ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2024. Т. 55, вып. 4. С. 1211–1216

НОВЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕТЕ–СОЛПИТЕРА

А. И. Балаберников [1,*], *С. М. Доркин* [2,**], *Л. П. Каптарь* [2,***]

[1] Государственный университет «Дубна», Дубна, Россия
[2] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Исследуется уравнение Бете–Солпитера в координатном представлении, которое имеет вид дифференциального уравнения четвертого порядка для амплитуды Бете–Солпитера. Для модели скалярных частиц, взаимодействующих через обмен скалярной массовой частицей, предложен метод его решения. Находятся константы связи и амплитуды в зависимости от массы связанного состояния. Найденные константы связи сравниваются с полученными в других подходах.

We investigate the solutions of the Bethe–Salpeter equation in coordinate space. The Bethe–Salpeter equation has a form of differential equation of fourth order. Methods of solving of this equation are discussed, and connection between bound state mass and coupling constant is found. The results of calculations are compared to other approaches.

PACS: 11.10.St; 21.45.+v; 24.10.Jv

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Бете–Солпитера [1] имеет давнюю историю. Данное уравнение даже в лестничном приближении оказалось слишком сложным для точного решения. Первая модель, решения для которой были получены численно, появилась только три года спустя. Это модель Вика–Куткоского [2, 3], в которой скалярные частицы взаимодействуют посредством обмена безмассовой скалярной частицей. Хотя эта модель в некотором смысле соответствует атому водорода, тем не менее в ней не учитываются спиновые степени свободы.

Первые реалистические модели, основанные на уравнении Бете–Солпитера для дейтрона, появились в 1980–1990-е гг. Это работы Тьона [4] и Каптаря [5]. А после работы Робертса и соавторов [6], предложивших использовать уравнение Бете–Солпитера для описания π- и K-мезонов как связанных состояний кварков, количество публикаций по расчетам

* E-mail: balabernikov@mail.ru
** E-mail: dorkin@theor.jinr.ru
*** E-mail: kaptari@theor.jinr.ru

характеристик и свойств мезонов резко возросло, что усилило интерес к подходу на основе уравнения Бете–Солпитера. Необходимо отметить работу [7], в которой предложен метод разложения вершинных функций системы скалярных частиц по гиперсферическим гармоникам, который был обобщен и на описание систем спинорных частиц [8].

В настоящее время уравнение Бете–Солпитера применяется для описания адронов (не только мезонов, но и барионов), а также легчайших атомных ядер [9, 10]. В физике адронов существенное значение имеет предположение о взаимодействии кварков внутри адронов. Поскольку это взаимодействие на больших расстояниях неизвестно, то приходится использовать некоторые феноменологические формулы. Имеют место модели двух типов. Исторически первая — это модель Намбу–Иона-Лазинио [11], взаимодействие в которой задается сепарабельным потенциалом. Группа подходов модели второго типа, которая учитывает динамическое нарушение симметрии, оперирует с более сложным феноменологическим взаимодействием.

Уравнение Бете–Солпитера похоже на уравнение Шрёдингера, которое с давних пор использовалось в атомной физике для описания спектра атомов. Эта схожесть породила надежду, что из уравнения Бете–Солпитера в нерелятивистском пределе может быть получено уравнение Шрёдингера, как, например, из уравнения Дирака получается уравнение Паули. Такие попытки неоднократно предпринимались, но убедительного доказательства справедливости такого перехода до сих пор нет.

В то же время исследование простейшего ядра дейтрона, состоящего из протона и нейтрона, показало важность так называемых мезонных обменных токов. Мезоны в дейтроне являются переносчиками нуклон-нуклонных взаимодействий. Оказалось, что эти токи дают существенный вклад в наблюдаемые характеристики дейтрона, например в электромагнитные формфакторы дейтрона, и требуется аккуратный их расчет для описания экспериментальных данных. В теории, основанной на уравнении Бете–Солпитера, эти токи содержатся автоматически, как показано в ряде работ [12]. Иными словами, продемонстрировано, что нерелятивистская редукция уравнения Бете–Солпитера естественно содержит мезонные обменные токи как релятивистские поправки.

Традиционно уравнение Бете–Солпитера решается в импульсном пространстве, в котором задача сводится к решению интегрального уравнения. Новизна этой работы состоит в том, что данное уравнение переводится в координатное представление и в конечном итоге сводится к дифференциальному уравнению.

