

# АДРОННЫЙ ВКЛАД РАССЕЯНИЯ СВЕТА НА СВЕТЕ В СВЕРХТОНКОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ В МЮОНИИ

*В. И. Коробов*<sup>1,2</sup>, *Ф. А. Мартыненко*<sup>2</sup>, *А. П. Мартыненко*<sup>2</sup>,  
*А. В. Эскин*<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup>Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

<sup>2</sup>Самарский национальный исследовательский университет, Самара, Россия

Вычислен вклад адронного рассеяния света на свете в сверхтонкое расщепление основного состояния мюония. Квазипотенциал взаимодействия мюона и электрона выражается в терминах формфактора перехода двух виртуальных фотонов в мезон. Учтены вклады псевдоскалярных, псевдовекторных, скалярных и тензорных мезонов.

The contribution of hadronic scattering of light by light to the ground state hyperfine splitting of muonium is calculated. The quasipotential of interaction between a muon and an electron is expressed in terms of the factor of the transition of two virtual photons to a meson. The contributions of pseudoscalar, axial vector, scalar and tensor mesons are taken into account.

PACS: 36.10.Dg; 12.20.Ds; 14.40.Aq; 12.40.Vv

## ВВЕДЕНИЕ

Электромагнитные двухчастичные связанные состояния позволяют проверить одну из наиболее успешных теорий взаимодействия частиц — квантовую электродинамику. Теоретические расчеты энергетических уровней простейших связанных состояний в квантовой электродинамике достигли очень высокой точности [1–3]. Но поскольку точность экспериментального изучения энергетических уровней в последние десятилетия неуклонно растет, это привело к необходимости изучения не только электромагнитных вкладов высоких порядков, но и вкладов слабых и сильных взаимодействий в энергетический спектр таких систем. Например, вклад адронной вакуумной поляризации уже достиг уровня экспериментальной проверки в аномальном магнитном моменте мюона, сверхтонком расщеплении в мюонии, в лэмбовском сдвиге и сверхтонкой структуре мюонного водорода.

Изучение тонкой и сверхтонкой структуры (СТС) мюония на протяжении десятилетий занимало центральное место в квантовой элек-

---

\* E-mail: [eskin1992@gmail.com](mailto:eskin1992@gmail.com)

тродинамике связанных состояний, поскольку в этой чисто лептонной системе различных лептонов отсутствуют эффекты структуры ядра, которые всегда дают основную теоретическую неопределенность в спектре энергии [1–3]. В последние годы начались новые, более точные экспериментальные исследования, связанные с мюонием. Коллаборация Mu-MASS (Muonium laser Spectroscopy) стремится измерить переход  $1S-2S$  в мюонии с неопределенностью 10 кГц, что обеспечивает 1000-кратное улучшение точности [4]. Новый результат измерения лэмбовского сдвига  $n = 2$  в мюонии на порядок превосходит предыдущее измерение [5]. Коллаборация MuSEUM (Muonium Spectroscopy Experiment Using Microwave) выполнила новое прецизионное измерение сверхтонкой структуры основного состояния мюония в J-PARC с использованием высокоинтенсивного импульсного мюонного пучка [6]. Точность экспериментального результата в [6] составляет 4 кГц и все еще меньше точности предыдущего эксперимента 1999 г. [7]:

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{Mu}}^{\text{hfs}} &= 4463302765(53) \text{ Гц (12 ppb) [9],} \\ \Delta E_{\text{Mu}}^{\text{hfs}} &= 4463302(4) \text{ кГц (0,9 ppm) [8].}\end{aligned}\tag{1}$$

Эксперименты с мюонием позволяют получить более точное отношение масс  $m_\mu/m_e$ , выполнить проверку Стандартной модели с большей точностью и, возможно, выявить источник ранее неучтенного взаимодействия между частицами, образующими связанное состояние. Согласно работе [8] теория предсказывает  $\nu_{\text{hfs}} = 4463302872(515)$  Гц,  $\delta = 1,3 \cdot 10^{-7}$ , где большая часть неопределенности (511 Гц) определяется отношением  $m_\mu/m_e$  (120 ppb). Целью коллаборации MuSEUM является измерение сверхтонкого расщепления основного состояния мюония с точностью 1 ppb [9].

