

# ИЗЛУЧЕНИЕ, СОПРОВОЖДАЮЩЕЕ ЭФФЕКТ ШВИНГЕРА В ГРАФЕНЕ

*С. А. Смолянский* \*, *В. В. Дмитриев* \*\*, *Д. В. Чурочкин*,  
*В. А. Церюпа*

Саратовский национальный государственный университет  
им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

Исследуется квазиклассическое и квантовое излучение, сопровождающее образование электрон-дырочной плазмы в графене под действием сильного электромагнитного поля (эффект Заутера–Швингера). Теория квазиклассического излучения плазменных токов безмассовых частиц с большой степенью точности воспроизводит спектр внешнего поля, в то время как спектр квантового излучения значительно шире. Это позволяет провести экспериментальную проверку теории.

We investigate the quasiclassical and quantum radiation accompanying creation of the electron-hole plasma (EHP) in the graphene under the action of a strong electromagnetic field (Sauter–Schwinger effect). The theory quasiclassical radiation of the plasma currents by virtue of massless particles reproduces with a high degree of precision the spectrum of the external field, whereas the spectrum of the quantum radiation is sufficiently wide. This allows us to carry out experimental verification of the theory.

PACS: 81.05.ue; 71.35.Ee; 73.50.Fq

## ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальное изучение эффекта Заутера–Швингера вакуумного рождения частиц под действием сильного электромагнитного поля является сложной задачей как в квантовой электродинамике (КЭД) сильного поля (например, [1]), так и в физике высоких энергий (см. обзор [2]). По сравнению с такими системами графен представляет собой реальный материал, который подходит для экспериментальных исследований и описывается безмассовой двумерной моделью квантового поля [3]. Эта модель неаналитична по константе связи, что объединяет ее с КЭД сильного поля.

В настоящей работе мы сравниваем квазиклассическое излучение (ККИ) плазменных токов с квантовым излучением (КИ) в аннигиляци-

---

\* E-mail: smol@sgu.ru

\*\* E-mail: dmitrievvv@sgu.ru

онном канале электрон-дырочно-фотонного взаимодействия. Мы показываем, что внутренний плазменный ток с большой степенью точности воспроизводит спектр внешнего поля, в то время как спектр КИ значительно шире и не маскируется внешним полем, что позволяет проверить теоретические предсказания.

## 1. ПРОБЛЕМА ОБРАТНОЙ РЕАКЦИИ

Основное кинетическое уравнение (КУ) в графене в приближении самосогласованного поля было получено в непертурбативном базисе в работе [4] по аналогии с электрон-позитронной плазмой в КЭД сильного поля (см., например, [5]).

В этих работах эффективное электрическое поле с векторным потенциалом  $A^{(k)}(t)$ ,  $k = 1, 2$ , и напряженностью поля  $E^{(k)}(t) = -(1/c)\dot{A}^{(k)}(t)$  предполагается пространственно-однородным и зависящим от времени. В общем случае оно состоит из внешнего и внутреннего (плазменного) полей:

$$A^{(k)}(t) = A_{\text{ex}}^{(k)}(t) + A_{\text{in}}^{(k)}(t). \quad (1)$$

Для оценки эффективности создания электрон-дырочной плазмы (ЭДП) достаточно использовать приближение внешнего поля  $E(t) = E_{\text{ex}}(t)$ , в то время как самосогласованное описание колебаний плазмы нуждается в использовании полного поля.

