

ДВОЙНЫЕ ПЕРВИЧНЫЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ: ВЛИЯНИЕ ПУАССОНОВСКОЙ КЛАСТЕРИЗАЦИИ

*В. Стасенко**

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

«Пуассоновский шум» в изначальном пространственном распределении первичных черных дыр (ПЧД) приводит к их активной кластеризации в ранней Вселенной. В рамках простой модели в работе рассматривается внутренняя динамика кластеров, формирование двойных черных дыр и их слияния. Показано, что двойные ПЧД, образующиеся на радиационно-доминированной стадии, значительно возмущаются и вносят субдоминантный вклад в гравитационно-волновые события по сравнению со слияниями ПЧД в кластерах.

Poisson noise in the initial spatial distribution of primordial black holes (PBHs) leads to their active clustering in the early Universe. Using a simple model, the paper examines the internal dynamics of clusters, the formation of binary black holes and their mergers. It is shown that PBHs binaries formed at the radiation-dominated phase are actively perturbed and make a subdominant contribution to gravitational wave events compared to PBHs mergers in clusters.

PACS: 04.25.dg; 95.35.+d

ВВЕДЕНИЕ

Первичные черные дыры могут формироваться при коллапсе флуктуаций плотности большой амплитуды в ранней Вселенной [1, 2]. Существует множество наблюдательных ограничений на их количество во Вселенной [3], однако при массах $m \sim 10^{20} - 10^{24}$ г они все еще способны объяснить всю темную материю (ТМ) [4]. Возросший интерес к ПЧД в последнее время обусловлен наблюдением слияний черных дыр коллаборацией LIGO-Virgo-KAGRA [5]. Двойные ПЧД активно рассматриваются как источник наблюдаемых гравитационно-волновых событий [6, 7].

Наблюдаемый темп слияний черных дыр накладывает ограничения на ПЧД с массой десятки масс Солнца в составе темной материи на уровне $f = \Omega_{\text{bh}}/\Omega_{\text{dm}} \lesssim 10^{-3}$ (где Ω_{bh} и Ω_{dm} — относительные плотности ПЧД и ТМ во Вселенной соответственно), если двойные ПЧД формируются на радиационно-доминированной (РД) стадии [7] (такие двойные мы

* E-mail: vdstasenko@mephi.ru

будем называть «ранними»). Это ограничение подразумевает, что после формирования двойная постепенно закручивается за счет излучения гравитационных волн и в конечном итоге сливается. Однако изначальное пуассоновское распределение ПЧД приводит к их кластеризации и формированию структур темной материи при больших красных смещениях [8]. В кластерах ранние двойные активно возмущаются, уменьшая темп их слияния, что ведет к ослаблению ограничений до $f \lesssim 0,1$ [9, 10].

Одновременно с возмущением ранних двойных в кластерах активно формируются («поздние») двойные через динамические каналы, которые будут обсуждаться в данной работе, причем их слияния в современную эпоху могут являться доминирующими. Мы рассматриваем формирование и внутреннюю эволюцию кластеров ПЧД, оцениваем темп слияний двойных систем, образующихся при парных и трехчастичных взаимодействиях черных дыр. Полагается, что все ПЧД имеют одинаковую массу $m = 30M_\odot$ и их доля в темной материи $f \leq 0,1$. Остальную часть темной материи составляют легкие массивные неизвестные частицы или же ПЧД, которые избегают ограничения.

1. ВЛИЯНИЕ ПЧД НА ФОРМИРОВАНИЕ РАННИХ СТРУКТУР

Пуассоновский шум в изначальном пространственном распределении ПЧД генерирует флуктуации плотности постоянной кривизны $\delta_p \sim f/\sqrt{N}$ [4]. Дисперсия флуктуаций материи на масштабе M дается выражением

$$S_p(M, z) = \frac{mf}{M} D^2(z), \quad (1)$$

где $D(z)$ — фактор роста для возмущений постоянной кривизны

$$D(z) \approx \frac{3}{2} \left(\frac{1 + z_{\text{eq}}}{1 + z} \right), \quad (2)$$

где $z_{\text{eq}} \approx 3400$ — момент перехода РД-МД. С другой стороны, флуктуации плотности, генерируемые на стадии космологической инфляции, имеют величину $\delta_{\text{inf}} \sim 10^{-5} - 10^{-4}$. Поэтому на достаточно малых масштабах пуассоновский шум ПЧД доминирует над инфляционными возмущениями, что ведет к формированию ранних структур темной материи. Функция масс гало в формализме Пресса-Шехтера имеет вид [10]

$$M \frac{dn}{dM} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\rho_M}{M} \sqrt{\frac{M}{M_{\text{ch}}}} \exp\left(-\frac{M}{2M_{\text{ch}}}\right), \quad (3)$$