Целью данной работы является расчет одной из поправок в СТС мюония — адронного вклада рассеяния света на свете. Хотя возможная величина вклада порядка  $m_e^3 \alpha^7 / \Lambda^2 h \sim 0,04$  Гц, где  $\Lambda$  — типичная масса адрона порядка 1 ГэВ, меньше точности эксперимента, ее точное вычисление представляет интерес при получении полной величины СТС мюония. В случае мюонного водорода адронные эффекты рассеяния света на свете оказываются весьма существенными как в лэмбовском сдвиге, так и в сверхтонком расщеплении [10–12].

## ОБЩИЙ ФОРМАЛИЗМ

Рассмотрим метод расчета адронного вклада, связанного с обменом аксиальным векторным мезоном. Взаимодействие двух виртуальных фотонов, исходящих из одной лептонной линии (вертикальный обмен), приводит к образованию обменного мезона. Вершина взаимодействия  $\gamma^* \gamma^* AV$  параметризуется следующим образом [10]:

$$T^{\mu\nu}(k_1, k_2) = 4\pi i \alpha \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (k_1^\alpha k_2^\beta - k_2^\alpha k_1^\beta) \varepsilon_A^\beta A(t^2, k_1^2, k_2^2),\tag{2}$$

где  $k_1 = k$ ,  $k_2 = t - k$  — 4-импульсы виртуальных фотонов;  $t = p_1 - q_1 = (0, \mathbf{t})$  — 4-импульс мезона;  $p_1, p_2$  — 4-импульсы электрона и мюона в начальном состоянии;  $q_1, q_2$  — 4-импульсы электрона и мюона в конечном состоянии;  $M_A$  — масса псевдовекторного мезона. При построении сверхтонкой части потенциала используются проекционные операторы  $\hat{\Pi}$  на состояния с определенным спином, как в [10–12]. Тогда выражение для амплитуды взаимодействия примет вид

$$i\mathcal{M}^c = \frac{\alpha^2 (Z\alpha)^2}{16m_1^2 m_2^2} \int \frac{d^4 k}{\pi^2} \frac{A(t^2, k_1^2, k_2^2)}{(k^2)^2} \int \frac{d^4 r}{\pi^2} \frac{A(t^2, r_1^2, r_2^2)}{(r^2)^2} \frac{\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta - k_2^\alpha k_1^\beta}{k^2 - 2k_0 m_1} \times \\ \times \frac{\varepsilon_{\sigma\lambda\rho\omega} r_1^\rho r_2^\omega - r_2^\rho r_1^\omega}{r^2 - 2r_0 m_2} D^{\beta\omega}(t) \text{Tr} \left[ (\hat{q}_1 + m_1) \gamma^\nu (\hat{p}_1 - \hat{k} + m_1) \gamma^\mu (\hat{p}_1 + m_1) \times \right. \\ \left. \times \hat{\Pi}_{S=1,0}(\hat{p}_2 - m_2) \gamma^\sigma (\hat{r}_1 - p_2 + m_2) \gamma^\lambda (\hat{q}_2 - m_2) \hat{\Pi}_{S=1,0} \right] D^{\beta\omega}(t), \quad (3)$$

