

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДОННОГО ТАЯНИЯ АНТАРКТИЧЕСКОГО ЛЕДЯНОГО ЩИТА НА ОСНОВЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

А. А. Тарасов *, *М. М. Степанова* **

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Проведено моделирование процесса донного таяния Антарктического ледяного щита. Разработана математическая модель, основанная на одномерной трехфазной задаче Стефана. Реализован параллельный алгоритм. В результате моделирования получено распределение скоростей донного таяния, средняя скорость потери массы ледника составила 29 Гт/год.

The work is devoted to simulating the process of basal melt of the Antarctic ice sheet. A mathematical model based on the one-dimensional three-phase Stefan problem has been developed. A parallel algorithm has been implemented. As a result of the simulation, a distribution of basal melt rates was obtained with the glacier's average mass loss rate being 29 Gt/year.

PACS: 89.20.Ff; 07.05.Tr

ВВЕДЕНИЕ

По современным представлениям Антарктический ледяной щит скрывает около 500 подледных озер. Изучение их жизненного цикла, включая формирование и последующее развитие вплоть до прорыва или замерзания, становится особенно актуальным в свете наблюдаемых глобальных изменений климата и повышения уровня моря.

Большое количество исследований, посвященных балансу массы ледников и подледному таянию, проводятся с помощью компьютерного моделирования. За основу чаще всего берут уравнения Навье–Стокса или их приближения [1, 2], позволяющие описывать движение ледника как текучую сплошную среду, но не учитывающие фазовый переход лед–вода. Чтобы учесть фазовый переход, предлагается использовать математическую модель, основанную на задаче Стефана — задаче определения эволюции межфазовой границы.

В данной работе представлена модель донного таяния антарктического ледника, основанная на одномерной мультифазной задаче Стефана.

* E-mail: sternpasserby@gmail.com

** E-mail: mstep@mms.nw.ru

Эта модель описывает появление, эволюцию и вырождение подледной и надледной жидких фаз. Она учитывает ряд специфических условий донного таяния, в частности накопление снега, переменную температуру поверхности и вертикальное движение ледника. Но модель не учитывает горизонтальный теплообмен, перераспределение талой воды, шельфовые ледники и все связанные с ними эффекты, горизонтальное движение льда.

Трехмерное представление антарктического ледника было построено на основе данных международного проекта Bedmap2 [3]. Эти данные представляют собой три топографические характеристики: высоту подледного ложа, высоту поверхности и толщину льда, заданные на равномерной сетке с шагом 1 км в декартовой системе координат и измеряемые в метрах над уровнем моря. В каждом узле этой сетки независимо друг от друга решались одномерные трехфазные задачи Стефана вдоль вертикального направления, где первой и третьей фазами вещества являются под- и надледная вода соответственно, а второй фазой — лед.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Одномерная трехфазная задача Стефана. Фазы вещества расположены на оси X , направленной вертикально вверх. Каждая фаза вещества занимает область с подвижными границами $s_{j-1}(t) \leq x \leq s_j(t)$, где j — индекс фазы, $s_0 = \text{const}$. Эволюцию температурного распределения в каждой фазе описывает уравнение теплопроводности

$$\left\{ \begin{array}{l} c_j \rho_j \frac{\partial u_j}{\partial t} = \lambda_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}, \quad s_{j-1}(t) \leq x \leq s_j(t), \\ \alpha_{00} u_j + \alpha_{01} \frac{\partial u_j}{\partial x} = g_j^b(t), \quad x = s_{j-1}(t), \\ \alpha_{10} u_j + \alpha_{11} \frac{\partial u_j}{\partial x} = g_j^t(t), \quad x = s_j(t), \\ u_j = f(x), \quad t = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

где c_j — удельная теплоемкость; ρ_j — плотность; u_j — распределение температуры; λ_j — коэффициент теплопроводности. Коэффициенты α_{ks} и функции $g_j^b(t)$, $g_j^t(t)$ задают краевые условия.

Для краевых условий подледниковой фазы ($j = 1$) задаем $\alpha_{00} = \alpha_{11} = 0$, $\alpha_{01} = -\lambda_j$, $\alpha_{10} = 1$, $g_1^b(t) = g_0$ — геотермический поток от ложа горных пород, $g_1^t(t) = U_F(H)$ — линейную зависимость температуры плавления льда от его толщины [4]. Для фазы льда ($j = 2$): $\alpha_{00} = \alpha_{10} = 1$, $\alpha_{01} = \alpha_{11} = 0$, $g_2^b = U_F(H)$, $g_2^t = U_F$ — температура плавления льда. Для надледниковой фазы ($j = 3$): $\alpha_{00} = \alpha_{10} = 1$, $\alpha_{01} = \alpha_{11} = 0$, $g_3^b = U_F$, $g_3^t = g_3(t)$ — температура на поверхности ледника.

