ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2024. Т. 55, вып. 3. С. 735–760

МАССА НЕЙТРИНО В ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

А. В. Борисов [1,*], *А. П. Исаев* [1,2,**]

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
[2] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Рассмотрен качельный механизм генерации массы активных легких нейтрино (как майорановских, так и дираковских) на основе эффективной теории поля. В двух приложениях изложены свойства вейлевских, дираковских и майорановских спиноров и соотношения между ними. В третьем приложении приведено простое доказательство теоремы о диагонализации Такаги для массовой матрицы майорановских фермионов.

The seesaw mechanism for generating the mass of active light neutrinos (both Majorana and Dirac) is considered on the basis of effective field theory. Two appendices describe the properties of Weyl, Dirac and Majorana spinors and the relationships between them. The third appendix provides a simple proof of the theorem on the Takagi diagonalization of the mass matrix for Majorana fermions.

PACS: 14.60.Pq; 14.60.St

ВВЕДЕНИЕ

В минимальной Стандартной модели (СМ) нейтрино — безмассовые левокиральные (левые) фермионы [1], образующие вместе с левыми компонентами заряженных лептонов три дублета, которые преобразуются по фундаментальному представлению калибровочной группы $SU(2)_L$. Однако открытие нейтринных осцилляций показало, что массы нейтрино отличны от нуля, но для трех активных нейтрино очень малы (см. обзор [2]). Из данных по осцилляциям определяются только две разности квадратов масс нейтрино (в трехнейтринной схеме смешивания) [2], но не их абсолютные значения, что позволяет получить ограничение снизу на наибольшую из трех масс:

$$m_3 > \sqrt{\Delta m_{31}^2} \simeq 0{,}05 \text{ эВ}. \tag{1}$$

* E-mail: borisov@phys.msu.ru
** E-mail: isaevap@theor.jinr.ru

Наиболее жесткое ограничение сверху на сумму масс легких нейтрино из современных космологических данных таково [3]:

$$\sum m_\nu \equiv \sum_{i=1}^{3} m_i < 0{,}09 \text{ эВ}. \tag{2}$$

В минимальной СМ массы фермионов (заряженных лептонов и кварков) генерируются за счет юкавского взаимодействия хиггсовского скалярного дублета φ с дублетами левых компонент фермионов и правых фермионных синглетов, но нейтрино, будучи только левыми, остаются безмассовыми. Для генерации дираковских нейтринных масс, что уже позволяет описать нейтринные осцилляции, достаточно ввести правые компоненты нейтринных полей $\nu_{\alpha R}$ $(\alpha = e, \mu, \tau)$ и использовать тот же механизм Браута–Энглера–Хиггса, что и для заряженных фермионов. Следует, однако, подчеркнуть принципиальное отличие правых нейтрино от левых нейтрино и правых заряженных фермионов: $\nu_{\alpha R}$ являются стерильными (в отличие от активных $\nu_{\alpha L}$), т. е. не участвуют в электрослабых (и сильных) взаимодействиях, так как их слабые изоспин и гиперзаряд равны нулю ($\nu_{\alpha R}$ — синглеты калибровочной группы $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$) .

Лагранжиан взаимодействия, генерирующего дираковские массы нейтрино, имеет вид (мы следуем [4])

$$\mathcal{L}_{\nu H} = -y^{\nu}_{\alpha\beta} \overline{L}'_{\alpha L} \widetilde{\varphi} \nu'_{\beta R} - \text{h. c.} \tag{3}$$

Здесь $y^{\nu}_{\alpha\beta}$ — комплексные константы юкавских связей ($\alpha, \beta = e, \mu, \tau$ нумеруют лептонные поколения), $\widetilde{\varphi} = i\sigma_2 \varphi^{+T}$ (σ_2 — матрица Паули; см. (П1.4)) — дублет, зарядово-сопряженный хиггсовскому дублету

$$\varphi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad L'_{\alpha L} = \begin{pmatrix} \nu'_{\alpha L} \\ \ell'_{\alpha L} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

причем штрихи указывают на отсутствие у полей определенных масс. После спонтанного нарушения калибровочной симметрии возникает ненулевое вакуумное среднее хиггсовского поля, так что в унитарной калибровке

$$\langle 0|\widetilde{\varphi}|0\rangle = (v/\sqrt{2}\,, 0)^T, \quad v = (\sqrt{2}\,G_F)^{-1/2} \simeq 246 \text{ ГэВ}, \tag{5}$$

и лагранжиан (3) принимает вид (в матричной форме)

$$\mathcal{L}_{\ell H} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(v + H)\overline{\nu}'_L Y^{\nu} \nu'_R - \text{h. c.}, \tag{6}$$

где H — скалярное хиггсовское поле; $Y^{\nu} = (y^{\nu}_{\alpha\beta})$ — матрица юкавских связей, $\nu'_P = (\nu'_{eP}, \nu'_{\mu P}, \nu'_{\tau P})^T$, $P = L, R$ (см. (П1.9)).

После биунитарной диагонализации матрицы Y^{ν}:

$$\frac{v}{\sqrt{2}}(V^{\nu}_L)^{+} Y^{\ell} V^{\nu}_R = \frac{v}{\sqrt{2}}\,\text{diag}\,(y_1, y_2, y_3) = \text{diag}\,(m_1, m_2, m_3) \equiv M^{\nu}, \tag{7}$$

получаем лагранжиан

$$\mathcal{L}_{\nu H} = -\left(1+\frac{H}{v}\right)(\overline{n}_L M^\nu n_R + \mathrm{h.\,c.}) = -\left(1+\frac{H}{v}\right)\sum_{k=1}^{3} m_k \overline{\nu}_k \nu_k \qquad (8)$$

в терминах физических полей (с определенными массами)

$$n_L = (V_L^\nu)^+ \nu'_L = (\nu_{1L}, \nu_{2L}, \nu_{3L})^T, \quad n_R = (V_R^\nu)^+ \nu'_R = (\nu_{1R}, \nu_{2R}, \nu_{3R})^T. \quad (9)$$

Лагранжиан (8) включает массовые слагаемые (здесь $\nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kR}$ — 4-компонентные дираковские поля) и взаимодействие массивных нейтрино с хиггсовским бозоном, причем массы нейтрино выражаются через юкавские константы y_k и вакуумный конденсат v (см. (7)):

$$m_k = y_k \frac{v}{\sqrt{2}}. \qquad (10)$$

Лептонный слабый заряженный ток, описывающий взаимодействие с W-бозонами, включает поля левых нейтрино с определенными флейворами $\nu_L = (\nu_{eL}, \nu_{\mu L}, \nu_{\tau L})^T$ — суперпозиции полей левых нейтрино с определенными массами (см. (9)):

$$j_\lambda^{(-)} = \overline{\ell}'_L \gamma_\lambda \nu'_L = \overline{\ell}_L (V_L^\ell)^+ \gamma_\lambda V_L^\nu n_L = \overline{\ell}_L \gamma_\lambda \nu_L = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{\ell}_{\alpha L} \gamma_\lambda \nu_{\alpha L}. \qquad (11)$$

Здесь

$$\nu_L = U n_L, \nu_{\alpha L} = \sum_{k=1}^{3} U_{\alpha k} \nu_{kL}, \qquad (12)$$

$U = ||U_{\alpha k}|| = (V_L^\ell)^+ V_L^\nu$ — унитарная матрица лептонного смешивания Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакаты (PMNS), для которой в случае дираковских нейтрино выбирается стандартная параметризация*

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}\,\mathrm{e}^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}\,\mathrm{e}^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

где использованы краткие обозначения $s_{ij} := \sin\theta_{ij}$ и $c_{ij} := \cos\theta_{ij}$.

Подчеркнем, что Стандартная модель определяет только общую структуру матрицы (13), но не предсказывает численные значения ее параметров, которые находятся из экспериментальных данных по нейтринным осцилляциям (см. [2, 5–7]). Для определенности приводим данные из [7], соответствующие наилучшему фиту и двум вариантам

* В случае майорановских нейтрино PMNS-матрица (13) модифицируется [2], $U \to U\,\mathrm{diag}\,(\mathrm{e}^{i\eta_1}, \mathrm{e}^{i\eta_2}, 1)$, и зависит от трех CP-нарушающих фаз δ, η_1, η_2.

упорядочения спектра масс нейтрино (см. [2, 4]), нормальному и инвертированному (указаны в скобках):

$$
\begin{aligned}
&s_{12}^2/10^{-1} = 3{,}18 \pm 0{,}16(3{,}18 \pm 0{,}16),\\
&s_{23}^2/10^{-1} = 5{,}74 \pm 0{,}14(5{,}78^{+0{,}10}_{-0{,}17}),\\
&s_{13}^2/10^{-2} = 2{,}200^{+0{,}069}_{-0{,}062}(2{,}225^{+0{,}064}_{-0{,}070}), \quad \delta/\pi = 1{,}08^{+0{,}13}_{-0{,}12}(1{,}58^{+0{,}15}_{-0{,}16}).
\end{aligned}
$$

Как видно, достоверное значение CP-нарушающей фазы δ пока не удается извлечь из современных экспериментальных данных.

Формула (10) применима для любых дираковских фермионов. Из нее следует, что юкавская константа связи y_f фермиона с хиггсовским бозоном увеличивается с ростом массы фермиона, и экспериментальные данные [2] демонстрируют громадную иерархию спектра масс фундаментальных фермионов и соответствующих y_f. Так, с учетом (5) для нейтрино (выберем его массу $m_\nu \simeq 0{,}05$ эВ, см. (1)), электрона и t-кварка получаем

$$
y_\nu \simeq 3 \cdot 10^{-13}, \quad y_e \simeq 3 \cdot 10^{-6}, \quad y_t \simeq 1. \tag{14}
$$

Эта иерархия — одна из фундаментальных проблем физики элементарных частиц, которая не может быть решена в рамках СМ, что требует ее расширения [8–11].