где  $m_1, m_2$  — массы электрона и мюона соответственно;  $k_1 = k$ ,  $k_2 = t - k$  — 4-импульсы фотонов в одной петле;  $r_1 = k$ ,  $r_2 = t - r$  — 4-импульсы фотонов в другой петле;  $D^{\beta\omega}(t)$  — пропагатор аксиального векторного мезона. В лидирующем порядке по  $\alpha$  вычисление следа в числителе амплитуды дает

$$N_{AV}^{(1)} = \frac{1}{3} k^2 r^2 \mathbf{k}^2 \mathbf{r}^2. \quad (4)$$

В результате всех преобразований вклад в потенциал взаимодействия электрона и мюона в импульсном представлении определяется следующим выражением:

$$\Delta V^c(\mathbf{t}) = -\frac{64}{9} \frac{\alpha^2 (Z\alpha)^2}{\mathbf{t}^2 + M_A^2} \int \frac{d^4 k}{\pi^2} A(t^2, k^2, k^2) \frac{2k^2 + k_0^2}{k^2(k^2 - 2m_1 k_0)} \times \\ \times \int \frac{d^4 r}{\pi^2} A(t^2, r^2, r^2) \frac{2r^2 + r_0^2}{r^2(r^2 - 2m_2 r_0)}. \quad (5)$$

Чтобы выполнить интегрирование по импульсам  $k, r$ , необходимо знать формфактор перехода  $A(t^2, k^2, k^2)$  мезона  $1^{++}$  в два фотона. Для псевдовекторных мезонов имеется ряд экспериментальных данных в [13] (см. также другие ссылки в [10]), а для других легких мезонов — в [14–16]. Используя эти и другие экспериментальные данные, можно параметризовать формфактор перехода в виде

$$A(M_A^2, k^2, k^2) = A(M_A^2, 0, 0) F_{AV}(k^2), \quad F_{AV}(k^2) = \frac{\Lambda^8}{(\Lambda^2 - k^2)^4}. \quad (6)$$

Для учета эффекта немассовости обменного мезона  $f_1$  используется экспоненциальный фактор, как в [10–12]:

$$\frac{A(t^2, 0, 0)}{A(M_A^2, 0, 0)} \approx \exp\left(\frac{t^2 - M_A^2}{M_A^2}\right), \quad (7)$$

который дает множитель  $\sim e^{-1}$  при  $t^2 \approx 0$ . Значения формфактора перехода при нулевых импульсах получаются на основе экспериментальных данных [13–16].

Использование дипольной параметризации (6) позволяет провести аналитическое интегрирование в евклидовом импульсном пространстве:

$$I_e = \int d^4k \frac{2k^2 + k_0^2}{k^2(k^2 - 2k_0m_1)} \frac{\Lambda^8}{(k^2 - \Lambda^2)^4} = - \int_0^\infty dk^2 L_e(k^2) A(0, k^2, k^2) =$$

$$= - \frac{\pi^2 \Lambda_A^2}{4(1 - a_e^2)^{5/2}} \left[ 3\sqrt{1 - a_e^2} - a_e^2(5 - 2a_e^2) \ln \frac{1 + \sqrt{1 - a_e^2}}{a_e} \right], \quad (8)$$

$$L_e(k^2) = \frac{\pi^2}{8m_1^4} \left[ k^2(k^2 - 6m_1^2) - (k^2 - 8m_1^2) \sqrt{k^2(k^2 + 4m_1^2)} \right], \quad a_e = \frac{2m_1}{\Lambda}. \quad (9)$$

Для мюонной линии интеграл  $I_\mu$  получается при замене  $m_1 \rightarrow m_2$  в (9). Тогда вклад рассматриваемого механизма обмена в СТС мюония определяется формулой

$$\Delta E_{AV,1}^{\text{hfs}}(1S) = - \frac{64\alpha^2 (Z\alpha)^5 \mu^3 A(0, 0, 0)^2}{9\pi M_A^2 \left(1 + \frac{2W}{M_A}\right)^2} I_e I_\mu. \quad (10)$$

Для численной оценки вклада мы рассматривали три аксиальных векторных мезона с массами 1285, 1260 и 1420 МэВ (таблица).