Основное КУ описывает возбуждения в графене в терминах квазичастиц с квазиэнергией  $\varepsilon(\mathbf{p}, t) = v_F \sqrt{P^2}$  и квазиимпульсом  $P^{(k)} = p^{(k)} - (e/c)A^{(k)}(t)$  с помощью функции распределения  $f(\mathbf{p}, t)$ . Это КУ учитывает условие электронейтральности электронной и дырочной подсистем  $f(\mathbf{p}, t) = f_e(\mathbf{p}, t) = f_h(-\mathbf{p}, t)$  и может быть записано также в форме интегриродифференциального уравнения немарковского типа

$$\dot{f}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \lambda(\mathbf{p}, t) \int_{t_0}^t dt' \lambda(\mathbf{p}, t') [1 - 2f(\mathbf{p}, t')] \cos \theta(\mathbf{p}; t, t') \quad (2)$$

или в эквивалентной форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{f}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \lambda(\mathbf{p}, t) u(\mathbf{p}, t), \quad (3)$$

$$\dot{u}(\mathbf{p}, t) = \lambda(\mathbf{p}, t) [1 - 2f(\mathbf{p}, t)] - \frac{2\varepsilon(\mathbf{p}, t)}{\hbar} v(\mathbf{p}, t), \quad \dot{v}(\mathbf{p}, t) = \frac{2\varepsilon(\mathbf{p}, t)}{\hbar} u(\mathbf{p}, t),$$

где

$$\lambda(\mathbf{p}, t) = \frac{ev_F^2 [E_1(t)P_2 - E_2(t)P_1]}{\varepsilon^2(\mathbf{p}, t)}, \quad (4)$$

$$\theta(\mathbf{p}; t, t') = \frac{2}{\hbar} \int_{t'}^t d\tau \varepsilon(\mathbf{p}, \tau). \quad (5)$$

Здесь  $v_F = 10^6$  м/с — скорость Ферми. Предполагается, что внешнее поле включается в момент времени  $t = t_0$ . Некоторые свойства КУ в форме (2) и (3) и их решения для различных моделей поля обсуждаются в работах [4, 6].

Функция распределения  $f(\mathbf{p}, t)$  позволяет вычислить средние значения физических величин. Например, плотность числа квазичастиц и плотность энергии равны

$$n(t) = 2N_f \int [dp] f(\mathbf{p}, t), \quad (6)$$

$$\mathcal{E}_{\text{eh}}(t) = 2N_f \int [dp] \varepsilon(\mathbf{p}, t) f(\mathbf{p}, t), \quad (7)$$

где  $[dp] = d^2p (2\pi\hbar)^{-2}$  и  $N_f = 4$  — число различных сортов квазичастиц.

Полная плотность тока  $j^{(k)}(t)$  состоит из токов проводимости и поляризации [4]:

$$j^{(k)}(t) = j_{\text{cond}}^{(k)}(t) + j_{\text{pol}}^{(k)}(t), \quad (8)$$

$$j_{\text{cond}}^{(k)}(t) = 2N_f e \int [dp] v_g^{(k)}(\mathbf{p}, t) f(\mathbf{p}, t), \quad (9)$$

$$j_{\text{pol}}^{(k)}(t) = -N_f e \int [dp] v_{\text{pol}}^{(k)}(\mathbf{p}, t) u(\mathbf{p}, t), \quad (10)$$

где

$$v_g^{(k)}(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{p}, t)}{\partial p^{(k)}} = \frac{v_F^2 P^{(k)}}{\varepsilon(\mathbf{p}, t)}, \quad (11)$$

$$v_{\text{pol}}^{(k)}(\mathbf{p}, t) = \varepsilon(\mathbf{p}, t) \frac{\partial \lambda(\mathbf{p}, t)}{\partial E^{(k)}(t)} = \frac{v_F^2}{\varepsilon(\mathbf{p}, t)} \begin{cases} P^{(2)}, & k = 1, \\ -P^{(1)}, & k = 2, \end{cases} \quad (12)$$

при этом  $\mathbf{v}_g \mathbf{v}_{\text{pol}} = 0$ . Токи (9), (10) определяются эффективным полем (1).

