ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2025. Т. 56, вып. 2. С. 240–249

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ

В. Р. Иванов [1,*], *С. Ю. Вернов* [2,**]

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
[2] Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

Рассматриваются космологические модели с произвольным числом скалярных полей, неминимально связанных с гравитацией, и конструируются новые интегрируемые космологические модели. В построенных моделях скаляр Риччи является интегралом движения независимо от вида метрики. Найдены общие решения уравнений эволюции в пространственно плоской метрике Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера для моделей с потенциалами четвертой степени.

We consider cosmological models with an arbitrary number of scalar fields nonminimally coupled to gravity and construct new integrable cosmological models. In the constructed models, the Ricci scalar is an integral of motion irrespectively of the type of metric. The general solutions of evolution equations in the spatially flat FLRW metric have been found for models with the quartic potentials.

PACS: 98.80.Cq; 04.50.Kd; 04.20.Jb

ВВЕДЕНИЕ

Последние наблюдения показывают с высокой степенью точности, что Вселенная изотропна и однородна на больших масштабах. По этой причине космологические модели со скалярными полями играют центральную роль в описании глобальной эволюции Вселенной. Существует множество моделей с одним или несколькими скалярными полями, которые описывают различные стадии эволюции Вселенной.

На больших масштабах Вселенная пространственно плоская, поэтому пространственно плоская метрика Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера (ФЛРУ) с элементом длины

$$ds^2 = -N^2(\tau)d\tau^2 + a^2(\tau)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \tag{1}$$

* E-mail: vsvd.ivanov@gmail.com
** E-mail: svernov@theory.sinp.msu.ru

где $N(\tau)$ — функция хода и $a(\tau)$ — масштабная функция параметрического времени τ, может быть использована для описания глобальной эволюции Вселенной на фоновом уровне.

В метрике ФЛРУ уравнения Эйнштейна сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, однако эта система оказывается интегрируемой лишь для потенциалов определенного вида. Задача построения интегрируемых космологических моделей активно исследуется, но даже с учетом однополевых космологических моделей число интегрируемых моделей невелико [1–9]. Для случая нескольких скалярных полей даже построение космологических моделей с точными частными решениями — нетривиальная задача [10–19].

Существует несколько методов интегрирования уравнений эволюции. Интегрируемость многих космологических моделей была доказана путем решения уравнений эволюции в подходящем параметрическом времени [4], однако неясно, как найти это параметрическое время. В работах [5, 7, 20] был исследован метод построения интегрируемых однополевых моделей с использованием связи между картиной Йордана и картиной Эйнштейна. Интегрируемость космологических моделей с неминимальной связью может быть более очевидной, чем интегрируемость соответствующих моделей в картине Эйнштейна [7].

Цель этой работы — построение новых интегрируемых космологических моделей с несколькими скалярными полями, для которых скаляр Риччи является интегралом движения. Однополевые космологические модели с таким свойством были построены в работе [6]. Мы конструируем модели с произвольным числом неминимально связанных скалярных полей. Для построенных моделей мы находим общие решения уравнений эволюции в пространственно плоской метрике ФЛРУ (1).

1. МОДЕЛЬ С N СКАЛЯРНЫМИ ПОЛЯМИ И НЕМИНИМАЛЬНАЯ СВЯЗЬ

Рассмотрим модель, описываемую действием

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}\,\left(U\left(\phi^A\right)R-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\delta_{AB}\partial_\mu\phi^A\partial_\nu\phi^B-V\left(\phi^A\right)\right), \qquad (2)$$

где прописные латинские буквы в индексах — нумерация поля, $A=1,2,\ldots,N$, они опускаются и поднимаются с помощью символа Кронекера δ_{AB}. Функции $U(\phi^A)$ и $V(\phi^A)$ — дифференцируемые, R — скаляр Риччи.