Существует еще один вклад аксиальных векторных мезонов, когда один фотон испускается с электронной линии, а второй — с мюонной (горизонтальный обмен). Имеются две таких амплитуды с прямыми и перекрестными фотонами [17]. В этом случае использование проекционных операторов на связанные состояния частиц с определенным спином 0 и 1 также позволяет свести расчет к общему следу от дираковских факторов в числителе, который примет вид

$$N_{AV}^{(2)} = (k_1^2 k_2^4 + k_2^2 k_1^4)(2 \cos \Omega + \cos \psi_1 \cos \psi_2) - k_1^3 k_2^3 (1 + 3 \cos^2 \Omega + \cos^2 \psi_1 + \cos^2 \psi_2), \quad \cos \Omega = \cos \psi_1 \cos \psi_2 + \sin \psi_1 \sin \psi_2 \cos \theta. \quad (11)$$

Домножая прямую амплитуду на  $k_2^2 + 2k_2^0 m_2$ , а перекрестную амплитуду на  $k_2^2 - 2k_2^0 m_2$ , получим суммарный вклад от горизонтального

**Вклад различных мезонов в СТС мюония. Верхнее значение в графе соответствует вертикальному обмену, а нижнее — горизонтальному**

Мезон	Масса, МэВ	$I^G(J^{PC})$	$\Lambda$ , МэВ	$A(M^2, 0, 0)$	$\Delta E^{\text{hfs}}(1S)$ , Гц
$f_1$	1281,9	$0^+(1^{++})$	1040	0,266 $\Gamma_{\text{ЭВ}}^{-2}$	-0,00028 -0,00053
$a_1$	1260	$1^-(1^{++})$	1040	0,160 $\Gamma_{\text{ЭВ}}^{-2}$	-0,00011 -0,00020
$f_1$	1426,3	$0^+(1^{++})$	926	0,193 $\Gamma_{\text{ЭВ}}^{-2}$	-0,00007 -0,00015
$\sigma$	550	$0^+(0^{++})$	2000	-0,596 $\Gamma_{\text{ЭВ}}^{-1}$	0 0,02701
$f_0$	980	$0^+(0^{++})$	2000	-0,085 $\Gamma_{\text{ЭВ}}^{-1}$	0 0,00023
$a_0$	980	$1^-(0^{++})$	2000	-0,086 $\Gamma_{\text{ЭВ}}^{-1}$	0 0,00023
$f_0$	1370	$0^+(0^{++})$	2000	-0,036 $\Gamma_{\text{ЭВ}}^{-1}$	0 0,00002
$\pi^0$	134,9768	$1^-(0^{-+})$	770	0,025 $\Gamma_{\text{ЭВ}}^{-1}$	0 -0,00135
$\eta$	547,862	$0^+(0^{-+})$	774	0,024 $\Gamma_{\text{ЭВ}}^{-1}$	0 -0,00019
$\eta'$	957,78	$0^+(0^{-+})$	859	0,031 $\Gamma_{\text{ЭВ}}^{-1}$	0 -0,00013
$f_2$	1275,4	$0^+(2^{++})$	2000	0,498	0 0,00006
Суммарный вклад	0,0245 Гц				

обмена. После перехода в евклидово пространство  $k_1$  и  $k_2$  второй вклад  $AV$ -мезонов в СТС мюония можно представить следующим выражением:

$$\Delta E_{AV,2}^{\text{hfs}} = \frac{16\alpha^2(Z\alpha)^5\mu^3\Lambda^2}{3\pi} \int_0^\infty dk_1 \int \frac{d\Omega_1}{\pi^2} \int_0^\infty dk_2 \int \frac{d\Omega_2}{\pi^2} \frac{A(M_A^2, k_1^2, k_2^2)}{k_1^2 + a_e^2 \cos^2 \psi_1} \times$$

$$\times \frac{A(M_A^2, k_1^2, k_2^2)}{k_2^2 + a_\mu^2 \cos^2 \psi_2} \frac{N_{AV}^{(2)}}{k_1^2 + k_2^2 + 2k_1k_2 \cos \Omega + \frac{M_A^2}{\Lambda^2}}, \quad (12)$$

где  $d\Omega_1 = 2\pi \sin^2 \psi_1 \sin \theta d\theta d\psi_1$ ,  $d\Omega_2 = 4\pi \sin^2 \psi_2 d\psi_2$ . Дальнейшее численное интегрирование в этих формулах дает результаты, представленные в таблице.

