

# ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ В МОДЕЛИ ЛИТИМА–САННИНО

*А. В. Бедняков* \*, *А. И. Мухаева* \*\*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В калибровочной теории  $SU(N_c)$  с  $N_f$  цветными кварками и  $N_f^2$  бесцветными комплексными скалярами получено выражение для нетривиальной ультрафиолетовой неподвижной точки в виде разложения по параметру Венециано вплоть до третьего порядка. Фиксированная точка имеет одномерную критическую поверхность и реализует сценарий асимптотической безопасности. Обсуждается величина конформного окна, а также спектр аномальных размерностей различных операторов.

In the  $SU(N_c)$  gauge theory with  $N_f$  color quarks and  $N_f^2$  colorless complex scalars, we obtain an expression for nontrivial ultraviolet fixed point as an expansion in the Veneziano parameter up to the third order. The fixed point has one-dimensional UV critical surface and perturbatively realizes the asymptotic safety scenario. We discuss conformal window and the spectrum of anomalous dimensions of different operators.

PACS: 03.70.+k; 11.10.Gh

## ВВЕДЕНИЕ

Анализ ультрафиолетовых (УФ) свойств квантово-полевых моделей традиционно играет важную роль при построении самосогласованных теорий в современной физике. Примером здесь служит квантовая хромодинамика (КХД), в которой наблюдается явление асимптотической свободы [1, 2]: сильная константа взаимодействия становится исчезающе малой при увеличении характерного энергетического масштаба. Такая невзаимодействующая теория глюонов и кварков является гауссовой фиксированной точкой ренормгруппового потока в КХД. Сценарий асимптотической безопасности [3] представляет собой обобщение асимптотической свободы, в котором параметры модели в УФ-области стремятся к нетривиальной фиксированной точке с остаточными взаимодействиями. В литературе можно найти обсуждения многочисленных попыток построить как игрушечные модели с асимптотической безопасностью, так

---

\* E-mail: bednya@jinr.ru

\*\* E-mail: mukhaeva@theor.jinr.ru

и реалистичные сценарии, обобщающие Стандартную модель фундаментальных взаимодействий (см., например, недавние обзоры [4–6]).

Характерной особенностью таких сценариев является степенной закон «бега» (в общем случае бесконечного набора) безразмерных констант связи  $\alpha_i \equiv g_i^2/(16\pi^2)$  вблизи нулей  $\alpha^*$  бета-функций  $\beta_i(\alpha^*) = 0$ . Действительно, линеаризируя ренормгрупповой поток

$$\partial_t \alpha_i = \beta_i(\alpha), \quad t \equiv \ln \mu, \quad (1)$$

около фиксированной точки  $\alpha^* = \{\alpha_i^*\}$

$$\partial_t(\alpha_i - \alpha_i^*) = \omega_{ij}(\alpha_j - \alpha_j^*) + \dots, \quad \omega_{ij} \equiv \partial_j \beta_i(\alpha^*), \quad (2)$$

можно получить

$$\alpha_i(\mu) \approx \alpha_i^* + \sum_{j=1}^k c_{ij} \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{\theta_j^{\text{IR}}} + \sum_{j=k+1}^{\infty} c_{ij} \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{\theta_j^{\text{UV}}}, \quad (3)$$

где  $\mu_0$  — УФ-шкала, на которой задается начальное значение  $\alpha_i(\mu_0)$  в окрестности  $\alpha^*$ , а  $\theta_i^{\text{IR,UV}}$  — собственные значения матрицы  $\omega_{ij}$ . Конечному набору отрицательных собственных чисел  $\theta_i^{\text{IR}} < 0$ ,  $i = 1, k$ , соответствуют инфракрасно (ИК) отталкивающие направления. Последние определяют конечномерную УФ критическую поверхность. Небольшие отклонения начальной точки, лежащие на этой поверхности, при продолжении в ИК-область могут привести к значительным отклонениям при  $\mu \ll \mu_0$ . В то же время направления, соответствующие  $\theta_i^{\text{UV}} > 0$ , являются ИК притягивающими, и поэтому отклонения начальной точки, лежащие вне УФ критической поверхности, «вымирают» в ИК-области. Размерность критической поверхности  $k$  является важной характеристикой асимптотически безопасных сценариев, так как определяет число независимых параметров модели в этом случае. Это число обычно (значительно) меньше числа констант связи в исходном наборе  $\alpha_i$  и определяет ИК релевантные возмущения конформной теории, соответствующей  $\alpha_i = \alpha_i^*$ .