где характерная масса гало

$$M_{\text{ch}} = \frac{9mf}{4\delta_c^2} \left(\frac{1 + z_{\text{eq}}}{1 + z} \right)^2, \quad (4)$$

$\delta_c = 1,69$. Мы будем считать, что масса всех ПЧД в составе гало темной материи равна $M_{\text{bh}} = fM$. После вириализации гало имеет плотность $\rho_h = 18\pi^2 \rho_M(z)$ и характеризуется вириальным радиусом

$$R_v = \left(\frac{3M}{4\pi\rho_h} \right)^{1/3} \approx 76 \left(\frac{M}{10^5 M_\odot} \right)^{1/3} \left(\frac{1+z}{20} \right)^{-1} \text{ пк.} \quad (5)$$

Характерные скорости в гало можно оценить как $v = \sqrt{GM_{\text{ch}}/R_v}$. Используя соотношения (4) и (5), получим

$$v \approx 2 \text{ км/с} \left(\frac{mf}{3M_\odot} \right)^{1/3} \left(\frac{1+z}{20} \right)^{-1/6}. \quad (6)$$

2. ВНУТРЕННЯЯ ДИНАМИКА ГАЛО

После формирования гало массивные ПЧД будут прежде всего испытывать динамическое трение, рассеиваясь на легких частицах ТМ, в результате чего ПЧД будут терять скорость, что характеризуется следующим диффузионным коэффициентом [11]:

$$\langle \Delta v_{\parallel} \rangle = - \frac{4\pi G^2 m \rho_{\text{dm}} \ln \Lambda}{v^2} \left(\text{erf}(x) - \frac{2x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \right), \quad (7)$$

где ρ_{dm} — плотность частиц ТМ; v — скорость ПЧД и $x = v/(\sqrt{2}\sigma_{\text{dm}})$, где полагается, что частицы ТМ имеют максвелловское распределение по скоростям с дисперсией σ_{dm} . Время, за которое ПЧД потеряют кинетическую энергию и осядут в центр гало, называется временем динамического трения [11]:

$$t_{\text{df}} = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma_{\text{dm}}^3}{G^2 m \rho_{\text{dm}} \ln \Lambda} \approx 0,6 \cdot 10^9 \left(\frac{mf}{3M_\odot} \right) \left(\frac{1+z}{20} \right)^{-7/2} \text{ лет,} \quad (8)$$

где $\ln \Lambda \approx 10$ — кулоновский логарифм, $\sigma_{\text{dm}} = \sqrt{GM/(5R_v)}$ в соответствии с вириальным равновесием, и мы воспользовались формулой (6). Видно, что время динамического трения для гало, формирующихся при красных смещениях $z \gtrsim 10$, оказывается меньше современного возраста Вселенной $t_0 \approx 1,4 \cdot 10^{10}$ лет.

Другой процесс, ответственный за эволюцию гало, — парное рассеяние ПЧД друг с другом, которое характеризуется временем релаксации [11]

$$t_r = \frac{0,34 \sigma_{\text{bh}}^3}{G^2 m \rho_{\text{bh}} \ln \Lambda}. \quad (9)$$

Поскольку плотность ПЧД ρ_{bh} изначально мала, то парной релаксацией можно пренебречь. Однако после того, как ПЧД осядут в центр гало, их взаимодействие друг с другом будет определяющим. Из сравнения времен (8) и (9) видно, что это произойдет при $\rho_{\text{bh}} \sim \rho_{\text{dm}}$.

Будем считать, что под действием динамического трения все ПЧД осели в центр гало и сформировали кластер с плотностью $\rho_{\text{bh}} = \rho_{\text{dm}}$. Дальнейшая эволюция может быть описана в рамках простой аналитической модели, в которой ПЧД постепенно вылетают из кластера с темпом [12]

$$\dot{M}_{\text{bh}} = -\nu \frac{M_{\text{bh}}}{t_r}. \quad (10)$$

В начальный момент времени $M_{\text{bh}}(0) = fM$ и $\nu = 7,4 \cdot 10^{-3}$ показывает долю частиц, которая покидает кластер за одно время релаксации (9). Также подразумевается, что распределение скоростей ПЧД в кластере максвелловское. Количество энергии, которое уносят ПЧД в единицу времени, имеет вид

$$\dot{E}_{\text{bh}} = \frac{\xi E_{\text{bh}}}{M_{\text{bh}}} \dot{M}_{\text{bh}}, \quad (11)$$

где численное значение константы $\xi = 0,737$.