Следующий уровень описания учитывает обратную реакцию (ОР), связанную с генерацией внутренних плазменных токов и полей  $E_{\text{in}}^{(k)}(t) = -(1/c) \dot{A}_{\text{in}}^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$ . Проблема возникает на этапе формулирования уравнения Максвелла, где напряженность электрического поля  $E_{\text{in}}^{(k)}$  сопоставляется с плотностью плазменного тока. Предположение о фундаментальности природы стандартной  $D = 3 + 1$  КЭД заставляет ввести некоторую размерную модификацию в динамику графена.

Такого рода видоизменения были предложены в работе [7]. Волновая функция носителей  $\psi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)})$ , размерности  $D = 2 + 1$  модифицировалась до случая  $D = 3 + 1$  пространства-времени по определению как

$$\psi(\mathbf{x}, z; t) = \psi(\mathbf{x}, t) \frac{1}{\sqrt{d}} \varphi(z) e^{ip^{(3)}z/\hbar}, \quad z = x^{(3)}, \quad (13)$$

где  $d \sim 10^{-8}$  см — толщина графенового слоя. Безразмерная функция  $\varphi(z)$  описывает распределение носителей в поперечном направлении и удовлетворяет условиям нормировки и конфайнмента ( $\varphi(z=0, d) = 0$ ). В дальнейшем детали этого распределения игнорируются, так что  $\varphi(z) e^{ip^{(3)}z/\hbar} \rightarrow 1$ , что приводит к модифицированной волновой функции размерности  $D = 3 + 1$ :

$$\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t) = d^{-1/2} \psi(\mathbf{x}, t). \quad (14)$$

Этот результат, в свою очередь, приводит к следующему правилу модификации средних величин типа  $a$ :

$$\langle \tilde{a} \rangle = d^{-1} \langle a \rangle, \quad (15)$$

где  $\langle a \rangle$  соответствует  $D = 2 + 1$  теории.

Теперь мы можем записать уравнение Максвелла для ОР

$$\dot{E}_{\text{in}}^{(k)}(t) = -4\pi \tilde{j}^{(k)}(t) = -4\pi d^{-1} j^{(k)}(t), \quad (16)$$

где плотности токов проводимости и поляризации определены уравнениями (9), (10).

Система КУ (2) (или (3)) и уравнение Максвелла (16) описывают самосогласованную эволюцию ЭДП и внутреннего поля. Здесь мы можем выделить две стадии процессов обратной реакции — возбуждение ЭДП,

которое ограничено периодом действия внешнего поля, и свободная эволюция системы, которая имеет вид периодических самосогласованных плазменных колебаний [4]. Ниже мы исследуем ОР графена в модели поля одиночного гауссова импульса

$$E_{\text{ex}}(t) = E_0 e^{-t^2/2\tau^2}. \quad (17)$$

В случае электрон-позитронной и партонной плазмы механизм ОР был хорошо изучен и описан в большом количестве работ, начиная с [8]. Принципиальная особенность графена — это безмассовость теории. Она

приводит к практически безынерционному ответу системы и резко ослаблению эффекта памяти в кинетическом описании. В результате внутреннее плазменное поле сильно растет и почти компенсирует внешнее поле, так что эффективное поле оказывается сильно подавленным, что ведет к подавлению образования ЭДП.