Изначальная идея Вайнберга [3] асимптотически безопасной гравитации требует использования непertурбативных методов анализа (см., например, [7, 8]). В данной работе мы рассмотрим несуперсимметричное обобщение КХД с  $N_c$  цветами, в котором может реализоваться асимптотически безопасный сценарий в пертурбативной области параметров, — модель Литима–Саннино [9, 10]. Последняя описывает взаимодействия  $N_f$  цветных дираковских фермионов и  $N_f^2$  мезоноподобных бесцветных скалярных состояний. Модель может быть исследована в рамках теории возмущений в пределе Венециано, т.е. в пределе больших  $N_f$  и  $N_c$ , когда отношение последних, задаваемое параметром  $\epsilon \equiv N_f/N_c - 11/2$ , конечно, но мало.

## МОДЕЛЬ ЛИТИМА–САННИНО

Лагранжиан рассматриваемой четырехмерной модели имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F^{\alpha\mu\nu} F_{\mu\nu}^\alpha + [F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu G_\nu^\alpha - \partial_\nu G_\mu^\alpha + gf^{abc} G_\mu^b G_\nu^c] \\ & + \text{Tr} [\bar{\psi} i \hat{D} \psi] + \text{Tr} [\partial^\mu H^\dagger \partial_\mu H] - y \text{Tr} [\bar{\psi} (H \mathcal{P}_R + H^\dagger \mathcal{P}_L) \psi] - \\ & - m^2 \text{Tr} [H^\dagger H] - u \text{Tr} [(H^\dagger H)^2] - v (\text{Tr} [H^\dagger H])^2, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $G_{\mu\nu}^\alpha$  — калибровочное поле,  $\psi$  соответствует  $N_f$  дираковским цветным полям\*, а комплексная матрица  $H$  размерности  $N_f \times N_f$  описывает бесцветные скаляры. На классическом уровне модель (4) обладает глобальной симметрией  $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ , соответствующей независимым унитарным вращениям левых  $\psi_L = P_L \psi$  и правых  $\psi_R = P_R \psi$  кварковых полей соответственно. Вдобавок к (4) нами были рассмотрены операторы размерности три, нарушающие глобальную симметрию до диагональной подгруппы  $U(N_f)$ :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & -m_\psi \text{Tr} (\bar{\psi} \psi) - \frac{h_2}{2} [\text{Tr} (H H^\dagger H) + \text{h. c.}] - \\ & - \frac{h_3}{2} [\text{Tr} (H H^\dagger) \text{Tr} (H) + \text{h. c.}] \equiv -m_\psi O_1 - h_2 O_2 - h_3 O_3 = -\vec{\kappa} \cdot \vec{O}. \end{aligned} \quad (5)$$

В основе анализа модели лежат ренормгрупповые уравнения для безразмерных констант связи. Удобно ввести следующие обозначения:

$$\alpha_g = \frac{g^2 N_c}{(4\pi)^2}, \quad \alpha_y = \frac{y^2 N_c}{(4\pi)^2}, \quad \alpha_u = \frac{u N_f}{(4\pi)^2}, \quad \alpha_v = \frac{v N_f^2}{(4\pi)^2}, \quad (6)$$

позволяющие записать

$$\partial_t \alpha_i = \mathcal{B}(\alpha_j, \epsilon, N_c) = \beta_i(\alpha_j, \epsilon) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N_c}\right), \quad (7)$$

где лидирующие по  $N_c$  слагаемые  $\beta_i$  (соответствующие пределу Венециано) зависят от  $N_c$  и  $N_f$  только через отношение  $\epsilon$ . Аналогичным образом удобно переопределить размерные константы

$$m'_\psi = m_\psi \sqrt{N_c}, \quad h'_2 = h_2 N_f, \quad h'_3 = h_3 N_f^2, \quad (8)$$

связанные с операторами

$$O'_1 = \frac{1}{\sqrt{N_c}} \text{Tr} [\bar{\psi} \psi], \quad (9)$$

$$O'_2 = \frac{1}{2N_f} (\text{Tr} [H H^\dagger H] + \text{h. c.}), \quad (10)$$

$$O'_3 = \frac{1}{2N_f^2} (\text{Tr} [H H^\dagger] \text{Tr} [H] + \text{h. c.}). \quad (11)$$

\* Здесь и далее мы опускаем цветовые и флейворные индексы.

## СЦЕНАРИЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ: РЕЗУЛЬТАТЫ

Для малого  $\epsilon \ll 1$  можно использовать теорию возмущений и искать фиксированные точки ренормгруппового потока (7) в виде

$$\alpha_x^* = \sum_{i=1}^{\infty} c_x^{(i)} \epsilon^i, \quad x = \{g, y, u, v\}, \quad (12)$$

где предполагается, что в фиксированной точке все размерные параметры (4) и (5) равны нулю. В пределе Венециано коэффициент однопетлевой бета-функции  $\beta_g$  калибровочной константы  $\alpha_g$  пропорционален  $\epsilon$ :

$$\partial_t \alpha_g = \alpha_g^2 \left[ \frac{4}{3} \epsilon + \dots \right]. \quad (13)$$

Поэтому условие  $\epsilon < 0$  соответствует сценарию асимптотической свободы. В данной работе исследован случай  $0 < \epsilon \ll 1$ . Подставляя анзац (12) в бета-функции (7), можно заметить, что однопетлевой и двухпетлевой вклады в  $\beta_g$  имеют один и тот же порядок  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ . Именно этот факт позволяет построить контролируемое разложение вида (12), причем для определения коэффициента  $c_x^{(n)}$  мы должны знать  $(n+1)$ -петлевую бета-функцию  $\alpha_g$  и  $n$ -петлевые вклады в  $\beta_{y,u,v}$ . Учет вкладов таких порядков определяет так называемую  $(n+1, n, n)$ -схему, где первое число обозначает старший порядок  $\beta_g$ , второе — старший порядок  $\beta_y$ , а третье — порядок  $\beta_{u,v}$ . Первые два коэффициента разложения для всех констант связи были получены в работах [10, 11] соответственно. В недавних работах [12, 13] в рамках схемы 433 были найдены коэффициенты  $c_x^{(3)}$ . Кроме того, нами был рассмотрен случай конечного  $N_c$  [6]. Следуя авторам [14], мы определили зависящие от  $N_c$  коэффициенты  $f_x^{(n)}(N_c)$  в разложении

$$\alpha_x^* = c_x^{(1)} f_x^{(1)}(N_c) \epsilon + c_x^{(2)} f_x^{(2)}(N_c) \epsilon^2 + c_x^{(3)} f_x^{(3)}(N_c) \epsilon^3 \quad (14)$$

вплоть до третьего порядка по  $\epsilon$ . При этом предполагается, что коэффициенты удовлетворяют  $\lim_{N_c \rightarrow \infty} f_x^{(n)}(N_c) = 1$ . Выражения для  $f_x^{(n)}(N_c)$  довольно громоздки и в работе [13] представлены в приближенном виде. В дальнейшем мы рассмотрим случай  $N_c \rightarrow \infty$  и лишь в конце прокомментируем, как ситуация меняется при учете конечных  $N_c$ .

В пределе Венециано среди решений системы уравнений на  $c_x^{(n)}$ , возникающих из условия  $\beta_i(\alpha_j^*) = 0$ , можно выделить\* фиксированную

---

\* Коэффициенты известны аналитически.

точку [12, 13]

$$\begin{aligned}\alpha_g^* &= 0,456\epsilon + 0,781\epsilon^2 + 6,610\epsilon^3, \\ \alpha_y^* &= 0,211\epsilon + 0,508\epsilon^2 + 3,322\epsilon^3, \\ \alpha_u^* &= 0,200\epsilon + 0,440\epsilon^2 + 2,693\epsilon^3, \\ -\alpha_v^* &= 0,137\epsilon + 0,632\epsilon^2 + 4,313\epsilon^3,\end{aligned}\tag{15}$$