Соответствующие уравнения Эйнштейна суть [8]

$$U\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)=\nabla_\mu\nabla_\nu U-g_{\mu\nu}\Box U+\frac{1}{2}T_{\mu\nu}, \qquad (3)$$

где
$$T_{\mu\nu} = \delta_{AB}\partial_\mu\phi^A\partial_\nu\phi^B - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\delta_{AB}\partial_\alpha\phi^A\partial_\beta\phi^B + V\right). \tag{4}$$

Полевые уравнения имеют следующий вид:
$$\Box\,\phi^A = V_{,\phi^A} - RU_{,\phi^A}, \tag{5}$$
где $F_{,\phi^A} = \partial F/\partial\phi^A$ для произвольной функции F.

Из уравнений (3) получаем
$$3\,\Box\,U - UR = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\delta_{AB}\partial_\mu\phi^A\partial_\nu\phi^B - 2V. \tag{6}$$
Расписывая $\Box U$ явно как
$$\Box\,U = U_{,\phi^A}\Box\phi^A + U_{,\phi^A\phi^B}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi^A\partial_\beta\phi^B, \tag{7}$$
получаем из уравнения (6)
$$\left(3U^2_{,\phi^A} + U\right)R - \left[3U_{,\phi^A\phi^B} + \frac{\delta_{AB}}{2}\right]g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi^A\partial_\beta\phi^B = 3U_{,\phi^A}V_{,\phi^A} + 2V. \tag{8}$$
Легко видеть, что в случае функции
$$U = U_0 - \frac{\delta_{AB}}{12}\left(\phi^A - \phi_0^A\right)\left(\phi^B - \phi_0^B\right), \tag{9}$$
где ϕ_0^A — произвольный постоянный вектор, уравнение (8) принимает следующий вид:
$$\frac{1}{2}\left(\phi^A - \phi_0^A\right)V_{,\phi^A} - 2V + U_0R = 0. \tag{10}$$
Если R постоянно, $R = R_0$, то уравнение (10) — линейное уравнение первого порядка в частных производных с $V(\phi^A)$ в роли неизвестного и с компонентами ϕ^A в роли независимых переменных. Уравнение (10) имеет общее решение:
$$V = \frac{R_0U_0}{2} + \left(\phi^1 - \phi_0^1\right)^4 f\left(\frac{\phi^2 - \phi_0^2}{\phi^1 - \phi_0^1}, \frac{\phi^3 - \phi_0^3}{\phi^1 - \phi_0^1}, \ldots, \frac{\phi^N - \phi_0^N}{\phi^1 - \phi_0^1}\right), \tag{11}$$
где f — произвольная дифференцируемая функция.

Таким образом, получаем, что скаляр Риччи R является интегралом движения моделей с N скалярными полями и функциями U и V, заданными уравнениями (9) и (11) соответственно. Отметим, что мы не фиксировали вид метрики. Вектор ϕ_0^A может быть принят равным нулю без потери общности.

Мы рассмотрели случай N скалярных полей со стандартными кинетическими членами. Чтобы обобщить этот результат на случай фантомного скалярного поля ϕ^A, достаточно предположить, что скалярному полю ϕ^A соответствует стандартный кинетический член, но оно является чисто мнимой функцией. Отметим, что в этом случае функция U остается вещественной, а потенциал V вещественен для любой вещественной функции f.

2. ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ В МЕТРИКЕ ФЛРУ

В метрике ФЛРУ (1) уравнения (3) и (5) принимают следующий вид:

$$6Uh^2 + 6h\dot{U} = \frac{1}{2}\delta_{AB}\dot{\phi}^A\dot{\phi}^B + N^2V, \tag{12}$$

$$-U\left(2\dot{h} + 3h^2\right) - 2Uh\frac{\dot{N}}{N} = \ddot{U} + 2h\dot{U} - \dot{U}\frac{\dot{N}}{N} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\delta_{AB}\dot{\phi}^A\dot{\phi}^B - N^2V\right), \tag{13}$$

$$\ddot{\phi}^A + \left(3h - \frac{\dot{N}}{N}\right)\dot{\phi}^A + V_{,\phi^A}N^2 - 6\left(\dot{h} + 2h^2 - h\frac{\dot{N}}{N}\right)U_{,\phi^A} = 0, \tag{14}$$

где $h(\tau) \equiv \dot{a}/a$, точки обозначают дифференцирование по параметрическому времени τ. И мы предполагаем, что все поля однородны.