Мы также учитываем потери на динамическое трение о частицы ТМ, которые можно оценить как $\langle \Delta E \rangle = mv \langle \Delta v_{\parallel} \rangle$. Поскольку ПЧД в кластере имеют различные скорости, то для получения среднего темпа потерь необходимо усреднить $\langle \Delta E \rangle$ с функцией распределения по скоростям:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\text{df}} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{N_{\text{bh}}}{\sigma_{\text{bh}}^3} \int_0^{\infty} v^2 e^{-v^2/2\sigma_{\text{bh}}^2} \langle \Delta E \rangle dv = \\ &= -\frac{4\sqrt{2\pi} G^2 M_{\text{bh}} \rho_{\text{dm}} \ln \Lambda}{\sigma_{\text{bh}}} \left[\frac{\sigma_{\text{bh}}^3}{(\sigma_{\text{bh}}^2 + \sigma_{\text{dm}}^2)^{3/2}} \right]. \quad (12) \end{aligned}$$

Будем считать, что кластер является однородной сферой постоянной плотности и находится в вириальном равновесии, тогда его полная энергия

$$E = \frac{U}{2} = -\frac{3GM_{\text{bh}}^2}{10r}, \quad (13)$$

где U — потенциальная энергия и r — радиус кластера. Полная энергия кластера меняется со временем как $\dot{E} = \dot{E}_{\text{bh}} + \dot{E}_{\text{df}}$, тогда, дифференцируя выражение (13), получим уравнение, описывающее эволюцию радиуса кластера:

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{10r\dot{E}_{\text{df}}}{3GM_{\text{bh}}^2} + (2 - \xi) \frac{\dot{M}_{\text{bh}}}{M_{\text{bh}}}. \quad (14)$$

Динамика кластера ПЧД под действием парной релаксации и динамического трения в итоге приведет к его сжатию до нулевого радиуса, как это видно из уравнения (14). При таком сжатии плотность стремится к бесконечности, а масса к нулю, это явление известно также как коллапс кора. В реальности же сжатие кластера останавливается за счет формирования двойных систем при трехчастичных взаимодей-

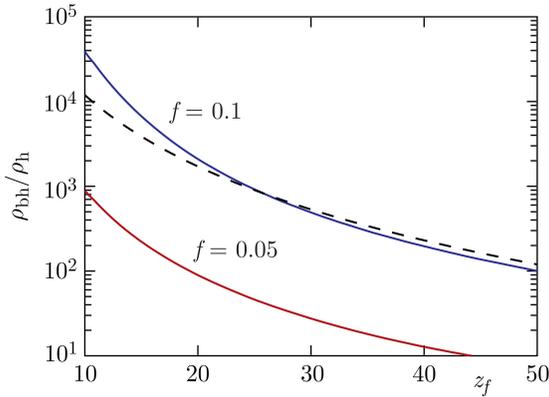


Рис. 1. Отношение плотности ПЧД к средней плотности гало в зависимости от момента формирования гало z_f . Плотность показана на момент остановки коллапса кора. Штриховая линия показывает кластер ПЧД с плотностью $\rho_{\text{bh}} = 100 M_{\odot} \text{pk}^{-3}$

ствиях. Причем коллапс кора останавливают жесткие двойные, энергия связи которых больше, чем характерная кинетическая энергия ПЧД в кластере. Темп формирования жестких двойных в единице объема дается выражением [11]

$$\dot{n}_{zb} = 0,74 \frac{G^5 \rho_{\text{bh}}^3 m^2}{\sigma_{\text{bh}}^9}. \quad (15)$$

После формирования двойная взаимодействует с другими ПЧД, передавая им энергию, и становится еще жестче (более тесной) до тех пор, пока не приобретет достаточную энергию отдачи и не покинет кластер. Для консервативной оценки будем считать, что коллапс кора прекращается, когда сформировалась одна двойная.

