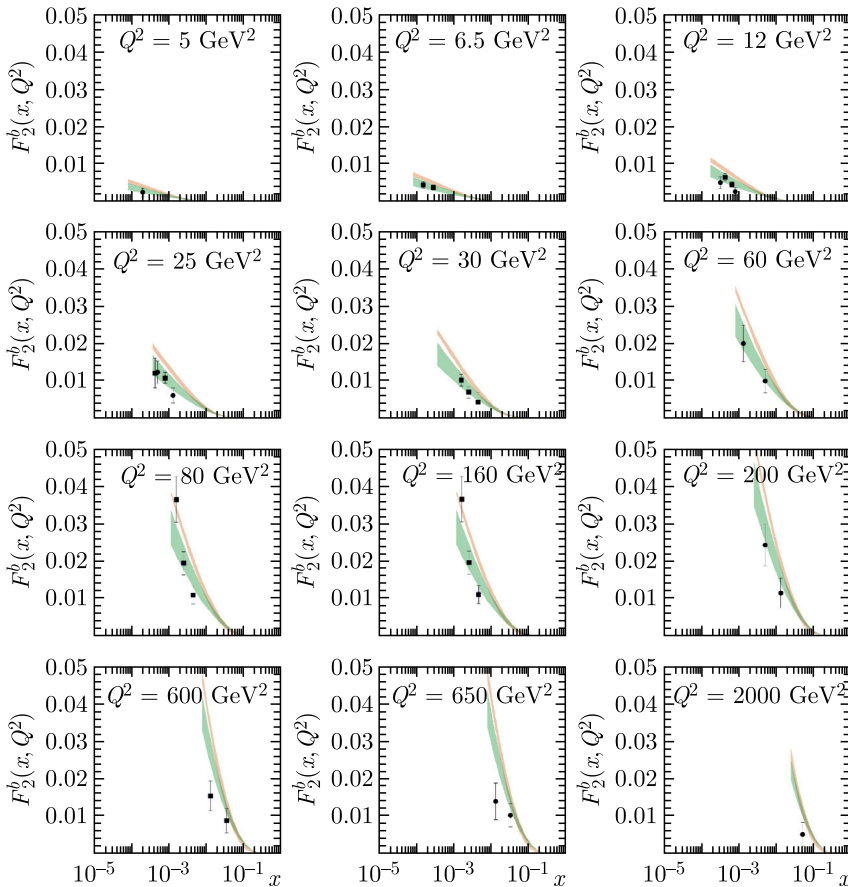


Рис. 7. Зависимость структурной функции протона $F_2^b(x, Q^2)$ от переменной x , рассчитанная для различных значений Q^2 . Экспериментальные данные коллабораций ZEUS [184] и H1 [186]

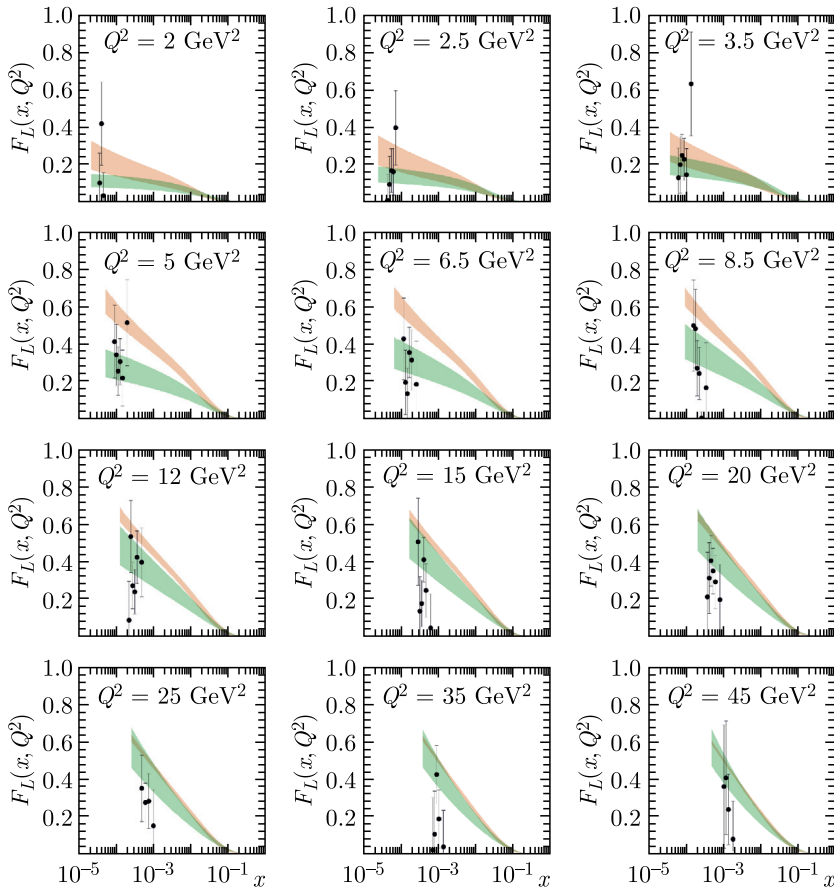


Рис. 8. Зависимость продольной структурной функции протона $F_L(x, Q^2)$ от переменной x , рассчитанная для различных значений Q^2 . Экспериментальные данные коллаборации H1 [120]

выполнены в рамках k_T -факторизационного подхода КХД с использованием глюонных распределений LLM'2022 и JH'2013 set 2. Закрашенные области на этих рисунках отвечают оценкам теоретических неопределенностей вычислений. В расчетах массы тяжелых кварков полагались равными $m_c = 1,4$ ГэВ, $m_b = 4,75$ ГэВ, а ренормализационный и факторизационный масштабы $\mu_R^2 = 4m_Q^2 + Q^2$ и $\mu_F^2 = Q^2$. Для всех легких кварков было использовано безмассовое приближение. Легко видеть, что полученные предсказания для всех наблюдаемых достаточно хорошо согласуются с данными коллабораций ZEUS и H1 как по форме, так и по абсолютной величине в пределах экспериментальных и теоретических неопределенностей. К сожалению, достигнутая точность измере-

ний (особенно изменений продольной структурной функции протона) не позволяет сделать однозначных выводов в пользу той или иной TMD глюонной плотности в протоне. Тем не менее видно, что использование функции распределения JH'2013 set 2 приводит к некоторой переоценке данных для структурных функций $F_2^c(x, Q^2)$ и $F_2^b(x, Q^2)$. Аналогичные результаты были получены для сечений $\sigma_{\text{red}}^c(x, Q^2)$ и $\sigma_{\text{red}}^b(x, Q^2)$ (см. [117]). Такого превышения не наблюдается при использовании в расчетах распределения LLM'2022, параметры которой были определены с учетом данных ЛНС. Таким образом, можно заключить, что процедуры определения параметров начальных распределений с учетом как данных HERA, так и экспериментальных данных ЛНС, предложенные в работах [116, 117, 123], позволяют получать реалистичные предсказания k_T -факторизационного подхода в весьма широкой кинематической области.

4.2. Процессы инклюзивного рождения b -струй на коллайдере ЛНС. Исследование процессов инклюзивного рождения тяжелых (c или b) кварков в протон-протонных столкновениях при высоких энергиях также дает возможность получать информацию о функции распределения глюонов в протоне [22, 49, 50, 144, 145, 187–189]. Изучение таких процессов, в которых отсутствует ряд дополнительных эффектов, связанных с фрагментацией конечных частиц в наблюдаемые адроны, представляет особый интерес, поскольку позволяет проводить прямое соответствие между результатами измерений и теоретическими предсказаниями. В рамках k_T -факторизационного подхода КХД сечение процессов рождения тяжелых кварков определяется главным образом вкладом подпроцесса глюонного слияния вне массовой поверхности $g^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow Q(p_1) + \bar{Q}(p_2)$ порядка $O(\alpha_s^2)$ [22, 23], где $Q = c$ или b и импульсы всех частиц указаны в скобках. Вклад подпроцессов с участием кварков в начальном состоянии при энергиях коллайдера ЛНС пренебрежимо мал (см. подробнее, например, [188]). Выражения амплитуды вне массовой поверхности были получены в работе [188]. Отметим, что суммирование по поляризациям начальных виртуальных глюонов выполнялось с помощью специального выбора тензора поляризации (61), что, как было показано ранее, обеспечивает калибровочную инвариантность вычисленной амплитуды. Полученные выражения совпадают с результатами расчетов [23, 50] и были включены в Монте-Карло генератор событий PEGASUS [94].

Согласно (62) сечение процесса парного рождения c - или b -кварков в рамках k_T -факторизационного подхода КХД может быть рассчитано в соответствии с формулой

$$\begin{aligned} \sigma(pp \rightarrow Q\bar{Q} + X) = & \int \frac{1}{16\pi(x_1x_2s)^2} |\bar{\mathcal{A}}(g^* + g^* \rightarrow Q + \bar{Q})|^2 \times \\ & \times f_g(x_1, \mathbf{k}_{1T}^2, \mu^2) f_g(x_2, \mathbf{k}_{2T}^2, \mu^2) \frac{d\mathbf{k}_{1T}^2}{\mathbf{k}_{1T}^2} \frac{d\mathbf{k}_{2T}^2}{\mathbf{k}_{2T}^2} d\mathbf{p}_{1T}^2 dy_1 dy_2 \frac{d\phi_1}{2\pi} \frac{d\phi_2}{2\pi} \frac{d\psi_1}{2\pi}, \quad (68) \end{aligned}$$

где $f_g(x, \mathbf{k}_T^2, \mu^2)$ — TMD-функция распределения глюонов в протоне; ϕ_1, ϕ_2, ψ_1 и ψ_2 — азимутальные углы начальных виртуальных глюонов и конечных кварков соответственно. В предположении, что b -кварк, возникающий в конечном состоянии, определяет кинематику соответствующей b -струи, выражение (68) будет использоваться в дальнейшем для вычисления сечений процессов инклюзивного рождения одной или двух лидирующих b -струй (струй, обладающих наибольшим поперечным импульсом), экспериментальные данные для которых были получены коллаборацией CMS [142] на коллайдере LHC при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ.

Результаты расчетов с использованием плотностей глюонов LLM'2022 и JH'2013 set 2 представлены на рис. 9. Диапазон изменения быстроты b -струй ($|y| < 2,2$) был разбит на несколько интервалов, в каждом из которых были измерены распределения по поперечному импульсу лидирующей b -струи. Как и ранее, закрашенные области отвечают оценкам теоретических неопределенностей вычислений, которые связаны главным образом с выбором ренормализационного и факторизационного масштабов. Видно, что предсказания, полученные с помощью функции LLM'2022, достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными коллаборации CMS для распределений по поперечному импульсу лидирующей b -струи как по форме, так и по абсолютной величине в пределах экспериментальных и теоретических неопределенностей. Это согласие достигается в каждом из интервалов по скорости струи y в широком диапазоне изменения значений поперечного импульса p_T . Результаты, полученные с помощью глюонной плотности JH'2013 set 2, находятся в несколько худшем согласии с данными в области больших $p_T \geq 100$ ГэВ.

Отметим, что азимутальные корреляции в процессах рождения тяжелых кварков наряду с распределениями по поперечному импульсу пары кварков являются чувствительными к TMD-распределениям глюонов в протоне (см., например, [22, 49, 50, 187]). Так, пренебрегая поперечными импульсами взаимодействующих глюонов, в ведущем порядке коллинеарного приближения КХД легко получить, что $\mathbf{p}_{1T} = -\mathbf{p}_{2T}$, поэтому распределение по разности углов $d\sigma/d\Delta\phi \sim \delta(\Delta\phi - \pi)$. Отклонения от этого соотношения возникают только в следующем (NLO) порядке теории возмущений. Учет поперечных импульсов начальных глюонов в рамках k_T -факторизационного подхода КХД приводит к возникновению нетривиальных азимутальных корреляций между поперечными импульсами конечных частиц уже в ведущем порядке. Как видно из рис. 10, форма этих корреляций зависит от кинематической области (определяемой масштабом порядка M), в которой происходит жесткое взаимодействие. С ростом величины M характерное значение доли x продольного импульса протона, переносимой глюоном, увеличивается (рис. 11), что приводит к уменьшению среднего значения поперечного импульса глюона $|\mathbf{k}_T|$, возникающего в процессе КХД-эволюции глюонного каскада в соответствии с рис. 3. Тем самым кинематическая конфигурация импульсов приближается к коллинеарной.

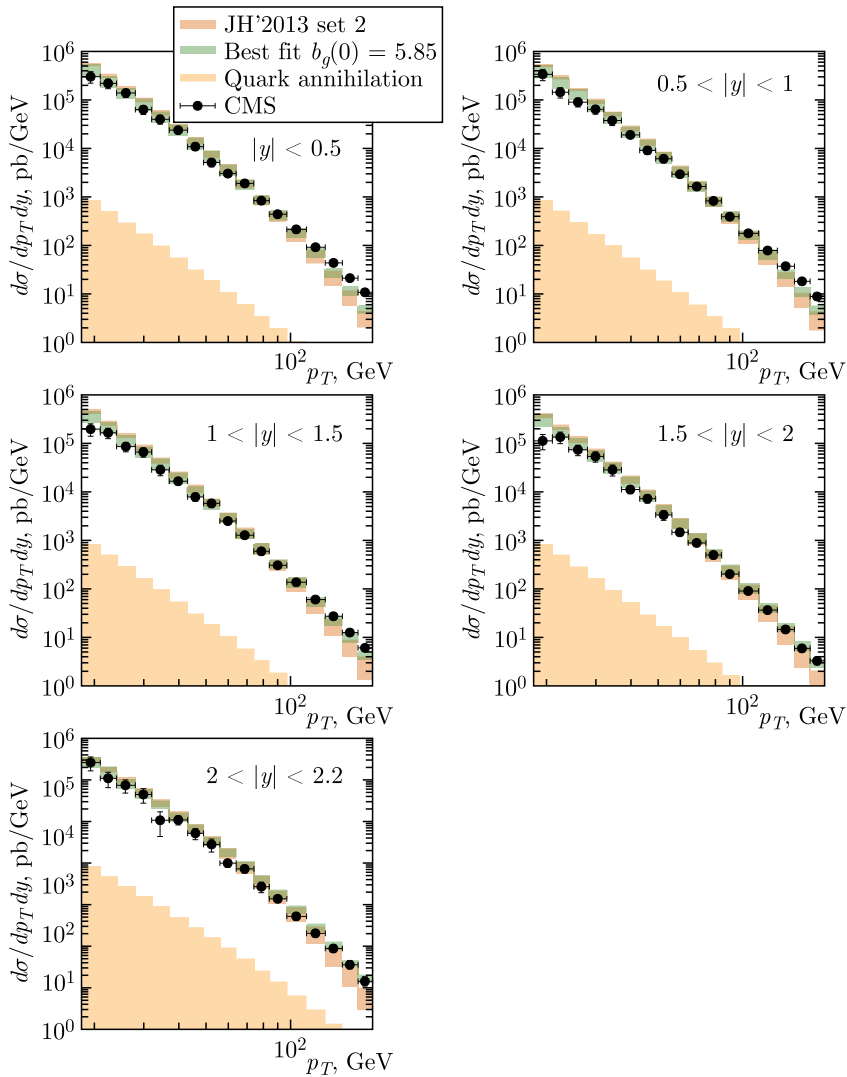


Рис. 9. Распределения по поперечному импульсу лидирующей b -струи в pp -столкновениях, рассчитанные при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ в различных интервалах быстрот. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Экспериментальные данные коллаборации CMS [142]

Отметим, что использование дополнительных кинематических ограничений, таких как ограничения на быстроту y пары тяжелых кварков в конечном состоянии, дает возможность для более детального изу-

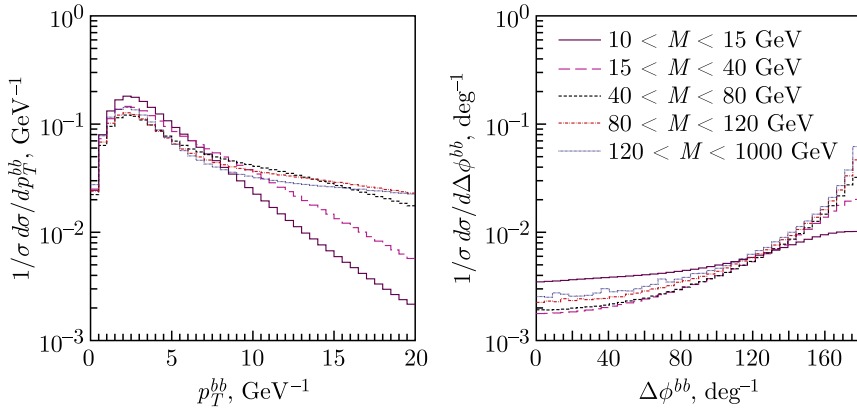


Рис. 10. Распределения по поперечному импульсу и разности азимутальных углов пары b -кварков, вычисленные для различных значений инвариантной массы M при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. В расчетах использовалась TMD-функция распределения глюонов JH'2013 set 2

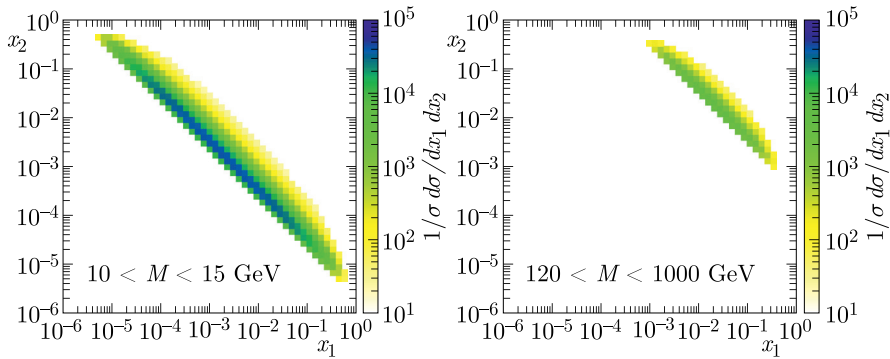


Рис. 11. Распределения по долям x_1 и x_2 продольных импульсов протонов, переносимых начальными глюонами, вычисленные для различных значений инвариантной массы M при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. В расчетах использовалась TMD-функция распределения глюонов JH'2013 set 2

чения TMD-функций распределения глюонов в протоне [190]. Так, на рис. 12 приведены дважды дифференциальные сечения парного рождения b -кварков, рассчитанные при различных значениях M и y как функции доли x продольного импульса начального протона и поперечного импульса \mathbf{k}_T^2 одного из глюонов, участвующих в жестком взаимодействии. Легко видеть, что ограничения на инвариантную массу M и быстроту пары y позволяют выделить определенную область изменения как переменной x , так и поперечного импульса \mathbf{k}_T^2 и, следовательно, непосредственно

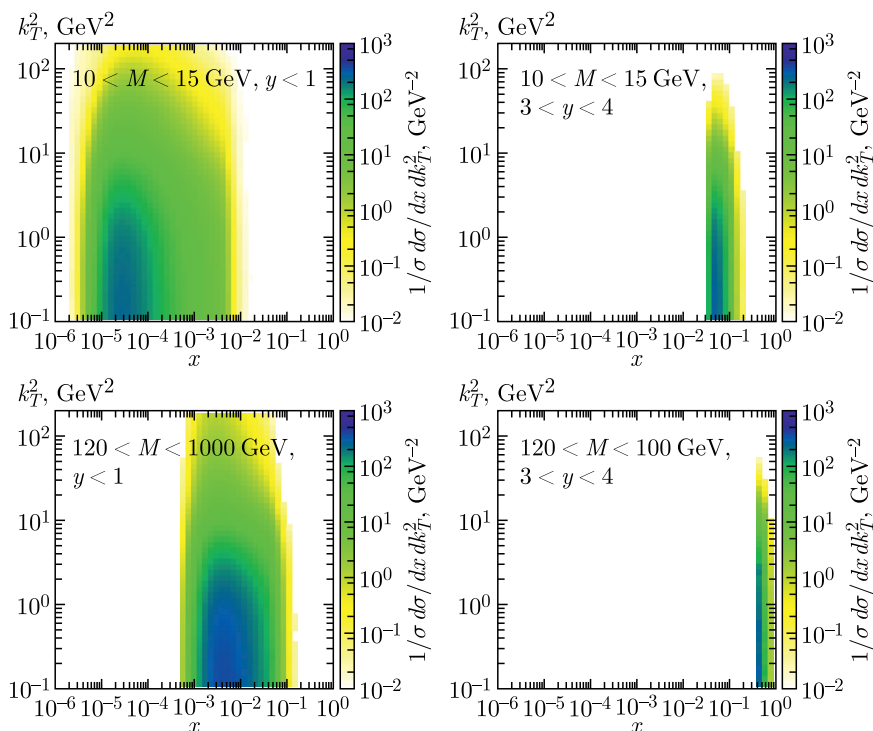


Рис. 12. Распределения по доле x продольного импульса протона, переносимой начальным глюоном, и его поперечному импульсу, вычисленные для различных значений инвариантной массы M и быстроты y пары b -кварков при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. В расчетах использовалась TMD-функция распределения глюонов JH'2013 set 2

из экспериментальных данных получать информацию о TMD-функции распределения глюонов* в этой области при $\mu \sim M$.