Для исследования эффектов новой физики, не описываемой СМ, используется разработанная С. Вайнбергом [12, 13] концепция эффективной теории поля (ЭТП) [14–17]. Лагранжиан ЭТП в предположении, что энергетический масштаб новой физики Λ значительно больше характерного СМ-масштаба v (см. (5)), представляется в виде

$$
\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \sum_{n>4} \Lambda^{-n} \sum_k C_k^{(n)} \mathcal{O}_k^{(n)}. \tag{15}
$$

Здесь $\mathcal{L}_{\text{SM}}$ — лагранжиан СМ, а остальные слагаемые описывают эффекты новой физики и включают операторы $\mathcal{O}_k^{(n)}$ с массовой размерностью $n = 5, 6, \ldots$ Эти операторы инвариантны относительно калибровочной группы СМ $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ и составлены только из полей СМ. Безразмерные коэффициенты $C_k^{(n)}$ определяются из экспериментальных данных или, если известен лагранжиан конкретной теории, расширяющей СМ, выражаются через константы связи и массы новых (тяжелых) частиц путем сшивки амплитуд физических процессов, полученных на основе двух указанных лагранжианов, в области сравнительно низких энергий $E \ll \Lambda$, где применим эффективный лагранжиан (15). Он может быть также определен через эффективное действие, полученное из производящего функционала расширенной теории путем интегрирования по «тяжелым» полям [14–17].

Существует единственный набор операторов $\mathcal{O}^{(5)}$, составленный из полей СМ и обладающий калибровочной симметрией [18]:

$$\mathcal{O}^{(5)} = z_{\alpha\beta} \left(\overline{L}'_{\alpha L}\widetilde{\varphi}\right) \left(\widetilde{\varphi}^T L'^c_{\beta L}\right) + \text{h. c.} \tag{16}$$

Здесь $z_{\alpha\beta} = z_{\beta\alpha}$ — набор (комплексных) констант; $L'^c_{\beta L} = C\overline{L}'^T_{\beta L}$ — зарядово-сопряженный дублет, C — оператор зарядового сопряжения (см. (П1.14)). Подчеркнем, что оператор $\mathcal{O}^{(5)}$, отсутствующий в лагранжиане СМ, не сохраняет полное лептонное число, изменяя его на две единицы, и после спонтанного нарушения симметрии генерирует массовое слагаемое для нейтрино

$$\mathcal{L}_{\nu M} = -\frac{1}{2} M'_{\alpha\beta} \overline{\nu}'_{\alpha L} \nu'^c_{\beta L} - \text{h. c.}, \quad M'_{\alpha\beta} = z_{\alpha\beta} \frac{v^2}{\Lambda}. \tag{17}$$

Симметричная комплексная массовая матрица M' приводится к диагональному виду с помощью унитарной матрицы V (см. [4], а также комментарий ниже к формуле (46)):

$$V^T M' V = M = \text{diag}\,(m_1, m_2, m_3), \tag{18}$$

где m_k — положительные числа, и исходные левые флейворные поля представляются в виде суперпозиции левых компонент полей с определенными массами:

$$\nu'_L = V n_L, \quad n_L = (\nu_{1L}, \nu_{2L} \nu_{3L})^T. \tag{19}$$

Используя (18) и (19), приводим массовое слагаемое (17) к диагональному виду

$$\mathcal{L}_{\nu M} = -\frac{1}{2} \left(\overline{n}_L M n^c_L + \overline{n}^c_L M n_L\right) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} m_k \overline{\nu}_k \nu_k, \tag{20}$$

где

$$\nu_k = \nu_{kL} + \nu^c_{kL} = \nu^c_k. \tag{21}$$

Таким образом, массивные нейтрино оказываются майорановскими частицами (см. прил. 1), совпадающими со своими античастицами. Их массы, как следует из (17) и (18),

$$m_k = z_k \frac{v^2}{\Lambda}, \tag{22}$$

значительно меньше масс заряженных лептонов (см. (10)) ввиду наличия подавляющего фактора v/Λ, обусловленного эффектами новой физики. Типичный масштаб масс нейтрино можно представить в виде

$$m_\nu \sim \frac{v^2}{\Lambda} \simeq 6 \cdot 10^{-2} \left(\frac{10^{15}\ \text{ГэВ}}{\Lambda}\right) \text{эВ}. \tag{23}$$

В настоящей работе дан обзор ряда моделей, расширяющих СМ путем введения тяжелых стерильных нейтрино, и соответствующих механизмов генерации малых масс активных нейтрино.

1. КАЧЕЛЬНЫЙ МЕХАНИЗМ ГЕНЕРАЦИИ МАСС НЕЙТРИНО

Для объяснения малости масс активных нейтрино был предложен качельный (seesaw) механизм (КМ) их генерации, обусловленный взаимодействием флейворных нейтрино с тяжелыми правыми майорановскими нейтрино [19–23]. Имеются три типа КМ, классифицированных в [24] (см. также [25]).

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением КМ типа I, который основан на расширении СМ путем добавления трех тяжелых правых нейтрино (синглетов по группе $SU(2)_L$)) с сохранением стандартного хиггсовского дублета, а для КМ типа II добавляется тяжелый хиггсовский триплет, для типа III — триплет тяжелых левых фермионов (возможны также различные модификации и комбинации этих механизмов [25]). Все эти механизмы приводят к несохранению лептонного числа. Отметим также, что проведенные после открытия хиггсовского бозона (2012) детальные экспериментальные исследования его свойств хорошо согласуются с предсказаниями СМ: пока сигналы новой физики в хиггсовском секторе не обнаружены [2].

Рассмотрим КМ типа I сначала для простой модели одного лептонного дублета $L_L = (\nu_L, e_L)^T$, взаимодействующего с тяжелым правым нейтрино (синглетом) N_R. Соответствующая часть полного лагранжиана имеет вид

$$\mathcal{L}_{\nu N} = \overline{N}_R i\gamma^\mu \partial_\mu N_R - \frac{1}{2} m_R \left(\overline{N}^c_R N_R + \overline{N}_R N^c_R \right) - \\ - y_\nu \left(\overline{L}_L \widetilde{\varphi} N_R + \overline{N}_R \widetilde{\varphi}^+ L_L \right), \quad (24)$$

где масса $m_R \gg v$ (предполагается, что она генерируется новой физикой, не описываемой СМ). После спонтанного нарушения симметрии на масштабе v возникает массовая часть лагранжиана — суперпозиция дираковского и майорановского массовых членов

$$\mathcal{L}_{\mathrm{DM}} = -m_D \left(\overline{\nu}_L N + \overline{N} \nu_L \right) - \frac{1}{2} m_R \overline{N} N, \quad (25)$$

где мы ввели обозначение для дираковской массы

$$m_D = y_\nu \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (26)$$

а $N = N_R + N_R^c = N^c$ — поле майорановских нейтрино. Далее заметим, что ввиду $\nu_L^c \equiv (\nu_L)^c = (\nu^c)_R$ имеем

$$\begin{gathered}\nu_L = \frac{1-\gamma^5}{2}\chi, \qquad \chi = \nu_L + \nu_L^c = \chi^c, \\ \overline{\nu}_L N + \overline{N}\nu_L = \frac{1}{2}\left(\overline{\chi}N + \overline{N}\chi\right) + \frac{1}{2}\left(\overline{\chi}\gamma^5 N - \overline{N}\gamma^5\chi\right),\end{gathered} \tag{27}$$

и с учетом соотношений (П1.14), (П1.16) и (П1.17)

$$\overline{N}\gamma^5\chi = -\chi^T(\gamma^5)^T\overline{N}^T = (-\chi^T C^{-1})(C(\gamma^5)^T C^{-1})(C\overline{N}^T) = \overline{\chi}^c\gamma^5 N^c = \overline{\chi}\gamma^5 N$$

представим (25) в матричной форме через майорановские поля N и χ:

$$\mathcal{L}_{\rm DM} = -\frac{1}{2}(\overline{\chi}, \overline{N})\begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ N \end{pmatrix}. \tag{28}$$

После диагонализации массовой матрицы в (28):

$$\begin{gathered}U^T\begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}U = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad U = RP, \\ R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\end{gathered} \tag{29}$$

получаем ее собственные значения

$$m_{1,2} = \frac{1}{2}m_R\left(\sqrt{1 + 4\frac{m_D^2}{m_R^2}} \mp 1\right). \tag{30}$$

Матрица P введена в (29) для изменения знака массы m_1 так, чтобы обе массы m_1 и m_2 были положительными. Соответствующие собственные векторы массовой матрицы (майорановские поля с определенными массами) записываются следующим образом:

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = U^+\begin{pmatrix} \chi \\ N \end{pmatrix}, \quad U^+ = \begin{pmatrix} i\cos\theta & -i\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \\ \nu_1 = i\chi\cos\theta - iN\sin\theta = -\nu_1^c, \\ \nu_2 = \chi\sin\theta + N\cos\theta = \nu_2^c, \\ \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2m_D}{m_R}.\end{gathered} \tag{31}$$

В итоге (25) принимает вид стандартного майорановского массового слагаемого (ср. (20))

$$\mathcal{L}_{\rm DM} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} m_k\overline{\nu}_k\nu_k. \tag{32}$$

Исходные флейворные поля (входящие в лагранжиан (24) и массовый член (25)) оказываются суперпозициями майорановских полей с определенными массами:

$$\begin{pmatrix} \nu_L \\ N_R^c \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix}, \\ \nu_L = -i\nu_{1L}\cos\theta + \nu_{2L}\sin\theta, \quad N_R^c = i\nu_{1L}\sin\theta + \nu_{2L}\cos\theta. \tag{33}$$

В случае тяжелого правого нейтрино N_R имеем $m_R \gg m_D$, и из (30) и (31) получаем

$$m_1 \simeq \frac{m_D^2}{m_R} \ll m_D, \qquad m_2 \simeq m_R, \qquad \theta \simeq \frac{m_D}{m_R} \ll 1. \tag{34}$$

Следовательно, если m_D порядка массы заряженного фермиона, то масса легкого нейтрино оказывается очень малой даже для юкавской константы связи $y_\nu \sim 1$ за счет взаимодействия с тяжелым майорановским нейтрино. Это и составляет суть качельного механизма. При этом, как видно из (33) и (34), активное флейворное нейтрино ν_L содержит малую примесь тяжелого майорановского нейтрино.