Рис. 1 показывает плотность кластера ПЧД на момент остановки коллапса кора. Видно, что плотность практически не зависит от момента формирования гало z_f и для случая $f = 0,1$ составляет $\rho_{\text{bh}} \approx 100 M_{\odot} \text{pk}^{-3}$. Мы не рассматриваем эволюцию кластера после коллапса кора, так как она обусловлена взаимодействием с двойными, что не может быть учтено в рамках простой модели, рассматриваемой здесь.

3. ДВОЙНЫЕ ПЧД, ФОРМИРУЮЩИЕСЯ В РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

В данном разделе мы рассматриваем двойные, формирующиеся на РД стадии, следуя анализу [7]. Поскольку ПЧД изначально случайно распределены в пространстве, то некоторая их пара может оказаться достаточно близко друг к другу и отцепиться от космологического расши-

рения. Параметры двойных характеризуются через среднее расстояние между ПЧД на момент перехода РД-МД t_{eq} :

$$\bar{x} = \left(\frac{m}{\rho_{\text{bh}}} \right)^{1/3} = \frac{1}{s_{\text{eq}} f^{1/3}} \left(\frac{m}{\Omega_{\text{dm}} \rho_{\text{crit}}} \right)^{1/3}, \quad (16)$$

где ρ_{crit} — критическая плотность Вселенной, и масштабный фактор нормирован на единицу в текущий момент $s_0 = 1$. Большая полуось определяется расстоянием между парой ПЧД на момент их отщепления от расширения. Угловой момент двойной создается приливными силами от третьей ПЧД. Обозначим через x физическое расстояние между двумя ПЧД и y — расстояние до третьей ПЧД на момент t_{eq} , тогда параметры двойной будут

$$a = \frac{x}{f} \left(\frac{x}{\bar{x}} \right)^3, \quad j = \left(\frac{x}{y} \right)^3, \quad (17)$$

где $j = \sqrt{1 - e^2}$ — безразмерный угловой момент и e — эксцентриситет орбиты. Величины x и y меняются в пределах $0 < x < \bar{x}$ и $x < y < \bar{x}$ и имеют следующее распределение вероятностей [7]:

$$dP = \frac{18}{\bar{x}^6} x^2 y^2 dx dy. \quad (18)$$

Удобно перейти к переменным a и j с помощью формул (17), тогда выражение для распределения вероятностей преобразуется к виду

$$dP = \frac{3}{2} \left(\frac{f}{\bar{x}} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{a}}{j^2} da dj, \quad (19)$$

где a и j имеют пределы $(af/\bar{x})^{3/4} < j < 1$ и $0 < a < \bar{x}f^{1/3}$. Видно, что двойные ПЧД имеют преимущественно малые угловые моменты $j \ll 1$.

После формирования двойной ПЧД будут постепенно сближаться за счет излучения гравитационных волн и сольются за время [13]

$$t_{\text{gw}} = \frac{3c^5 a^4 j^7}{170G^3 m^3}; \quad (20)$$

здесь c — скорость света. Характерное значение углового момента оценим как нижний предел распределения (19) $j_{\text{ch}} \sim (af/\bar{x})^{3/4}$. Таким образом, двойные, сливающиеся к моменту времени t , имеют большую полуось

$$\begin{aligned} a_{\text{ch}} &= \left(\frac{170G^3 m^{19/4} t}{3c^5 f^7 \rho_{\text{dm,eq}}} \right)^{4/37} \approx \\ &\approx 137 f^{-28/37} \left(\frac{m}{10 M_{\odot}} \right)^{19/37} \left(\frac{t}{10^{10} \text{ лет}} \right)^{4/37} \text{ а. е.} \quad (21) \end{aligned}$$

Однако в кластерах ранние двойные рассеиваются с одиночными ПЧД, поэтому параметры двойных могут значительно возмущаться. Это происходит, если точка поворота при их сближении $r_p \leq a$, тогда сечение такого рассеяния

$$\Sigma = \pi a^2 \left(1 + \frac{2Gm}{av^2} \right) \approx \frac{2\pi a Gm}{v^2}, \quad (22)$$

где мы воспользовались приближением гравитационной фокусировки, так как энергия связи двойной больше, чем кинетическая энергия ПЧД в кластере. Оценим характерное время возмущения двойных

$$t_p \sim \frac{1}{n_{bh}\Sigma v} \sim 10^8 \left(\frac{10^3 \text{ а. е.}}{a} \right) \left(\frac{100 M_\odot \text{ пк}^{-3}}{\rho_{bh}} \right) \left(\frac{v}{1 \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}} \right) \text{ лет.} \quad (23)$$

Таким образом, двойная испытывает много взаимодействий с одиночными ПЧД к настоящему моменту. Поскольку ранние двойные имеют малый угловой момент $j \ll 1$, то возмущения его увеличивают, что ведет к резкому росту времени жизни двойной [9].