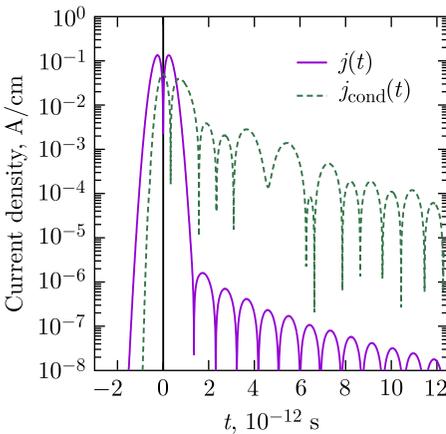


Рис. 1. Плотности тока

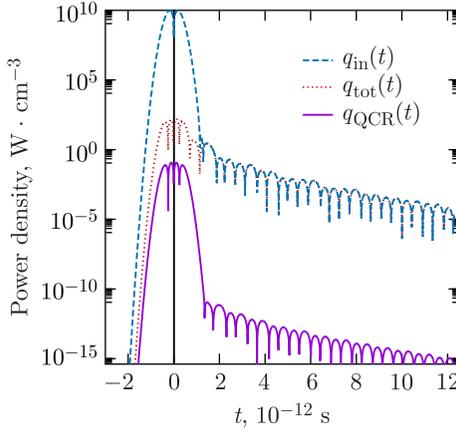


Рис. 2. Плотности мощностей

Эти особенности очень хорошо раскрываются при численном исследовании проблемы ОР в графене. Поведение токов показано на рис. 1: ток проводимости подавлен, ток поляризации доминирует. После выключения внешнего поля появляются колебания плазмы, но они слабо выражены. Мощность внутреннего поля  $q_{in} = E_{in} \dot{E}_{in} / 4\pi$  почти полностью компенсирует мощность внешнего поля (рис. 2). Другими словами, это приводит к истощению ЭДП и внешнего поля.

## 2. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ И КВАНТОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

ККИ во внешних областях относительно плоскости графена определяется внутренними плазменными токами. Плотность мощности этого излучения на большом расстоянии от плоскости графена равна

$$q_{QCR}(t, z) = \frac{\pi}{c^2} \frac{dj^2(t_{ret})}{dt}, \quad (18)$$

где  $t_{ret} = t - z/c$  — время запаздывания и  $\mathbf{j}(t)$  — плотность тока размерности  $D = 2 + 1$  в графене. Как и следовало ожидать, ККИ является относительно слабым (рис. 3).

Взаимодействие ЭДП с фотонным полем генерирует КИ. Соответствующая система КУ для ЭДП и подсистемы фотонов в графене получена в работе [9] на динамической основе по аналогии с кинетической теорией электрон-позитронно-фотонной плазмы в сильном внешнем поле [11].

Ниже рассмотрим только аннигиляционный канал фотонного КУ, дополнительно используя следующие упрощающие допущения: ОР подсистемы фотонов игнорируется в фотонном интеграле столкновений (ИС), и используется приближенное правило суммирования (82) из работы [9]. Появление толщины  $d$  образца графена в полученном ИС вызвано ис-

пользованием того же нормировочного объема  $V = Sd$  в разложении векторного потенциала по плоским волнам (уравнение (6) из [7]), а также в модифицированной волновой функции носителей (13).

При этих предположениях фотонное КУ для функции распределения фотонов  $F(\mathbf{k}, t)$  может быть записано как [9]

$$\dot{F}(\mathbf{k}, t) = \frac{(ev_F)^2}{\hbar c K d} \int \frac{d^2 p}{(2\pi\hbar)^2} \int_{t_0}^t dt' f(\mathbf{p}, t') f(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t') \times \cos \left\{ \frac{1}{\hbar} \int_{t'}^t d\tau [\varepsilon(\mathbf{p}, \tau) + \varepsilon(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, \tau) - c\hbar k] \right\}, \quad (19)$$

где  $K = (k^2 + k^{(3)2})^{1/2}$ . Функция распределения  $f(\mathbf{p}, t)$  рассматривается здесь как решение КУ (2) и, следовательно, обладает конечной асимптотикой в аут-состоянии. КУ (19) имеет ту же структуру, что и КУ (2), и позволяет преобразовать его в соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая удобна для численного исследования.

Спектральная плотность мощности КИ

$$Q_{\text{QR}}(\nu) = \frac{4\pi\hbar}{c^3} \nu^3 \dot{F}(\nu). \quad (20)$$

КИ соответствует моменту времени  $t = 0$  ( $\max A(t)$ ) и направлено вверх и вниз относительно плоскости графена.