Например, для $m_D = m_t \simeq 173$ ГэВ и $m_1 = 0{,}05$ эВ находим $m_R \simeq m_t^2/m_1 \simeq 6 \cdot 10^{14}$ ГэВ (см. (14) и (23)), что является типичным масштабом Великого объединения [8–10].

В прил. 2 мы рассмотрим обобщение КМ, соответствующее модификации массовой матрицы в (28):

$$\begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}.$$

2. ЭФФЕКТИВНЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ ДЛЯ КАЧЕЛЬНОГО МЕХАНИЗМА

2.1. Рассмотрим эффективный лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{eff}}$, соответствующий модели (24) и применимый для энергий $E \ll m_R$. Он определяется путем функционального интегрирования по тяжелым майорановским полям:

$$\mathrm{e}^{iS_{\text{eff}}} = \exp\left(i\int d^4x\,\mathcal{L}_{\text{eff}}(x)\right) = \int [dN][d\overline{N}]\exp\left(i\int d^4x\,\mathcal{L}_{\nu N}(x)\right), \tag{35}$$

где лагранжиан (24) удобно представить в виде

$$\mathcal{L}_{\nu N} = \overline{N}\widehat{K}N - \overline{N}J - \overline{J}N, \quad \widehat{K} = \frac{1}{2}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_R), \\ J = \frac{1}{2}y_\nu\left(\widetilde{\varphi}^+ L_L + \widetilde{\varphi}^T L_L^c\right), \quad \overline{J} = \frac{1}{2}y_\nu\left(\overline{L}_L\widetilde{\varphi} + \overline{L}_L^c\widetilde{\varphi}^*\right). \tag{36}$$

При выводе (36) использованы соотношения

$$N = N^c, \qquad L_L^c = C\overline{L}_L^T, \quad \overline{L}_L^c = -L^T C^{-1}, \\ \overline{L}_L\widetilde{\varphi}N = -N^T\widetilde{\varphi}^T C^{-1} C\overline{L}_L^T = \overline{N}\widetilde{\varphi}^T L_L^c, \quad \overline{N}\widetilde{\varphi}^+ L_L = \overline{L}_L^c\widetilde{\varphi}^* N. \tag{37}$$

Интегрирование в (35) по фермионным полям [26] с учетом (36) дает

$$\mathrm{e}^{iS_{\text{eff}}} = \det \widehat{K} \exp \left(-i \int d^4x \overline{J} \widehat{K}^{-1} J \right). \tag{38}$$

Определитель $\det \widehat{K}$ в (38) не зависит от полей, и поэтому его учет добавляет в эффективное действие только постоянное слагаемое, которое может быть опущено, и в результате получаем эффективный лагранжиан в виде

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\overline{J} \widehat{K}^{-1} J. \tag{39}$$

Отсюда с учетом (36), положив $\widehat{K}^{-1} \simeq -2/m_R$ (в главном порядке разложения по $1/m_R$), получаем

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{y_\nu^2}{2m_R} \left(\overline{L}_L \widetilde{\varphi} \widetilde{\varphi}^T L_L^c + \overline{L}_L^c \widetilde{\varphi}^* \widetilde{\varphi}^+ L_L \right), \tag{40}$$

что является частным случаем оператора (16). Из (40) с учетом (26) находим соответствующее массовое слагаемое для введенного в (27) майорановского поля χ:

$$\begin{gathered} \mathcal{L}_M = \frac{y_\nu^2 v^2}{4m_R} \left(\overline{\nu}_L \nu_L^c + \overline{\nu}_L^c \nu_L \right) = \frac{1}{2} m \overline{\chi} \chi, \\ m = \frac{m_D^2}{m_R}, \quad \chi = \nu_L + \nu_L^c = \chi^c. \end{gathered} \tag{41}$$

«Неправильный» знак массового слагаемого (41) устраняется переходом к майорановскому полю отрицательной зарядовой четности χ':

$$\chi \to \chi' = i\chi = -\chi'^c. \tag{42}$$

Действительно, учитывая соотношения (см. (П1.16))

$$\overline{\chi} \chi = \overline{\chi}^c \chi = \chi^T C \chi = (-i\chi')^T C (-i\chi') = -\overline{\chi'} \chi', \tag{43}$$

получаем

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} m \overline{\chi'} \chi'. \tag{44}$$

Формулы (41) и (44) согласуются с (31)–(34) в главном порядке разложения (39) по $1/m_R$, как и должно быть.

2.2. Рассмотрим теперь расширение СМ с тремя лептонными поколениями, взаимодействующими с тремя тяжелыми правыми нейтрино N_{jR} ($j = 1, 2, 3$). Соответствующий лагранжиан взаимодействия, обобщающий (24), имеет вид [25, 27] (мы используем здесь и ниже сокращенную матричную запись)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\ell N} = \overline{N}_R i \gamma^\mu \partial_\mu N_R - \frac{1}{2} \left(\overline{N}_R^c M_R N_R + \overline{N}_R M_R^* N_R^c \right) - \\ - \overline{L}_L \widetilde{\varphi} Y^\nu N_R - \overline{N}_R Y^{\nu+} \widetilde{\varphi}^+ L_L, \end{aligned} \tag{45}$$

где $N_R = (N_{jR})$, $M_R = (M_{Rjk})$ — комплексная симметричная массовая матрица размерностью 3×3: $M_{Rjk} = M_{Rkj}$ $(j, k = 1, 2, 3)$; матрица юкавских констант связи $Y^\nu = (Y^\nu_{\alpha j})$.

Матрица M_R диагонализуется с помощью унитарной матрицы U:

$$U^T M_R U = M = \operatorname{diag}(M_1, M_2, M_3), \quad M_R = U^* M U^+, \tag{46}$$

где M_j — действительные *неотрицательные* числа. Это утверждение представляет собой частный случай теоремы о диагонализации Такаги (см. прил. 3 ниже, [28], прил. D, и ссылки, приведенные там), которая утверждает, что для любой комплексной симметричной $n \times n$-матрицы M_S существует унитарная матрица U такая, что

$$U^T M_S U = M = \operatorname{diag}(m_1, m_2, \ldots, m_n),$$

где все m_j действительны и неотрицательны. Мы дадим доказательство этой важной теоремы в прил. 2, упростив доказательство из [28].

Используя (46), представим лагранжиан (45) в массовом базисе тяжелых майорановских нейтрино:

$$\mathcal{L}_{\ell N} = \frac{1}{2}\overline{N}_j \left(i\gamma \cdot \partial - M_j\right) N_j - \overline{L}_{\alpha L} \widetilde{Y}^\nu_{\alpha j} \widetilde{\varphi} N_j - \overline{N}_j \widetilde{Y}^{\nu *}_{j\alpha} \widetilde{\varphi}^+ L_{\alpha L}. \tag{47}$$

Здесь

$$N_j = \widetilde{N}_{jR} + \widetilde{N}^c_{jR} = N^c_j, \quad \widetilde{N}_R = (\widetilde{N}_{jR}) = U^+ N_R, \quad \widetilde{Y}^\nu = Y^\nu U. \tag{48}$$

Используя очевидные обобщения соотношений (37), представим (47) в виде, аналогичном (36):

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}_{\ell N} = \mathcal{L}_{\nu N} = \overline{N} \widehat{K} N - \overline{N} J - \overline{J} N, \\
\widehat{K} = \frac{1}{2}(i\gamma \cdot \partial - M) = (\widehat{K}_{jk}), \quad \widehat{K}_{jk} = \frac{1}{2}(i\gamma \cdot \partial - M_j)\delta_{jk}, \\
J = \frac{1}{2}\left(\widetilde{Y}^{\nu +} \widetilde{\varphi}^+ L_L + \widetilde{Y}^{\nu T} \widetilde{\varphi}^T L^c_L\right), \quad \overline{J} = \frac{1}{2}\left(\overline{L}_L \widetilde{\varphi} \widetilde{Y}^\nu + \overline{L}^c_L \widetilde{\varphi}^* \widetilde{Y}^{\nu *}\right).
\end{gathered} \tag{49}$$

Используя (35), (38) и (39), получаем эффективный лагранжиан, обобщающий (40):

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\overline{L}_L \widetilde{\varphi} \widetilde{Y}^\nu M^{-1} \widetilde{Y}^{\nu T} \widetilde{\varphi}^T L^c_L + \text{h. c.} \tag{50}$$

Применяя соотношения (46) и (48), преобразуем (50) к виду оператора Вайнберга (16):

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = z_{\alpha\beta} \overline{L}_{\alpha L} \widetilde{\varphi} \widetilde{\varphi}^T L^c_{\beta L} + \text{h. c.}, \quad z_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(Y^\nu M_R^{-1} Y^{\nu T}\right)_{\alpha\beta}. \tag{51}$$

После спонтанного нарушения симметрии взаимодействие с хиггсовским дублетом (51) генерирует майорановскую массовую матрицу легких нейтрино (ср. со случаем одного лептонного поколения (41)):

$$m_{\alpha\beta} = -z_{\alpha\beta}v^2 = -(M_D M_R^{-1} M_D^T)_{\alpha\beta}, \quad M_D = Y^\nu \frac{v}{\sqrt{2}}, \tag{52}$$

так что массовое слагаемое в лагранжиане имеет вид

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2}\left(m_{\alpha\beta}\overline{\nu}_{\alpha L}\nu^c_{\beta L} + \text{h. c.}\right). \tag{53}$$

Диагонализация матрицы (52) приводит (53) к стандартному виду, соответствующему трем легким майорановским нейтрино (см. (20)).