4. СЛИЯНИЯ ПЧД В КЛАСТЕРАХ

Отдельно рассмотрим слияния поздних двойных в кластерах, формирующихся при парных рассеяниях двух ПЧД и в результате трехчастичных взаимодействий. Сечение формирования двойной системы из-за излучения гравитационных волн [6]:

$$\Sigma_{2b} = \pi R_s^2 \left(\frac{85\pi}{3} \right)^{2/7} \left(\frac{v}{c} \right)^{-18/7}, \quad (24)$$

где v — относительная скорость двух ПЧД на бесконечности и $R_s = 2Gm/c^2$ — шварцшильдовский радиус. Формирующиеся двойные быстро сливаются за счет излучения гравитационных волн, поэтому их темп слияний в одном кластере будет [6]

$$\Gamma_{2b} \simeq \frac{N_{bh}\rho_{bh}}{2m} \langle \Sigma_{2b} v \rangle \simeq \frac{N_{bh}\rho_{bh}\sigma_{bh}}{2m} \pi R_s^2 \left(\frac{85\pi}{6} \right)^{2/7} \left(\frac{c}{\sigma_{bh}} \right)^{18/7}, \quad (25)$$

где угловые скобки означают усреднение по относительным скоростям ПЧД. Для получения полного темпа слияний необходимо проинтегрировать выражение (25) с функцией масс гало (3)

$$\mathcal{R}_{2b} = \int \Gamma_{2b} \frac{dn}{dM} dM. \quad (26)$$

Рассмотрим теперь слияния двойных, формирующихся при трехчастичных взаимодействиях, которые обсуждались в конце разд. 2. Оценим их темп слияний упрощенным способом. После формирования двойная будет рассеиваться с одиночными ПЧД и передаст в кластер энергию

$\Delta E \sim 100 m \sigma_{\text{bh}}^2$ [12]. Также будем считать, что двойные в кластере имеют одинаковую энергию связи, определяемую количеством переданной энергии, и изотропное распределение по угловому моменту

$$dP_{3b} = 2 \delta(a - a_*) j dj da, \quad (27)$$

где $a_* = Gm/(200 \sigma_{\text{bh}}^2)$ и $\delta(a - a_*)$ — дельта-функция. Доля двойных, сливающихся к моменту времени t , определяется как $P_{3b} = \int_0^{j_*} dP_{3b} = j_*^2$, где

$$j_* = \left(\frac{170 G^3 m^3 t}{3 c^5 a_*^4} \right)^{1/7} \quad (28)$$

получено из времени жизни двойной (20). Отметим, что j_* зависит от массы кластера ПЧД M_{bh} и, как следствие, от массы гало M , в котором кластер образуется. Темп слияний ПЧД при t_0 определим следующим образом:

$$\mathcal{R}_{3b} = \int \frac{dn}{dM} \frac{dP_{3b}}{dt} \Big|_{t_0} N_b dM, \quad (29)$$

где N_b — число двойных в кластере, которое для максимизации эффекта равняется $N_b = N/2$, и N — число ПЧД на момент остановки коллапса кора.

Слияния двойных, формирующихся при трехчастичных взаимодействиях, вносят значительно меньший вклад по сравнению с двойными, образующимися через излучения гравитационных волн, что показано на рис. 2. Отметим, что наша оценка подразумевает, что все ПЧД в кластере формируют трехчастичные двойные, в реальной ситуации их темп слия-

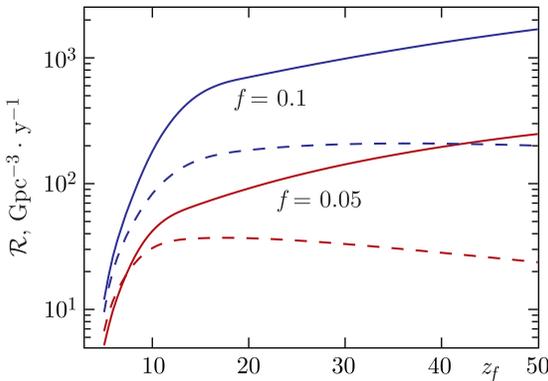


Рис. 2. Темп слияний ПЧД в зависимости от момента формирования гало. Сплошные линии относятся к слияниям двойных, формирующихся при парных рассеяниях ПЧД с излучением гравитационных волн, штриховые линии — при трехчастичных взаимодействиях