Для сравнения полученных результатов характеристик ККИ и КИ на основе кинетической теории с экспериментальными данными [10] выберем параметры внешнего поля в модели (17)  $E_0 = 250$  кВ/см и  $\tau = 246$  фс, которые близки к параметрам поля работы [10].

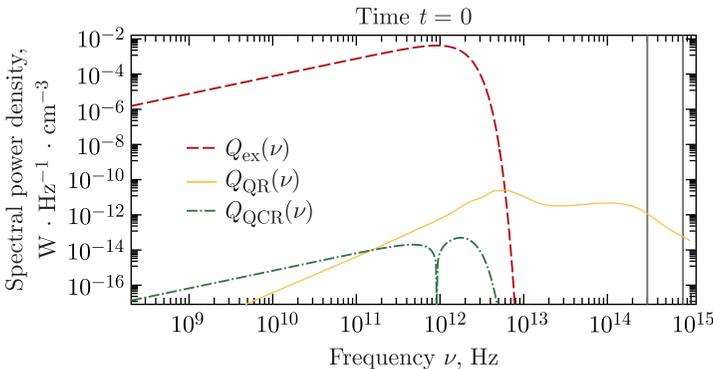


Рис. 3. Спектральные плотности мощности ККИ и КИ

Спектральные плотности мощности ККИ ( $Q_{QCR}$ ) и КИ ( $Q_{QR}$ ) представлены на рис. 3. Поле ККИ имеет узкий спектр с резкой границей в высокочастотной области, тогда как спектр КИ гораздо более широкий и достигает ультрафиолетовой спектральной области. В рассматриваемой ситуации диапазон видимого света достигает только КИ. Этот результат близок к экспериментально наблюдаемому [10].

Отметим, что ситуация, показанная на рис. 3, не является универсальной и может быть очень разной в зависимости от параметров внешнего поля. Представленная теория позволяет делать необходимые предсказания в этих случаях.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как хорошо известно, взаимодействие носителей с электромагнитным полем в графене является неаналитическим уже в области слабых полей (см., например, [12]) и нуждается в непертурбативных методах описания. Одним из таких подходов является кинетика вакуумного рождения частиц, изначально разработанная в рамках абелевой проекции КХД (обзор [2]) и обобщенная на КЭД сильного поля (обзор [5]), и графен [4]. В последнем случае формулировка проблемы ОР требует модификации  $D = 2 + 1$  электродинамики графена на модификацию  $D = 3 + 1$  для восстановления совместимости с КЭД сильного поля. Такое изменение отражается также на описании взаимодействия носителей с квантованным электромагнитным полем, где используется тот же нормировочный объем  $V = Sd$  ( $S$  — площадь поверхности графена, а  $d$  — толщина графенового слоя), что и в ЭДП-подсистеме: термодинамически предельный переход выполняется в окончательных формулах только по площади поверхности  $S$ . Это приводит к зависимости от  $d$  теории на уровне уравнения Максвелла (разд. 1) и ИС в фотонном секторе (разд. 2) в системе КУ электрон-дырочно-фотонной плазмы. Результатом работы являются характеристики ККИ и КИ, доступные для экспериментальных исследований.

Достигнутый уровень понимания процессов излучения в графене создает предпосылки для последующего развития более сложных вариантов теории вакуумного рождения частиц в сильных квазиклассических полях в КЭД (см., в частности, [13, 14]), КХД и в теориях с солитонным типом внешних полей [15].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Abramowicz H. et al. (LUXE Collab.)*. Letter of Intent for the LUXE Experiment. arXiv:1909.00860 [physics].
2. *Vinnik D. V., Mizerny V. A., Prozorkevich A. V., Smolyansky S. A., Toneev V. D.* Kinetic Description of Vacuum Particle Production in Collisions of Ultrarelativistic Nuclei // Phys. At. Nucl. 2001. V. 64. P. 775–786.