4.3. Процессы рождения фотонов (или тяжелых калибровочных бозонов) и адронных струй при высоких энергиях. Процессы рождения прямых фотонов или тяжелых калибровочных бозонов в сопровождении струй адронов при высоких энергиях также чувствительны к динамике эволюции глюонов и кварков в протоне и поэтому представляют существенный интерес. Отсутствие необходимости учитывать в расчетах дополнительные механизмы адронизации в конечном состоянии (в отличие от, например, процессов рождения D - или B -мезонов) лишь усиливает последний. Выделение определенного класса струй (например, струй

* Аналогичный подход может быть использован для исследования TMD-функции распределения кварков в протоне с помощью процессов Дрелла-Яна [190].

только c - или b -кварков) позволяет проводить более четкое соответствие между экспериментальными данными и теоретическими предсказаниями. Кроме того, процессы с фотоном и тяжелыми кварками в конечном состоянии являются фоновыми к процессам за рамками СМ. Ниже мы более подробно осветим ключевые моменты вычислений.

Вычисление сечений процессов ассоциативного рождения прямых фотонов (или калибровочных бозонов) и адронных струй в рамках k_T -факторизационного подхода КХД основано на учете доминирующего вклада от подпроцесса глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности порядка $O(\alpha_s^2)$:

$$g^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow \gamma^*/Z/W^\pm(p) + q(p_1) + \bar{q}'(p_2), \quad (69)$$

где в скобках стоят 4-импульсы соответствующих частиц. Отметим, что при этом эффективно учитывается вклад в сечение порядка $O(\alpha_s)$ от подпроцесса $q + g^* \rightarrow \gamma^*/Z/W^\pm + q$ с помощью излучения глюона в начальном состоянии. Конечно, в стандартной (коллинеарной) факторизации КХД оба этих подпроцесса должны учитываться по отдельности. Восемь фейнмановских диаграмм, которые представляют собой калибровочно-инвариантный набор, описывающий в ведущем порядке процесс (69), изображены на рис.13. Следует еще раз подчеркнуть, что при вычислении амплитуды вне массовой поверхности для этого подпроцесса необходимо, вообще говоря, также учитывать дополнитель-

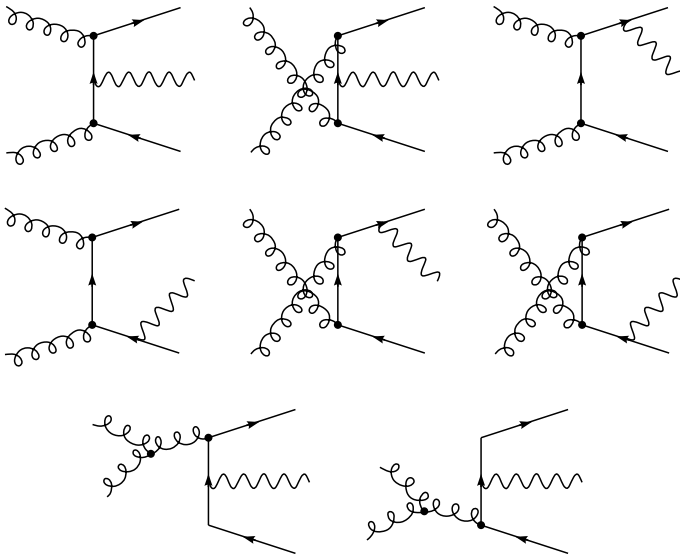


Рис. 13. Диаграммы Фейнмана для процесса рождения прямых фотонов или калибровочных бозонов с помощью механизма глюон-глюонного слияния в ведущем порядке теории возмущений КХД

ные диаграммы, в которых начальные виртуальные глюоны излучаются протонами, лежащими на массовой поверхности (см. также рис. 4). Учет таких нефакторизуемых диаграмм в лидирующем порядке теории возмущений КХД приводит к эффективной вершине взаимодействия глюонов (53) [150]. Однако, как было показано выше, в специальной физической (аксиальной) калибровке ($n_\mu A^\mu$, где $n_\mu = ap_\mu^{(1)} + bp_\mu^{(2)}$) эти нефакторизуемые диаграммы дают нулевой вклад в амплитуду [23]. Таким образом, эффективная вершина (53) может быть заменена обычным выражением для трехглюонной вершины (59) с учетом специального выбора тензора поляризации начальных виртуальных глюонов (61), что обеспечивает калибровочную инвариантность вычисленной амплитуды. Полученные аналитические выражения [191, 192] совпадают с результатами несколько более поздних расчетов [47] и были включены в Монте-Карло генератор событий PEGASUS [94].

Кроме вклада подпроцессов глюон-глюонного слияния (69) в ряде случаев в численных расчетах [193–195] необходимо учитывать также вклады некоторых подпроцессов, происходящих с участием кварков в начальном состоянии, а именно подпроцессов рассеяния кварков

$$q(k_1) + q'(k_2) \rightarrow \gamma^*/Z/W^\pm(p) + q(p_1) + q'(p_2) \quad (70)$$

и их аннигиляции

$$q(k_1) + \bar{q}(k_2) \rightarrow \gamma^*/Z/W^\pm(p) + q'(p_1) + \bar{q}'(p_2), \quad (71)$$

где, как и ранее, 4-импульсы всех частиц указаны в скобках. Соответствующие диаграммы Фейнмана приведены на рис. 14. Такие процессы могут, в принципе, играть существенную роль в области достаточно больших значений поперечных импульсов (или, что эквивалентно, в области больших значений переменной $x \sim m_T/\sqrt{s}$), поскольку при

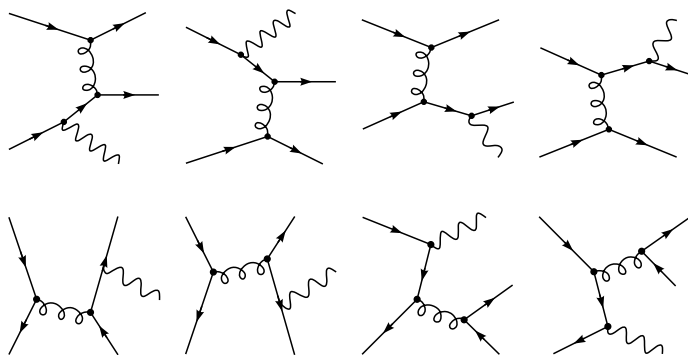


Рис. 14. Диаграммы Фейнмана для подпроцессов (70) и (71), происходящих с участием кварков в начальном состоянии, которые учитываются в рамках коллинеарного приближения КХД

значениях $x \sim 0,1$ или выше плотность кварковой материи в протоне сравнима с глюонной плотностью или даже превосходит ее. В этом случае величиной поперечного импульса начальных партонов (кварков) можно пренебречь и учитывать вклад в сечение от подпроцессов (70) и (71) в рамках обычного коллинеарного приближения КХД. Отметим, что такой комбинированный подход позволяет использовать различную динамику партонных распределений (CCFM или DGLAP) в соответствующих кинематических режимах для описания экспериментальных данных в области как малых, так и больших значений переменной x .

Вычисление амплитуд этих процессов в древесном приближении не вызывает трудностей. Суммирование по поляризациям начальных и конечных кварков, а также суммирование по поляризациям фотона производится стандартным образом. В случае рождения виртуальных фотонов или калибровочных бозонов такое суммирование производится с учетом лептонных распадов $Z/\gamma^* \rightarrow l^+l^-$ или $W^\pm \rightarrow l^\pm \nu(\bar{\nu}_l)$, при этом пропагатор промежуточного бозона записывается в форме Брейта–Вигнера. Отметим, что амплитуда подпроцесса аннигиляции (71) может быть легко получена из амплитуды (70) очевидной перестановкой соответствующих импульсов*.

4.3.1. Коллинеарные расходимости, фрагментационный вклад и условие изоляции фотонов. Как известно, при вычислении сечений рождения прямых фотонов возникают так называемые коллинеарные расходимости, связанные с поведением соответствующих партонных амплитуд рассеяния в кинематической области, в которой конечный фотон, испущенный кварком, близок к последнему. Поэтому в расчетах обычно применяется фрагментационный механизм, в рамках которого конечный фотон рассматривается как продукт фрагментации цветного партона k . Технически фрагментационный вклад можно получить путем вычисления поправок следующих порядков к механизму прямого рождения, при этом возникающие расходимости факторизуются и учитываются с помощью перенормировки функции фрагментации партона k в фотон $D_{k \rightarrow \gamma}(z, \mu_{\text{fr}}^2)$, которые имеют непертурбативную природу и определяются на некотором (достаточно произвольном) масштабе фрагментации μ_{fr} [202, 203]. Конечно, фотоны, образуемые за счет механизма партонной фрагментации, сопровождаются близко расположенными к ним адронными струями.

Для устранения коллинеарных расходимостей можно также использовать подход, предложенный в работе [191]. Суть этого подхода заключа-

* Существенной частью математических вычислений может являться разложение амплитуды по подходящему набору базисных векторов (метод ортогональных амплитуд). Этот метод был предложен в работе [196] и широко использовался ранее (см., например, [197–201]). Строгое обоснование метода дано в [197]. Использование метода ортогональных амплитуд позволяет значительно сократить объем и время компьютерных вычислений.

ется в следующем. Как известно, теория возмущений неприменима, когда длина волны испущенного фотона в системе покоя родительского кварка становится больше характерного масштаба адронизации $O(1 \text{ ГэВ}^{-1})$. Ниже этого порога сечение процесса рождения прямых фотонов определяется вкладами различных непертурбативных эффектов, связанных главным образом с фрагментацией партонов в фотоны. Таким образом, это сечение может быть представлено в виде суммы

$$\sigma = \sigma_{\text{pert}}(\mu_{\text{reg}}^2) + \sigma_{\text{fragm}}(\mu_{\text{reg}}^2), \quad (72)$$

где вклад $\sigma_{\text{pert}}(\mu_{\text{reg}}^2)$ вычисляется обычным образом. Масштаб μ_{reg} , от которого зависят как пертурбативный, так и фрагментационный вклады, может быть использован для их разделения. Принимая в качестве масштаба фрагментации величину инвариантной массы фотона и исходящего кварка, $\mu_{\text{fr}}^2 = (p + p_i)^2$, и затем ограничивая пертурбативный вклад областью $\mu_{\text{fr}} \geq \mu_{\text{reg}} \sim 1 \text{ ГэВ}$, можно устранить возникающие коллинеарные расходимости в $\sigma_{\text{pert}}(\mu_{\text{reg}}^2)$. Более того, при этом амплитуды (69), (70) и (71) остаются конечными даже при нулевой массе рождающихся кварков. Зависимость результатов расчетов от выбора значения μ_{reg} оказывается достаточно мала по сравнению с другими неопределенностями вычислений.

Существенная часть экспериментального анализа (см., например, [204]) — выделение сигнала прямого рождения фотонов на фоне обычно значительно превосходящего его шума от вторичных фотонов, которые являются продуктами электромагнитных распадов различных образующихся в событии частиц (например, распадов $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, $\eta \rightarrow \gamma\gamma$, $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0\gamma$ и др.). Важное условие, которое позволяет значительно уменьшить фон вторичных фотонов, это так называемое условие изоляции. Оно заключается в следующем: фотон считается изолированным, если суммарная адронная поперечная энергия E_T^{had} внутри конуса с апертурой R в плоскости псевдобыстроты η и азимутального угла ϕ с осью вдоль направления импульса фотона меньше некоторого значения E^{max} :

$$E_T^{\text{had}} \leq E^{\text{max}}, \quad (\eta^{\text{had}} - \eta)^2 + (\phi^{\text{had}} - \phi)^2 \leq R^2. \quad (73)$$

В экспериментах, проводимых на коллайдере LHC, значения параметров R и E^{max} обычно выбираются равными $R \sim 0,3-0,4$ и $E^{\text{max}} \sim 1-5 \text{ ГэВ}$ [204].

Условие изоляции фотонов (73) играет важную роль при проведении дальнейших вычислений. Как было показано [205, 206], оно значительно (более чем на порядок) подавляет фрагментационный вклад в сечение рождения прямых фотонов. Следовательно, применение этого (экспериментального) условия в теоретических расчетах позволяет пренебречь вкладом $\sigma_{\text{fragm}}(\mu_{\text{reg}}^2)$ по сравнению с другими теоретическими неопределенностями (связанными, например, с выбором ренормализационного

и/или факторизационного масштабов), что значительно упрощает вычисления.

4.3.2. Результаты расчетов: сечения процессов ассоциативного рождения прямых фотонов и струй тяжелых кварков. Первые экспериментальные данные для таких процессов на коллайдере LHC недавно получены коллаборацией ATLAS [204]. Были измерены распределения по поперечной энергии конечных фотонов E_T^γ при энергии $\sqrt{s} = 8$ ТэВ в кинематической области, определяемой соотношениями $E_T^\gamma > 25$ ГэВ, $|\eta^\gamma| < 2,37$, $p_T^{\text{jet}} > 20$ ГэВ и $|\eta^{\text{jet}}| < 2,5$, где η^γ и η^{jet} — псевдобыстроты фотона и струй соответственно. Для описания этих данных был использован изложенный выше комбинированный подход, в рамках которого различная динамика партонных распределений (CCFM или DGLAP) применяется в соответствующих кинематических областях*.

Результаты расчетов представлены на рис.15 и 16. Закрашенные области на рисунках отвечают оценкам теоретических неопределенностей вычислений, которые проводились с использованием TMD-распределений глюонов A0 и JH'2013 set 2. Теоретические неопределенности включают в себя неопределенности, связанные как с выбором ренормализационного масштаба, так и с выбором масштаба μ_{reg} . Кроме того, на рис. 15 и 16 приведены результаты, полученные с помощью генератора Монте-Карло MadGraph5_aMC@NLO [162] в рамках NLO приближения обычной (коллинеарной) теории возмущений КХД. Видно, что теоретические предсказания достаточно хорошо согласуются с данными коллаборации ATLAS [204] как по форме, так и по абсолютной величине в пределах экспериментальных и теоретических неопределенностей. В области больших значений $E_T^\gamma \geq 150-200$ ГэВ полученные результаты лежат несколько ниже данных, что связано с использованием в расчетах древесного приближения для вкладов подпроцессов (70) и (71). Однако учет партонных ливней и поправок следующего (NLO) порядка с помощью генератора MadGraph5_aMC@NLO позволяет достичь лучшего согласия с экспериментом при $E_T^\gamma \geq 200$ ГэВ. Как видно из рис. 15 и 16, подпроцессы с участием кварков в начальном состоянии действительно играют доминирующую роль в области больших поперечных импульсов и необходимы для количественного описания экспериментальных данных во всей кинематической области. Отметим, что использование в расчетах глюонного распределения A0 приводит к практическому совпадению результатов проведенных вычислений с результатами MadGraph5_aMC@NLO. В то же время предсказания, полученные с по-

* Процессы ассоциативного рождения прямых фотонов и струй тяжелых кварков на коллайдере Tevatron в рамках k_T -факторизационного подхода рассмотрены в работах [207, 208]. Кроме того, были изучены процессы инклюзивного рождения прямых фотонов в $e p$ - и $p p$ -столкновениях [209, 210], а также процессы рождения фотонных пар [211] (см. также [154]).

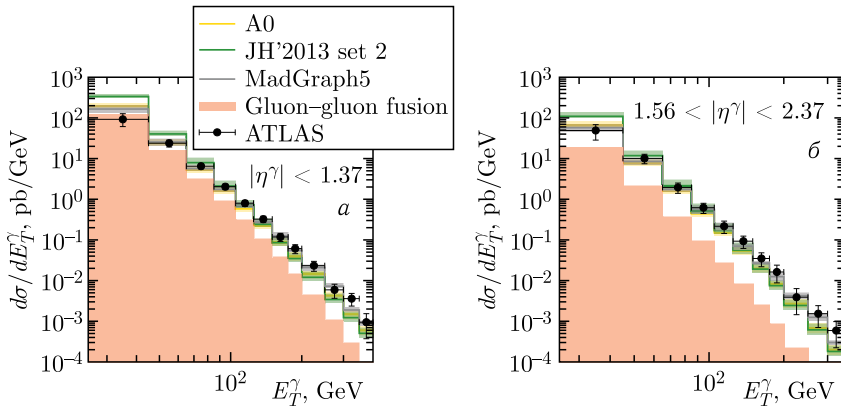


Рис. 15. Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения прямых фотонов и струй очарованных кварков в pp -столкновениях при $\sqrt{s} = 8$ ТэВ. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Отдельно показан вклад подпроцесса глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности (69). Результаты NLO вычислений, полученные с помощью Монте-Карло генератора событий MadGraph5_aMC@NLO [162], взяты из экспериментальной работы [204]. Данные коллаборации ATLAS [204]

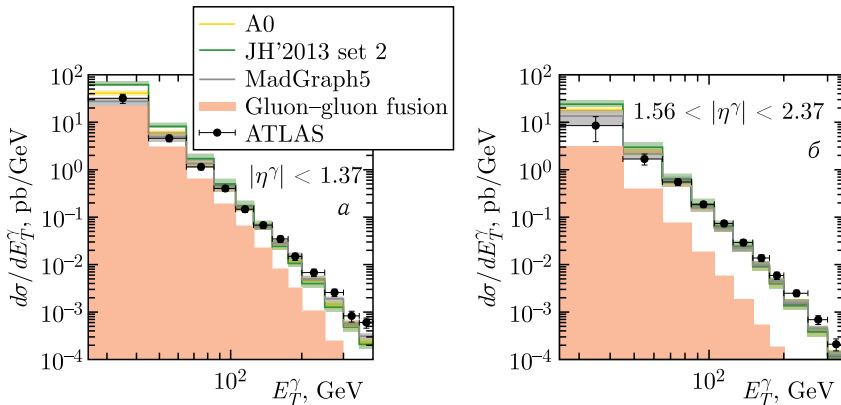


Рис. 16. Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения прямых фотонов и струй b -кварков в pp -столкновениях при $\sqrt{s} = 8$ ТэВ. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 15. Данные коллаборации ATLAS [204]

мощью функции распределения JH'2013 set 2, несколько переоценивают последние в области не очень больших значений $E_T^\gamma \leq 50$ ГэВ. Кроме того, как видно из рис. 15 и 16, величина теоретических неопределенностей расчетов в рамках k_T -факторизационного подхода сравнима с величиной неопределенностей аналогичных вычислений в рамках NLO приближения теории возмущений КХД.

Следует упомянуть, что изучение процессов связанного рождения прямых фотонов и струй тяжелых кварков дает возможность непосредственной проверки предсказаний моделей с так называемыми внутренними очарованием (intrinsic charm, IC) и прелестью (intrinsic beauty, IB) [212–215]. Более детально этот вопрос освещается в обзоре [216].

4.3.3. Результаты расчетов: сечения процессов ассоциативного рождения Z -бозонов и струй тяжелых кварков. Экспериментальные данные для сечений процессов ассоциативного рождения Z -бозонов и одного или нескольких b -кварков в pp -столкновениях на коллайдере ЛHC получены коллаборациями ATLAS [217] и CMS [218]. Коллаборацией ATLAS были измерены распределения Z -бозонов по поперечному импульсу p_T^Z и быстрой y^Z в процессе рождения Z -бозонов и одной (лидирующей) b -струи в кинематической области $p_T^b > 20$ ГэВ, $|\eta^b| < 2,4$ и энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ, при этом поперечные импульсы и псевдобыстры лептонов, возникающих от распада Z -бозонов, должны удовлетворять условию $p_T^l > 20$ ГэВ, $|\eta^l| < 2,4$, а их инвариантная масса должна лежать в интервале $76 < M^{ll} < 106$ ГэВ [217]. В этой же области также были получены данные для ряда дифференциальных сечений процесса рождения Z -бозонов и двух b -струй: распределений по поперечному импульсу и быстрой Z -бозонов, инвариантной массе пары b -кварков M^{bb} и расстоянию ΔR^{bb} между b -струями в плоскости псевдобыстрых и азимутальных углов [217]. Коллаборацией CMS проведены измерения дифференциальных сечений процесса ассоциативного рождения Z -бозонов и двух b -адронов в кинематической области $p_T^b > 15$ ГэВ, $|\eta^b| < 2$, $p_T^l > 20$ ГэВ, $|\eta^l| < 2,4$ и $81 < M^{ll} < 101$ ГэВ при энергии $\sqrt{s} = 7$ ТэВ [218]. Так, были изучены распределения по разности азимутальных углов b -адронов $\Delta\phi^{bb}$, расстоянию между ними в плоскости псевдобыстрых и азимутальных углов ΔR^{bb} , расстоянию $\min \Delta R^{Zb}$ между Z -бозоном и ближайшим к нему b -адроном, а также переменной A^{Zbb} , определяемой с помощью соотношения

$$A^{Zbb} = \frac{\max \Delta R^{Zb} - \min \Delta R^{Zb}}{\max \Delta R^{Zb} + \min \Delta R^{Zb}}, \quad (74)$$

где $\max \Delta R^{Zb}$ — расстояние между Z -бозоном и вторым b -адроном в плоскости псевдобыстрых и азимутальных углов. Такие корреляционные переменные полезны для изучения вкладов различных механизмов в сечение ассоциативного рождения Z -бозонов и тяжелых кварков, а также для выяснения роли поправок следующих порядков теории возмущений КХД.