для которой УФ критическая поверхность одномерна. Соответственно, собственные значения  $\theta_i$  матрицы  $\omega$  удовлетворяют соотношению

$$\theta_1(\alpha^*) < 0 < \theta_{2,3,4}(\alpha^*).\tag{16}$$

В пределе  $N_c \rightarrow \infty$  получаем [12, 13]

$$\begin{aligned}-\theta_1 &= 0,608\epsilon^2 - 0,707\epsilon^3 - 6,947\epsilon^4, \\ \theta_2 &= 2,737\epsilon + 6,676\epsilon^2 + 22,120\epsilon^3, \\ \theta_3 &= 2,941\epsilon + 1,041\epsilon^2 + 5,137\epsilon^3, \\ \theta_4 &= 4,039\epsilon + 9,107\epsilon^2 + 38,646\epsilon^3.\end{aligned}\tag{17}$$

Таким образом, только одна линейная комбинация операторов размерности четыре оказывается ИК существенной. Также можно исследовать, как квантовые поправки модифицируют каноническую размерность  $d_O$  некоторого оператора  $O$ :

$$\Delta_O = d_O + \gamma_O^*, \quad \gamma_O^* \equiv \gamma_O(\alpha^*),\tag{18}$$

где  $\gamma_O^*$  — значение аномальной размерности оператора в фиксированной точке. Актуальной задачей является определение величины конформного окна, т. е. максимального значения  $\epsilon_{\max}$ , при котором реализуется сценарий асимптотической безопасности. При этом обычно накладываются следующие ограничения (см., например, [10, 15]):

- пертурбативность, условно характеризующаяся  $0 < |\alpha_x| \lesssim 1$ ;
- отсутствие слияния УФ и ИК фиксированных точек, соответствующее изменению знака у критических индексов  $\theta_i$ ;
- стабильность вакуума, в древесном случае выражающееся условием  $\alpha_u^* > 0$ ,  $\alpha_u^* + \alpha_v^* > 0$ ;
- унитарность теории в фиксированной точке, соответствующая тому, что критические размерности скалярных операторов в четырехмерии должны удовлетворять  $\Delta_O \geq 1$  [16].

Рассмотрим пока первые три из этих условий. Исходя из выражений (15) и (17), нетрудно заметить, что граница пертурбативности соответствует  $\alpha_g^* = 1$ , слияние фиксированных точек может произойти при  $\theta_1 = 0$ , а граница стабильности вакуума древесного потенциала возникает, когда  $\alpha_u^* + \alpha_v^* = 0$ . На рис. 1 показана зависимость максимального значения  $\epsilon_{\max}$  от  $N_c$ , получаемого из соответствующих условий в рамках схемы 433. Штриховые линии получены в пределе Венециано. Наиболее сильным условием здесь является условие стабильности вакуума. Исто-

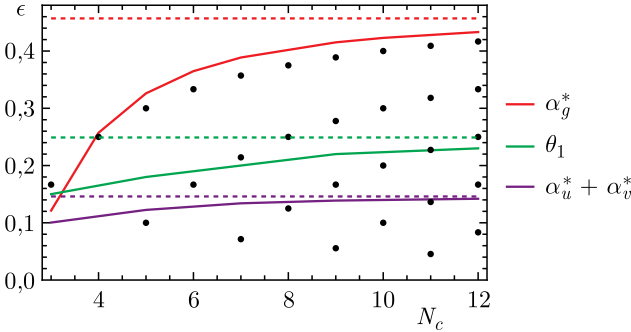


Рис. 1. Зависимость от  $N_c$  значения  $\epsilon$ , удовлетворяющего условию  $\alpha_g^* = 1$ ,  $\theta_1 = 0$  и  $\alpha_u^* + \alpha_v^* = 0$  соответственно. Штриховые линии отвечают случаю  $N_c \rightarrow \infty$ . Точками обозначены значения  $\epsilon$ , при которых  $N_f$  оказывается целочисленным

для из рисунка, можно найти пары  $(N_c, N_f)$ , соответствующие точкам, лежащим под кривой  $\alpha_u^* + \alpha_v^* = 0$ :

$$(N_c, N_f) = (5, 28), (7, 39), (8, 45), (9, 50), (10, 56), (11, 61), \\ (11, 62), (12, 67) \dots \quad (19)$$

Именно при этих значениях числа цветов и ароматов потенциально реализуется сценарий асимптотической безопасности [12, 13]. В работе [13] также была рассмотрена возможность получать ограничения с использованием различных аппроксимантов Падэ (см. [12]) для возникающих рядов по  $\epsilon$ . Однако наш предварительный анализ [13] показал, что малое число известных коэффициентов разложения не дает построить надежные аппроксиманты, и поэтому требуется более тщательное исследование.