2.3. Рассмотренный выше качельный механизм генерирует майорановскую массу нейтрино. Однако экспериментально природа массы нейтрино (майорановская она или дираковская) до сих пор не установлена [2]. Поэтому представляет интерес рассмотреть этот механизм и для дираковских нейтрино (см. [29] и цитированную там литературу).

Для простой модели с одним лептонным поколением соответствующая юкавская часть полного лагранжиана имеет вид (ср. (24))

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\nu D} &= -y_\nu \overline{L}_L\widetilde{\varphi}N_R - m_R\overline{N}_L\nu_R - m_N\overline{N}_L N_R + \text{h. c.} = \\ &= -y_\nu\left(\overline{L}_L\widetilde{\varphi}N + \overline{N}\widetilde{\varphi}^+ L_L\right) - m_R\left(\overline{N}\nu_R + \overline{\nu}_R N\right) - m_N\overline{N}N,\end{aligned} \tag{54}$$

где дираковский биспинор $N = N_L + N_R$ является СМ-синглетом и описывает «тяжелые» степени свободы в предположении, что масса m_N значительно больше m_R и характерного электрослабого масштаба v (см. (5)).

Эффективный лагранжиан получается путем подстановки в (54) выражений для «тяжелых» полей через «легкие» поля (что эквивалентно в принятом главном порядке разложения по $1/m_N$ интегрированию по тяжелым фермионным полям в производящем функционале, см. [27, 30]):

$$N = -\frac{1}{m_N}\left(y_\nu\widetilde{\varphi}^+ L_L + m_R\nu_R\right), \quad \overline{N} = -\frac{1}{m_N}\left(y_\nu\overline{L}_L\widetilde{\varphi} + m_R\overline{\nu}_R\right),$$

которые следуют из уравнений движения в статическом приближении (в пренебрежении вкладом кинетических слагаемых в лагранжиане, что оправдано в области энергий $E \ll m_N$):

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{\nu D}}{\partial\overline{N}} = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{L}_{\nu D}}{\partial N} = 0.$$

В результате получим (ср. (40))

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{y_\nu m_R}{m_N}\left(\overline{L}_L\widetilde{\varphi}\nu_R + \overline{\nu}_R\widetilde{\varphi}^+ L_L\right). \tag{55}$$

После спонтанного нарушения симметрии (см. (5)) из (55) следует дираковское массовое слагаемое (ср. (41)–(44))

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_D = m_\nu\left(\overline{\nu}_L\nu_R + \overline{\nu}_R\nu_L\right) = m_\nu\overline{\nu}\nu = -m_\nu\overline{\nu}'\nu',\\ \nu' = \gamma^5\nu = \gamma^5\left(\nu_L + \nu_R\right) = \nu_R - \nu_L,\\ m_\nu = \frac{m_L m_R}{m_N},\quad m_L = y_\nu\frac{v}{\sqrt{2}},\quad m_\nu \ll m_{L,R} \ll m_N.\end{gathered}\tag{56}$$

Правильный знак массы обеспечивается использованным γ^5-преобразованием дираковского биспинора [31] (ср. (42), (43)):

$$\overline{\nu}\nu = \nu^+\gamma^0\nu = \nu'^+\gamma^5\gamma^0\gamma^5\nu' = -\overline{\nu}'\left(\gamma^5\right)^2\nu' = -\overline{\nu}'\nu'.$$

Возможны три случая соотношения массовых параметров:

$$1)\ m_L \sim m_R,\quad 2)\ m_L \ll m_R,\quad 3)\ m_L \gg m_R.$$

Как показано в [29], случай 3, названный недемократическим дираковским качельным механизмом, при соответствующем обобщении на несколько лептонных поколений может быть использован для описания барионной асимметрии Вселенной и стабильности темной материи.

2.4. Рассмотрим обобщение модели (54) на три лептонных поколения, следуя работе [32] (другой вариант обобщения см. в [29]). Оно основано на расширенной калибровочной группе $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times Z_4 \times \times Z_2$. Группа Z_4 (описывающая дискретный аналог лептонного числа) запрещает майорановские слагаемые в лагранжиане и дает стабильность частиц — кандидатов на темную материю, а группа Z_2 обеспечивает качельный механизм генерации дираковской массы нейтрино, запрещая древесную связь левых и правых нейтрино (о дискретных группах Z_n см. [33]). Кроме стандартных фермионов, модель включает три тяжелых дираковских фермиона N_i и три скаляра (помимо хиггсовского дублета) χ, ζ, η, которые являются калибровочными синглетами. Скаляр χ незаряжен по группе Z_4, но нечетен по Z_2, два других скаляра заряжены по Z_2.

Часть лагранжиана модели, ответственная за генерацию массы легких (активных) нейтрино, имеет вид

$$\mathcal{L}_{\nu N\chi} = -f_{\alpha i}\overline{L}_{\alpha L}\widetilde{\varphi}N_{iR} - g_{i\alpha}\overline{N}_{iL}\chi\nu_{\alpha R} - M_{ij}\overline{N}_{iL}N_{jR} - \mathrm{h.\,c.},\tag{57}$$

где $\alpha = e, \mu, \tau$ и $i = 1, 2, 3$. Соответствующий эффективный лагранжиан получается путем очевидного обобщения метода, изложенного в п. 2.3 (используем матричное представление):

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \overline{L}_L f\widetilde{\varphi}M^{-1}g\chi\nu_R + \mathrm{h.\,c.}\tag{58}$$

После спонтанного нарушения симметрии скаляры $\widetilde{\varphi}$ и χ получают вакуумные средние (см. (5)):

$$\langle 0|\widetilde{\varphi}|0\rangle = (v/\sqrt{2}\,, 0)^T,\quad \langle 0|\chi|0\rangle = u,\tag{59}$$

и в результате генерируется дираковское массовое слагаемое

$$\mathcal{L}_D = \overline{\nu}_L M_\nu \nu_R + \mathrm{h.\,c.},$$

где массовая матрица (ср. (56))

$$M_\nu = \frac{vu}{\sqrt{2}} f M^{-1} g. \tag{60}$$

Заметим, что заряженные по Z_4 скаляры ζ и η (в отличие от нейтральных φ и χ) имеют нулевые вакуумные средние, так что группа Z_4 остается ненарушенной после спонтанного нарушения электрослабой симметрии, а вакуумное среднее скаляра χ (см. (59)), нечетного по Z_2, нарушает Z_2-симметрию спонтанно, что генерирует малые дираковские массы (см. (60) при $|M_{ij}| \gg v, u$).

Кроме того, анализ показывает [32], что частицы ζ оказываются стабильными и поэтому могут рассматриваться в качестве кандидатов на темную материю, а частицы η нестабильны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены майорановский и дираковский варианты качельного механизма (типа I) генерации массы активных легких нейтрино, который основан на расширении СМ путем добавления тяжелых нейтрино, имеющих юкавское взаимодействие со стандартными флейворными нейтрино. Путем интегрирования по «тяжелым» полям в производящем функционале теории были получены соответствующие низкоэнергетические эффективные лагранжианы, приводящие после спонтанного нарушения электрослабой симметрии к массовым слагаемым легких нейтрино.

Подчеркнем принципиальное различие механизмов генерации массы заряженных лептонов (и кварков) и легких нейтрино: массы первых определяются произведениями электрослабого масштаба v и соответствующих *безразмерных* юкавских констант связи (см. (10)), а малость масс вторых (активных нейтрино) обеспечивается введением *размерного* параметра — большого массового масштаба новой физики Λ, так что величина массы подавляется малым отношением v/Λ (см. (23)).

В случае рассмотренного качельного механизма масштаб Λ представляет собой масштаб масс M тяжелых нейтрино, вводимых при расширении Стандартной модели. Однако возникает естественный вопрос (см., например, [34]) о генерации самого масштаба M, введенного выше «руками» (см. m_R в (24) и m_N в (54)). Как видно из (23), масштаб Λ совпадает по порядку величины с типичным масштабом теорий Великого объединения (ТВО). Примером расширения СМ, приводящего к КМ, является ТВО (GUT), основанная на группе $SO(10)$ [20]. Существует много путей спонтанного нарушения этой группы до группы СМ $\mathrm{G_{SM}} = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ с последующим ее нарушением на масштабе v, причем минимальный путь содержит два шага (см. [35], где рассмотрена суперсимметричная $SO(10)$-теория):

$$SO(10) \xrightarrow{\Lambda_{\mathrm{GUT}}} \mathrm{G}_{\mathrm{SM}} \xrightarrow{v} SU(3)_c \times U(1)_{\mathrm{em}}.$$

Несуперсимметричная $SO(10)$-ТВО рассмотрена в работе [36], где, в частности, показано, как при спонтанном нарушении $SO(10)$ возникает КМ типа I для легких нейтрино.

Заметим, что лево-право-симметричные теории также приводят к КМ [23, 34].

Майорановский КМ приводит к несохранению лептонного числа L, изменяя его на две единицы (см. (50) и (53)). Это открывает возможность наблюдения многочисленных процессов с $|\Delta L| = 2$, индуцированных майорановскими нейтрино: безнейтринного двойного бета-распада ядер (см. обзор [37]) и его аналогов — полулептонных распадов мезонов с рождением пары лептонов с одинаковыми электрическими зарядами (дилептонов) [38, 39], рождения дилептонов в глубоконеупругих протон-протонных и лептон-протонных столкновениях на коллайдерах высоких энергий (см., например, [38, 40]) и др. Поиск таких процессов составляет одно из важных направлений исследований в физике элементарных частиц [2].