Результаты численных расчетов в рамках k_T -факторизационного подхода представлены на рис.17–19, при этом была использована TMD-функция распределения глюонов JH'2013 set 2. Как и ранее, закрашенные области на этих рисунках отвечают оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Отметим, что для описания фрагментации b -кварков в b -адроны была использована известная параметризация Петерсона [219] с обычным для b -кварков значением параметра

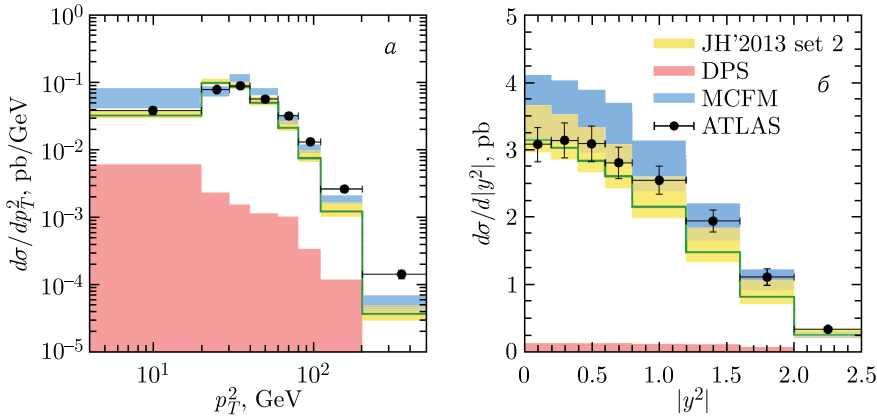


Рис. 17. Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения Z -бозонов и лидирующей струи b -кварков в pp -столкновениях при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Результаты вычислений в NLO приближении теории возмущений КХД, полученные с помощью Монте-Карло генератора событий MCFM [161], взяты из экспериментальной работы [217]. Данные коллаборации ATLAS [217]

$\varepsilon_b = 0,006$. Дополнительно учитывался возможный вклад от механизма двойного партонного рассеяния, который широко обсуждается в публикациях (см., например, [220–224]). Этот вклад был рассчитан согласно известной факторизационной формуле

$$\sigma_{\text{DPS}}(Z + Q + \bar{Q}) = \frac{\sigma(Z)\sigma(Q + \bar{Q})}{\sigma_{\text{eff}}}, \quad (75)$$

где значение феноменологического параметра (так называемое эффективное сечение) $\sigma_{\text{eff}} \simeq 15$ мб получено из анализа экспериментальных данных для различных процессов. Кроме того, на рис. 17–19 приведены предсказания, полученные с помощью генераторов Монте-Карло MCFM [161] и MadGraph5_aMC@NLO [162] в рамках NLO приближения обычной теории возмущений КХД. Легко видеть, что предсказания k_T -факторизационного подхода достаточно хорошо согласуются (в пределах экспериментальных и теоретических неопределенностей) с экспериментальными данными коллабораций ATLAS и CMS как по форме, так и по абсолютной величине. Исключения составляют лишь область больших значений поперечного импульса $p_T^Z \geq 100$ ГэВ и/или область больших инвариантных масс $M^{bb} \geq 150$ ГэВ, где вклад подпроцессов (70) и (71) является определяющим. Однако необходимо отметить, что в области больших p_T^Z поправки высших порядков теории возмущений КХД к этим вкладам начинают играть существенную роль. Следует также подчеркнуть, что предсказания k_T -факторизационного подхода и результаты NLO расчетов практически совпадают в области $p_T^Z \leq 100$ ГэВ,

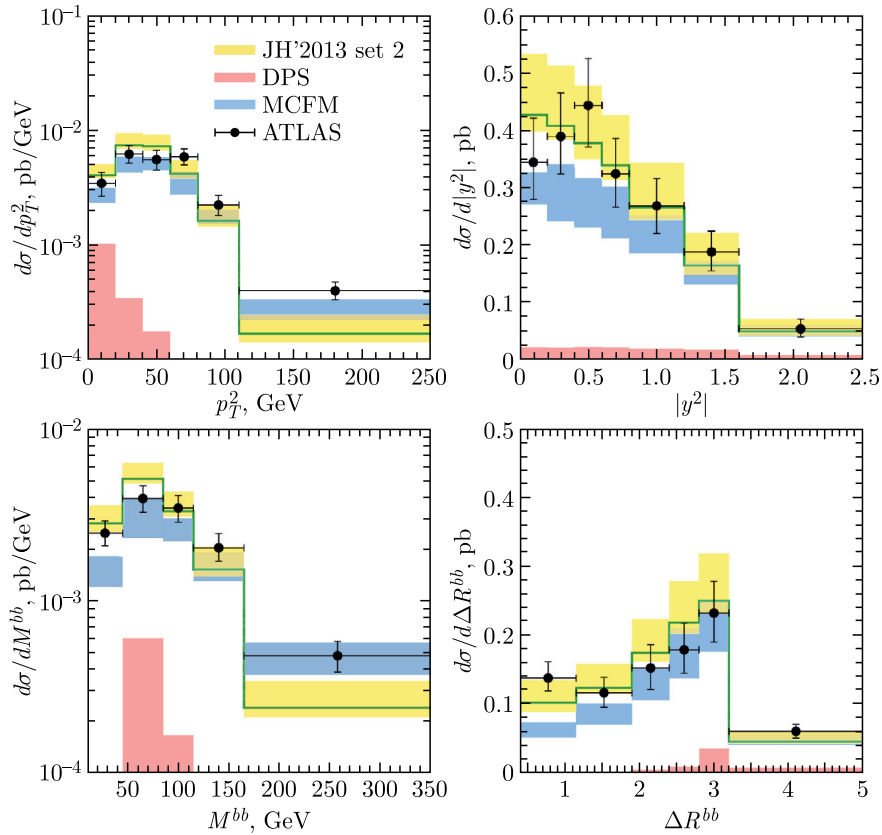


Рис. 18. Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения Z -бозонов и двух b -струй в pp -столкновениях при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Обозначения соответствуют обозначениям на рис. 17. Данные коллаборации ATLAS [217]

в которой основную роль играет вклад подпроцесса глюон-глюонного слияния (69). Таким образом, использование k_T -факторизационного подхода и уравнения эволюции SCFM позволяет воспроизвести результаты традиционных, значительно более трудоемких вычислений в рамках коллинеарного приближения КХД с учетом поправок высших порядков. Как видно из рис. 17–19, механизм двойного партонного рассеяния оказывает лишь небольшое влияние на предсказания в области малых значений поперечного импульса. В области средних и больших p_T^Z его вклад в сечения пренебрежимо мал. Зависимость полученных результатов от величины параметра ε_b невелика: изменение его значения от $\varepsilon_b = 0,006$ до $\varepsilon_b = 0,003$ приводит лишь к незначительному росту рассчитанных сечений, который, однако, намного меньше других неопределенностей вычислений.

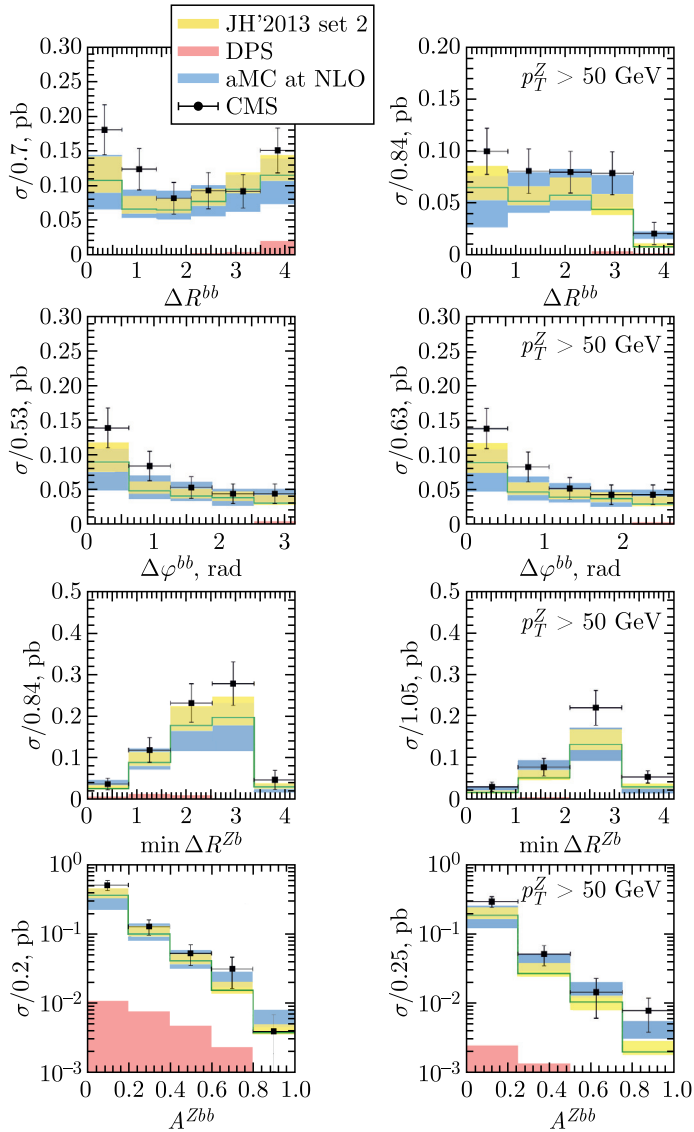


Рис. 19. Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения Z -бозонов и двух b -адронов в pp -столкновениях при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Закрашенные области соответствуют оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Результаты вычислений в NLO приближении теории возмущений КХД, полученные с помощью Монте-Карло генератора событий MadGraph5_aMC@NLO [162], взяты из экспериментальной работы [218]. Данные коллаборации CMS [218]

4.3.4. *Результаты расчетов: сечения процессов ассоциативного рождения прямых фотонов и лидирующей струи адронов.* В отличие от процессов рождения прямых фотонов и струй тяжелых кварков при описании сечений процессов ассоциативного рождения прямых фотонов и струй, возникающих в процессе адронизации легких кварков и глюонов, необходимо дополнительно учитывать в расчетах вклады подпроцессов порядка $O(\alpha_s)$:

$$q(k_1) + g(k_2) \rightarrow \gamma(p_1) + q(p_2), \quad (76)$$

$$q(k_1) + \bar{q}(k_2) \rightarrow \gamma(p_1) + g(p_2), \quad (77)$$

где в круглых скобках указаны 4-импульсы соответствующих частиц. Как было показано выше, такие подпроцессы играют существенную роль в области достаточно больших значений поперечных импульсов (или больших значений переменной x). Конечно, величиной поперечного импульса начальных партонов здесь также можно пренебречь и учитывать вклад подпроцессов (76) и (77) в рамках обычного коллинеарного приближения КХД. Вычисление соответствующих сечений не представляет трудностей. Отметим только, что во избежание двойного счета в (76) должен учитываться только вклад валентных кварков, поскольку вклад морских кварков уже учтен с помощью подпроцесса глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности (69).

При проведении расчетов в рамках k_T -факторизационного подхода необходимо учитывать тот факт, что в дополнение к струям, образующимся в результате адронизации кварков в конечном состоянии (69), значительное число струй формируется в процессе эволюции начального глюонного каскада. В этом случае кинематические свойства адронных струй описываются с помощью уравнения глюонной эволюции*. Изучение различных наблюдаемых, связанных с кинематикой струй адронов, позволяет получить дополнительную информацию о динамике ТМД глюонной эволюции в протоне. Для моделирования процессов излучения глюонов в начальном состоянии в соответствии с уравнением ССФМ используется алгоритм генерации партонных ливней генератора Монте-Карло CASCADE [93], при этом вычисление полных и дифференциальных сечений выполняется в два этапа [173]. Так, события, отвечающие процессам рождения прямых фотонов, записываются в файл формата *.lhe (Les Houches Event [168]), который часто используется при проведении расчетов и позволяет легко проводить дальнейший анализ и обработку событий с помощью различных инструментов (таких как PYTHIA [160]). На следующем этапе этот файл *.lhe используется для численной реконструкции цепочки эволюции ССФМ глюонных распределений (а также для учета эффектов от партонных ливней в конечном

* В отличие от обычной коллинеарной теории возмущений КХД, где кинематика (и само наличие) струй определяется только соответствующей амплитудой партонного рассеяния.

состоянии), что позволяет вести дальнейший отбор событий с любым числом адронных струй в соответствии с критериями экспериментального анализа. Вычисление вкладов от подпроцессов (70), (71), (76) и (77) с участием кварков в начальном состоянии производится аналогичным образом с использованием алгоритма генерации партонных ливней (как в начальном, так и в конечном состоянии) генератора Монте-Карло RUTHIA [160]. Отбор струй осуществляется с использованием алгоритма, включенного в пакет программ FASTJET [225] при значении параметра анти- k_T алгоритма $R_{\text{jet}} = 0,4$, что соответствует экспериментальным критериям.

Экспериментальные данные для процессов ассоциативного рождения прямых фотонов и струй в pp -столкновениях на коллайдере LHC были получены коллаборациями CMS [227, 230] и ATLAS [228, 229, 231, 232] при энергиях $\sqrt{s} = 7, 8$ и 13 ТэВ. Однако необходимо отметить, что данные [230–232] получены в области достаточно больших значений $E_T^\gamma \geq 130\text{--}190$ ГэВ, что соответствует области $x \sim E_T^\gamma/\sqrt{s} \sim 0,1$, в которой основную роль играют подпроцессы (70), (71), (76) и (77), весьма слабо зависящие от глюонной плотности в протоне. Поэтому ниже мы будем рассматривать только измерения [227–229], которые наиболее чувствительны к глюонным распределениям в области малых значений переменной x . Так, коллаборацией CMS были получены экспериментальные данные для дифференциального сечения $(d\sigma/dE_T^\gamma) d\eta^\gamma d\eta^{\text{jet}}$ с учетом различных соотношений между псевдобыстродами фотона и лидирующей струи адронов в области $E_T^\gamma > 40$ ГэВ, $p_T^{\text{jet}} > 30$ ГэВ, $|\eta^\gamma| < 2,5$ и $|\eta^{\text{jet}}| < 2,5$ при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ [227]. Коллаборацией ATLAS были измерены распределения по поперечной энергии фотона E_T^γ при $E_T^\gamma > 45$ ГэВ, $p_T^{\text{jet}} > 40$ ГэВ, $|\eta^\gamma| < 2,37$ и $|\eta^{\text{jet}}| < 2,37$ при той же энергии [228]. Кроме того, были измерены распределения по поперечной энергии фотона E_T^γ , поперечному импульсу p_T^{jet} и скорости y^{jet} адронной струи, а также распределения по разности азимутальных углов фотона и струи $\Delta\phi^{\gamma\text{-jet}}$, инвариантной массе $M^{\gamma\text{-jet}}$ и углу рассеяния $\cos\theta = \tanh(y^\gamma - y^{\text{jet}})/2$ в области $E_T^\gamma > 25$ ГэВ, $p_T^{\text{jet}} > 20$ ГэВ, $|\eta^\gamma| < 1,37$ и $|\eta^{\text{jet}}| < 4,4$ [229].

Результаты теоретических расчетов представлены на рис. 20–23, где использованы TMD глюонные распределения JH'2013 set 1 и JH'2013 set 2. Как обычно, закрашенные области на всех рисунках отвечают оценкам неопределенностей вычислений. Вклад подпроцесса глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности (69) показан отдельно. Видно, что полученные предсказания достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными [227–229] коллабораций CMS и ATLAS как по форме, так и по абсолютной величине в пределах экспериментальных и теоретических неопределенностей. Отдельно следует подчеркнуть достигнутое хорошее описание угловых корреляций между импульсами фотона и адронной струи (см. рис. 22 и 23), которые достаточно чувствительны к механизму образования конечного состояния. Как и ожидалось,

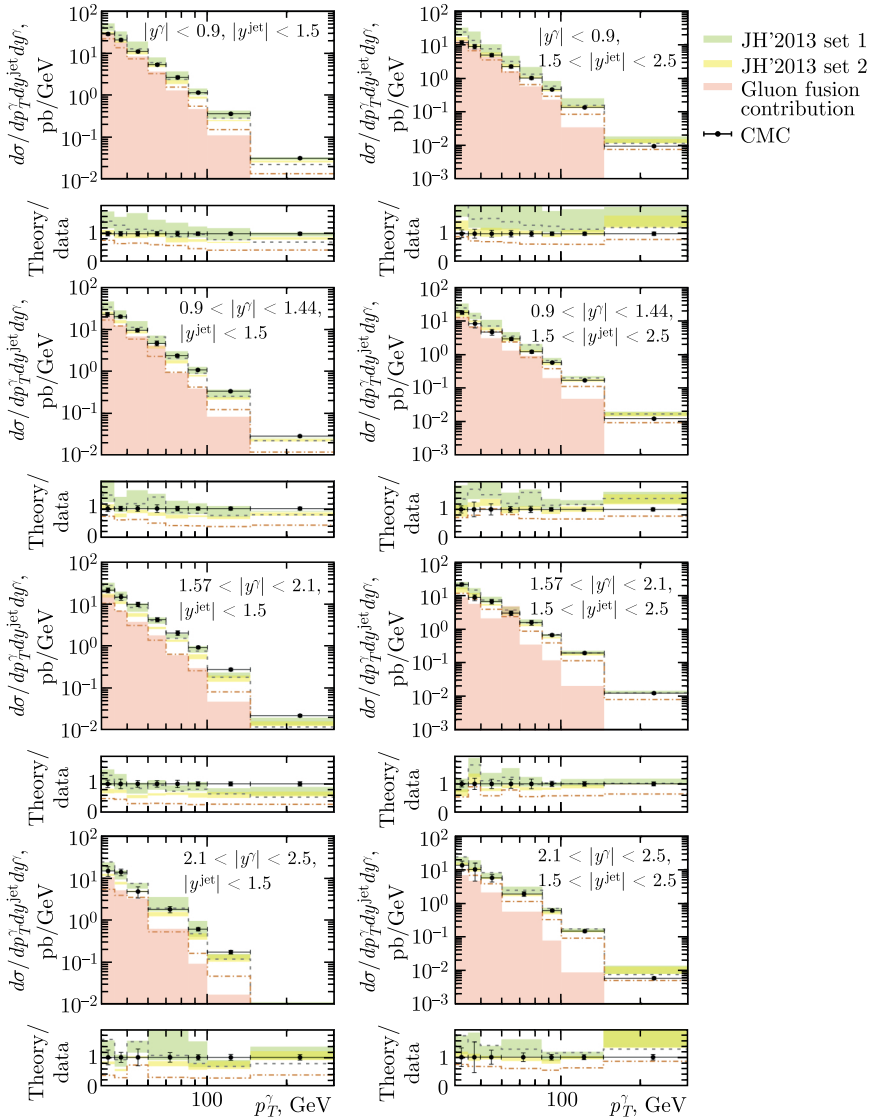


Рис. 20 (цветной в электронной версии). Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения прямых фотонов и адронных струй в pp -столкновениях при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Закрашенные области — оценки теоретических неопределенностей вычислений. Отдельно показан вклад подпроцесса глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности (69). Штриховые гистограммы — результаты расчетов с учетом партонных ливней только в начальном состоянии. Штрихпунктирные гистограммы — результаты вычислений в рамках приближения [226]. Экспериментальные данные коллаборации CMS [227]