Наряду с обменом псевдовекторными мезонами имеются и другие вклады, в которых в качестве обменного мезона выступают легкие скалярные, псевдоскалярные и тензорные мезоны. В целом техника расчета таких вкладов аналогична представленной для псевдовекторного мезона, но имеется и различие, обусловленное структурой вершинных функций, определяющих переход двух фотонов в мезон [10–12]. Результаты расчета вкладов всех мезонов в СТС мюония представлены в таблице. Мы учитывали вклад таких же мезонов, как и при вычислении СТС в мюонном водороде [10–12].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теоретические расчеты поправок порядка  $\alpha^7$ ,  $\alpha^8$  не прекращались в течение двух десятилетий после последнего самого точного эксперимента [1–3, 8]. Планируемый в [6] резкий рост точности измерения СТС в мюонии требует анализа всех возможных поправок порядка 1 Гц, учета вклада сильных и слабых взаимодействий. Данная работа посвящена вычислению одного из таких вкладов — адронного рассеяния света на свете.

По сравнению с работами [17, 18] выполненный в данной работе расчет является наиболее полным, так как в нем учитывались вклады как горизонтальных, так и вертикальных обменов, а в число обменных мезонов были включены не только псевдоскалярные мезоны, но также скалярные, аксиальные векторные и тензорные мезоны. Существенным элементом расчета было использование монополюсной параметризации формфактора перехода фотонов в мезон по импульсу каждого виртуального фотона. Численное значение параметра  $A(M^2, 0, 0)$  определяется шириной распада соответствующего мезона на два фотона. Анализ доступных экспериментальных данных по ширине распада показывает, что точность их измерения не является высокой в настоящее время, особенно для скалярных мезонов. Поэтому результаты расчетов в таблице необходимо рассматривать для таких мезонов как приближенную оценку вклада. Для тех мезонов, для которых величина  $\Gamma_{\gamma\gamma}$  пока не фиксирована, а имеется ряд экспериментальных значений, выбиралось среднее значение для ширины. Погрешность при вычислении вклада аксиальных векторных мезонов составляет около 30%, а для  $\sigma$ -мезона — не менее 50%.

Результаты для вкладов псевдоскалярных мезонов улучшают предыдущие расчеты [17] за счет более точного численного интегрирования. Сама расчетная формула (12) представлена так, что учитывает одновременно вклады прямой и перекрестной диаграмм с горизонтальным обменом. Численно вклады  $\pi$ -,  $\eta$ -,  $\eta'$ -мезонов являются очень значимыми. Аксиальные векторные мезоны дают вклады от амплитуд и горизонтального, и вертикального типа. Отличие наших численных вкладов псевдовекторных мезонов от работы [18] состоит, по нашему мнению,

в том, что мы учитываем дополнительный фактор немассового подавления (7). Общий знак суммарного вклада оказался положительным благодаря вкладу скалярных мезонов, хотя вклады псевдоскалярных и псевдовекторных мезонов являются отрицательными. Полученное полное значение поправки 0,0245 Гц можно рассматривать как оценку адронного вклада.