1. УРАВНЕНИЕ БЕТЕ–СОЛПИТЕРА В КООРДИНАТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Рассмотрим простейшую систему двух скалярных частиц массой m, взаимодействующих через обмен скалярной частицы массой μ. Предполагая лестничное приближение, уравнение Бете–Солпитера в евклидовом пространстве для амплитуды $\Psi(P,p)$ запишем следующим образом:

$$S_1^{-1}(p)\, S_2^{-1}(p)\, \Psi(P,p) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} V(p-k)\Psi(P,k), \tag{1}$$

где $P(p)$ — полный (относительный) импульс системы, а $S_{1(2)}(p)$ — пропагаторы частиц. Уравнение обычно записывают в системе покоя системы $P = (M,\mathbf{0})$

$$V(p-k) = \frac{g^2}{(p-k)^2+\mu^2} \tag{2}$$

с константой связи g, а произведение обратных пропагаторов —

$$S_1^{-1}(k)\, S_2^{-1}(k) = (k^2+\varkappa^2)^2 + M^2k_4^2, \tag{3}$$

где $\varkappa^2 = m^2 - (M^2/4)$.

Амплитуда Бете–Солпитера в координатном пространстве определяется следующим образом:

$$\Psi(P,r) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \mathrm{e}^{-\imath kr}\, \Psi(P,k). \tag{4}$$

Применяя фурье-преобразование к обеим сторонам уравнения (1), можно получить

$$\left[\left(p^2+\varkappa^2\right)^2 + M^2p_4^2\right] \int d^4r\, \mathrm{e}^{\imath pr}\, \Psi(P,r) = \int d^4r\, \mathrm{e}^{\imath pr}\, V(r)\Psi(P,r). \tag{5}$$

В последнем уравнении $V(r)$ означает следующую функцию:

$$V(r) = g^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \mathrm{e}^{-ipr} \frac{1}{p^2+\mu^2} = \frac{g^2}{4\pi^2}\frac{\mu}{r}K_1(\mu r),$$

где K_1 — функция Макдональда первого порядка.

Выражение (3) может быть внесено под интеграл, поэтому уравнение (5) перепишем следующим образом:

$$\left[\left(D^2-\varkappa^2\right)^2 - M^2\frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\right] \Psi(P,r) = V(r)\, \Psi(P,r), \tag{6}$$

где D^2 означает

$$D^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Поскольку $V(r)$ инвариантен относительно вращений в 4-мерном пространстве, введем гиперсферические кординаты r, χ, θ, φ:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin\chi \sin\theta \sin\varphi, \\ x_2 &= r \sin\chi \sin\theta \cos\varphi, \\ x_3 &= r \sin\chi \cos\theta, \\ x_4 &= r \cos\chi. \end{aligned} \tag{7}$$

Выражение для D^2 примет вид

$$D^2 = \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\chi}\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\sin^2\chi\frac{\partial}{\partial\chi}\right) + \\ + \frac{1}{r^2\sin^2\chi}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] = \tag{8}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta, \tag{9}$$

где Δ — часть D^2, зависящая от углов. Гиперсферические гармоники $Z_{klm}(\chi, \theta, \varphi)$ [13] являются собственными функциями оператора Δ:

$$\Delta Z_{klm}(\chi, \theta, \varphi) = -k(k+2) Z_{klm}(\chi, \theta, \varphi), \tag{10}$$

а $\partial/\partial x_4$ в гиперсферических координатах имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_4} = \cos\chi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\chi}{r}\frac{\partial}{\partial\chi}. \tag{11}$$

Функция $\Psi(P, r)$ может быть записана как произведение радиальной и угловых частей, поскольку орбитальный момент (k) есть сохраняющаяся величина:

$$\Psi(P, r) = R(r) Z_{klm}(\chi, \theta, \varphi). \tag{12}$$

.

Подставляя (12) в уравнение (6) и учитывая формулы (10) и (11), можно получить дифференциальное уравнение для функции $R(r)$. В общем случае оно имеет довольно громоздкий вид, однако для $k = 0$ уравнение существенно упрощается:

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \kappa_1^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \kappa_2^2\right) R(r) = V(r) R(r), \\ \kappa_{1,2}^2 = \left(m^2 - \frac{M^2}{8}\right) \pm \frac{M}{2}\sqrt{m^2 - \frac{3}{16}M^2}\,. \end{gathered} \tag{13}$$

Для полноты формально запишем уравнение Шрёдингера в 4-мерном евклидовом пространстве для системы двух частиц с массами m, взаимодействующих через «потенциал» $v(r) = -(1/(m^2\mu))V(r)$. Вводя гиперсферические координаты (7) и разделяя переменные, как в формуле (12) для радиальной функции $R(r)$, можно получить

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{k(k+2)}{r^2} - \kappa^2\right) R(r) = \frac{1}{m^2\mu} V(r)\, R(r), \tag{14}$$

где $\kappa^2 = m(m - (M/2))$. Любопытно то, что дифференциальные операторы в уравнениях (13) и (14) имеют сходную структуру.