Тяжелые майорановские нейтрино могут играть существенную роль в космологии: их распады с CP-нарушением на ранних этапах эволюции Вселенной приводят к лептонной асимметрии, которая за счет особого непертурбативного электрослабого взаимодействия лептонов и кварков с несохранением лептонного и барионного чисел преобразуется в барионную асимметрию, и этот механизм генерации барионной асимметрии Вселенной называется лептогенезисом (см. [41] и цитированную там литературу). Расширение Стандартной модели путем добавления трех тяжелых правых нейтрино называется нейтринной минимальной Стандартной моделью (νMSM), ее приложения в космологии, включая проблемы бариогенезиса и темной материи, рассмотрены, например, в работах [42, 43].

Что же касается дираковского КМ, то, как указано выше, при соответствующем расширении СМ вводятся новые скалярные синглеты, один из которых может служить кандидатом на стабильную темную материю.

Таким образом, малость масс активных нейтрино служит явным сигналом новой физики, которая не описывается Стандартной моделью [34].

Приложение 1
ВЕЙЛЕВСКИЕ, ДИРАКОВСКИЕ И МАЙОРАНОВСКИЕ СПИНОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО $\mathbb{R}^{1,3}$

Для описания фермионных полей со спином $1/2$ используются двухкомпонентные комплексные вейлевские спиноры, которые преобразуются независимо по фундаментальному (спинор ξ_a, $a = 1, 2$) и антифундаментальному, или комплексно сопряженному к фундаментальному (спинор $\eta^{\dot{a}}$, $\dot{a}=1,2$), представлениям группы $SL(2,\mathbb{C})$ (здесь мы следуем [28, 44, 45]):

$$\xi'_a = A_a{}^b \xi_b, \quad \eta'^{\dot{a}} = \widetilde{A}^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \eta^{\dot{b}}, \quad \widetilde{A} = \left(A^{-1}\right)^+, \quad \det A = 1. \tag{П1.1}$$

Как известно, $SL(2,\mathbb{C})$ является двулистной накрывающей группой для собственной ортохронной группы Лоренца $SO^{\uparrow}(1,3)$. Комплексной (2×2)-матрице $A \in SL(2,\mathbb{C})$ соответствует вещественная псевдоортогональная (4×4)-матрица $\Lambda \in SO^{\uparrow}(1,3)$:

$$\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}\Lambda^{\lambda}{}_{\nu} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sigma_\mu A \widetilde{\sigma}_\nu A^+\right), \quad \mu,\nu,\ldots = 0,1,2,3, \tag{П1.2}$$

где $g_{\mu\lambda} = \mathrm{diag}\,(+1,-1,-1,-1)$ и введены два набора четырех $2\times$ $\times\, 2$-матриц, включающих матрицы Паули $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ и единичную матрицу $\sigma_0 = I$:

$$\widetilde{\sigma}^\mu = ||(\widetilde{\sigma}^\mu)^{\dot{c}a}|| = (I, -\boldsymbol{\sigma}), \quad \sigma^\mu = ||(\sigma^\mu)_{a\dot{c}}|| = (I, \boldsymbol{\sigma}), \tag{П1.3}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{П1.4}$$

Заметим, что двулистное накрытие означает, что двум элементам группы $SL(2,\mathbb{C})$ соответствует, как следует из (П1.2), один элемент группы Лоренца $SO^{\uparrow}(1,3)$: $\pm A \to \Lambda$. Поэтому спинорные представления группы Лоренца называются двузначными, и физическими наблюдаемыми могут быть не сами спинорные фермионные поля, а их билинейные комбинации.

Дираковский 4-компонентный спинор (биспинор) ψ составляется из двух вейлевских спиноров (П1.1):

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi_L \\ \eta_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_a \\ \eta^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \quad \xi_L := (\xi_a) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \eta_R := (\eta^{\dot{a}}) = \begin{pmatrix} \eta^{\dot{1}} \\ \eta^{\dot{2}} \end{pmatrix}, \tag{П1.5}$$

что соответствует вейлевскому представлению гамма-матриц (см. (П1.3)):

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \widetilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^\mu = (I, \boldsymbol{\sigma}), \quad \widetilde{\sigma}^\mu = (I, -\boldsymbol{\sigma}),$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = (\gamma^k) = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{П1.6}$$

Биспинор, сопряженный по Дираку к биспинору (П1.5), имеет вид*

$$\overline{\psi} = \psi^+\gamma^0 = \left(\overline{\xi}_{\dot{a}}, \overline{\eta}^a\right)\gamma^0 = \left(\overline{\eta}^a, \overline{\xi}_{\dot{a}}\right), \tag{П1.7}$$

* Сопряженный по Дираку биспинор $\overline{\psi}$ строится так, чтобы он мог ковариантно сворачиваться со спинором ψ. Матрица γ^0 в определении $\overline{\psi}$ лишь формально совпадает с матрицей Дирака γ^0, что видно из расстановки у нее спинорных индексов.

$$\overline{\xi}_{\dot a} = (\xi_a)^*, \quad \overline{\eta}^a = \left(\eta^{\dot a}\right)^*. \tag{П1.8}$$

Левый ψ_L и правый ψ_R биспиноры, составляющие биспинор (П1.5), выражаются через вейлевские спиноры следующим образом:

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi = \begin{pmatrix} \xi_a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta^{\dot a} \end{pmatrix}, \\ \psi = \psi_L + \psi_R, \tag{П1.9}$$

где матрица γ^5 определена в (П1.6).

Накрывающая группа $SL(2,\mathbb{C})$ группы Лоренца $SO^{\uparrow}(1,3)$ действует на биспинор (П1.5) согласно (П1.1)

$$\psi(x) \to \psi'(x') = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \widetilde{A} \end{pmatrix} \psi(x) \equiv D(A)\,\psi(x),$$
$$D(A) = \exp\left(\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\right), \quad \Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \widetilde{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \tag{П1.10}$$
$$(\sigma^{\mu\nu})_a^{\ b} = (\sigma^\mu)_{a\dot c}(\widetilde{\sigma}^\nu)^{\dot c b} - (\mu \leftrightarrow \nu), \quad (\widetilde{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot a}{}_{\dot b} = (\widetilde{\sigma}^\nu)^{\dot a c}(\sigma^\mu)_{c\dot b} - (\mu \leftrightarrow \nu),$$

где матрица $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ составлена из 6 вещественных параметров группы Лоренца: представлению комплексной (2×2)-матрицы $A \in SL(2,\mathbb{C})$ в виде произведения эрмитовой и унитарной матриц соответствует представление вещественной псевдоортогональной (4×4)-матрицы $\Lambda \in SO^{\uparrow}(1,3)$ в виде матрицы буста и матрицы чистого трехмерного вращения в $\mathbb{R}^{1,3}$. С учетом преобразования Лоренца для координат, $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, преобразования (2) можно представить в виде

$$\psi'(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}\right)\psi(x), \quad J^{\mu\nu} = i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu) + \frac{1}{2}\Sigma^{\mu\nu}, \tag{П1.11}$$

где $J^{\mu\nu}$ — полные генераторы группы Лоренца, включающие образующие $\Sigma^{\mu\nu}$ в спинорном представлении.

С помощью комплексного сопряжения (П1.8) мы можем построить для биспинора (П1.5) еще один биспинор

$$\psi^c = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \widetilde{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix}\psi^* = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ab}\overline{\eta}^b \\ \varepsilon^{\dot a\dot c}\overline{\xi}_{\dot c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\eta}_a \\ \overline{\xi}^{\dot a} \end{pmatrix}, \tag{П1.12}$$

который преобразуется по тому же закону (2), что и биспинор ψ в (П1.5). Здесь матрицы

$$\varepsilon = ||\varepsilon_{ab}||, \quad \widetilde{\varepsilon} = ||\varepsilon^{\dot a\dot c}||, \quad \varepsilon = -\widetilde{\varepsilon} = -i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{П1.13}$$

опускают ($\overline{\eta}_a = \varepsilon_{ab}\overline{\eta}^b$) и поднимают ($\overline{\xi}^{\dot a} = \varepsilon^{\dot a\dot b}\overline{\xi}_{\dot b}$) индексы у компонент вейлевских спиноров. Биспинор ψ^c, заданный в (П1.12), называется зарядово-сопряженным к биспинору ψ (П1.5). Определение зарядового сопряжения (П1.12) записывается в матричном виде

$$\psi^c = C\overline{\psi}^T = C\,(\gamma^0)^T\,\psi^*, \quad C = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \widetilde{\varepsilon} \end{pmatrix} = i\gamma^2\gamma^0, \tag{П1.14}$$

и является инволютивной операцией $(\psi^c)^c = \psi$. Матрица зарядового сопряжения C удовлетворяет соотношениям

$$(\gamma^\mu)^T = -C^{-1}\gamma^\mu C, \quad C^T = -C\,, \quad C^+ = C^{-1}, \quad C^{-1} = -C. \tag{П1.15}$$

Два последних соотношения в (П1.15) справедливы только в конкретных представлениях матриц Дирака, например, в используемом вейлевском представлении. Из (П1.14) и (П1.15) находим дираковски сопряженный к ψ^c биспинор

$$\overline{\psi}^c \equiv \overline{\psi^c} = \psi^T C = -\psi^T C^{-1}. \tag{П1.16}$$

Заметим, что первое соотношение в (П1.15) собственно и является определением матрицы C, так как именно оно гарантирует, что если биспинор ψ описывает частицу с зарядом e, то биспинор ψ^c — частицу с зарядом $-e$, т. е. античастицу (см., например, [46]). Из этого соотношения также следует

$$(\gamma^5)^T = C^{-1}\gamma^5 C. \tag{П1.17}$$

С учетом (П1.17) и $(\gamma^\mu)^+ = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ получаем $(\gamma^5)^* = -C^{-1}\gamma^0\gamma^5\gamma^0 C$, откуда для левых и правых компонент биспинора ψ^c имеем

$$\begin{aligned} \psi^c_L \equiv (\psi_L)^c = \frac{1}{2}\left(1+\gamma^5\right)\psi^c = (\psi^c)_R\,, \\ \psi^c_R \equiv (\psi_R)^c = \frac{1}{2}\left(1-\gamma^5\right)\psi^c = (\psi^c)_L\,. \end{aligned} \tag{П1.18}$$

Так как биспиноры ψ и ψ^c, как следует из сравнения (П1.5) и (П1.12), одинаково преобразуются относительно $SL(2,\mathbb{C})$, их можно приравнять:

$$\psi = \psi^c. \tag{П1.19}$$

Биспинор ψ, равный своему зарядово-сопряженному биспинору ψ^c, называется *майорановским биспинором*. Заметим, что определение (П1.19) можно обобщить, включив произвольный фазовый множитель [45, 47]: $\psi^c = \mathrm{e}^{i\theta}\,\psi$, что иногда удобно (см., например, (31)), но всегда можно выбрать $\theta = 0$, переопределив соответствующим образом фермионное поле ψ.