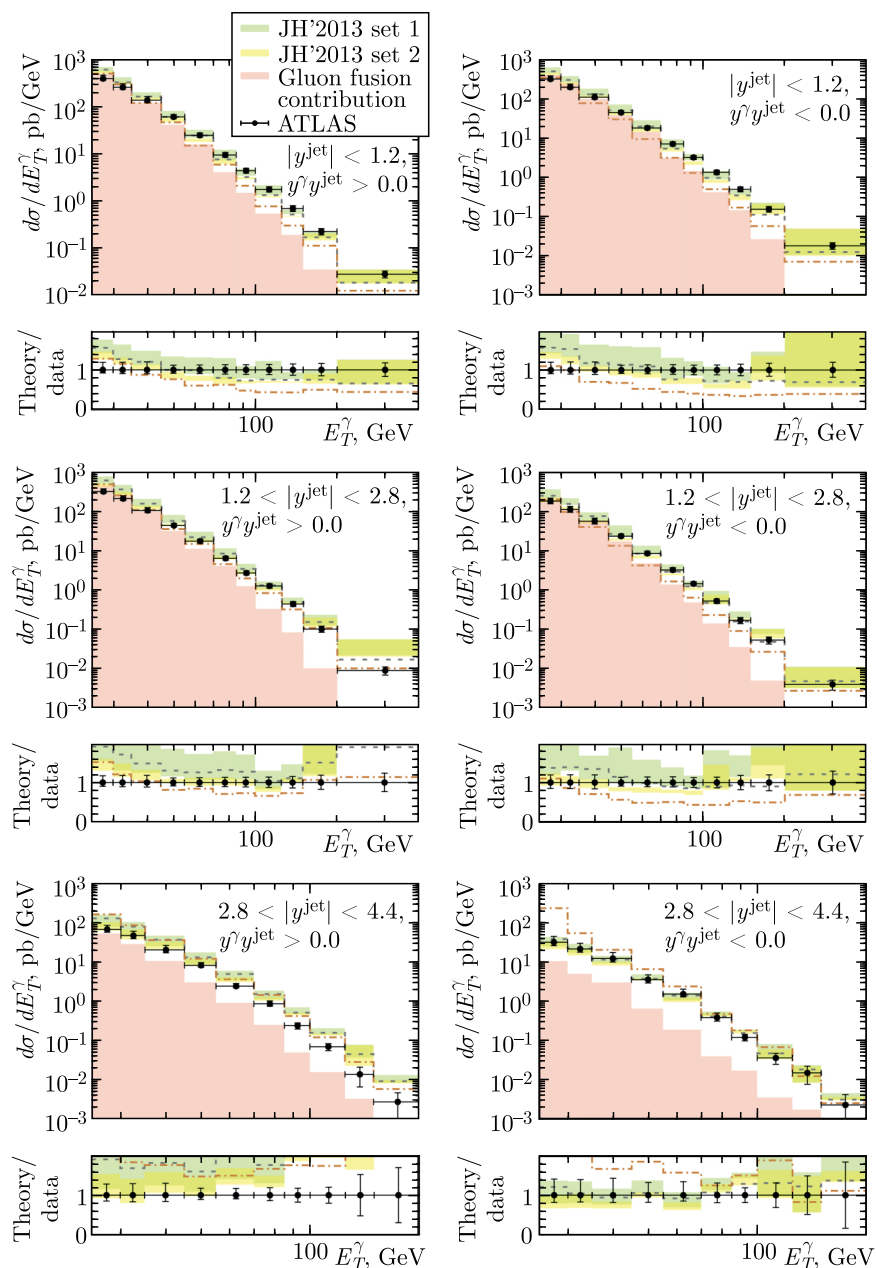


Рис. 21 (цветной в электронной версии). Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения прямых фотонов и адронных струй в pp -столкновениях при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Все обозначения соответствуют обозначениям на рис. 20. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [228]

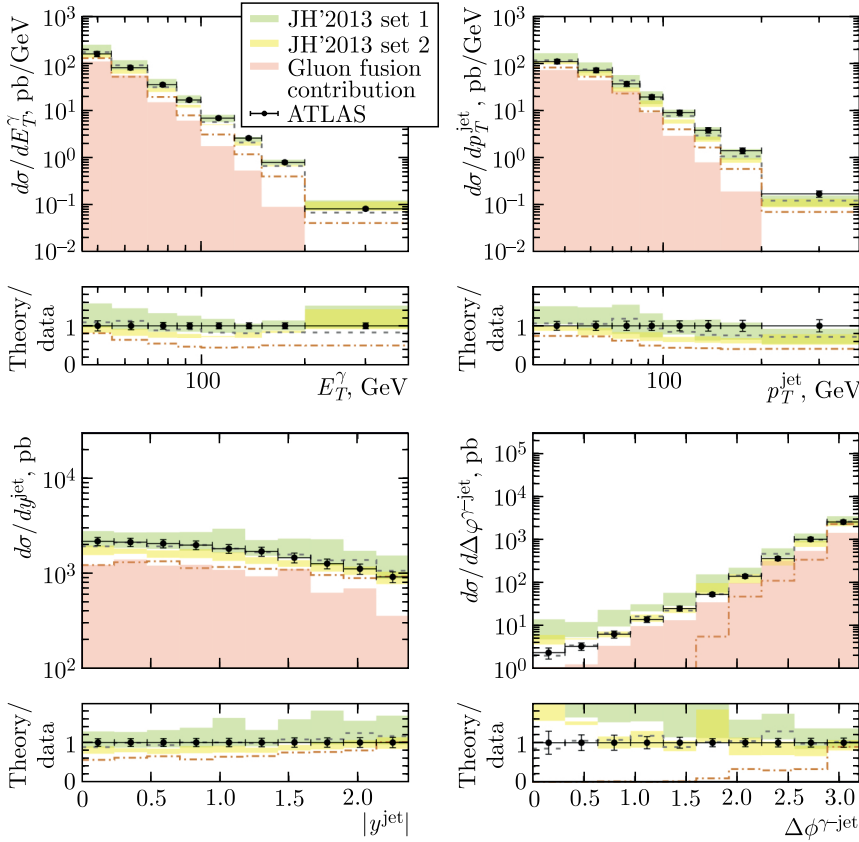


Рис. 22 (цветной в электронной версии). Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения прямых фотонов и адронных струй в pp -столкновениях при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ. Все обозначения соответствуют обозначениям на рис. 20. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [229]

подпроцесс глюон-глюонного слияния вне массовой поверхности играет лидирующую роль в области не очень больших поперечных энергий $E_T^\gamma \leq 120\text{--}150$ ГэВ. При больших значениях E_T^γ вклад этого подпроцесса в сечение становится пренебрежимо мал и основную роль начинают играть подпроцессы с участием кварков в начальном состоянии (70), (71), (76) и (77). Видно, что учет таких процессов необходим для описания экспериментальных данных во всей кинематической области.

Для более детального изучения влияния эффектов партонных излучений (ливней) на теоретические предсказания были проведены вычисления, в которых учитывались излучения партонов только в начальном состоянии. Полученные результаты представлены штриховыми

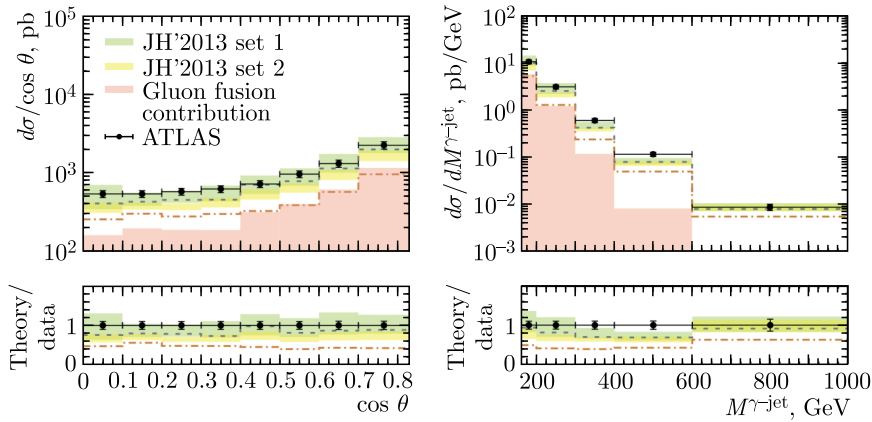


Рис. 23 (цветной в электронной версии). Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения прямых фотонов и адронных струй в pp -столкновениях при $\sqrt{s} = 7$ ТэВ с учетом дополнительных кинематических ограничений: $\cos\theta < 0,83$, $M^{\gamma\text{-jet}} > 161$ ГэВ и $|y^\gamma + y^{\text{jet}}| < 2,37$. Все обозначения соответствуют обозначениям на рис. 20. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS [229]

гистограммами на рис. 20–23. Как видно, эффект от партонных ливней в конечном состоянии достаточно мал для распределений по всем рассматриваемым кинематическим переменным, за исключением распределений по разности азимутальных углов $\Delta\phi^{\gamma\text{-jet}}$ в области $\Delta\phi^{\gamma\text{-jet}} \sim 0$ (см. рис. 22). Отметим, что в ранних работах [48, 209, 233, 234] влияние партонных ливней в начальном состоянии на кинематику адронных струй либо не рассматривалось вообще [48], либо учитывалось [209, 233, 234] только в рамках некоторого приближения [226]. Так, предполагалось, что партон (главным образом глюон) k' , испущенный на последнем шаге эволюции, компенсирует поперечный импульс партона (глюона), участвующего в жестком подпроцессе взаимодействия: $\mathbf{k}'_T \simeq -\mathbf{k}_T$. Все остальные партоны, излученные во время КХД-эволюции партонного каскада, относятся к протонному остатку, который согласно предположениям [226] обладает поперечным импульсом, пренебрежимо малым по сравнению с \mathbf{k}'_T . Таким образом, партон k' формирует адронную струю с $E_T^{\text{jet}} = |\mathbf{k}'_T|$ в дополнение к струям, образующимся в жестком подпроцессе, из которых в дальнейшем выбирается одна, обладающая наибольшей поперечной энергией (лидирующая струя). Результаты, полученные с использованием этого предположения, также приведены на рис. 20–23 (штрихпунктирные гистограммы). Как легко видеть, новый используемый метод [173] позволяет значительно улучшить согласие результатов расчетов с экспериментальными данными по сравнению с предсказаниями приближения [226].

5. ПРОЦЕССЫ РОЖДЕНИЯ БОЗОНОВ ХИГГСА ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Ниже рассмотрены процессы инклюзивного и ассоциативного (в сопровождении адронных струй) рождения бозонов Хиггса при высоких энергиях. При энергиях коллайдера ЛНС сечения процессов рождения хиггсовских частиц определяются главным образом поведением глюонных распределений при достаточно малых значениях переменной $x \sim m_H/\sqrt{s} \sim 0,008$ (считаем массу бозона Хиггса равной $m_H = 125$ ГэВ и $\sqrt{s} = 13$ ТэВ), что дает основания для использования в расчетах k_T -факторизационного подхода КХД.

Экспериментальное обнаружение хиггсовских бозонов на коллайдере ЛНС [235, 236], без сомнения, стало новой вехой в развитии физики высоких энергий, а теоретические исследования процессов рождения и распада этих частиц (с целью поиска эффектов новой физики за рамками Стандартной модели) остаются актуальной задачей в рамках КХД (см., например, [237]). Кроме того, исследования таких процессов представляют значительный интерес также в свете изучения динамики глюонной эволюции в протоне, поскольку основным механизмом процесса рождения бозона Хиггса в pp -столкновениях при энергиях коллайдера ЛНС является подпроцесс глюон-глюонного слияния [238–243].

Определяющий вклад в сечение дают диаграммы, содержащие треугольную петлю тяжелых (главным образом t) кварков. В области больших значений поперечного импульса p_T существенный вклад ожидается также от подпроцессов с участием векторных (W^\pm и Z) бозонов в начальном (Vector Boson Fusion, VBF) и конечном (VH) состояниях, а также от процессов ассоциативного рождения бозона H и пары кварков $t\bar{t}$ [244]. Вычисление соответствующих амплитуд, особенно с учетом поправок высших порядков теории возмущений КХД, представляет собой серьезную проблему ввиду необходимости учета значительного числа многопетлевых диаграмм. Однако в пределе $m_t \rightarrow \infty$ расчеты существенно упрощаются, поскольку в этом приближении треугольная петля t -кварков в диаграммах глюон-глюонного слияния заменяется эффективной вершиной взаимодействия [245, 246]. Такой подход справедлив с точностью порядка 5% в области малых и средних значений поперечного импульса бозона Хиггса $p_T < m_t$ при $m_H < 2m_t$ [247, 248]. В настоящее время в пределе $m_t \rightarrow \infty$ сечения процессов рождения хиггсовских частиц известны в $N^3\text{LO}$ -приближении теории возмущений КХД [249]. Учет поправок высших порядков значительно (почти в 3 раза) увеличивает величину полного сечения, рассчитанную в ведущем порядке [250, 251] (см. также [252]).

В рамках k_T -факторизационного подхода расчеты [174, 253–255] сечений процессов рождения бозонов Хиггса основаны на следующих

подпроцессах слияния глюонов вне массовой поверхности:

$$g^*(k_1) + g^*(k_2) \rightarrow H(p) \rightarrow \gamma/W^\pm/Z(p_1) + \gamma/W^\mp/Z(p_2), \quad (78)$$

где в круглых скобках указаны 4-импульсы всех соответствующих частиц. Эффективный лагранжиан взаимодействия поля Хиггса H и полей глюонов имеет вид [245, 246]

$$\mathcal{L}_{ggH} = \frac{\alpha_s}{12\pi} \left(C_F \sqrt{2} \right)^{1/2} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} H, \quad (79)$$

где C_F — константа Ферми и $G_{\mu\nu}^a$ — известный тензор глюонного поля. Эффективная вершина взаимодействия $T_{ggH}^{\mu\nu,ab}(k_1, k_2)$ двух глюонов, обладающих 4-импульсами k_1 и k_2 и цветовыми индексами a и b , легко может быть получена* из лагранжиана (79):

$$T_{ggH}^{\mu\nu,ab}(k_1, k_2) = i\delta^{ab} \frac{\alpha_s}{3\pi} \left(C_F \sqrt{2} \right)^{1/2} [k_2^\mu k_1^\nu - (k_1 \cdot k_2) g^{\mu\nu}]. \quad (80)$$

Отметим, что распад $H \rightarrow \gamma\gamma$ может быть описан аналогичным образом с помощью эффективного лагранжиана взаимодействия [245, 246]. Отличие состоит в том, что помимо тяжелых кварков в этом случае необходимо учитывать другие заряженные частицы — векторные бозоны и лептоны. С помощью эффективных вершин взаимодействия легко получить простые аналитические выражения для квадратов амплитуд вне массовой поверхности подпроцессов (78):

$$|\overline{\mathcal{A}}(g^* + g^* \rightarrow H \rightarrow \gamma + \gamma)|^2 = \frac{1}{1152\pi^4} \alpha^2 \alpha_s^2 C_F^2 |\mathcal{F}|^2 \times \\ \times \frac{\widehat{s}^2 (\widehat{s} + \mathbf{p}_T^2)^2}{(\widehat{s} - m_H^2)^2 + m_H^2 \Gamma_H^2} \cos^2 \phi, \quad (81)$$

$$|\overline{\mathcal{A}}(g^* + g^* \rightarrow H \rightarrow V + V)|^2 = \frac{512\pi}{9} \alpha^3 \alpha_s^2 C_F \sqrt{2} m_Z^2 C_V \times \\ \times \frac{(\widehat{s} + \mathbf{p}_T^2)^2}{(\widehat{s} - m_H^2)^2 + m_H^2 \Gamma_H^2} \cos^2 \phi \times \\ \times \frac{(g_{(V)L}^4 + g_{(V)R}^4)(l_1 \cdot l_3)(l_2 \cdot l_4) + 2g_{(V)L}^2 g_{(V)R}^2 (l_1 \cdot l_4)(l_2 \cdot l_3)}{[(p_1^2 - m_V^2)^2 + m_V^2 \Gamma_V^2][(p_2^2 - m_V^2)^2 + m_V^2 \Gamma_V^2]}, \quad (82)$$

где $V = Z$ или W^\pm и было выполнено усреднение по поляризациям начальных и суммирование по поляризациям конечных частиц. В выражениях (81) и (82) \mathcal{F} — известная функция [245, 246], Γ_H , Γ_Z и Γ_W — полные ширины распадов хиггсовской частицы и калибровочных бозонов, $\widehat{s} = (k_1 + k_2)^2$, поперечный импульс бозона Хиггса $\mathbf{p}_T = \mathbf{k}_{1T} + \mathbf{k}_{2T}$, ϕ —

* См. также расчеты [46].

азимутальный угол между поперечными импульсами начальных глюонов, $l_1(l_2)$ и $l_3(l_4)$ — 4-импульсы лептонов (антилептонов), возникающих в процессах распада калибровочных бозонов: $p_1 = l_1 + l_2$, $p_2 = l_3 + l_4$. Константы C_V , $g_{(V)L}$ и $g_{(V)R}$ определяются как

$$C_Z = \frac{4}{\sin^6 2\theta_W}, \quad C_W = \frac{\cot^2 \theta_W}{64 \sin^4 \theta_W}, \quad (83)$$

$$g_{(Z)L} = -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W, \quad g_{(Z)R} = \sin^2 \theta_W, \quad (84)$$

$$g_{(W)L} = 1, \quad g_{(W)R} = 0, \quad (85)$$

где θ_W — угол смешивания Вайнберга. Следует отметить, что при вычислении (82) все лептоны в конечном состоянии предполагались различными и, следовательно, соответствующие интерференционные эффекты не учитывались. Суммирование по поляризациям начальных виртуальных глюонов выполняется согласно (61). Приведенные результаты для амплитуды вне массовой поверхности с последующим распадом $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$ совпадают с полученными ранее [40]. Аналитические выражения были включены в Монте-Карло генератор событий PEGASUS [94].

5.1. Результаты расчетов: сечения процессов инклюзивного рождения бозона Хиггса. Экспериментальные данные для процесса инклюзивного рождения хиггсовских бозонов при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ с последующим распадом по различным модам были получены коллаборациями CMS и ATLAS. Так, для распада $H \rightarrow \gamma\gamma$ были измерены распределения бозонов Хиггса по поперечному импульсу p_T и быстрой y , а также разности азимутальных углов фотонов $\Delta\phi^{\gamma\gamma}$ и угла рассеяния фотона $\cos\theta^*$ (в системе Коллинза–Сопера) [258, 259]. Коллаборацией CMS использовались следующие кинематические ограничения на псевдобыстроты η и поперечные импульсы первого (обладающего наибольшим поперечным импульсом) и второго фотонов: $|\eta^{\gamma_1}| < 2,5$, $|\eta^{\gamma_2}| < 2,5$, $p_T^{\gamma_1}/m^{\gamma\gamma} > 1/3$, $p_T^{\gamma_2}/m^{\gamma\gamma} > 1/4$, где $m^{\gamma\gamma}$ — инвариантная масса пары фотонов, $m^{\gamma\gamma} > 90$ ГэВ [258]. Экспериментальные данные коллаборации ATLAS были получены в области $|\eta^{\gamma_1}| < 2,37$, $|\eta^{\gamma_2}| < 2,37$, $p_T^{\gamma_1}/m^{\gamma\gamma} > 0,35$, $p_T^{\gamma_2}/m^{\gamma\gamma} > 0,25$, $105 < m^{\gamma\gamma} < 160$ ГэВ [259]. Предсказания для дифференциальных сечений представлены на рис. 24, при этом в расчетах были использованы глюонные распределения A0 и JH'2013 set 2. Закрашенные области на всех рисунках отвечают оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Отметим, что к вкладам в сечения от подпроцесса глюон-глюонного слияния (78) были добавлены вклады подпроцессов с участием векторных (W^\pm и Z) бозонов в начальном (VBF) и конечном (VH) состояниях, а также вклады процессов ассоциативного рождения бозона H и пары кварков $t\bar{t}$, которые являются существенными в области больших значений поперечного импульса бозона Хиггса p_T (см., например, [244]) и были взяты из экспериментальных

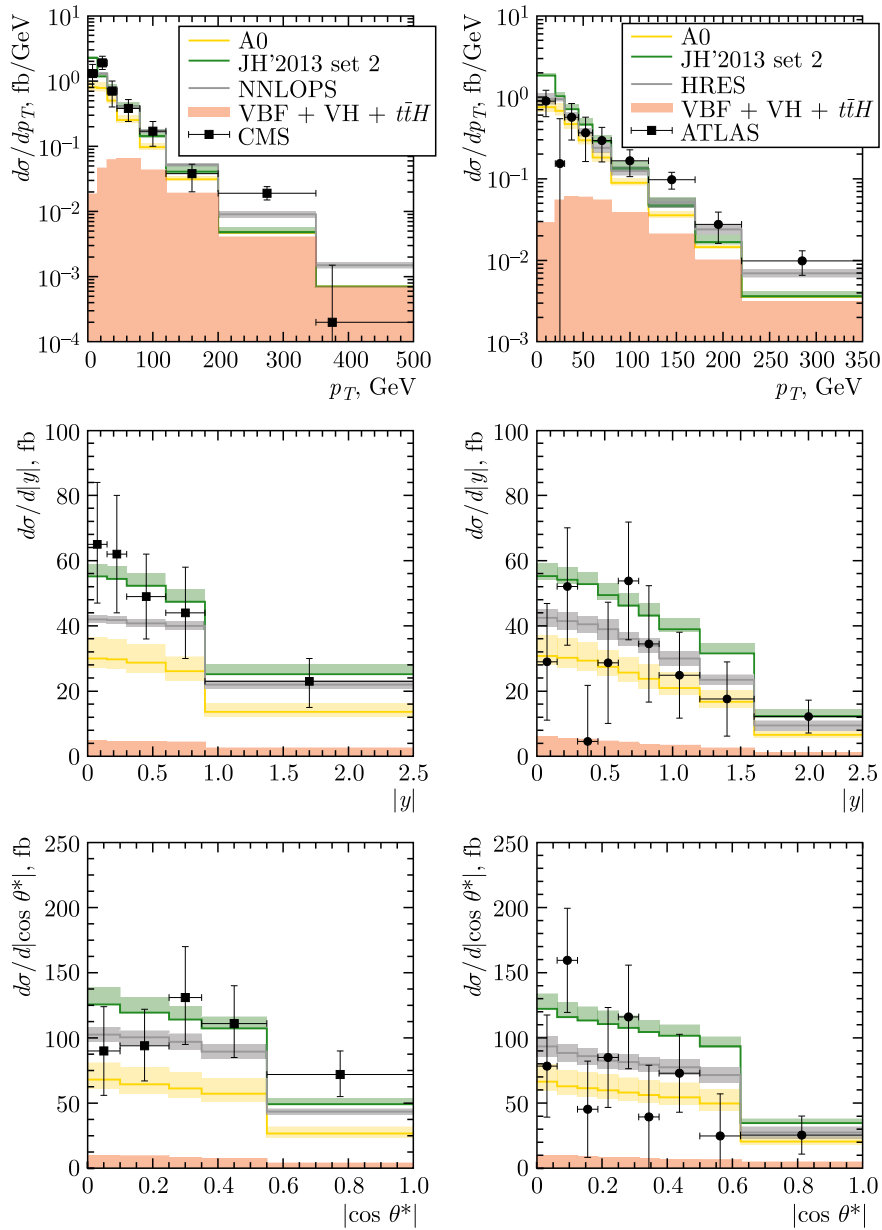


Рис. 24. Дифференциальные сечения процесса инклюзивного рождения бозонов Хиггса при $\sqrt{s} = 13$ ТэВ (в дифотонной моде распада). Результаты вычислений NNLO + NNLL (генераторы HRES [256] и NNLOPS [257]), вклады подпроцессов с участием векторных бозонов и/или t -кварков взяты из экспериментальных работ [258, 259]. Данные коллабораций CMS [258] и ATLAS [259]