Для функции U, определяемой уравнением (9), уравнения полей (14) принимают вид

$$\ddot{\phi}^A + \left(3h - \frac{\dot{N}}{N}\right)\dot{\phi}^A + V_{,\phi^A}N^2 + \left(\dot{h} + 2h^2 - h\frac{\dot{N}}{N}\right)\phi^A = 0. \tag{15}$$

Для решения уравнения (15) используем конформное время η, определяемое как $dt = a(\eta)d\eta$, следовательно, $N(\eta) = a(\eta)$. В терминах функций $y^A(\eta) \equiv a(\eta)\ \phi^A(\eta)$ уравнения поля (15) есть

$$\frac{d^2y^A}{d\eta^2} + a^3V_{,\phi^A}\left(\frac{y_1}{a}, \ldots, \frac{y_N}{a}\right) = 0. \tag{16}$$

Более того, если использовать потенциал V, определяемый уравнением (11), получаем

$$\frac{d^2y^A}{d\eta^2} + \frac{\partial}{\partial y^A}V\left(y_1, \ldots, y_N\right) = 0. \tag{17}$$

У системы (17) есть первый интеграл

$$\frac{1}{2}\delta_{AB}\frac{dy^A}{d\eta}\frac{dy^B}{d\eta} + V\left(y_1, \ldots, y_N\right) = \frac{1}{2}R_0U_0 + E, \tag{18}$$

где E — константа интегрирования.

Для ранее выбранных U и V уравнение связи (12) в конформном времени принимает следующий вид:

$$\left(\frac{h}{a}\right)^2 = \frac{R_0}{12} + \frac{E}{6U_0a^4}. \tag{19}$$

Рассмотрим конкретный вид потенциала V:

$$V(\phi^1, \ldots, \phi^N) = \frac{R_0 U_0}{2} + \sum_{A=1}^{N} c_A \left(\phi^A\right)^4, \tag{20}$$

где c_A — константы.

С таким потенциалом система (17) полностью разделима, и мы получаем N независимых интегралов движения:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy^A}{d\eta}\right)^2 + c_A \left(y^A\right)^4 = C^A, \tag{21}$$

где C^A — константа интегрирования и к A не применяется соглашение Эйнштейна. Получаем $E = \sum\limits_{A=1}^{N} C^A$ и

$$H^2(\tau) = \left(\frac{h}{a}\right)^2 = \frac{R_0}{12} + \frac{1}{6U_0 a^4}\sum_{n=1}^{N} C^A. \tag{22}$$

Для функции хода $N = 1$ условие $R = R_0$ задает дифференциальное уравнение первого порядка на параметр Хаббла $H(t)$:

$$\dot{H} + 2H^2 = \frac{R_0}{6}, \tag{23}$$

общее решение которого при $R_0 > 0$ задается выражением

$$H(t) = \frac{\sqrt{3R_0}\,\left(\mathrm{e}^{2\sqrt{3R_0}\,t/3} + B\right)}{6\left(\mathrm{e}^{2\sqrt{3R_0}\,t/3} - B\right)}, \tag{24}$$

где B — константа.

В зависимости от знака E и от того, равно ли R_0 нулю или нет, существуют несколько различных решений для H, a и η. Так как поля y^A проще всего записываются как функции η, полезно представить H и a также как функции η и явно указать область значений η:

1. Если $E > 0$ и $R_0 \neq 0$, то

$$H(t) = \sqrt{\frac{R_0}{12}}\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{R_0}{3}}\,(t - t_0)\right), \quad a(t) = a_0\sqrt{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{R_0}{3}}\,(t - t_0)\right)}, \tag{25}$$

$$a_0 = \left(\frac{2E}{U_0 R_0}\right)^{1/4}, \quad \eta(t) = \eta_0 + \frac{1}{a_0}\sqrt{\frac{3}{R_0}}\,F\left(\arccos\left(\frac{a_0^2 - a^2}{a_0^2 + a^2}\right)\middle|\frac{1}{2}\right),$$

$$H(\eta)=\sqrt{\frac{R_0}{3}}\,\frac{\mathrm{dn}\left(a_0\sqrt{\dfrac{R_0}{3}}\;(\eta-\eta_0)\,\middle|\,\dfrac{1}{2}\right)}{1-\mathrm{cn}\left(a_0\sqrt{\dfrac{R_0}{3}}\;(\eta-\eta_0)\,\middle|\,\dfrac{1}{2}\right)},\tag{26}$$

$$a(\eta)=\frac{a_0\,\mathrm{sn}\left(a_0\sqrt{\dfrac{R_0}{3}}\;(\eta-\eta_0)\,\middle|\,\dfrac{1}{2}\right)}{1+\mathrm{cn}\left(a_0\sqrt{\dfrac{R_0}{3}}\;(\eta-\eta_0)\,\middle|\,\dfrac{1}{2}\right)},\quad a_0\sqrt{\frac{R_0}{12}}\;(\eta-\eta_0)\in\left(0,K\left(\frac{1}{2}\right)\right).\tag{27}$$

2. Если $E<0$ и $R_0\neq 0$, то

$$H(t)=\sqrt{\frac{R_0}{12}}\;\mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{R_0}{3}}\,(t-t_0)\right),$$
$$a(t)=a_0\sqrt{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{R_0}{3}}\,(t-t_0)\right)},\tag{28}$$

$$a_0=\left(\frac{-2E}{U_0R_0}\right)^{1/4},\quad \eta(t)=\eta_0+\frac{1}{a_0}\sqrt{\frac{6}{R_0}}\,F\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{a^2-a_0^2}{a^2}}\right)\,\middle|\,\frac{1}{2}\right),$$

$$a(\eta)=\frac{a_0}{\mathrm{cn}\left(a_0\sqrt{\dfrac{R_0}{6}}\;(\eta-\eta_0)\,\middle|\,\dfrac{1}{2}\right)},\tag{29}$$

$$H(\eta)=\sqrt{\frac{R_0}{6}}\,\mathrm{sn}\left(a_0\sqrt{\frac{R_0}{6}}\;(\eta-\eta_0)\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)\mathrm{dn}\left(a_0\sqrt{\frac{R_0}{6}}\;(\eta-\eta_0)\,\middle|\,\frac{1}{2}\right),\tag{30}$$

$$a_0\sqrt{\frac{R_0}{6}}\;(\eta-\eta_0)\in\left(-K\left(\frac{1}{2}\right),K\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

3. Если $E=0$ и $R_0\neq 0$, то

$$H(t)=\pm\sqrt{\frac{R_0}{12}},\qquad a(t)=a_0\,\exp\left(\pm\sqrt{\frac{R_0}{12}}\,(t-t_0)\right),\tag{31}$$

$$\eta(t)=\eta_0\pm\frac{1}{a_0}\sqrt{\frac{12}{R_0}}\left(1-\exp\left(\mp\sqrt{\frac{R_0}{12}}\,(t-t_0)\right)\right)=\eta_0\pm\frac{1}{a_0}\sqrt{\frac{12}{R_0}}\;\left(1-\frac{a_0}{a}\right),$$

$$H(\eta) = \pm\sqrt{\frac{R_0}{12}}\,, \qquad a(\eta) = \frac{a_0}{1 \mp a_0\sqrt{R_0/12}\;(\eta-\eta_0)}, \tag{32}$$

$$\pm a_0\sqrt{\frac{R_0}{12}}\;(\eta-\eta_0) \in (-\infty, 1)\,.$$

4. Если $E > 0$ и $R_0 = 0$, то

$$H(t) = \frac{1}{2(t-t_0)}, \qquad a(t) = a_0\sqrt{t-t_0}\,, \tag{33}$$

$$a_0 = \left(\frac{2E}{3U_0}\right)^{1/4}, \quad \eta(t) = \eta_0 + \frac{2}{a_0}\sqrt{t-t_0} = \eta_0 + \frac{2}{a_0^2}a,$$

$$H(\eta) = \frac{2}{a_0^2(\eta-\eta_0)^2}, \quad a(\eta) = \frac{1}{2}a_0^2\,(\eta-\eta_0)\,, \quad \eta-\eta_0 \in (0,+\infty)\,. \tag{34}$$