3. *Castro Neto A. H., Guinea F., Peres N. M. R., Novoselov K. S., Geim A. K.* The Electronic Properties of Graphene // *Rev. Mod. Phys.* 2009. V. 81. P. 109–162; arXiv:0709.1163 [cond-mat.other].
4. *Smolyansky S. A., Panferov A. D., Blaschke D. B., Gevorgyan N. T.* Kinetic Equation Approach to Graphene in Strong External Fields // *Particles*. 2020. V. 3. P. 456–476; arXiv:2004.03759 [physics].
5. *Aleksandrov I. A., Dmitriev V. V., Sevostyanov D. G., Smolyansky S. A.* Kinetic Description of Vacuum  $e^+e^-$  Production in Strong Electric Fields of Arbitrary Polarization // *Eur. Phys. J. Special Topics*. 2020. V. 229. P. 3469–3485; arXiv:2004.02179 [hep-ph].
6. *Blaschke D. B., Dmitriev V. V., Gevorgyan N. T., Mahato B., Panferov A. D., Smolyansky S. A., Tseryupa V. A.* Approximate Solutions of a Kinetic Theory for Graphene // *Springer Proc. Phys.* 2022. V. 281. P. 187–201; arXiv:2201.10594 [cond-mat].
7. *Gavrilov S. P., Gitman D. M.* Photon Emission in the Graphene under the Action of a Quasiconstant External Electric Field // *Eur. Phys. J. Plus*. 2023. V. 138. P. 171; arXiv:2210.03223 [cond-mat].
8. *Bloch J. C. R., Mizerny V. A., Prozorkevich A. V., Roberts C. D., Schmidt S. M., Smolyansky S. A., Vinnik D. V.* Pair Creation: Back Reactions and Damping // *Phys. Rev. D*. 1999. V. 60. P. 116011; arXiv:9907027 [nucl-th].
9. *Gavrilov S., Gitman D., Dmitriev V., Panferov A., Smolyansky S.* Radiation Problems Accompanying Carrier Production by an Electric Field in the Graphene // *Universe*. 2020. V. 6. P. 205; arXiv:2010.10184 [hep-th].
10. *Oladyshkin I. V., Bodrov S. B., Korzhimanov A. V., Murzanev A. A., Sergeev Yu. A., Korytin A. I., Tokman M. D., Stepanov A. N.* Polarized Light Emission from Graphene Induced by Terahertz Pulses // *Phys. Rev. B*. 2022. V. 106. P. 205407; arXiv:2112.05007 [cond-mat].
11. *Blaschke D. B., Dmitriev V. V., Roepke G., Smolyansky S. A.* BBGKY Kinetic Approach for an  $e^-e^+$  Gamma Plasma Created from the Vacuum in a Strong Laser-Generated Electric Field: The One-Photon Annihilation Channel // *Phys. Rev. D*. 2011. V. 84. P. 085028; arXiv:1105.5397 [hep-ph].
12. *Dora B., Moessner R.* Nonlinear Electric Transport in Graphene: Quantum Quench Dynamics and the Schwinger Mechanism // *Phys. Rev. B*. 2010. V. 81. P. 165431; arXiv:0909.2528 [cond-mat].
13. *Smolyansky S. A., Fedotov A. M., Dmitriev V. V.* BBGKY Method in Strong Field QED // *Phys. Part. Nucl.* 2020. V. 51. P. 595–598.
14. *Dmitriev V. V., Smolyansky S. A., Tseryupa V. A.* Analysis of the Third Harmonic of a Vacuum Response in a Subcritical Laser Field // *Phys. At. Nucl.* 2023. V. 86. P. 913–916.
15. *Ahmadiniaz N., Fedotov A. M., Gelfer E. G., Sang Pyo Kim, Schubert C.* Generalized Gelfand–Dikii Equation and Solitonic Electric Fields for Fermionic Schwinger Pair Production // *Phys. Rev. D*. 2023. V. 108. P. 036019; arXiv:2205.15946 [hep-th].