Условие (П1.19) запрещает любую $U(1)$-симметрию (инвариантность соответствующего лагранжиана относительно фазовых преобразований), и это означает, что майорановские фермионы являются истинно нейтральными частицами, которые тождественны своим античастицам, т. е. не могут обладать аддитивными квантовыми числами: электрическим зарядом и любым фермионным числом (лептонным, барионным и др.).

Условие (П1.19) эквивалентно (см. (П1.5) и (П1.12)) равенству вейлевских спиноров: $\xi_a = \overline{\eta}_a$, и майорановский биспинор представим в виде

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \xi_a \\ \overline{\xi}^{\dot{a}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \overline{\eta}_a \\ \eta^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \quad \overline{\xi}^{\dot{a}} = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}(\xi_b)^*, \quad \overline{\eta}_a = \varepsilon_{ab}\left(\eta^{\dot{b}}\right)^*, \tag{П1.20}$$

т. е. определяется только одним левым ξ_a или правым $\eta^{\dot{a}}$ вейлевским спинором.

Из (П1.14)–(П1.16) и (П1.19) следует

$$\overline{\psi}_M = -\psi_M^T C^{-1} = \psi_M^T C = \left(\xi^a, \overline{\xi}_{\dot{a}}\right), \tag{П1.21}$$

что позволяет записать майорановский массовый член в лагранжиане в виде

$$-\mathcal{L}_M = \frac{m}{2}\overline{\psi}_M \psi_M = \frac{m}{2}\psi_M^T C \psi_M = \frac{m}{2}\left(\xi^a \xi_a + \overline{\xi}_{\dot{a}}\overline{\xi}^{\dot{a}}\right) = \\ = \frac{m}{2}\left(\xi^a \varepsilon_{ab}\xi^b + \overline{\xi}_{\dot{a}}\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}\overline{\xi}_{\dot{b}}\right), \tag{П1.22}$$

где фактор $1/2$ введен для того, чтобы в уравнении Дирака, получаемом вариацией по ξ и $\overline{\xi}$, не появлялся коэффициент 2 при массе m. Используя (П1.20), формулу (П1.22) можно переписать в эквивалентном виде, сделав в ней замены $\xi \to \overline{\eta}$ и $\overline{\xi} \to \eta$. Подчеркнем, что свертки квадратичных комбинаций компонент ξ и $\overline{\xi}$ с антисимметричными ε-символами в (П1.22) отличны от нуля вследствие антикоммутативности компонент фермионных полей. Указанная антикоммутативность обеспечивает также равенство нулю электромагнитного тока для майорановских фермионов:

$$\overline{\psi}_M \gamma^\mu \psi_M = \overline{\psi}^c_M \gamma^\mu \psi^c_M = -\psi_M^T C^{-1}\gamma^\mu C \overline{\psi}_M^T = \\ = \overline{\psi}_M C (\gamma^\mu)^T C^{-1}\psi_M = -\overline{\psi}_M \gamma^\mu \psi_M = 0,$$

где учтены соотношения (П1.19), (П1.16) и (П1.15).

Отметим, что кинетический член для майорановского поля записывается в виде

$$\frac{1}{2}\overline{\psi}_M i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_M = \frac{i}{2}\left(\xi^a (\sigma^\mu)_{a\dot{b}}\partial_\mu \overline{\xi}^{\dot{b}} + \overline{\xi}_{\dot{a}}(\widetilde{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}\partial_\mu \xi_b\right). \tag{П1.23}$$

Согласно (П1.22) и (П1.23) лагранжиан свободного майорановского поля имеет вид

$$\mathcal{L}_f = \frac{1}{2}\overline{\psi}_M \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi_M = \\ = \frac{1}{2}\xi_L^{c+}\left(i\sigma^\mu \partial_\mu \xi_L^c - m\xi_L\right) + \frac{1}{2}\xi_L^{+}\left(i\widetilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi_L - m\xi_L^c\right), \tag{П1.24}$$

где использованы компактные матричные обозначения (см. (П1.6), (П1.20) и (П1.21)):

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \xi_L \\ \xi_L^c \end{pmatrix}, \quad \overline{\psi}_M = \left(\xi_L^{c+}, \xi_L^+\right), \qquad \xi_L = (\xi_a), \quad \xi_L^c = i\sigma_2 \xi_L^* = (\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}\,\overline{\xi}_{\dot{b}}). \tag{П1.25}$$

Из (П1.24) следуют уравнение движения в биспинорной форме

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi_M = 0,$$

а также эквивалентная ему пара уравнений для вейлевских спиноров

$$i\widetilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi_L - m\xi_L^c = 0, \quad i\sigma^\mu \partial_\mu \xi_L^c - m\xi_L = 0, \tag{П1.26}$$

причем второе уравнение получается комплексным сопряжением из первого. Для безмассового фермиона с заданным 4-импульсом $p^\mu = (|\mathbf{p}|, \mathbf{p})$ биспинор $\psi_M(x) \sim \exp\left(-ip \cdot x\right)$ и спиноры $\xi_L(x)$ и $\xi_L^c(x)$, как следует из (П1.26) с учетом (П1.3), подчиняются независимым уравнениям

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\,\xi_L = -\xi_L, \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\,\xi_L^c = \xi_L^c, \quad \mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|,$$

т. е. эти спиноры действительно являются соответственно левым и правым (см. (П1.18)).

Сравним майорановский массовый член (П1.22) с дираковским:

$$-\mathcal{L}_D = m_D \overline{\psi}\psi = m_D \left(\eta_R^+ \xi_L + \xi_L^+ \eta_R\right) = m_D \left(\overline{\eta}^a \xi_a + \overline{\xi}_{\dot{a}} \eta^{\dot{a}}\right), \tag{П1.27}$$

где использованы обозначения (см. (П1.5), (П1.7))

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi_L \\ \eta_R \end{pmatrix}, \quad \xi_L = (\xi_a), \quad \eta_R = (\eta^{\dot{a}}). \tag{П1.28}$$

Таким образом, дираковский массовый член возможен только при наличии как левых ξ_L, так и правых η_R вейлевских спиноров — *независимых* компонент дираковского биспинора (в отличие от майорановского биспинора, для которого массовый член определяется либо только левыми ξ_L, либо только правыми $\eta_R = \xi_L^c$ вейлевскими компонентами).

Приложение 2
МАССОВЫЙ ЧЛЕН ОБЩЕГО ВИДА

Рассмотрим теперь массовый член общего вида, включающий два типа майорановских и дираковский члены:

$$-\mathcal{L}_{\text{MD}} = \frac{1}{2} m_L \left(\overline{\psi}_L \psi_L^c + \overline{\psi}_L^c \psi_L\right) + \frac{1}{2} m_R \left(\overline{\psi}_R \psi_R^c + \overline{\psi}_R^c \psi_R\right) + \\ + m_D \left(\overline{\psi}_L \psi_R + \overline{\psi}_R \psi_L\right). \tag{П2.1}$$

Введем, следуя [31], майорановские биспиноры

$$\lambda = \psi_L + \psi_L^c = \lambda^c, \quad \rho = \psi_R + \psi_R^c = \rho^c,$$
$$\lambda = \begin{pmatrix} \xi_L \\ \xi_L^c \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} \eta_R^c \\ \eta_R \end{pmatrix} \tag{П2.2}$$

и выразим через них с учетом (П1.18) биспиноры, входящие в (П2.1):

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\lambda, \quad \psi_L^c = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\lambda,$$
$$\psi_R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\rho, \quad \psi_R^c = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\rho. \tag{П2.3}$$

Подставив (П2.3) в (П2.1), получим более удобное представление общего массового члена:

$$-\mathcal{L}_{\mathrm{MD}} = \frac{1}{2}m_L\overline{\lambda}\lambda + \frac{1}{2}m_R\overline{\rho}\rho + \frac{1}{2}m_D\big(\overline{\lambda}\rho + \overline{\rho}\lambda\big) =$$
$$= \frac{1}{2}(\overline{\lambda}, \overline{\rho})\begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \rho \end{pmatrix}. \tag{П2.4}$$

Диагонализация симметричной массовой матрицы в (П2.4) с помощью унитарной матрицы U (см. выше (29)) дает

$$U^T \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \tag{П2.5}$$

где

$$U = \begin{pmatrix} -i\cos\theta & \sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2m_D}{m_R - m_L},$$
$$m_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} \mp (m_R + m_L)\right]. \tag{П2.6}$$

В результате (П2.4) примет вид массового члена для двух майорановских фермионов

$$-\mathcal{L}_{\mathrm{MD}} = \frac{1}{2}m_1\overline{\chi}_1\chi_1 + \frac{1}{2}m_2\overline{\chi}_2\chi_2, \quad \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = U^+\begin{pmatrix} \lambda \\ \rho \end{pmatrix},$$
$$\chi_1 = i\lambda\cos\theta - i\rho\sin\theta, \quad \chi_2 = \lambda\sin\theta + \rho\cos\theta, \tag{П2.7}$$

где майорановские биспиноры λ и ρ были определены в (П2.2).