Здесь F — неполный эллиптический интеграл первого рода, определенный как

$$F\,(\varphi\,|\,m) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}}, \tag{35}$$

$K(m) \equiv F(\pi/2\,|m)$ — полный эллиптический интеграл первого рода и, кроме того, введены эллиптические функции Якоби sn, cn и dn. По определению если $u = F\,(\varphi\,|\,m)$, то

$$\begin{aligned} &\mathrm{am}\,(u\,|\,m) = \varphi, && \mathrm{dn}\,(u\,|\,m) = \frac{d}{du}\mathrm{am}\,(u\,|\,m)\,,\\ &\mathrm{sn}\,(u\,|\,m) = \sin\left(\mathrm{am}\,(u\,|\,m)\right), && \mathrm{cn}\,(u\,|\,m) = \cos\left(\mathrm{am}\,(u\,|\,m)\right). \end{aligned} \tag{36}$$

Вид решений (21) зависит от знаков c_A и C^A:

1. $C^A > 0, \quad c_A > 0$:

$$y^A(\eta) = \left(\frac{C^A}{c_A}\right)^{1/4} \mathrm{cn}\left(\pm 2\left(C^A c_A\right)^{1/4}(\eta-\eta_i) + \mathrm{cn}^{-1}\left(u_A\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)\middle|\,\frac{1}{2}\right).$$

2. $C^A < 0, \quad c_A < 0$:

$$y^A(\eta) = \frac{\left(\dfrac{C^A}{c_A}\right)^{1/4}}{\mathrm{cn}\left(\pm 2\left(C^A c_A\right)^{1/4}(\eta-\eta_i) + \mathrm{cn}^{-1}\left(\dfrac{1}{u_A}\,\middle|\,\dfrac{1}{2}\right)\middle|\,\dfrac{1}{2}\right)}.$$

3. $C^A > 0, \quad c_A < 0$:

$$y^A(\eta) = \left|\frac{C^A}{c_A}\right|^{1/4} \frac{\mathrm{sn}\left(\pm\, 2\sqrt{2}\;\left|C^A c_A\right|^{1/4}(\eta-\eta_i) + \mathrm{sn}^{-1}\left(\dfrac{2u_A}{1+u_A^2}\,\middle|\,\dfrac{1}{2}\right)\middle|\,\dfrac{1}{2}\right)}{1+\mathrm{cn}\left(\pm\, 2\sqrt{2}\;\left|C^A c_A\right|^{1/4}(\eta-\eta_i) + \mathrm{cn}^{-1}\left(\dfrac{1-u_A^2}{1+u_A^2}\,\middle|\,\dfrac{1}{2}\right)\middle|\,\dfrac{1}{2}\right)}.$$

Константы $u_A = |c_A/C_A|^{1/4} y^A(\eta_i)$ и выбор знака $\pm$ определяются начальными условиями, заданными при $\eta = \eta_i$. Отметим, что суммирование по A не подразумевается.

4. При $c_A = 0$ константа C^A должна быть неотрицательной, и мы имеем

$$y^A(\eta) = y^A(\eta_i) + \frac{dy^A}{d\eta}(\eta_i)(\eta - \eta_i).$$

5. При $C^A < 0$ и $c_A \geqslant 0$ решений нет.

Отметим, что решение типа «отскок» (28) существует, только если хотя бы одна константа $c_A < 0$ и, следовательно, потенциал V не ограничен снизу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе построены новые интегрируемые модели с N скалярными полями, неминимально связанными с гравитацией. Мы показали, что скаляр Риччи является интегралом движения, если функции U и V определяются согласно уравнениям (9) и (11). В пространственно плоской метрике ФЛРУ параметр Хаббла H может быть выражен через гиперболические функции космического времени. Поведение скалярных полей описано в терминах эллиптических функций конформного времени.