Авторы благодарны А. Е. Раджабову и А. С. Жевлакову за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «Базис» (грант № 22-1-1-23-1).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eides M. I., Grotch H., Shelyuto V. A.* Theory of Light Hydrogenlike Atoms // Phys. Rep. 2001. V. 342. P. 63–261.
2. *Eides M. I., Shelyuto V. A.* Two-Loop Electron Factor Contribution to Lamb Shift in Muonium and Positronium // Phys. Lett. B. 2023. V. 844. P. 138087.
3. *Karshenboim S. G., Korzinin E. Yu.* Theoretical Prediction for the Muonium Hyperfine-Structure Interval and Its Accuracy // Phys. Rev. A. 2021. V. 103. P. 022805.
4. *Crievelli P.* The Mu-MASS (Muonium Laser Spectroscopy) Experiment // Hyp. Int. 2018. V. 239. P. 49.
5. *Ohayon B., Janka G., Cortinovis I. et al.* Precision Measurement of the Lamb Shift in Muonium // Phys. Rev. Lett. 2022. V. 128. P. 011802.
6. *Kanda S., Fukao Y., Ikedo Y.* New Precise Spectroscopy of the Hyperfine Structure in Muonium with a High-Intensity Pulsed Muon Beam // Phys. Lett. B. 2021. V. 815. P. 136154.
7. *Liu W., Boshier M. G., Dhawan S., van Dyck O., Egan P., Fei X. et al.* High Precision Measurements of the Ground State Hyperfine Structure Interval of Muonium and of the Muon Magnetic Moment // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82. P. 711.
8. *Eides M.* Hyperfine Splitting in Muonium: Accuracy of the Theoretical Prediction // Phys. Lett. B. 2019. V. 795. P. 113–116.
9. *Iwai R., Abe M., Fukumura S. et al.* Precise Measurement of the Hyperfine Splitting in Muonium with a High Intensity Pulsed Muon Beam at J-PARC // J. Phys.: Conf. Ser. 2023. V. 2462. P. 012019.
10. *Dorokhov A. E., Kochelev N. I., Martynenko A. P., Martynenko F. A., Radzhabov A. E.* The Contribution of Axial-Vector Mesons to Hyperfine Structure of Muonic Hydrogen // Phys. Lett. B. 2018. V. 776. P. 105–110.
11. *Dorokhov A. E., Kochelev N. I., Martynenko A. P., Martynenko F. A., Faustov R. N.* The Contribution of Pseudoscalar Mesons to Hyperfine Structure of Muonic Hydrogen // Phys. Part. Nucl. Lett. 2017. V. 14. P. 857–864.
12. *Dorokhov A. E., Martynenko A. P., Martynenko F. A., Radzhabov A. E.* The Contribution of the Sigma-Meson to the Lamb Shift of Muonic Hydrogen // Phys. Part. Nucl. Lett. 2019. V. 16. P. 520–523.
13. *Achard P. et al. (L3 Collab.).* Study of Resonance Formation in the Mass Region 1400–1500 MeV through the Reaction  $\gamma\gamma \rightarrow K_S^0 K^\pm \pi^\pm$  // JHEP. 2007. V. 03. P. 018.

14. *Gronberg J. et al. (CLEO Collab.)*. Measurements of the Meson–Photon Transition Form Factors of Light Pseudoscalar Mesons at Large Momentum Transfer // *Phys. Rev. D*. 1998. V. 57. P. 33.
15. *Lees J. P. et al. (BaBar Collab.)*. Measurement of the  $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \eta'$  Transition Form Factor // *Phys. Rev. D*. 2018. V. 98. P. 112002.
16. *Uehara S. et al. (Belle Collab.)*. Measurement of  $\gamma\gamma^* \rightarrow \pi^0$  Transition Form Factor at Belle // *Phys. Rev. D*. 2012. V. 86. P. 092007.
17. *Faustov R. N., Martynenko A. P.* Pseudoscalar Pole Terms Contributions to Hadronic Light-by-Light Corrections to the Muonium Hyperfine Splitting // *Phys. Lett. B*. 2002. V. 541. P. 135–141.
18. *Karshenboim S. G., Shelyuto V. A., Vainshtein A. I.* Hadronic Light-by-Light Scattering in Muonium Hyperfine Splitting // *Phys. Rev. D*. 2008. V. 78. P. 065036.