работ [258, 259]. Кроме того, на рис. 24 приведены результаты вычислений в рамках NNLO + NNLL приближения обычной (коллинеарной) теории возмущений КХД, полученные с помощью Монте-Карло генераторов событий HRES [256] и NNLOPS [257], также взятые из экспериментальных работ [258, 259]. Видно, что теоретические предсказания хорошо согласуются с данными коллабораций CMS и ATLAS как по форме, так и по абсолютной величине в пределах экспериментальных и теоретических неопределенностей. Следует особо подчеркнуть, что распределения по поперечному импульсу бозонов p_T , вычисленные в рамках k_T -факторизационного подхода, совпадают (за исключением области малых p_T) с предсказаниями обычной пертурбативной КХД с учетом вкладов высоких порядков. Поскольку форма этих распределений (в рамках k_T -факторизационного подхода КХД) в значительной мере определяется зависимостью TMD-функций распределения глюонов от поперечного импульса, то отсюда следует, что вклады высших порядков теории возмущений КХД эффективно учитываются с помощью TMD-распределений глюонов, полученных из решений уравнения CCFM. Отличия предсказаний k_T -факторизационного подхода, полученных с помощью разных TMD глюонных распределений в области небольших значений поперечного импульса бозонов Хиггса p_T (а также при $\Delta\phi^{\gamma\gamma} \sim \pi$), связаны с различным поведением этих распределений в области малых \mathbf{k}_T^2 (см. рис. 3). Этот же фактор влияет на абсолютную нормировку распределений хиггсовских частиц по быстрой y и углу рассеяния фотона $\cos\theta^*$.

Экспериментальный анализ процесса инклюзивного рождения бозона Хиггса с последующим распадом $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$ или $H \rightarrow W^+W^- \rightarrow e^\pm\mu^\mp\nu\bar{\nu}$ также был проведен коллаборациями CMS и ATLAS. В настоящем обзоре мы остановимся на недавних результатах, полученных коллаборацией ATLAS для распада $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$ при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ. Так, были измерены [260] распределения бозонов Хиггса по поперечному импульсу, быстрой, углу рассеяния $\cos\theta^*$ лидирующей лептонной пары (пары, обладающей инвариантной массой m_{12} , наиболее близкой к массе m_Z), инвариантным массам m_{12} и m_{34} лидирующей и следующей за ней пары лептонов, а также углам рождения $\cos\theta_1$ и $\cos\theta_2$ антилептонов (в системах покоя соответствующих Z -бозонов). Эти данные получены при $p_T^{l_1} > 20$ ГэВ, $p_T^{l_2} > 15$ ГэВ, $p_T^{l_3} > 10$ ГэВ, $p_T^{l_4} > 6$ ГэВ, $50 < m_{12} < 106$ ГэВ, $12 < m_{34} < 115$ ГэВ, $118 < m_{4l} < 129$ ГэВ и $|\eta| < 2,47$ [260]. Результаты расчетов представлены на рис. 25, где, как и ранее, к вкладам от подпроцессов глюон-глюонного слияния (78) были добавлены вклады подпроцессов с участием векторных бозонов в начальном (VBF) и конечном (VH) состояниях, а также вклады процессов ассоциативного рождения бозона H и пары кварков $t\bar{t}$, взятые из экспериментальной работы [260]. Учет таких вкладов становится важен в области очень больших значений поперечного импульса $p_T \geq m_H$. Видно, что предсказания k_T -факторизационного подхода хоро-

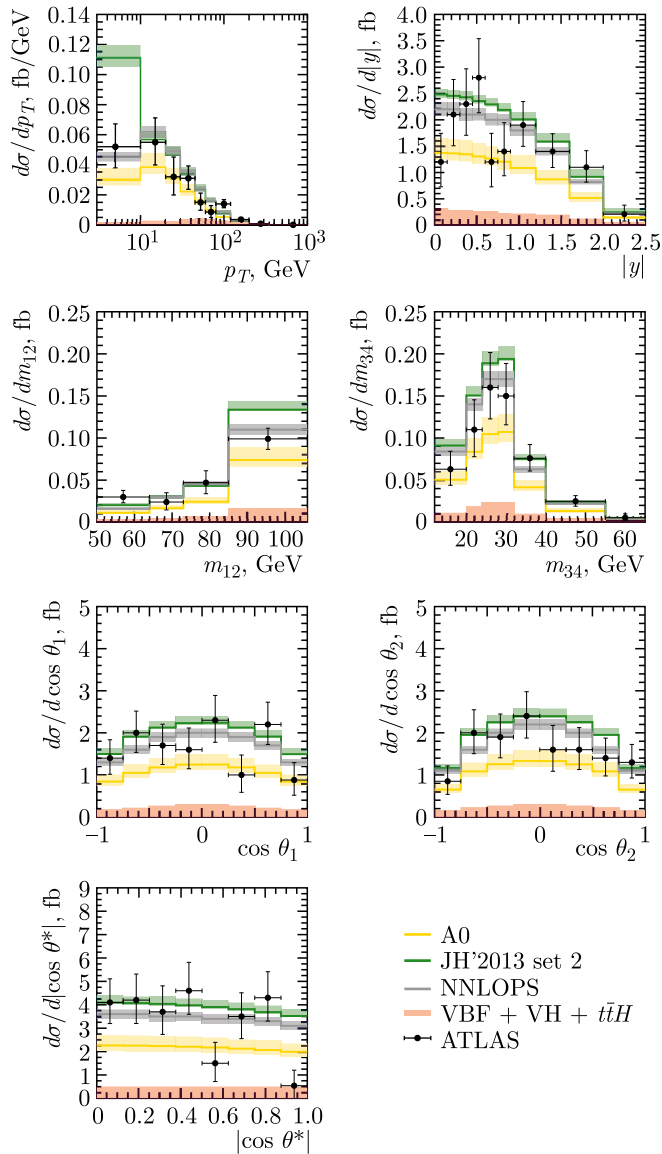


Рис. 25. Дифференциальные сечения процесса инклюзивного рождения бозонов Хиггса в pp -столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ в режиме распада $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$. Результаты вычислений NNLO + NNLL, полученные с помощью генератора Монте-Карло NNLOPS [257], вклады подпроцессов с участием векторных бозонов и/или t -кварков взяты из экспериментальной работы [260]. Данные коллаборации ATLAS [260]

шо согласуются (в пределах неопределенностей теоретических вычислений и погрешностей измерений) с данными коллабораций CMS и ATLAS, полученными при различных энергиях. Это согласие наблюдается для распределений по всем кинематическим переменным, единственное исключение составляет область небольших p_T . Численные результаты, как и в случае дифотонной моды распада, существенно зависят от выбора TMD-функции распределения глюонов в протоне, в частности, от ее формы и абсолютной нормировки в области малых значений поперечного импульса k_T^2 , приведенной на рис. 3. Таким образом, можно заключить, что экспериментальные данные LHC для процессов инклюзивного рождения бозонов Хиггса в дибозонных модах распада могут быть использованы для уточнения параметров TMD-распределений глюонов (см. также [117]). Отметим, что предсказания k_T -факторизационного подхода достаточно близки к результатам расчетов в рамках NNLO + NNLL приближения обычной теории возмущений КХД. Последние взяты из работы [260].

5.2. Результаты расчетов: сечения процессов ассоциативного рождения бозонов Хиггса и струй адронов. Как было отмечено ранее, наиболее ярко принципиальные отличия между методами k_T -факторизационного подхода КХД и обычной теории возмущений проявляются при вычислении сечений процессов с образованием струй в конечном состоянии. При этом изучение подобных процессов позволяет получить дополнительную информацию о динамике глюонной эволюции в протоне. С этой целью были вычислены сечения рождения хиггсовских частиц и адронных струй (с последующим распадом бозона H по различным модам) в pp -столкновениях при энергиях $\sqrt{s} = 8$ и 13 ТэВ в зависимости от ряда наблюдаемых. Кинематическая область, в которой проводились расчеты, соответствует указанным выше условиям экспериментов коллабораций CMS [258, 261] и ATLAS [259] для процессов инклюзивного рождения бозона Хиггса; при этом дополнительно накладывались ограничения на поперечный импульс и быстроту струй: $p_T^{\text{jet}} > 30$ ГэВ, $|\eta^{\text{jet}}| < 2,5$ (данные CMS [261]), $|\eta^{\text{jet}}| < 4,4$ (данные ATLAS [259]), $|\eta^{\text{jet}}| < 4,7$ (данные CMS [258]).

Согласно описанному выше методу вычисление полных и дифференциальных сечений рассматриваемых процессов выполняется в два этапа. Так, на первом этапе применяется Монте-Карло генератор событий PEGASUS, с помощью которого производятся численные расчеты с использованием TMD-распределений глюонов, полученных из решения уравнения эволюции CCFM. События, отвечающие процессам рождения бозонов Хиггса в различных модах распада, записываются в файл формата *.lhe. На следующем этапе подготовленный файл *.lhe используется для численной реконструкции цепочки эволюции глюонных распределений. С этой целью проводится моделирование процессов излучения глюонов в начальном состоянии с помощью алгоритма TMD-генерации

партонных ливней (в соответствии с уравнением эволюции CCFM) программы CASCADE [93], что позволяет вести отбор событий с любым числом адронных струй согласно критериям экспериментального анализа. Отбор струй осуществлялся с использованием алгоритма, включенного в пакет программ FASTJET [225], при обычном значении параметра анти- k_T алгоритма $R_{\text{jet}} = 0,4$.

Полученные результаты представлены на рис. 26 и 27. В этих расчетах были использованы глюонные распределения A0 и JH'2013 set 2, при этом закрашенные области на всех рисунках отвечают оценкам теоретических неопределенностей вычислений. Как и ранее, к вкладам в сечения от подпроцесса глюон-глюонного слияния (78) были добавлены вклады подпроцессов с участием калибровочных бозонов в начальном и конечном состояниях, а также вклады процессов ассоциативного рождения бозона H и пары кварков $t\bar{t}$, которые были взяты из экспериментальных работ [258, 260]. Также на рис. 26 и 27 для сравнения приведены результаты вычислений в рамках NNLO + NNLL приближения обычной теории возмущений КХД, полученные с помощью генераторов Монте-Карло MiNLO HJ [167] и NNLOPS [257], взятые из работ [258, 259]. Видно, что, как и для процессов инклюзивного рождения бозонов Хиггса, наши предсказания достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными CMS и ATLAS (полученными при разных энергиях) как по форме, так и по абсолютной величине в пределах экспериментальных и теоретических неопределенностей. Тем не менее использование в расчетах функции распределения глюонов A0 приводит к некоторой недооценке измеренных сечений. Отличия между предсказаниями k_T -факторизационного подхода, полученными с различными TMD глюонными распределениями, наиболее ярко проявляются для наблюдаемых, связанных с кинематикой струй: в дифотонной моде распада для распределений по разности быстрот бозона Хиггса и лидирующей адронной струи и/или разности их азимутальных углов (см. рис. 26). В случае распада $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$ такими характерными наблюдаемыми являются распределения по разности быстрот бозона Хиггса и лидирующей адронной струи, разности быстрот лидирующей и следующей за ней струй, а также распределения по инвариантным массам бозона Хиггса и лидирующей струи и/или бозона Хиггса и системы двух струй (см. рис. 27). К сожалению, в настоящее время достигнутая точность измерения таких сечений не позволяет сделать определенный вывод о предпочтительности той или иной TMD-функции распределения глюонов в протоне. Тем не менее указанные наблюдаемые могут быть использованы для уточнения параметров TMD глюонных распределений с использованием более точных данных, которые будут получены в будущих экспериментах.

В заключение следует подчеркнуть еще раз, что, как и в случае процесса инклюзивного рождения хиггсовских частиц, полученные пред-

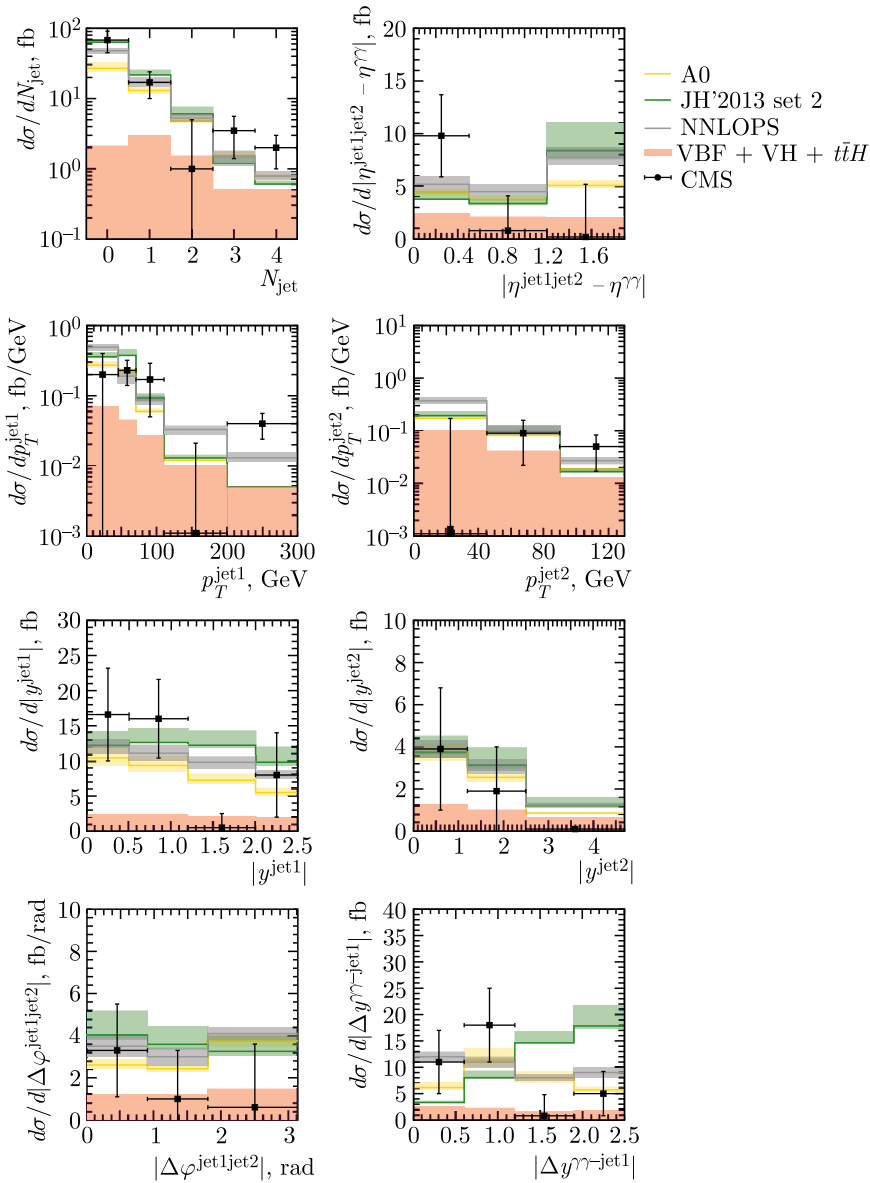


Рис. 26. Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения бозонов Хиггса и адронных струй (в дифотонной моде распада) в pp -столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ. Результаты вычислений NNLO + NNLL (генератор NNLOPS [257]), вклады подпроцессов с участием векторных бозонов и/или t -кварков взяты из экспериментальной работы [258]. Данные коллаборации CMS [258]

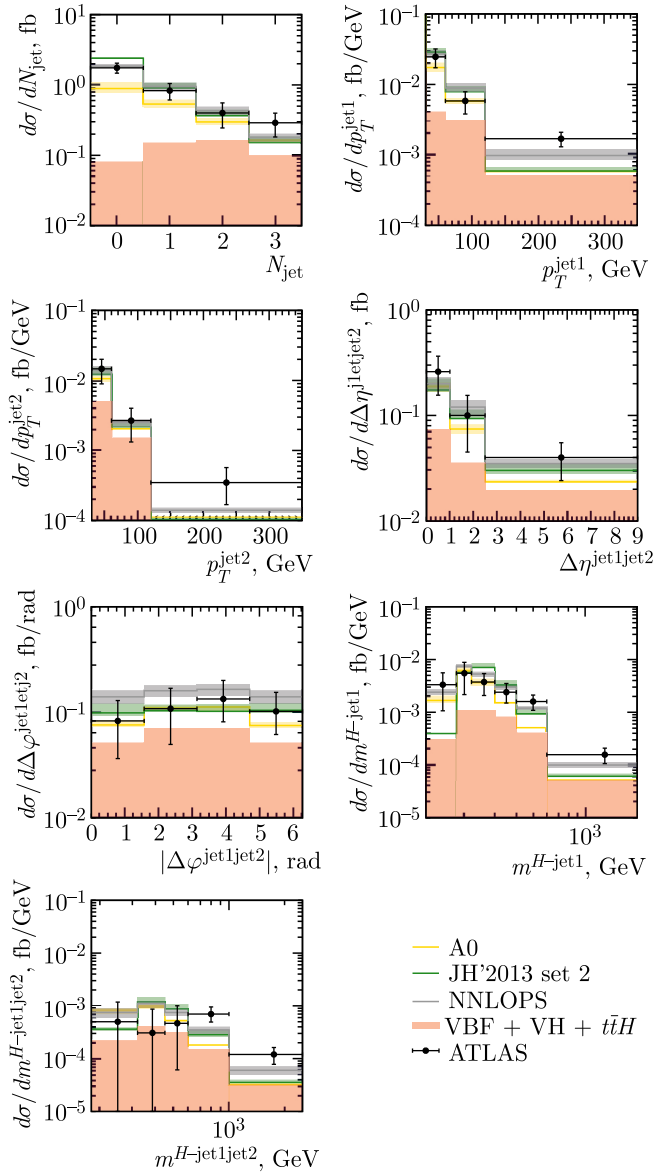


Рис. 27. Дифференциальные сечения процесса ассоциативного рождения бозонов Хиггса и адронных струй (в режиме распада $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$) в pp -столкновениях при энергии $\sqrt{s} = 13$ ТэВ. Результаты вычислений NNLO + NNLL (генератор NNLOPS [257]), вклады подпроцессов с участием векторных бозонов и/или t -кварков взяты из экспериментальной работы [260]. Данные коллаборации ATLAS [260]

сказания k_T -факторизационного подхода для всех наблюдаемых близки (конечно, в пределах теоретических неопределенностей) к результатам расчетов в рамках NNLO + NNLL приближения теории возмущений КХД, несмотря на принципиальное отличие этих подходов к способу построения событий, содержащих струи адронов в конечном состоянии. Так, в первом случае кинематические свойства струй определяются уравнением КХД-эволюции глюонной плотности, а во втором — матричным элементом жесткого подпроцесса рассеяния. Таким образом, еще раз продемонстрировано, что использование уравнения эволюции ССФМ позволяет воспроизвести традиционные, значительно более трудоемкие вычисления с учетом поправок высших порядков теории возмущений КХД.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Особый класс процессов, активно изучаемых в настоящее время в экспериментах на Большом адронном коллайдере, составляют процессы, в которых присутствуют два или более характерных энергетических масштаба взаимодействия — «мягкий» адронный масштаб, определяемый величиной порядка Λ_{QCD} , и «жесткий» масштаб, который задается переданным во время взаимодействия импульсом. Наличие «жесткого» масштаба позволяет отделить динамику взаимодействия на малых расстояниях от эффектов физики больших расстояний. Последнее производится с помощью так называемых теорем о факторизации, согласно которым сечения (или иные наблюдаемые) различных процессов могут быть представлены в виде свертки сечения соответствующего жесткого подпроцесса партонного рассеяния, вычисленного в рамках теории возмущений КХД, и функций распределения партонов в сталкивающихся протонах.