Вернемся теперь к условию унитарности, накладываемому на критические размерности операторов. Авторами [12] с помощью подхода вспомогательных (dimпу) полей были найдены аномальные размерности параметров  $m^2$  и  $m_\psi$ . Последние соответствуют операторам  $\text{Tr}[H^\dagger H]$  и  $\text{Tr}[\bar{\psi}\psi] = O_1$ . Первый не нарушает исходную глобальную симметрию, а второй, как указывалось ранее, является оператором размерности три и наряду с  $O_{2,3}$  нарушает симметрию до диагональной  $U(N_f)$ . В фиксированной точке (15) оказалось, что выражение для  $\gamma_{m^2}$  всегда положительно, а  $\gamma_{m_\psi}$  представляет собой знакопеременный ряд, причем коэффициент при  $\epsilon$  отрицательный. Данная ситуация потенциально могла привести к нарушению условия унитарности. Несмотря на то, что для значений  $\epsilon_{\max}$ , полученных ранее, условие унитарности не нарушалось, нами в работе [13] было показано, что игнорирование смешивания операторов  $O_{1,2,3}$  приводит к неправильному результату.

Было рассмотрено семейство четырех операторов размерности три: помимо  $\bar{O}$ , мы также учли смешивание с  $O_4 = 1/2 [\partial^2 \text{Tr}[H] + \text{h. c.}]$ ,

который входит в уравнение движения (в терминах «голых» величин):

$$(O_4)_{\text{bare}} + \vec{\Lambda}_{\text{bare}} \cdot \vec{O}_{\text{bare}} = 0, \quad \vec{\Lambda}_{\text{bare}} \equiv \{y/2, 2u, 2v\}_{\text{bare}}. \quad (20)$$

Перенормированные операторы  $[\vec{O}]_R$  выражаются через операторы, записанные через голые поля как

$$[\vec{O}]_R = Z_O \cdot \vec{O}_{\text{bare}} + \vec{Z} \cdot (O_4)_{\text{bare}}, \quad [O_4]_R = Z_H^{-1/2} (O_4)_{\text{bare}}.$$

Здесь  $Z_H$  — константа перенормировки поля  $H$ , а  $Z_O$  и  $\vec{Z}$  — матрица  $3 \times 3$  и трехмерный вектор констант перенормировки соответственно. Последние можно объединить в матрицу  $\vec{Z}_O$  размерности  $4 \times 4$ , схематически показанную на рис. 2. Матрица  $\vec{Z}_O$  определяет аномальную размерность семейства операторов:

$$\vec{\gamma}_O \equiv -(\partial_t \vec{Z}_O) \cdot \vec{Z}_O^{-1}, \quad (21)$$

которая в фиксированной точке (при  $N_c \rightarrow \infty$ ) имеет следующие собственные значения [13]:

$$\gamma_H^* = \gamma_1 = -\gamma_2 = 0,21053\epsilon + 0,46247\epsilon^2 + 2,47105\epsilon^3, \quad (22)$$

$$\gamma_3 = 2,22982\epsilon + 3,88519\epsilon^2 + 20,5012\epsilon^3, \quad (23)$$

$$\gamma_4 = 1,68082\epsilon + 0,98321\epsilon^2 + 5,03949\epsilon^3. \quad (24)$$

Можно заметить, что два собственных значения  $\gamma_{1,2}$  отличаются знаком и равны по модулю аномальной размерности поля  $\gamma_H^*$ . В нашей работе