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ

Итак, для нахождения связанного состояния в системе двух скалярных частиц необходимо решить дифференциальное уравнение (13). Масса связанного состояния задается, а константу нужно подобрать таким образом, чтобы решение при больших значениях r достаточно быстро убывало. Общее решение может быть записано при $r \to \infty$, т. е. в области, когда $v(r) = 0$. Записывая $R(r) = u(r)/r^j$, можно убедиться, что для $j = 1$ и $v(r) = 0$

$$u(r) = C_1 K_1(\kappa_1 r) + C_2 K_1(\kappa_2 r).$$

Опуская технические детали, приведем результаты расчетов. Они показаны в таблице.

M, ГэВ	g_1^2, ГэВ^2	g_2^2, ГэВ^2
0	331	330
0,5	315	314
1,0	267	261
1,5	181	178
1,9	72	68

В первом столбце таблицы приведена масса связанного состояния, второй столбец содержит константу g^2, найденную решением уравнения Бете–Солпитера в импульсном представлении, а третий — ту же константу, которая получена из решения уравнения Бете–Солпитера в координатном представлении. Видно, что константы, рассчитанные разными методами, совпадают с точностью до нескольких процентов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение кратко перечислим основные результаты работы. Выведено уравнение Бете–Солпитера в координатном представлении. Исследованы его низколежащие решения. Полученные данные согласуются с аналогичными результатами расчетов в других подходах. Метод может быть обобщен на случай системы спинорных частиц. Возможно, в новом подходе удастся исследовать нерелятивистский предел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Salpeter E. E., Bethe H.* A Relativistic Equation for Bound-State Problem // Phys. Rev. 1951. V. 84. P. 1232.
2. *Wick G. C.* Properties of Bethe–Salpeter Wave Functions // Phys. Rev. 1954. V. 96. P. 1124.

3. *Cutkosky R. E.* Solutions of Bethe–Salpeter Equation // Phys. Rev. 1954. V. 96. P. 1135.
4. *Zuilhof M. J., Tjon J. A.* Relativistic Effects in the Two-Nucleon System // Phys. Rev. C. 1981. V. 24. P. 736.
5. *Umnikov A. Yu., Kaptari L. P., Khanna F.* Bethe–Salpeter Amplitudes and Static Properties of the Deuteron // Phys. Rev. C. 1996. V. 54. P. 986.
6. *Maris P., Roberts C. D.* π- and K-Meson Bethe–Salpeter Amplitudes // Phys. Rev. C. 1997. V. 56. P. 3369.
7. *Nieuwenhuis T., Tjon J. A.* $O(4)$ Expansion of the Ladder Bethe–Salpeter Equation // Few Body Syst. 1996. V. 21. P. 167–185.
8. *Dorkin S. M., Beyer M., Semikh S. S., Kaptari L. P.* Two-Fermion Bound States within the Bethe–Salpeter Approach // Few Body Syst. 2008. V. 42. P. 1–32.
9. *Bondarenko S., Burov V., Yurev S.* Relativistic Rank-One Separable Kernel for Helium-3 Charge Form Factor // Nucl. Phys. A. 2020. V. 1004. P. 122065.
10. *Bondarenko S., Burov V., Yurev S.* Trinucleon Form Factors with Relativistic Multirank Separable Kernels // Nucl. Phys. A. 2021. V. 1014. P. 122251.
11. *Blaschke D., Costa P., Kalinovsky Yu. L.* D Mesons at Finite Temperature and Density in the PNJL Model // Phys. Rev. D. 2011. V. 85. P. 034005.
12. *Bondarenko S. G., Burov V. V., Beyer M., Dorkin S. M.* Isovector Meson Exchange Currents in the Bethe–Salpeter Approach // Phys. Rev. C. 1998. V. 58. P. 3143.
13. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions. V. II. New York: McGraw-Hill, 1953.