При энергиях современных ускорителей (HERA, LHC) и коллайдеров следующего поколения (FCC, EIC, EIC) необходимо использовать k_T -факторизационный подход КХД (или, что является синонимом, факторизацию при высоких энергиях). Несомненное преимущество этого подхода связано с удобством учета значительной части поправок следующих порядков теории возмущений КХД в форме зависящих от поперечного импульса (Transverse Momentum Dependent, или TMD) функций распределения глюонов и/или кварков в протоне. Кроме того, учет поперечного импульса начальных кварков и глюонов позволяет точно воспроизвести кинематику жестких подпроцессов уже в ведущем приближении, при этом в расчетах необходимо принимать во внимание зависимость амплитуд партонных подпроцессов от виртуальностей взаимодействующих партонов. Такие вычисления могут быть выполнены в рамках формализма, основанного на калибровочно-инвариантной эффективной теории поля Л. Н. Липатова, что обеспечивает калибровочную инвариантность

рассчитанных амплитуд во всех порядках теории возмущений, несмотря на виртуальности начальных частиц.

ТМД-функции распределения партонов (в частности, глюонов) в протоне являются предметом активных исследований, поскольку от них существенно зависят сечения многих процессов КХД, которые изучаются или будут изучаться как на современных коллайдерах, так и на коллайдерах следующего поколения. Аналогично обычным (коллинеарным) партонным распределениям на основе доступных экспериментальных данных и дополнительных модельных предположений должны быть получены начальные ТМД партонные плотности, а затем с помощью решения соответствующих уравнений эволюции (BFKL, CCFM и др.) ТМД-распределения могут быть рассчитаны для любой кинематической области, даже еще не доступной экспериментально. В этом свете весьма актуальным представляется изучение в рамках k_T -факторизационного подхода особого ряда таких процессов КХД, сечения которых определяются главным образом подпроцессами глюон-глюонного слияния и которые являются наиболее чувствительными к функциям распределения глюонов в протоне.

Значительный интерес представляет развитие методов вычислений в рамках k_T -факторизационного подхода КХД и их непосредственное применение в феноменологических расчетах сечений и иных наблюдаемых широкого ряда процессов. Так, долгое время значительным лимитирующим фактором при использовании этого подхода для вычисления сечений процессов ассоциативного рождения частиц и струй адронов была практическая сложность правильного учета кинематики струй, образующихся в результате излучения кварков и глюонов в начальном состоянии. Недавно эта проблема получила решение благодаря новой версии генератора Монте-Карло CASCADE, с помощью которого вычисления на партонном уровне могут быть дополнены моделированием вкладов ТМД партонных ливней. Последнее открывает новые возможности для изучения процессов с образованием адронных струй в конечном состоянии, что тем самым существенно расширяет область применимости k_T -факторизационного подхода КХД.

Обсуждаемые в настоящем обзоре методы позволяют быстро интерпретировать и осмыслить поток непрерывно поступающих новых экспериментальных данных для широкого ряда жестких процессов КХД, в том числе процессов одиночного и парного рождения тяжелых кварков, процессов инклюзивного и ассоциативного (в сопровождении одной или нескольких адронных струй) рождения прямых фотонов, тяжелых калибровочных бозонов при высоких энергиях. На примере этих процессов продемонстрированы перечисленные выше основные преимущества k_T -факторизационного подхода КХД. Показана чувствительность рассчитанных сечений к выбору ТМД-распределений глюонов в протоне. Подчеркнуто, что использование новых экспериментальных данных для таких процессов с целью определения и/или уточнения парамет-

ров начальных ТМД-распределений важно для дальнейшего развития k_T -факторизационного подхода, в частности, для уменьшения неопределенностей теоретических предсказаний.

Следует еще раз отметить, что использование эволюционных уравнений типа ВФКЛ и расчеты сечений жестких подпроцессов в высоких порядках теории возмущений КХД в рамках коллинеарного приближения представляют собой два разных способа учета пертурбативных вкладов. Как было отмечено выше, с помощью эволюционных уравнений суммируются до бесконечно высоких порядков вклады, усиленные различного рода большими логарифмами, тогда как при расчетах в рамках коллинеарной факторизации учет ограничен лишь сравнительно низкими порядками (обычно двумя и весьма редко — тремя), но зато в расчет принимаются вклады всех возможных фейнмановских диаграмм.

К сожалению, до сих пор подавляющее большинство расчетов сечений партонных подпроцессов рассеяния в рамках k_T -факторизационного подхода ограничены лидирующим порядком по константе связи КХД. Действительно, учет поперечного импульса взаимодействующих партонных как в жестком подпроцессе, так и в уравнениях эволюции приводит к опасности двойного счета — один и тот же вклад может быть учтен дважды под разными именами. Конечно, такая проблема не возникает в рамках обычного коллинеарного приближения ввиду отсутствия поперечного импульса у t -канальных партонных во время эволюции партонного каскада в соответствии с уравнениями DGLAP. Тем не менее некоторые методы вычислений в следующем за ведущим порядке теории возмущений в рамках подхода k_T -факторизации были предложены недавно и обсуждаются в литературе (см., например, [41, 262, 263]).

В заключение авторы выражают искреннюю и глубокую признательность А. В. Котикову, Г. И. Лыкасову и Х. Юнгу (H. Jung) за многочисленные обсуждения и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Collins J.* Foundations of Perturbative QCD. Cambridge Univ. Press, 2011.
2. *Efremov A., Radyushkin A.* Hard Processes, Parton Model and QCD // Nuovo Cim. 1980. V. 3, No. 2. P. 1.
3. *Collins J., Soper D., Sterman G.* Factorization of Hard Processes in QCD // Adv. Ser. Dir. High Energy Phys. 1989. V. 5. P. 1–91.
4. *Грибов В., Лунатов Л.* Глубоконеупругое ep -рассеяние в теории возмущений // ЯФ. 1972. Т. 15. С. 781–807.
5. *Грибов В., Лунатов Л.* Аннигиляция e^+e^- -пар и глубоконеупругое ep -рассеяние в теории возмущений // Там же. С. 1218–1237.
6. *Altarelli G., Parisi G.* Asymptotic Freedom in Parton Language // Nucl. Phys. B. 1977. V. 126, No. 2. P. 298–318.

7. Докшицер Ю. Вычисление структурных функций для глубоконеупругого рассеяния и e^+e^- -аннигиляции в теории возмущений квантовой хромодинамики // ЖЭТФ. 1977. Т. 73. С. 1216–1241.
8. Aaron F., Abramowicz H., Abt I., Adamczyk L., Adamus M., Al-daya Martin M., Alexa C., Andreev V., Antonelli S. et al. Combined Measurement and QCD Analysis of the Inclusive $e^\pm p$ Scattering Cross Sections at HERA // JHEP. 2010. V. 2010, No. 1. P. 109.
9. Aaron F., Abramowicz H., Abt I., Adamczyk L., Adamus M., Al-daya Martin M., Alexa C., Andreev V., Antonelli S. et al. Combination and QCD Analysis of Charm Production Cross Section Measurements in Deep-Inelastic ep Scattering at HERA // Eur. Phys. J. C. 2013. V. 73, No. 2. P. 2311.
10. Aad G. et al. (ATLAS Collab.). Measurement of the Transverse Momentum Distribution of Drell–Yan Lepton Pairs in Proton–Proton Collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS Detector // Eur. Phys. J. C. 2020. V. 80, No. 7. P. 616.
11. Sirunyan A., Tumasyan A., Adam W., Ambrogio F., Bergauer T., Brandstetter J., Dragicevic M., Erö J., Escalante Del Valle A. et al. Measurements of Differential Z Boson Production Cross Sections in Proton–Proton Collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV // JHEP. 2019. V. 2019, No. 12. P. 059.
12. Collins J., Soper D. Parton Distribution and Decay Functions // Nucl. Phys. B. 1982. V. 194, No. 3. P. 445–492.
13. Collins J., Soper D., Stermann G. Transverse Momentum Distribution in Drell–Yan Pair and W and Z Boson Production // Nucl. Phys. B. 1985. V. 250, No. 1. P. 199–224.
14. Кураев Е., Липатов Л., Фадин В. Мультиреджевские процессы в теории Янга–Миллса // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 840–855.
15. Кураев Е., Липатов Л., Фадин В. Особенность Померанчука в неабелевых калибровочных теориях // ЖЭТФ. 1977. Т. 72. С. 377–389.
16. Балицкий И., Липатов Л. О померанчуковской особенности в квантовой хромодинамике // ЯФ. 1978. Т. 28. С. 1597–1611.
17. Ciafaloni M. Coherence Effects in Initial Jets at Small Q^2/s // Nucl. Phys. B. 1988. V. 296, No. 1. P. 49–74.
18. Catani S., Fiorani F., Marchesini G. QCD Coherence in Initial State Radiation // Phys. Lett. B. 1990. V. 234, No. 3. P. 339–345.
19. Catani S., Fiorani F., Marchesini G. Small- x Behaviour of Initial State Radiation in Perturbative QCD // Nucl. Phys. B. 1990. V. 336, No. 1. P. 18–85.
20. Marchesini G. QCD Coherence in the Structure Function and Associated Distributions at Small x // Nucl. Phys. B. 1995. V. 445, No. 1. P. 49–78.
21. Gribov L., Levin E., Ryskin M. Semihard Processes in QCD // Phys. Rep. 1983. V. 100, No. 1. P. 1–150.
22. Левин Е., Рыскин М., Шуваев А., Шабельский Ю. Рождение тяжелых кварков в полужестких взаимодействиях нуклонов // ЯФ. 1991. Т. 53. С. 1059–1077.
23. Catani S., Ciafaloni M., Hautmann F. High Energy Factorization and Small- x Heavy Flavour Production // Nucl. Phys. B. 1991. V. 366, No. 1. P. 135–188.
24. Collins J., Ellis R. Heavy-Quark Production in Very High Energy Hadron Collisions // Ibid. V. 360, No. 1. P. 3–30.

25. *Collins J., Soper D.* Back-to-Back Jets in QCD // Nucl. Phys. B. 1981. V. 193, No. 2. P. 381–443.
26. *Collins J., Soper D., Sterman G.* Factorization for One-Loop Corrections in the Drell–Yan Process // Nucl. Phys. B. 1983. V. 223, No. 2. P. 381–421.
27. *Collins J., Soper D., Sterman G.* Does the Drell–Yan Cross Section Factorize? // Phys. Lett. B. 1982. V. 109, No. 5. P. 388–392.
28. *Meng R., Olness F., Soper D.* Semi-Inclusive Deep Inelastic Scattering at Small q_T // Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 1919–1935.
29. *Nadolsky P., Stump D., Yuan C. P.* Semi-Inclusive Hadron Production at DESY HERA: The Effect of QCD Gluon Resummation // Phys. Rev. D. 1999. V. 61. P. 014003.
30. *Nadolsky P., Stump D., Yuan C. P.* Phenomenology of Multiple Parton Radiation in Semi-Inclusive Deep-Inelastic Scattering // Phys. Rev. D. 2001. V. 64. P. 114011.
31. *Ji X. D., Ma J. P., Yuan F.* QCD Factorization for Semi-Inclusive Deep-Inelastic Scattering at Low Transverse Momentum // Phys. Rev. D. 2005. V. 71. P. 034005.
32. *Ji X. D., Ma J. P., Yuan F.* QCD Factorization for Spin-Dependent Cross Sections in DIS and Drell–Yan Processes at Low Transverse Momentum // Phys. Lett. B. 2004. V. 597, No. 3. P. 299–308.
33. *Echevarria M., Idilbi A., Scimemi I.* Factorization Theorem for Drell–Yan at Low q_T and Transverse-Momentum Distributions on-the-Light-Cone // JHEP. 2012. V. 2012, No. 7. P. 002.
34. *Chiu J. Y., Jain A., Neill D., Rothstein I.* Rapidity Renormalization Group // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 108, No. 15.
35. *Bermudez Martinez A., Connor P., Dominguez Damiani D., Estevez Banos L., Hautmann F., Jung H., Lidrych J., Lelek A., Mendizabal M., Schmitz M., Taheri Monfared S., Wang Q., Wening T., Yang H., Zlebcik R.* The Transverse Momentum Spectrum of Low Mass Drell–Yan Production at Next-to-Leading Order in the Parton Branching Method // Eur. Phys. J. C. 2020. V. 80, No. 7. P. 598.
36. *Bermudez Martinez A., Connor P., Dominguez Damiani D., Estevez Banos L., Hautmann F., Jung H., Lidrych J., Schmitz M., Taheri Monfared S., Wang Q., Zlebcik R.* Production of Z Bosons in the Parton Branching Method // Phys. Rev. D. 2019. V. 100. P. 074027.
37. *Maciula R., Szczurek A.* Intrinsic Charm in the Nucleon and Charm Production at Large Rapidities in Collinear, Hybrid and k_T -Factorization Approaches // JHEP. 2020. V. 2020, No. 10. P. 135.
38. *Schäfer W., Szczurek A.* Low Mass Drell–Yan Production of Lepton Pairs at Forward Directions at the LHC: A Hybrid Approach // Phys. Rev. D. 2016. V. 93. P. 074014.
39. *Cisek A., Schäfer W., Szczurek A.* Production of χ_c Pairs with Large Rapidity Separation in k_T -Factorization // Phys. Rev. D. 2018. V. 97. P. 114018.
40. *Islam R., Kumar M., Rawoof V.* k_T -Factorization Approach to the Higgs Boson Production in $ZZ^* \rightarrow 4l$ Channel at the LHC // Eur. Phys. J. C. 2019. V. 79, No. 3. P. 181.

41. *Maciula R., Szczurek A.* Consistent Treatment of Charm Production in Higher-Orders at Tree-Level within k_T -Factorization Approach // *Phys. Rev. D.* 2019. V. 100. P. 054001.
42. *Pasechnik R., Szczurek A., Teryaev O.* Polarization Effects in the Central Exclusive χ_c Production and the J/ψ Angular Distributions // *Phys. Rev. D.* 2011. V. 83. P. 074017.
43. *Pasechnik R., Szczurek A., Teryaev O.* Nonperturbative and Spin Effects in the Central Exclusive Production of the Tensor $\chi_c(2^+)$ Meson // *Phys. Rev. D.* 2010. V. 81. P. 034024.
44. *Pasechnik R., Szczurek A., Teryaev O.* Elastic Double Diffractive Production of Axial-Vector $\chi_c(1^{++})$ Mesons and the Landau–Yang Theorem // *Phys. Lett. B.* 2009. V. 680, No. 1. P. 62–71.
45. *Szczurek A., Pasechnik R., Teryaev O.* $pp \rightarrow pp\eta'$ Reaction at High Energies // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 75. P. 054021.
46. *Pasechnik R., Teryaev O., Szczurek A.* Scalar Higgs Boson Production in Fusion of Two Off-Shell Gluons // *Eur. Phys. J. C.* 2006. V. 47, No. 2. P. 429–435.
47. *Deak M., Schwennsen F.* Z and W^\pm Production Associated with Quark–Antiquark Pair in k_T -Factorization at the LHC // *JHEP.* 2008. V. 2008, No. 09. P. 035.
48. *Pietrycki T., Szczurek A.* Photon-Jet Correlations in pp and $p\bar{p}$ Collisions // *Phys. Rev. D.* 2007. V. 76. P. 034003.
49. *Hägler P., Kirschner R., Schäfer A., Szymanowski L., Teryaev O.* Heavy-Quark Production as a Sensitive Test for an Improved Description of High-Energy Hadron Collisions // *Phys. Rev. D.* 2000. V. 62. P. 071502.
50. *Baranov S., Smizanska M.* Semihard b -Quark Production at High Energies versus Data and Other Approaches // *Phys. Rev. D.* 2000. V. 62. P. 014012.
51. *Curci G., Furmanski W., Petronzio R.* Evolution of Parton Densities beyond Leading Order: The Non-Singlet Case // *Nucl. Phys. B.* 1980. V. 175, No. 1. P. 27–92.
52. *Furmanski W., Petronzio R.* Singlet Parton Densities beyond Leading Order // *Phys. Lett. B.* 1980. V. 97, No. 3. P. 437–442.
53. *Moch S., Vermaseren J., Vogt A.* The Three-Loop Splitting Functions in QCD: The Non-Singlet Case // *Nucl. Phys. B.* 2004. V. 688, No. 1–2. P. 101–134.
54. *Vogt A., Moch S., Vermaseren J.* The Three-Loop Splitting Functions in QCD: The Singlet Case // *Ibid.* V. 691, No. 1–2. P. 129–181.
55. *Froissart M.* Asymptotic Behavior and Subtractions in the Mandelstam Representation // *Phys. Rev.* 1961. V. 123. P. 1053–1057.
56. *Botje M.* QCDNUM: Fast QCD Evolution and Convolution // *Comput. Phys. Commun.* 2011. V. 182, No. 2. P. 490–532.
57. *Salam G., Rojo J.* A Higher Order Perturbative Parton Evolution Toolkit (HOPPET) // *Comput. Phys. Commun.* 2009. V. 180, No. 1. P. 120–156.
58. *Bertone V., Carrazza S., Rojo J.* APFEL: A PDF Evolution Library with QED Corrections // *Comput. Phys. Commun.* 2014. V. 185, No. 6. P. 1647–1668.
59. *Vogt A.* Efficient Evolution of Unpolarized and Polarized Parton Distributions with QCD-PEGASUS // *Comput. Phys. Commun.* 2005. V. 170, No. 1. P. 65–92.

60. *Regge T.* Introduction to Complex Orbital Momenta // *Nuovo Cim.* 1959. V. 14. P. 951–976.
61. *Fadin V., Fiore R., Kotsky M., Papa A.* Strong Bootstrap Conditions // *Phys. Lett. B.* 2000. V. 495, No. 3. P. 329–337.
62. *Козлов М., Резниченко А., Фадин В.* Квантовая хромодинамика при высоких энергиях // *Вестн. НГУ. Сер. «Физика».* 2007. Т. 2. С. 3–31.
63. *Фадин В.* Мультиреджевские процессы в КХД // *ЯФ.* 2003. Т. 66. С. 2067–2082.
64. *Fadin V., Fiore R., Quartarolo A.* Reggeization of the Quark–Quark Scattering Amplitude in QCD // *Phys. Rev. D.* 1996. V. 53. P. 2729–2741.
65. *Котский М., Фадин В.* Реджезация амплитуды глюон-глюонного рассеяния // *ЯФ.* 1996. Т. 59. С. 1080–1090.
66. *Fadin V., Fiore R., Kotsky M.* Gluon Reggeization in QCD in the Next-to-Leading Order // *Phys. Lett. B.* 1995. V. 359, No. 1. P. 181–188.
67. *Fadin V., Fiore R., Kotsky M.* Gluon Regge Trajectory in the Two-Loop Approximation // *Phys. Lett. B.* 1996. V. 387, No. 3. P. 593–602.
68. *Blümlein J., Ravindran V., van Neerven W.* Gluon Regge Trajectory in $O(\alpha_s^2)$ // *Phys. Rev. D.* 1998. V. 58. P. 091502.
69. *Del Duca V., Glover E.* The High Energy Limit of QCD at Two Loops // *JHEP.* 2001. V. 2001, No. 10. P. 035.
70. *Kovchegov Y.* Unitarization of the BFKL Pomeron on a Nucleus // *Phys. Rev. D.* 2000. V. 61. P. 074018.
71. *Abt I. et al. (H1 Collab.).* Measurement of the Proton Structure Function $F_2(x, Q^2)$ in the Low- x Region at HERA // *Nucl. Phys. B.* 1993. V. 407, No. 3. P. 515–535.
72. *Bartels J., Sabio Vera A., Schwennsen F.* NLO Inclusive Jet Production in k_T -Factorization // *JHEP.* 2006. V. 2006, No. 11. P. 051.
73. *Fadin V., Fiore R., Flachi A., Kotsky M.* Quark–Antiquark Contribution to the BFKL Kernel // *Phys. Lett. B.* 1998. V. 422, No. 1. P. 287–293.
74. *Fadin V., Kotsky M., Lipatov L.* One-Loop Correction to the BFKL Kernel from Two Gluon Production // *Phys. Lett. B.* 1997. V. 415, No. 1. P. 97–103.
75. *Fadin V., Lipatov L.* BFKL Pomeron in the Next-to-Leading Approximation // *Phys. Lett. B.* 1998. V. 429, No. 1. P. 127–134.
76. *Ciafaloni M., Camici G.* Energy Scale(s) and Next-to-Leading BFKL Equation // *Ibid.* V. 430, No. 3. P. 349–354.
77. *Salam G.* A Resummation of Large Sub-Leading Corrections at Small x // *JHEP.* 1998. V. 1998, No. 07. P. 019.
78. *Ciafaloni M., Colferai D., Salam G.* Renormalization Group Improved Small- x Equation // *Phys. Rev. D.* 1999. V. 60. P. 114036.
79. *Ciafaloni M., Colferai D.* The BFKL Equation at Next-to-Leading Level and Beyond // *Phys. Lett. B.* 1999. V. 452, No. 3. P. 372–378.
80. *Avsar E., Stasto A., Triantafyllopoulos D., Zaslavsky D.* Next-to-Leading and Resummed BFKL Evolution with Saturation Boundary // *JHEP.* 2011. V. 2011, No. 10. P. 138.
81. *Altarelli G., Ball R., Forte S.* Resummation of Singlet Parton Evolution at Small x // *Nucl. Phys. B.* 2000. V. 575, No. 1. P. 313–329.
82. *Altarelli G., Ball R., Forte S.* Small- x Resummation and HERA Structure Function Data // *Nucl. Phys. B.* 2001. V. 599, No. 1. P. 383–423.