Закон движения нижней кромки ледника определяется условием Стефана

$$q\rho \frac{ds_1}{dt} = \lambda_2 \left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{x=s_1(t)} - \lambda_1 \left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=s_1(t)}, \quad (2)$$

где q — удельная теплота плавления льда; ρ — усредненная плотность льда и воды. Уравнения для законов движения границ $s_2(t)$ и $s_3(t)$ более сложные, так как масса льда занимает больший объем, чем та же самая масса воды, и при наличии донного таяния ледник проседает:

$$\frac{ds_2}{dt} = \frac{ds_1}{dt} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) + v_2 \frac{\rho_1}{\rho_2} + \zeta, \quad (3)$$

$$\frac{ds_3}{dt} = \left(\frac{ds_1}{dt} - v_2 \right) \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) + \zeta, \quad (4)$$

где ζ — поправка, связанная с аккумуляцией осадков на поверхности ледника; v_2 — скорость движения границы s_2 без учета проседания. Уравнение для v_2 :

$$v_2 = \frac{\lambda_2}{q\rho} \left. \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|_{x=s_1(t)} - \frac{\lambda_1}{q\rho} \left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=s_1(t)}. \quad (5)$$

Таким образом, получена замкнутая система уравнений для краевой задачи.

Процедура обезразмеривания. $x = x_0 \tilde{x}$, $u = u_0 \tilde{u}$, $t = t_0 \tilde{t}$, где безразмерные величины обозначены тильдой, $x_0 = s_2(0) - s_1(0)$, $u_0 = 273,15$ К, $t_0 = c_1 \rho_1 x_0^2 / \lambda_1$.

Задача Стефана сформулирована в области с подвижными границами, причем закон движения этих границ априори неизвестен. Мы применяем метод выпрямления фронта [5], заключающийся в преобразовании координат:

$$\xi_j(x) = \frac{x - s_{j-1}(t)}{s_j(t) - s_{j-1}(t)}. \quad (6)$$

Данное преобразование позволяет перейти от нестационарной области $s_{j-1}(t) \leq x \leq s_j$ к стационарной $0 \leq \xi \leq 1$, что упрощает численную реализацию.

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Дискретизация. Использовалась неявная конечно-разностная схема первого порядка точности по времени и координате, сформулированная для неоднородной сетки, сгущающейся у фазовых границ. Тогда задача Стефана сводится к системе линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, которая решается методом прогонки. Использование неоднородной сетки позволило существенно уменьшить количество узлов и, как следствие, время расчетов.

Вырождение и появление фаз вещества. В формулировке задачи Стефана (1)–(5) отсутствует механизм вырождения и появления фаз вещества, поэтому он был добавлен отдельно на этапе численного решения.

Механизм вырождения: если в какой-то момент времени оказалось, что $s_{j-1} \geq s_j$, то граница s_{j-1} заменяет границу s_j : ей присваиваются координата и краевые условия последней.

Механизм появления водной фазы был реализован на основе закона сохранения энергии. Если возникает ситуация, когда несколько крайних узлов фазы льда имеют температуру, превышающую температуру плавления льда, то методом трапеций вычисляется «лишняя» энергия, и она направляется на зарождение водной фазы.

Программная реализация. Модель в приведенной формулировке обладает полным параллелизмом по данным. Моделирование проводилось в среде MATLAB с использованием дополнения Parallel Computing Toolbox в параллельном асинхронном режиме. Программная реализация показала хорошую масштабируемость при вычислениях как на SMP-узле, так и на кластере.

Благодаря встроенному в MATLAB профилировщику был проведен ряд оптимизаций, существенно сокративших время моделирования. В частности, для решения линейных систем с трехдиагональной матрицей был реализован метод прогонки на языке C с применением MEX API для внедрения в MATLAB, что позволило сократить время расчетов в 5 раз.

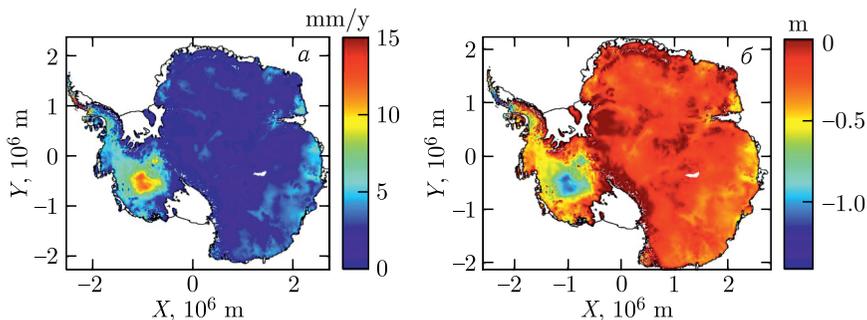
ПРОВЕДЕНИЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ

На поверхности задан синусоидальный режим изменения температуры [6]. Используются данные из работ по аккумуляции осадков на поверхности ледника [7] и по геотермическому потоку у ложа ледника [8]. Начальное распределение температуры в леднике задается функцией $U_F(H)$ [4].