Соответствующая однополевая модель, предложенная в работе [6], может быть преобразована в интегрируемую модель со скалярным полем, минимально связанным с гравитацией [7].

В общем случае невозможно преобразовать модели с несколькими скалярными полями, неминимально связанными с гравитацией, в модели с минимально связанными скалярными полями и стандартными кинетическими членами [21]. После преобразования метрики получаются модели с нестандартной кинетической частью — так называемые киральные космологические модели [14, 15, 22–24].

Простейший случай интегрируемой киральной космологической модели — это двухполевая модель с постоянным потенциалом. Отсутствие зависимости потенциала от поля позволяет выразить параметр Хаббла через гиперболические функции [24].

Новые интегрируемые модели с минимально связанными скалярными полями могут быть получены с помощью конформного преобразования метрики для интегрируемых моделей с неминимально связанными скалярными полями [25]. Другой возможный путь обобщения результатов — получение интегрируемых моделей для открытой и замкнутой метрик ФЛРУ [7, 25, 26] или для метрики Бьянки-I [8, 20, 27].

Финансирование. Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ им. М. В. Ломоносова. В. Р. Иванов имеет поддержку фонда «Базис» (грант № 22-2-2-6-1).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Salopek D. S., Bond J. R.* Nonlinear Evolution of Long Wavelength Metric Fluctuations in Inflationary Models // Phys. Rev. D. 1990. V. 42. P. 3936–3962.
2. *Maciejewski A. J., Przybylska M., Stachowiak T., Szydlowski M.* Global Integrability of Cosmological Scalar Fields // J. Phys. A. 2008. V. 41. P. 465101; arXiv:0803.2318 [math-ph].
3. *Bars I., Chen S. H.* The Big Bang and Inflation United by an Analytic Solution // Phys. Rev. D. 2011. V. 83. P. 043522; arXiv:1004.0752 [hep-th].
4. *Fré P., Sagnotti A., Sorin A. S.* Integrable Scalar Cosmologies. I. Foundations and Links with String Theory // Nucl. Phys. B. 2013. V. 877. P. 1028–1106; arXiv:1307.1910 [hep-th].
5. *Kamenshchik A. Y., Pozdeeva E. O., Tronconi A., Venturi G., Vernov S. Y.* Integrable Cosmological Models with Non-Minimally Coupled Scalar Fields // Class. Quant. Grav. 2014. V. 31. P. 105003; arXiv:1312.3540 [hep-th].
6. *Boisseau B., Giacomini H., Polarski D., Starobinsky A. A.* Bouncing Universes in Scalar-Tensor Gravity Models Admitting Negative Potentials // JCAP. 2015. V. 07. P. 002; arXiv:1504.07927.
7. *Kamenshchik A. Y., Pozdeeva E. O., Tronconi A., Venturi G., Vernov S. Y.* Interdependence between Integrable Cosmological Models with Minimal and Non-Minimal Coupling // Class. Quant. Grav. 2016. V. 33, No. 1. P. 015004; arXiv:1509.00590.
8. *Kamenshchik A. Y., Pozdeeva E. O., Starobinsky A. A., Tronconi A., Venturi G., Vernov S. Y.* Induced Gravity, and Minimally and Conformally Coupled Scalar Fields in Bianchi-I Cosmological Models // Phys. Rev. D. 2018. V. 97, No. 2. P. 023536; arXiv:1710.02681.
9. *Giacomini A., González E., Leon G., Paliathanasis A.* Variational Symmetries and Superintegrability in Multifield Cosmology // Phys. Rev. D. 2022. V. 105, No. 4. P. 044010; arXiv:2104.13649.
10. *Aref'eva I. Y., Koshelev A. S., Vernov S. Y.* Crossing of the $w = -1$ Barrier by D3-Brane Dark Energy Model // Phys. Rev. D. 2005. V. 72. P. 064017; arXiv:astro-ph/0507067.
11. *Vernov S. Y.* Construction of Exact Solutions in Two-Field Cosmological Models // Theor. Math. Phys. 2008. V. 155. P. 544–556; arXiv:astro-ph/0612487.
12. *Andrianov A. A., Cannata F., Kamenshchik A. Y., Regoli D.* Reconstruction of Scalar Potentials in Two-Field Cosmological Models // JCAP. 2008. V. 02. P. 015; arXiv:0711.4300 [gr-qc].
13. *Aref'eva I. Y., Bulatov N. V., Vernov S. Y.* Stable Exact Solutions in Cosmological Models with Two Scalar Fields // Theor. Math. Phys. 2010. V. 163. P. 788–803; arXiv:0911.5105 [hep-th].
14. *Paliathanasis A., Leon G., Pan S.* Exact Solutions in Chiral Cosmology // Gen. Rel. Grav. 2019. V. 51, No. 9. P. 106; arXiv:1811.10038.
15. *Chervon S. V., Fomin I. V., Pozdeeva E. O., Sami M., Vernov S. Y.* Superpotential Method for Chiral Cosmological Models Connected with Modified Gravity // Phys. Rev. D. 2019. V. 100, No. 6. P. 063522; arXiv:1904.11264.