83. *Altarelli G., Ball R., Forte S.* Factorization and Resummation of Small- x Scaling Violations with Running Coupling // *Nucl. Phys. B.* 2002. V. 621, No. 1. P. 359–387.
84. *Brodsky S., Fadin V., Kim V., Lipatov L., Pivovarov G.* The QCD Pomeron with Optimal Renormalization // *J. Exp. Theor. Phys. Lett.* 1999. V. 70, No. 3. P. 155–160.
85. *Brodsky S., Fadin V., Kim V., Lipatov L., Pivovarov G.* High-Energy QCD Asymptotics of Photon–Photon Collisions // *J. Exp. Theor. Phys. Lett.* 2002. V. 76, No. 5. P. 249–252.
86. *Brodsky S., Lepage G., Mackenzie P.* On the Elimination of Scale Ambiguities in Perturbative Quantum Chromodynamics // *Phys. Rev. D.* 1983. V. 28. P. 228–235.
87. *Balitsky I.* Operator Expansion for High-Energy Scattering // *Nucl. Phys. B.* 1996. V. 463, No. 1. P. 99–157.
88. *Kovchegov Y.* Small- x F_2 Structure Function of a Nucleus Including Multiple Pomeron Exchanges // *Phys. Rev. D.* 1999. V. 60. P. 034008.
89. *Gyulassy M., McLerran L.* New Forms of QCD Matter Discovered at RHIC // *Nucl. Phys. A.* 2005. V. 750, No. 1. P. 30–63.
90. *Kwiecinski J., Martin A., Sutton P.* Gluon Distribution at Small x Obtained from a Unified Evolution Equation // *Phys. Rev. D.* 1995. V. 52. P. 1445–1458.
91. *Kwiecinski J., Martin A., Sutton P.* Constraints on Gluon Evolution at Small x // *Z. Phys. C.* 1996. V. 71, No. 4. P. 585–594.
92. *Hautmann F., Jung H., Monfared S.T.* The CCFM uPDF Evolution UPDFEVOLV version 1.0.00 // *Eur. Phys. J. C.* 2014. V. 74, No. 10. P. 3082.
93. *Jung H., Baranov S., Deak M., Grebenyuk A., Hautmann F., Hentschinski M., Knutsson A., Krämer M., Kutak K., Lipatov A., Zotov N.* The CCFM Monte Carlo Generator CASCADE version 2.2.03 // *Eur. Phys. J. C.* 2010. V. 70. P. 1237–1249.
94. *Lipatov A., Malyshev M., Baranov S.* Particle Event Generator: A Simple-in-Use System PEGASUS Version 1.0 // *Eur. Phys. J. C.* 2020. V. 80, No. 4. P. 330.
95. *Kimber M., Martin A., Ryskin M.* Unintegrated Parton Distributions // *Phys. Rev. D.* 2001. V. 63. P. 114027.
96. *Watt G., Martin A., Ryskin M.* Unintegrated Parton Distributions and Inclusive Jet Production at HERA // *Eur. Phys. J. C.* 2003. V. 31, No. 1. P. 73–89.
97. *Hautmann F., Jung H., Lelek A., Radescu V., Zlebcik R.* Soft-Gluon Resolution Scale in QCD Evolution Equations // *Phys. Lett. B.* 2017. V. 772. P. 446–451.
98. *Hautmann F., Jung H., Lelek A., Radescu V., Zlebcik R.* Collinear and TMD Quark and Gluon Densities from Parton Branching Solution of QCD Evolution Equations // *JHEP.* 2018. V. 01. P. 070.
99. *Bermudez Martinez A.* Transformation of Transverse Momentum Distributions from Parton Branching to Collins–Soper–Sterman Framework // *Phys. Lett. B.* 2023. V. 845. P. 138182.
100. *Mendizabal M., Guzman F., Jung H., Taheri Monfared S.* On the Role of Soft Gluons in Collinear Parton Densities. arXiv:2309.11802. 2023.
101. *Golec-Biernat K., Stasto A.* On the Use of the KMR Unintegrated Parton Distribution Functions // *Phys. Lett. B.* 2018. V. 781. P. 633–638.

102. *Ball R. et al. (NNPDF Collab.)*. Parton Distributions from High-Precision Collider Data // *Eur. Phys. J. C*. 2017. V. 77, No. 10. P. 663.
103. *Harland-Lang L., Martin A., Motylinski P., Thorne R.* Parton Distributions in the LHC Era: MMHT'2014 PDFs // *Eur. Phys. J. C*. 2015. V. 75, No. 5. P. 204.
104. *Hou T.J., Dulat S., Gao J., Guzzi M., Huston J., Nadolsky P., Schmidt C., Winter J., Xie K., Yuan C.P.* CT14 Intrinsic Charm Parton Distribution Functions from CTEQ-TEA Global Analysis // *JHEP*. 2018. V. 2018, No. 2. P. 059.
105. *Martin A., Ryskin M., Watt G.* NLO Prescription for Unintegrated Parton Distributions // *Eur. Phys. J. C*. 2010. V. 66, No. 1–2. P. 163–172.
106. *Abdulov N., Bacchetta A., Baranov S., Bermudez-Martinez A., Bertone V., Bissolotti C., Candilise V., Estevez-Banos L., Bury M. et al.* TMDlib2 and TMDplotter: A Platform for 3D Hadron Structure Studies // *Eur. Phys. J. C*. 2021. V. 81. P. 752.
107. *Jung H.* Unintegrated PDFs in CCFM. arXiv:hep-ph/0411287. 2004.
108. *Hautmann F., Jung H.* Transverse Momentum-Dependent Gluon Density from DIS Precision Data // *Nucl. Phys. B*. 2014. V. 883. P. 1–19.
109. *Golec-Biernat K., Wüsthoff M.* Saturation Effects in Deep Inelastic Scattering at Low Q^2 and Its Implications on Diffraction // *Phys. Rev. D*. 1998. V. 59. P. 014017.
110. *Golec-Biernat K., Wüsthoff M.* Saturation in Diffractive Deep Inelastic Scattering // *Phys. Rev. D*. 1999. V. 60. P. 114023.
111. *Nikolaev N., Zakharov B.* Colour Transparency and Scaling Properties of Nuclear Shadowing in Deep Inelastic Scattering // *Z. Phys. C*. 1990. V. 49. P. 607.
112. *Lykasov G., Bednyakov V., Grinyuk A., Poghosyan M., Dolbilov A.* Gluon Distribution in Proton at Soft and Hard pp Collisions // *Nucl. Phys. B. Proc. Suppl.* 2011. V. 219–220. P. 225–228.
113. *Grinyuk A., Lipatov A., Lykasov G., Zotov N.* Transition between Soft Physics at the LHC and Low- x Physics at HERA // *Phys. Rev. D*. 2013. V. 87, No. 7. P. 074017.
114. *Lipatov A., Lykasov G., Zotov N.* LHC Soft Physics and Transverse Momentum-Dependent Gluon Density at Low x // *Phys. Rev. D*. 2014. V. 89. P. 014001.
115. *Grinyuk A., Lipatov A., Lykasov G., Zotov N.* Significance of Nonperturbative Input to the Transverse Momentum-Dependent Gluon Density for Hard Processes at the LHC // *Phys. Rev. D*. 2016. V. 93, No. 1. P. 014035.
116. *Abdulov N., Jung H., Lipatov A., Lykasov G., Malyshev M.* Employing RHIC and LHC Data to Determine the Transverse Momentum-Dependent Gluon Density in a Proton // *Phys. Rev. D*. 2018. V. 98. P. 054010.
117. *Lipatov A., Lykasov G., Malyshev M.* Towards the Global Fit of the TMD Gluon Density in the Proton from the LHC Data // *Phys. Rev. D*. 2023. V. 107. P. 014022.
118. *Bednyakov V., Grinyuk A., Lykasov G., Poghosyan M.* Role of Gluons in Soft and Semi-Hard Multiple Hadron Production in pp Collisions at LHC // *Intern. J. Mod. Phys. A*. 2012. V. 27. P. 1250042.

119. *Lipatov A., Lykasov G., Malyshev M.* Test of the TMD Gluon Density in a Proton with the Longitudinal Structure Function $F_L(x, Q^2)$ // *Phys. Lett. B.* 2023. V. 839. P. 137780.
120. *Aaron F., Alexa C., Andreev V., Backovic S., Baghdasaryan A., Baghdasaryan S., Barrelet E., Bartel W., Behrend O. et al.* Measurement of the Inclusive $e^\pm p$ Scattering Cross Section at High Inelasticity y and of the Structure Function F_L // *Eur. Phys. J. C.* 2011. V. 71, No. 3. P. 1579.
121. *Chekanov S., Derrick M., Magill S., Musgrave B., Nicholass D., Repond J., Yoshida R., Mattingly M., Antonioli P., Bari G. et al.* Measurement of the Longitudinal Proton Structure Function at HERA // *Phys. Lett. B.* 2009. V. 682, No. 1. P. 8–22.
122. *Lipatov A., Malyshev M.* TMD Parton Showers for Associated $\gamma + \text{Jet}$ Production in Electron–Proton Collisions at High Energies // *Phys. Rev. D.* 2023. V. 108. P. 014022.
123. *Kotikov A., Lipatov A., Shaikhatdenov B., Zhang P.* Transverse Momentum-Dependent Parton Densities in a Proton from the Generalized DAS Approach // *JHEP.* 2020. V. 2020, No. 2. P. 028.
124. *Kotikov A., Parente G.* Small- x Behavior of Parton Distributions with Soft Initial Conditions // *Nucl. Phys. B.* 1999. V. 549, No. 1–2. P. 242–262.
125. *Illarionov A., Kotikov A., Parente G.* Small- x Behavior of Parton Distributions: A Study of Higher Twist Effects // *Phys. Part. Nucl.* 2008. V. 39, No. 3. P. 307–347.
126. *Mankiewicz L., Saalfeld A., Weigl T.* On the Analytical Approximation to the GLAP Evolution at Small x and Moderate Q^2 // *Phys. Lett. B.* 1997. V. 393, No. 1–2. P. 175–180.
127. *De Rújula A., Glashow S., Politzer H., Treiman S., Wilczek F., Zee A.* Possible Non-Regge Behavior of Electroproduction Structure Functions // *Phys. Rev. D.* 1974. V. 10. P. 1649–1652.
128. *Cvetič G., Illarionov A., Kniehl B., Kotikov A.* Small- x Behavior of the Structure Function F_2 and Its Slope $\partial \ln F_2 / \partial \ln(1/x)$ for “Frozen” and Analytic Strong-Coupling Constants // *Phys. Lett. B.* 2009. V. 679, No. 4. P. 350–354.
129. *Kotikov A., Shaikhatdenov B.* Q^2 -Evolution of Parton Densities at Small- x Values. Charm Contribution in the Combined H1 and ZEUS F_2 Data // *Phys. Part. Nucl.* 2017. V. 48, No. 5. P. 829–831.
130. *Kotikov A., Shaikhatdenov B.* Q^2 Evolution of Parton Distributions at Small Values of x : Effective Scale for Combined H1 and ZEUS Data on the Structure Function F_2 // *Phys. Atom. Nucl.* 2015. V. 78, No. 4. P. 525–527.
131. *Shirkov D., Solovtsov I.* Analytic Model for the QCD Running Coupling with Universal $\bar{\alpha}_s(0)$ Value // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 79. P. 1209–1212.
132. *Solovtsov I., Shirkov D.* The Analytic Approach in Quantum Chromodynamics // *Theor. Math. Phys.* 1999. V. 120, No. 3. P. 1220–1244.
133. *Illarionov A., Kotikov A., Parzycki S., Peshekhonov D.* New Type of Parameterization for Parton Distributions // *Phys. Rev. D.* 2011. V. 83. P. 034014.
134. *Kotikov A., Shaikhatdenov B., Zhang P.* Antishadowing in the Rescaling Model at $x \sim 0.1$ // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2019. V. 16, No. 4. P. 311–314.
135. *Kotikov A., Shaikhatdenov B., Zhang P.* Application of the Rescaling Model at Small Bjorken x Values // *Phys. Rev. D.* 2017. V. 96. P. 114002.

136. *Matveev V., Muradian R., Tavkhelidze A.* Automodellism in the Large-Angle Elastic Scattering and Structure of Hadrons // *Lett. Nuovo Cim.* 1973. V.7. P. 719–723.
137. *Brodsky S., Farrar G.* Scaling Laws at Large Transverse Momentum // *Phys. Rev. Lett.* 1973. V. 31. P. 1153–1156.
138. *Brodsky S., Ellis J., Gardi E., Karliner M., Samuel M.* Pade Approximants, Optimal Renormalization Scales, and Momentum Flow in Feynman Diagrams // *Phys. Rev. D.* 1997. V. 56. P. 6980–6992.
139. *Jimenez-Delgado P., Reya E.* Delineating Parton Distributions and the Strong Coupling // *Phys. Rev. D.* 2014. V. 89. P. 074049.
140. *Alekhin S., Blümlein J., Moch S., Placakyte R.* Parton Distribution Functions, α_s , and Heavy-Quark Masses for LHC Run II // *Phys. Rev. D.* 2017. V. 96. P. 014011.
141. *Kotikov A.V., Shaikhatdenov B.* Gottfried Sum Rule in QCD Nonsinglet Analysis of DIS Fixed-Target Data // *Phys. Atom. Nucl.* 2018. V. 81. P. 244–252.
142. *Chatrchyan S., Khachatryan V., Sirunyan A., Tumasyan A., Adam W., Bergauer T., Dragiccevic M., Erö J., Fabjan C. et al.* Inclusive b -Jet Production in pp Collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV // *JHEP.* 2012. V. 2012, No. 4. P. 084.
143. *Aad G., Abbott B., Abdallah J., Abdelalim A., Abdesselam A., Abidinov O., Abi B., Abolins M., Abramowicz H. et al.* Measurement of the Inclusive and Dijet Cross Sections of b -Jets in pp Collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV with the ATLAS Detector // *Eur. Phys. J. C.* 2011. V. 71, No. 12. P. 1846.
144. *Jung H., Kraemer M., Lipatov A., Zotov N.* Heavy Flavour Production at Tevatron and Parton Shower Effects // *JHEP.* 2011. V. 2011, No. 1. P. 085.
145. *Jung H., Kraemer M., Lipatov A., Zotov N.* Investigation of Beauty Production and Parton Shower Effects at the LHC // *Phys. Rev. D.* 2012. V. 85. P. 034035.
146. *Lipatov L.* Gauge Invariant Effective Action for High Energy Processes in QCD // *Nucl. Phys. B.* 1995. V. 452, No. 1. P. 369–397.
147. *Lipatov L., Vyazovsky M.* Quasi-Multi-Regge Processes with a Quark Exchange in the t -Channel // *Nucl. Phys. B.* 2001. V. 597, No. 1. P. 399–409.
148. *Lipatov L.* Small- x Physics in Perturbative QCD // *Phys. Rep.* 1997. V. 286, No. 3. P. 131–198.
149. *Kim V., Pivovarov G.* Effective Regge QCD // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 79. P. 809–812.
150. *Липатов Л.* Реджезация векторного мезона и вакуумная особенность в неабелевых калибровочных теориях // *ЯФ.* 1976. Т. 23. С. 642–656.
151. *Фадин В., Шерман В.* Реджезация фермиона в неабелевых калибровочных теориях // *Письма в ЖЭТФ.* 1976. Т. 23. С. 599–602.
152. *Фадин В., Шерман В.* Процессы с фермионным обменом в неабелевых калибровочных теориях // *ЖЭТФ.* 1977. Т. 72. С. 1640–1658.
153. *Antonov E., Cherednikov I., Kuraev E., Lipatov L.* Feynman Rules for Effective Regge Action // *Nucl. Phys. B.* 2005. V. 721, No. 1–3. P. 111–135.
154. *Nefedov M., Saleev V.* Diphoton Production at the Tevatron and the LHC in the NLO Approximation of the Parton Reggeization Approach // *Phys. Rev. D.* 2015. V. 92. P. 094033.
155. *Borodulin V., Rogalyov R., Slabospitskii S.* CORE 3.1 (Compendium of RELations, Version 3.1). arxiv.org/abs/1702.08246. 2017.

156. *Baranov S., Szczyrek A.* Inclusive Production of J/ψ Meson in Proton-Proton Collisions at BNL RHIC // *Phys. Rev. D.* 2008. V. 77. P. 054016.
157. *van Hameren A., Serino M.* BCFW Recursion for TMD Parton Scattering // *JHEP.* 2015. V. 2015, No. 7. P. 010.
158. *van Hameren A.* KaTie: For Parton-Level Event Generation with k_T -Dependent Initial States // *Comput. Phys. Commun.* 2018. V. 224. P. 371–380.
159. *Бюклинг Е., Каянти К.* Кинематика элементарных частиц. М.: Мир, 1975.
160. *Sjöstrand T., Ask S., Christiansen J., Corke R., Desai N., Ilten P., Mrenna S., Prestel S., Rasmussen C., Skands P.* An Introduction to PYTHIA 8.2 // *Comput. Phys. Commun.* 2015. V. 191. P. 159–177.
161. *Campbell J., Ellis R.* Next-to-Leading Order Corrections to $W + 2$ Jet and $Z + 2$ Jet Production at Hadron Colliders // *Phys. Rev. D.* 2002. V. 65, No. 11. P. 113007.
162. *Alwall J., Frederix R., Frixione S., Hirschi V., Maltoni F., Mattelaer O., Shao H.S., Stelzer T., Torrielli P., Zaro M.* The Automated Computation of Tree-Level and Next-to-Leading Order Differential Cross Sections, and Their Matching to Parton Shower Simulations // *JHEP.* 2014. V. 2014, No. 7. P. 079.
163. *Gleisberg T., Höche S., Krauss F., Schönherr M., Schumann S., Siegert F., Winter J.* Event Generation with SHERPA 1.1 // *JHEP.* 2009. V. 2009, No. 02. P. 007.
164. *Catani S., Krauss F., Webber B., Kuhn R.* QCD Matrix Elements + Parton Showers // *JHEP.* 2001. V. 2001, No. 11. P. 063.
165. *Alwall J., Höche S., Krauss F., Lavesson N., Lönnblad L., Maltoni F., Mangano M., Moretti M., Papadopoulos C., Piccinini F. et al.* Comparative Study of Various Algorithms for the Merging of Parton Showers and Matrix Elements in Hadronic Collisions // *Eur. Phys. J. C.* 2007. V. 53, No. 3. P. 473–500.
166. *Frederix R., Frixione S.* Merging Meets Matching in MC@NLO // *JHEP.* 2012. V. 2012, No. 12. P. 061.
167. *Hamilton K., Nason P., Zanderighi G.* MINLO: Multi-Scale Improved NLO // *Ibid.* No. 10. P. 155.
168. *Alwall J., Ballestrero A., Bartalini P., Belov S., Boos E., Buckley A., Butterworth J., Dudko L., Frixione S., Garren L. et al.* A Standard Format for Les Houches Event Files // *Comput. Phys. Commun.* 2007. V. 176, No. 4. P. 300–304.
169. *Acharya S. et al. (ALICE Collab.).* Inclusive J/ψ Production at Midrapidity in pp Collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV. arXiv:2108.01906. 2021.
170. *Acharya S. et al. (ALICE Collab.).* Prompt and Non-Prompt J/ψ Production Cross Sections at Midrapidity in Proton-Proton Collisions at $\sqrt{s} = 5.02$ and 13 TeV. arXiv:2108.02523. 2021.
171. *Nadolsky P., Lai H.L., Cao Q.H., Huston J., Pumplin J., Stump D., Tung W.K., Yuan C.P.* Implications of CTEQ Global Analysis for Collider Observables // *Phys. Rev. D.* 2008. V. 78, No. 1. P. 013004.
172. *Lepage G.* A New Algorithm for Adaptive Multidimensional Integration // *J. Comput. Phys.* 1978. V. 27, No. 2. P. 192–203.
173. *Lipatov A., Malyshev M., Jung H.* TMD Parton Shower Effects in Associated $\gamma +$ Jet Production at the LHC // *Phys. Rev. D.* 2019. V. 100. P. 034028.