Таким образом, общий массовый член (П2.1) с биспинором (П1.28), составленным из двух *независимых* вейлевских спиноров, фактически является массовым членом для двух майорановских фермионов с различными массами.

Пусть имеется следующая иерархия массовых параметров в (П2.1):

$$m_L \ll m_D \ll m_R. \tag{П2.8}$$

Тогда из (П2.6) и (П2.7) находим

$$\begin{gathered}\theta \simeq \frac{m_D}{m_R} \ll 1, \quad \chi_1 \simeq i\lambda - i\theta\rho, \quad \chi_2 \simeq \theta\lambda + \rho, \\ m_1 \simeq \frac{m_D^2}{m_R} - m_L, \quad m_2 \simeq \frac{m_D^2}{m_R} + m_R.\end{gathered} \tag{П2.9}$$

Отсюда следует, что при условии (П2.8) фермион χ_2 оказывается тяжелым ($m_2 \gg m_1$), χ_1 — легким. В случае $m_L = 0$ приходим к *качельному механизму* генерации малой массы за счет большой массы, который обсуждался в основном тексте применительно к физике нейтрино:

$$\begin{gathered}m_1 \simeq \frac{m_D^2}{m_R} \ll m_R, \quad m_2 \simeq m_R, \\ \chi_1 \simeq i\lambda = i(\psi_L + \psi_L^c), \quad \chi_2 \simeq \rho = \psi_R + \psi_R^c.\end{gathered}$$

Заметим также, что выбор $m_L = 0$ в стандартном КМ обусловлен тем, что для генерации $m_L \neq 0$ требуется введение в теорию хиггсовского триплета: майорановский массовый член L-типа в (П2.1) для нейтрино несет слабый изоспин 1.

При

$$m_L = m_R = 0 \tag{П2.10}$$

получаем обычный дираковский фермион, который соответствует, как следует из (П2.6) и (П2.7), вырожденному случаю двух майорановских фермионов [31]:

$$m_1 = m_2 = m_D, \quad \chi_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\lambda - \rho), \quad \chi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda + \rho). \tag{П2.11}$$

Из (П2.3) с учетом (П2.2) находим представление дираковского поля в виде суперпозиции двух майорановских полей с одинаковой массой (см. также [31, 48])

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_2 + i\gamma^5\chi_1).$$

Малое отклонение от случая дираковских фермионов приводит к квазидираковским фермионам (*квазидираковским, или псевдодираковским, нейтрино* в физике нейтрино, см. [49]). Определив два малых параметра

$$\varepsilon = \frac{m_R + m_L}{2m_D} \ll 1, \quad \delta = \frac{m_R - m_L}{4m_D} \ll 1,$$

с учетом (П2.6) и (П2.7) получим (ср. (П2.11))

$$\begin{gathered}\chi_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}\left[(1+\delta)\lambda - (1-\delta)\rho\right], \quad m_1 = m_D(1-\varepsilon), \\ \chi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(1-\delta)\lambda + (1+\delta)\rho\right], \quad m_2 = m_D(1+\varepsilon).\end{gathered}$$

Приложение 3
ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ МАССОВОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ МАЙОРАНОВСКИХ ФЕРМИОНОВ

Майорановские массовые слагаемые в лагранжианах, описывающих качельный механизм, в случае нескольких поколений нейтрино записываются (после спонтанного нарушения симметрии) с использованием комплексных симметричных массовых матриц M_R (см. (45)). Пусть мы имеем n поколений нейтрино. Для перехода к нейтринным состояниям с определенными массами симметричные комплексные $n \times n$-матрицы M_R необходимо диагонализовать с помощью унитарного преобразования правых нейтрино $N_R \to UN_R$, где $U \in U(n)$, что приводит к преобразованию массовой матрицы $M_R \to U^T M_R U$. Имеет место следующее утверждение, известное в литературе как теорема о диагонализации Такаги (см. прил. D в [28], а также публикации, указанные там).

Теорема. *Для любой комплексной симметричной $n \times n$-матрицы $M_{\mathbb{C}}$ существует унитарная матрица U такая, что*

$$U^T M_{\mathbb{C}} U = \mathrm{diag}\,(m_1, m_2, \ldots, m_n) \equiv M_D, \tag{П3.1}$$

где все параметры m_j действительны и неотрицательны.

Доказательство. Доказательство основано на явном построении унитарной матрицы U, которая диагонализует $M_{\mathbb{C}}$ согласно (П3.1).

Комплексная симметричная $n \times n$-матрица $M_{\mathbb{C}}$ представима в виде $M_{\mathbb{C}} = X + iY$, где X, Y — вещественные симметричные $n \times n$-матрицы. Введем симметричную вещественную $2n \times 2n$-матрицу (2×2 блочную матрицу с $n \times n$ блоками X, Y)

$$M = \begin{pmatrix} X & -Y \\ -Y & -X \end{pmatrix} = \sigma_3 \otimes X - \sigma_1 \otimes Y, \quad M^T = M, \tag{П3.2}$$

где σ_1, σ_3 — матрицы Паули (П1.4). Известно, что любая симметричная вещественная матрица диагонализуется с помощью вещественной ортогональной матрицы O:

$$O^T\, M\, O = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n}), \quad O^T\, O = I_{2n}, \tag{П3.3}$$

где I_{2n} обозначает $2n$-мерную единичную матрицу. Очевидно, что все диагональные элементы λ_k — вещественные числа. Соотношения (П3.3), с учетом $(O^T)^{-1} = O$, в компонентах записываются в виде

$$M_{ik} O_{k\ell} = O_{i\ell} \lambda_\ell, \quad O_{ki} O_{k\ell} = \delta_{i\ell}. \tag{П3.4}$$

Введем набор вещественных $2n$-мерных векторов $v^{(\ell)}$ с координатами $v_i^{(\ell)} = O_{i\ell}$ (т. е. векторы $v^{(\ell)}$ — это столбцы матрицы O). Из соотношений (П3.4) видно, что $v^{(\ell)}$ — собственные векторы матрицы M с собственными значениями λ_ℓ:

$$M v^{(\ell)} = (\sigma_3 \otimes X - \sigma_1 \otimes Y)\, v^{(\ell)} = \lambda_\ell v^{(\ell)}, \tag{П3.5}$$

причем набор $2n$ векторов $v^{(\ell)}$ образует ортонормированную систему: $(v^{(\ell)}, v^{(i)}) = \delta_{\ell i}$, и, следовательно, задает базис в $\mathbb{R}^{2n}$. Заметим теперь, что если λ_ℓ — собственное значение M, то $-\lambda_\ell$ тоже собственное значение M. Действительно, умножим слева обе части соотношения (П3.5) на невырожденную матрицу

$$B := i(\sigma_2 \otimes I_n) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

и воспользуемся очевидным соотношением $BM = -MB$. В результате получаем $M(Bv^{(\ell)}) = -\lambda_\ell \, (Bv^{(\ell)})$, т. е. $Bv^{(\ell)}$ — собственный вектор матрицы M с собственным значением $-\lambda_\ell$. Таким образом, все $2n$ собственных значений матрицы M разбиваются на пары $(\lambda_\ell, -\lambda_\ell)$, и в каждой паре имеется одно заведомо неотрицательное собственное значение. Выберем все такие неотрицательные собственные значения*, которых n штук, и обозначим их как $m_1, m_2, \ldots, m_n$, а соответствующие $2n$-мерные собственные вещественные векторы обозначим как $V^{(1)}, \ldots, V^{(n)}$:

$$MV^{(k)} = m_k V^{(k)} \Rightarrow \begin{pmatrix} X & -Y \\ -Y & -X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(k)} \\ w^{(k)} \end{pmatrix} = m_k \begin{pmatrix} u^{(k)} \\ w^{(k)} \end{pmatrix}, \tag{П3.6}$$

где $k = 1, \ldots, n$, и мы составили $2n$-мерные векторы $V^{(k)}$ из двух n-мерных векторов $u^{(k)}$ и $w^{(k)}$. Отметим, что свойство ортонормированности для любой выборки векторов $V^{(k)}$ сохраняется, и мы имеем

$$\delta_{k\ell} = (V^{(k)}, V^{(\ell)}) = (u^{(k)}, u^{(\ell)}) + (w^{(k)}, w^{(\ell)}). \tag{П3.7}$$

Введем n-мерные комплексные векторы $z^{(k)} = u^{(k)} + i\, w^{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда второе равенство в (П3.6) и условие ортонормированности (П3.7) можно записать в виде

$$M_{\mathbb{C}} z^{(k)} = m_k z^{(k)*}, \quad (z^{(k)*}, z^{(\ell)}) = \delta_{k\ell}, \tag{П3.8}$$

где $z^{(k)*} = u^{(k)} - iw^{(k)}$ и $m_k \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Определим комплексную $n \times n$-матрицу U, столбцами которой являются векторы $z^{(k)}$, т. е. $U_{ik} = z_i^{(k)}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$. Тогда соотношения (П3.8) представляются в виде

$$M_{\mathbb{C}} U = U^* \operatorname{diag}(m_1, \ldots, m_n), \quad U^\dagger U = I_n.$$

Таким образом, мы построили унитарную матрицу $U \in U(n)$, которая диагонализует согласно (П3.1) комплексную симметричную $n \times n$-матрицу $M_{\mathbb{C}}$, причем диагональные элементы m_k — неотрицательные вещественные числа, что и требовалось.

Благодарности. Авторы благодарны А. Б. Арбузову и Э. Э. Боосу за полезные обсуждения и комментарии.