Данные по рельефу ложа ледника, поверхности ледника и толщины льда взяты из базы проекта Bedmap2 для разреженной сетки с шагом 10 км. Из рассмотрения были исключены все точки с ненулевым расстоянием между горной породой и нижней кромкой ледника. В итоге расчет был проведен для 118 453 точек Антарктиды.

Выбран шаг по времени 4 мес. при временном отрезке 1000 лет. На фазу льда выделено 5000 узлов расчетной сетки, на водные фазы — по 500 узлов.

Расчеты проводились на ресурсах ресурсного центра «Вычислительный центр СПбГУ». На вычислительном узле Intel Xeon E5-2690 v4 с 14 ядрами (28 потоков) и 250 GB RAM расчет занял 12 ч 55 мин. После оптимизации кода удалось сократить это время до 1 ч 42 мин.



Результаты численного моделирования: а) средняя скорость донного таяния; б) изменение высоты поверхности за вычетом вклада аккумуляции

Результаты моделирования представлены на рисунке. По всей площади континента наблюдается донное таяние со скоростью от 0 до 15 мм/год с наибольшей интенсивностью в районе Западной Антарктиды и Антарктического полуострова (рис. а). В местах донного таяния также наблюдается проседание ледника, связанное с различными плотностями воды и льда (рис. б).

Интенсивное донное таяние в Западной Антарктиде и на Антарктическом полуострове (10–15 мм/год) можно объяснить крайне высоким тепловым потоком: 120–150 мВт/м².

Отметим, что в реальности вода не скапливается под ледником, а движется по системе каналов, которая трансформируется со временем. Полноценный учет перераспределения талой воды представляет собой отдельную сложную задачу.

Скорость убыли массы ледника Антарктиды составила 29 Гт/год (эквивалентно средней скорости донного таяния 2,5 мм/год). В работе [9] проведено сравнение различных моделей и приводятся скорости убыли массы вплоть до 4000 Гт/год. Существенное расхождение с результатами данной работы объясняется отсутствием учета шельфовых ледников, с которыми связано периодическое откалывание айсбергов и тепловое взаимодействие с океаном.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате моделирования получена средняя скорость убыли массы Антарктического ледяного щита в 29 Гт/год. Значение приблизительно согласуется с результатами работы [2], в которой приводится скорость 65 Гт/год. В данной работе авторы рассматривают динамику льда как аморфного целого, но не учитывают тепловой обмен с океаном и откалывание айсбергов от шельфов. Как уже упоминалось [9], скорость может составить от 100 до 4000 Гт/год.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Blatter H., Greve R., Ayako A.-O.* Present State and Prospects of Ice Sheet and Glacier Modelling // *Surv. Geophys.* 2011. V. 32. P. 555–583.
2. *Pattyn F.* Antarctic Subglacial Conditions Inferred from a Hybrid Ice Sheet/Ice Stream Model // *Earth Planet. Sci. Lett.* 2010. V. 295. P. 451–461.
3. *Fretwell P. et al. (Bedmap Collab.).* Bedmap2: Improved Ice Bed, Surface and Thickness Datasets for Antarctica // *Cryosphere.* 2013. V. 7. P. 375–393.
4. *Патерсон У. С. Б.* Физика ледников. М.: Мир, 1984.
5. *Furzeland R. M.* A Comparative Study of Numerical Methods for Moving Boundary Problems // *IMA J. Appl. Math.* 1980. V. 26. P. 411–429.
6. Атлас океанов. Антарктика. СПб.: ГУН и О, 2005.
7. *Arthern R., Winebrenner D., Vaughan D.* Antarctic Snow Accumulation Mapped Using Polarization of 4.3-cm Wavelength Microwave Emission // *J. Geophys. Res.* 2006. V. 111. P. D06108.
8. *Martos Y. M., Catalán M., Jordan T. A., Golynsky A., Golynsky D., Eagles G., Vaughan D. G.* Heat Flux Distribution of Antarctica Unveiled // *Geophys. Res. Lett.* 2017. V. 44. P. 11417–11426.
9. *Seroussi H. et al. (ISMIP6 Collab.).* CMIP6 Antarctica: A Multimodel Ensemble of the Antarctic Ice Sheet Evolution over the 21st Century // *Cryosphere.* 2020. V. 14. P. 3033–3070.