174. *Lipatov A., Malyshev M.* Associated Higgs Boson + Jets Production at the LHC and Catani–Ciafaloni–Fiorani–Marchesini Gluon Dynamics in a Proton // *Phys. Rev. D.* 2021. V. 103. P. 094021.
175. *Chernikova N. Y., Kotikov A. V.* Gluon Density from the Berger–Block–Tan Form of the Structure Function F_2 // *JETP Lett.* 2017. V. 105, No. 4. P. 223–226.
176. *Illarionov A., Kotikov A., Parente G.* Small- x Behavior of Parton Distributions: A Study of Higher Twist Effects // *Phys. Part. Nucl.* 2008. V. 39, No. 3. P. 307–347.
177. *Cooper-Sarkar A., Ingelman G., Long K., Roberts R., Saxon D.* Measurement of the Longitudinal Structure Function and the Small- x Gluon Density of the Proton // *Z. Phys. C.* 1988. V. 39, No. 2. P. 281–290.
178. *Prytz K.* Approximate Determination of the Gluon Density at Low x from the F_2 Scaling Violations // *Phys. Lett. B.* 1993. V. 311, No. 1. P. 286–290.
179. *Prytz K.* An Approximate Next-to-Leading Order Relation between the Low- x F_2 Scaling Violations and the Gluon Density // *Phys. Lett. B.* 1994. V. 332, No. 3. P. 393–397.
180. *Kotikov A., Lipatov A., Parente G., Zotov N.* The Contribution of Off-Shell Gluons to the Structure Functions F_2^c and F_L^c and the Unintegrated Gluon Distributions // *Eur. Phys. J. C.* 2002. V. 26, No. 1. P. 51–66.
181. *Kotikov A., Lipatov A., Zotov N.* The Contribution of Off-Shell Gluons to the Longitudinal Structure Function F_L // *Eur. Phys. J. C.* 2003. V. 27, No. 2. P. 219–228.
182. *Kotikov A., Lipatov A., Zhang P.* Transverse Momentum-Dependent Parton Densities in Processes with Heavy Quark Generations // *Phys. Rev. D.* 2021. V. 104. P. 054042.
183. *Abramowicz H. et al. (H1, ZEUS Collab.).* Combination and QCD Analysis of Charm and Beauty Production Cross-Section Measurements in Deep Inelastic ep Scattering at HERA // *Eur. Phys. J. C.* 2018. V. 78, No. 6. P. 473.
184. *Abramowicz H., Abt I., Adamczyk L., Adamus M., Aggarwal R., Antonelli S., Arslan O., Aushev V., Aushev Y. et al.* Measurement of Beauty and Charm Production in Deep Inelastic Scattering at HERA and Measurement of the Beauty-Quark Mass // *JHEP.* 2014. V. 2014, No. 9. P. 127.
185. *Aaron F., Alexa C., Andreev V., Backovic S., Baghdasaryan A., Baghdasaryan S., Barrelet E., Bartel W., Begzsuren K. et al.* Measurement of $D^{*\pm}$ Meson Production and Determination of $F_2^{c\bar{c}}$ at Low Q^2 in Deep-Inelastic Scattering at HERA // *Eur. Phys. J. C.* 2011. V. 71, No. 10. P. 1769.
186. *Aaron F., Aldaya Martin M., Alexa C., Alimujiang K., Andreev V., Antunovic B., Asmone A., Backovic S., Baghdasaryan A. et al.* Measurement of the Charm and Beauty Structure Functions Using the H1 Vertex Detector at HERA // *Eur. Phys. J. C.* 2009. V. 65, No. 1–2. P. 89–109.
187. *Баранов С., Лунатов А., Зотов Н.* Рождение тяжелых кварков на протонах в рамках полужесткого подхода КХД // *ЯФ.* 2004. Т. 67. С. 856.
188. *Зотов Н., Лунатов А., Салеев В.* Процессы рождения тяжелых кварков на коллайдере Tevatron в рамках полужесткого подхода КХД и неинтегрированные распределения глюонов // *ЯФ.* 2003. Т. 66. С. 786.

189. *Lipatov A., Lönnblad L., Zotov N.* Study of the Linked Dipole Chain Model in Heavy Quark Production at the Tevatron // JHEP. 2004. V. 2004, No. 01. P. 010.
190. *Baranov S., Jung H., Lipatov A., Malyshev M.* Testing the Parton Evolution with the Use of Two-Body Final States // Eur. Phys. J. C. 2016. V. 77, No. 1. P. 2.
191. *Baranov S., Lipatov A., Zotov N.* Prompt Photon Hadroproduction at High Energies in Off-Shell Gluon–Gluon Fusion // Phys. Rev. D. 2008. V. 77. P. 074024.
192. *Baranov S., Lipatov A., Zotov N.* Production of Electroweak Gauge Bosons in Off-Shell Gluon–Gluon Fusion // Phys. Rev. D. 2008. V. 78. P. 014025.
193. *Baranov S., Jung H., Lipatov A., Malyshev M.* Associated Production of Z Bosons and b -Jets at the LHC in the Combined k_T + Collinear QCD Factorization Approach // Eur. Phys. J. C. 2017. V. 77, No. 11. P. 772.
194. *Bednyakov V., Brodsky S., Lipatov A., Lykasov G., Malyshev M., Smiesko J., Tokar S.* Constraints on the Intrinsic Charm Content of the Proton from Recent ATLAS Data // Eur. Phys. J. C. 2019. V. 79, No. 2. P. 92.
195. *Lipatov A., Lykasov G., Malyshev M., Prokhorov A., Turchikhin S.* Hard Production of a Z Boson Plus Heavy Flavor Jets at LHC and the Intrinsic Charm Content of a Proton // Phys. Rev. D. 2018. V. 97. P. 114019.
196. *Prange R.* Dispersion Relations for Compton Scattering // Phys. Rev. 1958. V. 110. P. 240–252.
197. *Баранов С., Сладь В.* Рождение трижды очарованных Ω_{ccc} -барионов в e^+e^- -аннигиляции // ЯФ. 2004. Т. 67. С. 829–836.
198. *Baranov S.* Production of Doubly Flavored Baryons in pp , ep , and $\gamma\gamma$ Collisions // Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 3228–3236.
199. *Baranov S.* Semiperturbative and Nonperturbative Production of Hadrons with Two Heavy Flavors // Phys. Rev. D. 1997. V. 56. P. 3046–3056.
200. *Баранов С., Сладь В.* Рождение Ω_{scb} -барионов в e^+e^- -столкновениях // ЯФ. 2003. Т. 66. С. 1778–1784.
201. *Баранов С., Сладь В.* Некоторые характеристики рождения барионов с тяжелыми кварками в e^+e^- -столкновениях // ЯФ. 2005. Т. 68. С. 1265–1271.
202. *Koller K., Walsh T., Zerwas P.* Testing QCD: Direct Photons in e^+e^- Collisions // Z. Phys. C. 1979. V. 2, No. 3. P. 197–203.
203. *Laermann E., Walsh T., Schmitt I., Zerwas P.* Direct Photons in e^+e^- Annihilation // Nucl. Phys. B. 1982. V. 207, No. 2. P. 205–232.
204. *Aaboud M. et al. (ATLAS Collab.).* Measurement of Differential Cross Sections of Isolated Photon Plus Heavy-Flavour Jet Production in pp Collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV Using the ATLAS Detector // Phys. Lett. B. 2018. V. 776. P. 295–317.
205. *Catani S., Fontannaz M., Guillet J.P., Pilon E.* Cross Section of Isolated Prompt Photons in Hadron–Hadron Collisions // JHEP. 2002. V. 2002, No. 05. P. 028.
206. *Aurenche P., Guillet J.P., Pilon E., Werlen M., Fontannaz M.* Recent Critical Study of Photon Production in Hadronic Collisions // Phys. Rev. D. 2006. V. 73. P. 094007.

207. *Baranov S., Lipatov A., Zotov N.* Associated Production of Prompt Photons and Heavy Quarks in Off-Shell Gluon–Gluon Fusion // *Eur. Phys. J. C.* 2008. V. 56, No. 3. P. 371.
208. *Lipatov A., Malyshev M., Zotov N.* Prompt Photon and Associated Heavy Quark Production at Hadron Colliders with k_T -Factorization // *JHEP.* 2012. V. 2012, No. 5. P. 104.
209. *Lipatov A., Malyshev M., Zotov N.* Extended Study of Prompt Photon Photo-production at HERA with k_T -Factorization // *Phys. Rev. D.* 2013. V. 88, No. 7. P. 074001.
210. *Lipatov A., Malyshev M.* Reconsideration of the Inclusive Prompt Photon Production at the LHC with k_T -Factorization // *Phys. Rev. D.* 2016. V. 94. P. 034020.
211. *Lipatov A.* Isolated Prompt Photon Pair Production at Hadron Colliders with k_T -Factorization // *JHEP.* 2013. V. 2013, No. 2. P. 009.
212. *Brodsky S., Hoyer P., Peterson C., Sakai N.* The Intrinsic Charm of the Proton // *Phys. Lett. B.* 1980. V. 93, No. 4. P. 451–455.
213. *Brodsky S., Peterson C., Sakai N.* Intrinsic Heavy-Quark States // *Phys. Rev. D.* 1981. V. 23. P. 2745–2757.
214. *Harris B., Smith J., Vogt R.* Reanalysis of the EMC Charm Production Data with Extrinsic and Intrinsic Charm at NLO // *Nucl. Phys. B.* 1996. V. 461, No. 1. P. 181–196.
215. *Franz M., Polyakov M., Goeke K.* Heavy Quark Mass Expansion and Intrinsic Charm in Light Hadrons // *Phys. Rev. D.* 2000. V. 62. P. 074024.
216. *Brodsky S.J., Lykasov G.I., Lipatov A.V., Smiesko J.* Novel Heavy-Quark Physics Phenomena // *Prog. Part. Nucl. Phys.* 2020. V. 114. P. 103802.
217. *Aad G. et al. (ATLAS Collab.).* Measurement of Differential Production Cross Sections for a Z Boson in Association with b -Jets in 7 TeV Proton–Proton Collisions with the ATLAS Detector // *JHEP.* 2014. V. 2014, No. 10. P. 141.
218. *Chatrchyan S. et al. (CMS Collab.).* Measurement of the Cross Section and Angular Correlations for Associated Production of a Z Boson with b Hadrons in pp Collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV // *JHEP.* 2013. V. 2013, No. 12. P. 039.
219. *Peterson C., Schlatter D., Schmitt I., Zerwas P.* Scaling Violations in Inclusive e^+e^- Annihilation Spectra // *Phys. Rev. D.* 1983. V. 27. P. 105–111.
220. *Blok B., Dokshitzer Y., Frankfurt L., Strikman M.* Four-Jet Production at LHC and Tevatron in QCD // *Phys. Rev. D.* 2011. V. 83. P. 071501.
221. *Blok B., Dokshitzer Y., Frankfurt L., Strikman M.* Perturbative QCD Correlations in Multiparton Collisions // *Eur. Phys. J. C.* 2014. V. 74, No. 6. P. 2926.
222. *Diehl M., Ostermeier D., Schäfer A.* Elements of a Theory for Multiparton Interactions in QCD // *JHEP.* 2012. V. 2012, No. 3. P. 089.
223. *Ryskin M., Snigirev A.* Fresh Look at Double Parton Scattering // *Phys. Rev. D.* 2011. V. 83. P. 114047.
224. *Snigirev A.* Asymptotic Behavior of Double Parton Distribution Functions // *Ibid.* P. 034028.
225. *Cacciari M., Salam G., Soyez G.* FastJet User Manual // *Eur. Phys. J. C.* 2012. V. 72, No. 3. P. 1986.
226. *Baranov S., Zotov N.* BFKL Gluon Dynamics and Resolved Photon Processes in D^* and Dijet Associated Photoproduction at HERA // *Phys. Lett. B.* 2000. V. 491, No. 1. P. 111–116.

227. *Chatrchyan S. et al. (CMS Collab.)*. Measurement of the Triple-Differential Cross Section for Photon+Jets Production in Proton-Proton Collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV // *ЖЕП*. 2014. V. 2014, No. 6. P. 009.
228. *Aad G. et al. (ATLAS Collab.)*. Measurement of the Production Cross Section of an Isolated Photon Associated with Jets in Proton-Proton Collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV with the ATLAS Detector // *Phys. Rev. D*. 2012. V. 85. P. 092014.
229. *Aad G., Abajyan T., Abbott B., Abdallah J., Abdel Khalek S., Abdelalim A., Abidinov O., Aben R., Abi B., Abolins M. et al.* Dynamics of Isolated-Photon Plus Jet Production in *pp* Collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV with the ATLAS Detector // *Nucl. Phys. B*. 2013. V. 875, No. 3. P. 483–535.
230. *Sirunyan A., Tumasyan A., Adam W., Ambrogio F., Asilar E., Bergauer T., Brandstetter J., Brondolin E., Dragicevic M. et al.* Measurement of Differential Cross Sections for Inclusive Isolated-Photon and Photon+Jet Production in Proton-Proton Collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV // *Eur. Phys. J. C*. 2019. V. 79, No. 1. P. 20.
231. *Aaboud M., Aad G., Abbott B., Abdallah J., Abidinov O., Abeloos B., Abouzeid O., Abraham N., Abramowicz H., Abreu H. et al.* High- E_T Isolated-Photon Plus Jets Production in *pp* Collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV with the ATLAS Detector // *Nucl. Phys. B*. 2017. V. 918. P. 257–316.
232. *Aaboud M., Aad G., Abbott B., Abidinov O., Abeloos B., Abidi S., Abouzeid O., Abraham N., Abramowicz H., Abreu H. et al.* Measurement of the Cross Section for Isolated-Photon Plus Jet Production in *pp* Collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV Using the ATLAS Detector // *Phys. Lett. B*. 2018. V. 780. P. 578–602.
233. *Lipatov A., Zotov N.* Prompt Photon Photoproduction at DESY HERA in the k_T -Factorization Approach // *Phys. Rev. D*. 2005. V. 72, No. 5. P. 054002.
234. *Lipatov A., Zotov N.* Transverse Momentum-Dependent Parton Densities in Associated Real and Virtual Photon and Jet Production at the LHC // *Phys. Rev. D*. 2014. V. 90. P. 094005.
235. *Chatrchyan S. et al. (CMS Collab.)*. Observation of a New Boson at a Mass of 125 GeV with the CMS Experiment at the LHC // *Phys. Lett. B*. 2012. V. 716, No. 1. P. 30–61.
236. *Aad G. et al. (ATLAS Collab.)*. Observation of a New Particle in the Search for the Standard Model Higgs Boson with the ATLAS Detector at the LHC // *Ibid.* P. 1–29.
237. *Ilyushin M., Mandrik P., Slabospitskii S.* Constraints on the Higgs Boson Anomalous FCNC Interactions with Light Quarks // *Nucl. Phys. B*. 2020. V. 952. P. 114921.
238. *Wilczek F.* Decays of Heavy Vector Mesons into Higgs Particles // *Phys. Rev. Lett.* 1977. V. 39. P. 1304–1306.
239. *Georgi H., Glashow S., Machacek M., Nanopoulos D.* Higgs Bosons from Two-Gluon Annihilation in Proton-Proton Collisions // *Phys. Rev. Lett.* 1978. V. 40. P. 692–694.
240. *Ellis J., Gaillard M., Nanopoulos D., Sachrajda C.* Is the Mass of the Higgs Boson about 10 GeV? // *Phys. Lett. B*. 1979. V. 83, No. 3. P. 339–344.
241. *Rizzo T.* Gluon Final States in Higgs Boson Decay // *Phys. Rev. D*. 1980. V. 22. P. 178–183.

242. *Graudenz D., Spira M., Zerwas P.* QCD Corrections to Higgs Boson Production at Proton–Proton Colliders // *Phys. Rev. Lett.* 1993. V. 70. P. 1372–1375.
243. *Spira M., Djouadi A., Graudenz D., Zerwas P.* Higgs Boson Production at the LHC // *Nucl. Phys. B.* 1995. V. 453, No. 1–2. P. 17–82.
244. *De Florian D. et al. (LHC Higgs Cross Section Working Group Collab.)*. Handbook of LHC Higgs Cross Sections: 4. Deciphering the Nature of the Higgs Sector. 2016. V. 2/2017; arXiv:1610.07922.
245. *Ellis J., Gaillard M., Nanopoulos D.* A Phenomenological Profile of the Higgs Boson // *Nucl. Phys. B.* 1976. V. 106. P. 292–340.
246. *Вайнштейн А., Волошин М., Захаров В., Шифман М.* Низкоэнергетические теоремы для взаимодействия хиггсовского бозона с фотонами // *ЯФ.* 1979. Т. 30. С. 1368–1378.
247. *Del Duca V., Kilgore W., Oleari C., Schmidt C., Zeppenfeld D.* Gluon Fusion Contributions to $H + 2$ Jet Production // *Nucl. Phys. B.* 2001. V. 616, No. 1–2. P. 367–399.
248. *Del Duca V., Kilgore W., Oleari C., Schmidt C., Zeppenfeld D.* Kinematical Limits on Higgs Boson Production via Gluon Fusion in Association with Jets // *Phys. Rev. D.* 2003. V. 67. P. 073003.
249. *Anastasiou C., Duhr C., Dulat F., Furlan E., Gehrman T., Herzog F., Lazopoulos A., Mistlberger B.* High Precision Determination of the Gluon Fusion Higgs Boson Cross Section at the LHC // *JHEP.* 2016. V. 05. P. 058.
250. *Dawson S.* Radiative Corrections to Higgs Boson Production // *Nucl. Phys. B.* 1991. V. 359, No. 2. P. 283–300.
251. *Djouadi A., Spira M., Zerwas P.* Production of Higgs Bosons in Proton Colliders. QCD Corrections // *Phys. Lett. B.* 1991. V. 264, No. 3. P. 440–446.
252. *Boos E., Dudko L., Slabospitskii S.* Top Quark: Results and Prospects // *Phys. Part. Nucl.* 2019. V. 50. P. 231–258.
253. *Lipatov A., Zotov N.* Higgs Boson Production at Hadron Colliders in the k_T -Factorization Approach // *Eur. Phys. J. C.* 2005. V. 44, No. 4. P. 559–566.
254. *Lipatov A., Malyshev M., Zotov N.* Phenomenology of k_T -Factorization for Inclusive Higgs Boson Production at LHC // *Phys. Lett. B.* 2014. V. 735. P. 79–83.
255. *Abdulov N., Lipatov A., Malyshev M.* Inclusive Higgs Boson Production at the LHC in the k_T -Factorization Approach // *Phys. Rev. D.* 2018. V. 97. P. 054017.
256. *de Florian D., Ferrera G., Grazzini M., Tommasini D.* Higgs Boson Production at the LHC: Transverse Momentum Resummation Effects in the $H \rightarrow \gamma\gamma$, $H \rightarrow WW \rightarrow l\nu l\nu$ and $H \rightarrow ZZ \rightarrow 4l$ Decay Modes // *JHEP.* 2012. V. 2012, No. 6. P. 132.
257. *Hamilton K., Nason P., Re E., Zanderighi G.* NNLOPS Simulation of Higgs Boson Production // *JHEP.* 2013. V. 2013, No. 10. P. 222.
258. *Sirunyan A. et al. (CMS Collab.)*. Measurement of Inclusive and Differential Higgs Boson Production Cross Sections in the Diphoton Decay Channel in Proton–Proton Collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV // *JHEP.* 2019. V. 2019, No. 1. P. 183.
259. *Aaboud M. et al. (ATLAS Collab.)*. Measurements of Higgs Boson Properties in the Diphoton Decay Channel with 36 fb^{-1} of pp Collision Data at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS Detector // *Phys. Rev. D.* 2018. V. 98, No. 5. P. 052005.

260. *Aad G. et al. (ATLAS Collab.)*. Measurements of the Higgs Boson Inclusive and Differential Fiducial Cross Sections in the $4l$ Decay Channel at $\sqrt{s} = 13$ TeV. arXiv:2004.03969. 2020.
261. *Sirunyan A. et al. (CMS Collab.)*. Measurements of Properties of the Higgs Boson Decaying into the Four-Lepton Final State in pp Collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV // JHEP. 2017. V. 2017, No. 11. P. 047.
262. *Hentschinski M.* Transverse Momentum-Dependent Gluon Distribution within High Energy Factorization at Next-to-Leading Order // Phys. Rev. D. 2021. V. 104. P. 054014.
263. *Karpishkov A., Nefedov M., Saleev V.* $B\bar{B}$ Angular Correlations at the LHC in the Parton Reggeization Approach Merged with Higher-Order Matrix Elements // Phys. Rev. D. 2017. V. 96. P. 096019.