ний будет меньше в несколько раз. Падение темпа слияний от структур, формирующихся при $z_f \lesssim 10$, обусловлено тем, что гало в эту эпоху эволюционирует уже медленно. Также отметим, что представленный результат является верхней границей. Более правильная оценка современного темпа слияний должна учитывать эволюцию кластера после коллапса кора. Кроме того, необходимо учитывать разрушение кластеров в процессе иерархического формирования структур, что выходит за рамки данной работы. Более тщательный анализ в работе [10], учитывающий описанные эффекты, показывает, что темп слияний поздних двойных совместим с наблюдаемым LIGO-Virgo-KAGRA.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена динамика ПЧД в гало темной материи, формирующихся при больших красных смещениях $z_f > 10$. Получено, что в центральной области гало образуется кластер ПЧД с плотностью $\rho_{\text{bh}} \approx 100 M_{\odot} \text{ пк}^{-3}$. Показано, что двойные ПЧД, формирующиеся на радиационно-доминированной стадии эволюции Вселенной, активно возмущаются в таких кластерах. Получен темп слияний двойных ПЧД в кластерах, образующихся через два динамических канала: при парных рассеяниях черных дыр с излучением гравитационных волн и при трехчастичных взаимодействиях. Показано, что слияния черных дыр, образующихся по первому каналу, преобладают по возможному вкладу в наблюдаемые события гравитационных волн.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-42-00066.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у нее нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zel'dovich Y.B., Novikov I.D. The Hypothesis of Cores Retarded during Expansion and the Hot Cosmological Model // *Sov. Astron.* 1967. V. 10. P. 602.
2. Hawking S. Gravitationally Collapsed Objects of Very Low Mass // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1971. V. 152. P. 75.
3. Carr B., Kohri K., Sendouda Y., Yokoyama J. Constraints on Primordial Black Holes // *Rep. Prog. Phys.* 2021. V. 84, No. 11. P. 116902; arXiv:2002.12778.
4. Carr B., Clesse S., Garcia-Bellido J., Hawkins M., Kuhnel F. Observational Evidence for Primordial Black Holes: A Positivist Perspective // *Phys. Rep.* 2024. V. 1054. P. 1–68; arXiv:2306.03903.
5. Abbott B. P. et al. (*LIGO Scientific, Virgo Collab.*). Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger // *Phys. Rev. Lett.* 2016. V. 116, No. 6. P. 061102; arXiv:1602.03837.

6. *Bird S., Cholis I., Muñoz J.B., Ali-Haïmoud Y., Kamionkowski M., Kovetz E.D., Raccanelli A., Riess A.G.* Did LIGO Detect Dark Matter? // *Phys. Rev. Lett.* 2016. V. 116, No. 20. P. 201301; arXiv:1603.00464.
7. *Sasaki M., Suyama T., Tanaka T., Yokoyama S.* Primordial Black Hole Scenario for the Gravitational-Wave Event GW150914 // *Phys. Rev. Lett.* 2016. V. 117, No. 6. P. 061101; Erratum // *Phys. Rev. Lett.* 2018. V. 121. P. 059901; arXiv:1603.08338.
8. *Inman D., Ali-Haïmoud Y.* Early Structure Formation in Primordial Black Hole Cosmologies // *Phys. Rev. D.* 2019. V. 100, No. 8. P. 083528; arXiv:1907.08129.
9. *Stasenko V., Belotsky K.* Influence of Early Dark Matter Haloes on the Primordial Black Holes Merger Rate // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2023. V. 526, No. 3. P. 4308–4314; arXiv:2307.12924.
10. *Stasenko V.* Redshift Evolution of Primordial Black Hole Merger Rate // *Phys. Rev. D.* 2024. V. 109, No. 12. P. 123546; arXiv:2403.11325.
11. *Binney J., Tremaine S.* *Galactic Dynamics*. Second ed. Princeton Univ. Press, 2008.
12. *Spitzer L.* *Dynamical Evolution of Globular Clusters*. Princeton Univ. Press, 1987.
13. *Peters P.C.* Gravitational Radiation and the Motion of Two Point Masses // *Phys. Rev.* 1964. V. 136. P. B1224–B1232; <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.136.B1224>.