* Если оба собственных значения в паре равны нулю, то выбирается любое из них.

Дополнение при корректуре. После направления нашей статьи в журнал мы узнали, что в работе Girmohanta S., Mohapatra R. N., Shrock R. (Phys. Rev. D. 2021. V. 103, No. 1. P. 015021-1–015021-39; arXiv:2011.01237 [hep-ph]) был предложен новый тип качельного механизма, основанный на моделях с дополнительными измерениями. В этих моделях 4-мерное пространство Минковского вложено в пространство размерности $4 + n$ с n дополнительными пространственными измерениями, компактифицированными на масштабе длины L, который соответствует масштабу энергии $\Lambda_L = 1/L$. Интегрирование по дополнительным измерениям приводит к лагранжиану низкоэнергетической эффективной теории поля, который после спонтанного нарушения симметрии дает для активных нейтрино майорановский массовый член с малыми массами порядка $m_\nu \sim m_D^2/\Lambda_L \sim 10^{-3}$ эВ на масштабе $\Lambda_L \sim 100$ ТэВ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Weinberg S.* A Model of Leptons // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19, No. 21. P. 1264–1266.
2. *Workman R. L. et al. (Particle Data Group).* Review of Particle Physics // Prog. Theor. Exp. Phys. 2022. V. 2022, No. 8. P. 1–2270.
3. *Di Valentino E., Gariazzo S., Mena O.* Most Constraining Cosmological Neutrino Mass Bounds // Phys. Rev. D. 2021. V. 104, No. 8. P. 083504-1–083504-7; arXiv:2106.15267 [astro-ph.CO].
4. *Giunti C., Kim C. W.* Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics. Oxford Univ. Press, 2007.
5. *Esteban I. et al.* NuFIT 5.2 (2022). http://www.nu-fit.org.
6. *Колупаева Л. Д., Гончар М. О., Ольшевский А. Г., Самойлов О. Б.* Осцилляции нейтрино: статус и перспективы определения порядка нейтринных масс и фазы нарушения лептонной CP-инвариантности // УФН. 2023. Т. 193, № 8. С. 801–824.
7. *de Salas P. F., Forero D. V., Gariazzo S., Martínez-Miravé P., Mena O., Ternes C. A., Tórtola M., Valle J. W. F.* 2020 Global Reassessment of the Neutrino Oscillation Picture // JHEP. 2021. V. 2021, No. 02. Art. 071; arXiv:2006.11237 [hep-ph].
8. *Емельянов В. М.* Стандартная модель и ее расширения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
9. *Nagashima Y.* Beyond the Standard Model of Elementary Particle Physics. Weinheim: Wiley-VCH, 2014.
10. *Langacker P.* The Standard Model and Beyond. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2017.
11. *Boos E. E.* Quantum Field Theory and the Electroweak Standard Model. M.: Книж. дом «Университет», 2018.
12. *Weinberg S.* Phenomenological Lagrangians // Phys. A. 1979. V. 96, No. 1–2. P. 327–340.
13. *Вайнберг С.* Квантовая теория поля. Т. 1. Общая теория. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
14. *Petrov A. A., Blechman A. E.* Effective Field Theories. World Sci., 2016.

15. *Meißner U.-G., Rusetsky A.* Effective Field Theories. Cambridge Univ. Press, 2022.
16. *Boos E. E.* The SMEFT Formalism: The Basis for Finding Deviations from the Standard Model // Phys. Usp. 2022. V. 65, No. 7. P. 653–676.
17. *Falkowski A.* Lectures on SMEFT // Eur. Phys. J. C. 2023. V. 83. Art. 656.
18. *Weinberg S.* Baryon- and Lepton-Nonconserving Processes // Phys. Rev. Lett. 1979. V. 43, No. 21. P. 1566–1570.
19. *Minkowski P.* $\mu \to e\gamma$ at a Rate of One Out of 10^9 Muon Decays? // Phys. Lett. B. 1977. V. 67, No. 4. P. 421–428.
20. *Gell-Mann M., Ramond P., Slansky R.* Complex Spinors and Unified Theories // Conf. Proc. C. 1979. V. 790927. P. 315–321; arXiv:1306.4669 [hep-th].
21. *Yanagida T.* Horizontal Gauge Symmetry and Masses of Neutrinos // Prog. Theor. Phys. 1980. V. 64, No. 3. P. 1103–1105.
22. *Glashow S. L.* The Future of Elementary Particle Physics // Quarks and Leptons / Ed. by M. Lévy et al. Boston, MA: Springer, 1980. P. 687–713.
23. *Mohapatra R. N., Senjanović G.* Spontaneous Parity Nonconservation // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 44, No. 14. P. 912–915.
24. *Ma E.* Pathways to Naturally Small Neutrino Masses // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81, No. 6. P. 1171–1174; arXiv:hep-ph/9805219.
25. *Xing Z.-Z., Zhou S.* Neutrinos in Particle Physics, Astronomy and Cosmology. Zhejiang Univ. Press; Springer, 2011.
26. *Попов В. Н.* Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976.
27. *Broncano A., Gavela M. B., Jenkins E.* The Effective Lagrangian for the Seesaw Model of Neutrino Mass and Leptogenesis // Phys. Lett. B. 2003. V. 552, No. 3–4. P. 177–184; Erratum // Phys. Lett. B. 2006. V. 636, No. 6. P. 330–331; arXiv:hep-ph/0210271v2.
28. *Dreiner H. K., Haber H. E., Martin S. P.* Two-Component Spinor Techniques and Feynman Rules for Quantum Field Theory and Supersymmetry // Phys. Rep. 2010. V. 494, No. 5. P. 1–196; arXiv:0812.1594v6 [hep-ph].
29. *Chen S.-P., Gu P.-H.* Undemocratic Dirac Seesaw // Nucl. Phys. B. 2022. V. 985. Art. 116028; arXiv:2210.05307 [hep-ph].
30. *Altarelli G., Feruglio F.* Models of Neutrino Masses and Mixings // New J. Phys. 2004. V. 6, No. 1. Art. 106; arXiv:hep-ph/0405048v2.
31. *Ченг Т.-П., Ли Л.-Ф.* Калибровочные теории в физике элементарных частиц. М.: Мир, 1987.
32. *Centelles Chuliá S., Ma E., Srivastava R., Valle J. W. F.* Dirac Neutrinos and Dark Matter Stability from Lepton Quarticity // Phys. Lett. B. 2017. V. 767. P. 209–213; arXiv:1606.04543v1 [hep-ph].
33. *Исаев А. П., Рубаков В. А.* Теория групп и симметрий: Конечные группы. Группы и алгебры Ли. М.: URSS, 2018.
34. *Mohapatra R. N., Smirnov A. Y.* Neutrino Mass and New Physics // Ann. Rev. Nucl. Part. Phys. Sci. 2006. V. 56. P. 569–628; arXiv:hep-ph/0603118.
35. *Deppisch F. F., Desai N., Gonzalo T. E.* Compressed and Split Spectra in Minimal SUSY $SO(10)$ // Front. Phys. 2014. V. 2. Art. 00027; arXiv:1403.2312 [hep-ph].

36. *Fu B., King S. F., Marsili L., Pascoli S., Turner J., Zhou Y.-L.* A Predictive and Testable Unified Theory of Fermion Masses, Mixing and Leptogenesis // JHEP. 2022. V. 2022, No. 11. Art. 072; arXiv:2209.00021v3 [hep-ph].
37. *Cirigliano V. et al.* Neutrinoless Double Beta Decay: A Roadmap for Matching Theory to Experiment. arXiv:2203.12169 [hep-ph].
38. *Ali A., Borisov A. V., Zamorin N. B.* Majorana Neutrinos and Same-Sign Dilepton Production at LHC and in Rare Meson Decays // Eur. Phys. J. C. 2001. V. 21, No. 1. P. 123–132.
39. *Ali A., Borisov A. V., Sidorova M. V.* Majorana Neutrinos in Rare Meson Decays // Phys. Atom. Nucl. 2006. V. 69, No. 3. P. 475–484.
40. *Ali A., Borisov A. V., Zhuridov D. V.* Heavy Majorana Neutrinos in Dilepton Production in Deep-Inelastic Lepton–Proton Scattering // Phys. Atom. Nucl. 2005. V. 68, No. 12. P. 2061–2067.
41. *Горбунов Д. С., Рубаков В. А.* Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва. 3-е изд. М.: ЛЕНАНД, 2016.
42. *Asaka T., Blanchet S., Shaposhnikov M.* The νMSM, Dark Matter and Neutrino Masses // Phys. Lett. B. 2005. V. 631, No. 4. P. 151–156; arXiv:hep-ph/0503065.
43. *Canetti L., Drewes M., Frossard T., Shaposhnikov M.* Dark Matter, Baryogenesis and Neutrino Oscillations from Right-Handed Neutrinos // Phys. Rev. D. 2013. V. 87, No. 9. P. 093006-1–093006-36; arXiv:1208.4607v2 [hep-ph].
44. *Новожилов Ю. В.* Введение в теорию элементарных частиц. М.: Наука, 1972.
45. *Исаев А. П., Рубаков В. А.* Теория групп и симметрий. Кн. 2: Представления групп Ли и алгебр Ли. Приложения. М.: КРАСАНД, 2020.
46. *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Квантовая электродинамика. 4-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
47. *Mohapatra R. N., Pal P. B.* Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics. 3rd ed. World Sci., 2004.
48. *Bilenky S. M.* Neutrino Majorana. arXiv.hep-ph/0605172.
49. *Anamiati G., De Romeri V., Hirsch M., Ternes C. A., Tórtola M.* Quasi-Dirac Neutrino Oscillations at DUNE and JUNO // Phys. Rev. D. 2019. V. 100, No. 3. P. 035032-1–035032-12; arXiv:1907.00980 [hep-ph].