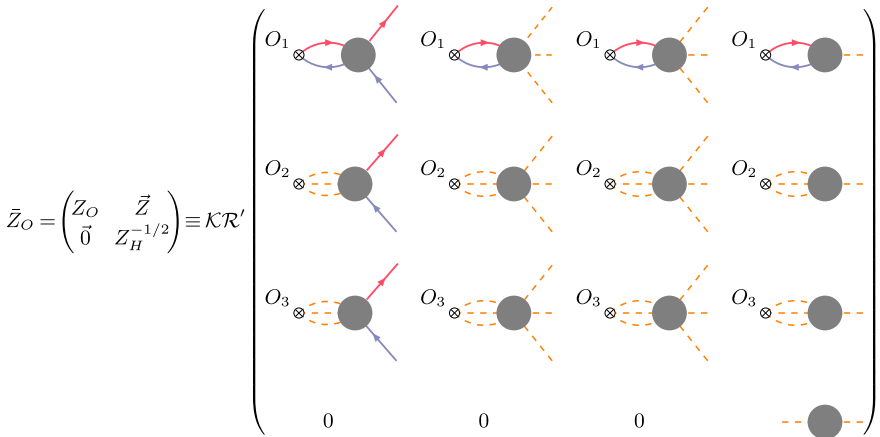


Рис. 2. Матрица констант перенормировки операторов размерности три [6]. Схематически показаны диаграммы, дающие вклады в матричные элементы при применении  $R$ -операции без последнего вычитания  $\mathcal{KR}'$ . Штриховые линии соответствуют скалярам  $H$ , сплошные линии со стрелками — левым и правым фермионам

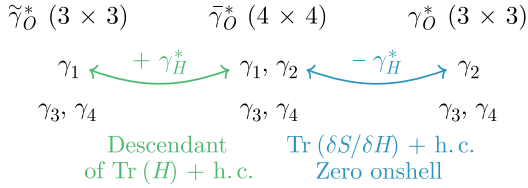


Рис. 3. Матричные аномальные размерности и их собственные значения. Отрицательное собственное значение  $\gamma_2 = -\gamma_H^*$  соответствует оператору, исчезающему при учете уравнений движения, а  $\gamma_1 = \gamma_H^*$  — линейной комбинации  $O_{1,2,3}$ , являющейся потомком оператора  $\partial^2 \text{Tr}(H) + \text{h. c.}$

мы показали, что отрицательное собственное значение  $\gamma_2$  соответствует линейной комбинации операторов  $\propto \text{Tr}[\delta S/\delta H]$ , где  $S$  — действие теории, и исчезающей на уравнениях движения. В то же время  $\gamma_1 = \gamma_H^*$  можно интерпретировать как линейную комбинацию операторов  $O_{1,2,3}$ , которая является «потомком» оператора  $\text{Tr}[H]$  и имеет такую же аномальную размерность. Действительно, подставляя  $(O_4)_{\text{bare}}$  из уравнения движения (20) в (21), можно определить матрицу  $\tilde{Z}_O$  размерности  $3 \times 3$  и соответствующую аномальную размерность  $\tilde{\gamma}_O$ :

$$\tilde{Z}_O = Z_O - \vec{Z} \otimes \Lambda_{\text{bare}}, \quad \tilde{\gamma}_O \equiv -(\partial_t \tilde{Z}_O) \cdot \tilde{Z}_O^{-1}, \quad (25)$$

собственные значения которой оказываются равными  $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4$  из (22)–(24). На рис. 3 мы схематически представили обсуждаемые матрицы аномальных размерностей\* в фиксированной точке  $\gamma_O^*, \tilde{\gamma}_O^*$  и  $\tilde{\gamma}_O^*$ , а также соотношения между соответствующими собственными значениями.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы на основе прямых расчетов бета-функций  $\beta_x$  в схеме 433 получили выражения для фиксированной точки, вблизи которой реализуется сценарий асимптотической безопасности. Мы подтвердили результаты работы [12], полученные в пределе Венециано, и обобщили ответ на случай конечного числа цветов  $N_c$ . Мы также провели расчет аномальных размерностей семейства операторов, входящих в уравнение движения для скалярного поля  $H$ . Учет смешивания операторов и уравнений движения позволил показать, что все аномальные размерности положительны в рамках рассматриваемого сценария и не представляют угрозы для унитарности теории. Мы рассмотрели различные ограничения на величину конформного окна при конечных  $N_c$  и показали, что наиболее сильное ограничение возникает из условия стабильности вакуума. При этом зависимость максимального значения параметра Венециано  $\epsilon$  от  $N_c$  в этом случае оказывается довольно слабой,

\*  $\gamma_O^*$  вычислена стандартным способом из матрицы  $Z_O$ , входящей в (21).