16. *Faraoni V., Jose S., Dussault S.* Multi-Fluid Cosmology in Einstein Gravity: Analytical Solutions // Gen. Rel. Grav. 2021. V. 53, No. 12. P. 109; arXiv: 2107.12488.
17. *Fomin I. V., Chervon S. V.* New Method of Exponential Potentials Reconstruction Based on Given Scale Factor in Phantonical Two-Field Models // JCAP. 2022. V. 04, No. 04. P. 025; arXiv:2112.09359.
18. *Mitsopoulos A., Tsamparlis M., Leon G., Paliathanasis A.* New Conservation Laws and Exact Cosmological Solutions in Brans–Dicke Cosmology with an Extra Scalar Field // Symmetry. 2021. V. 13, No. 8. P. 1364; arXiv:2105.02766.
19. *Russo J. G.* New Exact Solutions in Multi-Scalar Field Cosmology // JCAP. 2023. V. 07. P. 066; arXiv:2304.12360.
20. *Kamenshchik A. Y., Pozdeeva E. O., Tronconi A., Venturi G., Vernov S. Y.* Integrable Cosmological Models in the Einstein and in the Jordan Frames and Bianchi-I Cosmology // Phys. Part. Nucl. 2018. V. 49, No. 1. P. 1–4; arXiv:1606.04260.
21. *Kaiser D. I.* Conformal Transformations with Multiple Scalar Fields // Phys. Rev. D. 2010. V. 81. P. 084044; arXiv:1003.1159 [gr-qc].
22. *Chervon S. V.* On the Chiral Model of Cosmological Inflation // Russ. Phys. J. 1995. V. 38. P. 539–543.
23. *Chervon S. V.* Chiral Cosmological Models: Dark Sector Fields Description // Quant. Matt. 2013. V. 2. P. 71–82; arXiv:1403.7452 [gr-qc].
24. *Ivanov V. R., Vernov S. Y.* Integrable Cosmological Models with an Additional Scalar Field // Eur. Phys. J. C. 2021. V. 81, No. 11. P. 985; arXiv:2108.10276.
25. *Ivanov V. R., Vernov S. Y.* New Integrable Chiral Cosmological Models with Two Scalar Fields // Phys. Rev. D. 2024. V. 110. P. 103519; arXiv:2407.12732.
26. *Bars I., Chen S. H., Turok N.* Geodesically Complete Analytic Solutions for a Cyclic Universe // Phys. Rev. D. 2011. V. 84. P. 083513; arXiv:1105.3606 [hep-th].
27. *Ivanov V. R., Vernov S. Y.* Anisotropic Solutions for R^2 Gravity Model with a Scalar Field // Phys. At. Nucl. 2023. V. 86, No. 6. P. 1526–1532; arXiv:2301.06836.