что позволяет использовать асимптотическое значение  $\epsilon_{\max}$  при нахождении пар  $(N_c, N_f)$ , для которых реализуется изучаемый сценарий. В заключение заметим, что актуальной задачей является учет радиационных поправок к эффективному потенциалу [17], а также расчет следующих порядков разложения по  $\epsilon$  в рамках схемы 544.

**Благодарности.** Мы благодарны М. Компаниецу за полезные обсуждения и помощь с анализом аппроксимантов Падэ. Также мы хотим сказать спасибо организаторам Научной сессии секции ядерной физики ОФН РАН за возможность выступить с результатами, представленными в данной работе.

**Финансирование работы.** Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Объединенного института ядерных исследований. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

**Конфликт интересов.** Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gross D. J., Wilczek F.* Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories // *Phys. Rev. Lett.* 1973. V. 30. P. 1343–1346.
2. *Politzer H. D.* Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? // *Phys. Rev. Lett.* 1973. V. 30. P. 1346–1349.
3. *Weinberg S.* Ultraviolet Divergences in Quantum Theories of Gravitation // *General Relativity: An Einstein Centenary Survey.* 1980. P. 790–831.
4. *Hiller G., Hormigos-Feliu C., Litim D. F., Steudtner T.* Model Building from Asymptotic Safety with Higgs and Flavor Portals // *Phys. Rev. D.* 2020. V. 102, No. 9. P. 095023; arXiv:2008.08606.
5. *Eichhorn A., Schiffer M.* Asymptotic Safety of Gravity with Matter. arXiv:2212.07456. 2022.
6. *Bednyakov A., Mukhaeva A.* Perturbative Asymptotic Safety and Its Phenomenological Applications // *Symmetry.* 2023. V. 15, No. 8. P. 1497; arXiv:2309.08258.
7. *Dupuis N., Canet L., Eichhorn A., Metzner W., Pawłowski J. M., Tissier M., Wschebor N.* The Nonperturbative Functional Renormalization Group and Its Applications // *Phys. Rep.* 2021. V. 910. P. 1–114; arXiv:2006.04853.
8. *Bonanno A., Eichhorn A., Gies H., Pawłowski J. M., Percacci R., Reuter M., Saueressig F., Vacca G. P.* Critical Reflections on Asymptotically Safe Gravity // *Front. Phys.* 2020. V. 8. P. 269; arXiv:2004.06810.
9. *Antipin O., Gillioz M., Mølgaard E., Sannino F.* The  $a$  Theorem for Gauge–Yukawa Theories beyond Banks–Zaks Fixed Point // *Phys. Rev. D.* 2013. V. 87, No. 12. P. 125017; arXiv:1303.1525 [hep-th].
10. *Litim D. F., Sannino F.* Asymptotic Safety Guaranteed // *J. High Energy Phys.* 2014. V. 12. P. 178; arXiv:1406.2337 [hep-th].

11. *Bond A. D., Litim D. F., Medina Vazquez G., Steudtner T.* UV Conformal Window for Asymptotic Safety // *Phys. Rev. D.* 2018. V. 97, No. 3. P. 036019; arXiv:1710.07615.
12. *Litim D. F., Riyaz N., Stamou E., Steudtner T.* Asymptotic Safety Guaranteed at Four-Loop Order // *Phys. Rev. D.* 2023. V. 108, No. 7. P. 076006; arXiv: 2307.08747.
13. *Bednyakov A. V., Mukhaeva A. I.* Asymptotic Safety in the Litim–Sannino Model at Four Loops // *Phys. Rev. D.* 2024. V. 109, No. 6. P. 065030; arXiv: 2312.12128.
14. *Bond A. D., Litim D. F., Vazquez G. M.* Conformal Windows beyond Asymptotic Freedom // *Phys. Rev. D.* 2021. V. 104, No. 10. P. 105002; arXiv:2107.13020.
15. *Litim D. F., Mojaza M., Sannino F.* Vacuum Stability of Asymptotically Safe Gauge–Yukawa Theories // *J. High Energy Phys.* 2016. V. 01. P. 081; arXiv: 1501.03061.
16. *Mack G.* All Unitary Ray Representations of the Conformal Group  $SU(2, 2)$  with Positive Energy // *Commun. Math. Phys.* 1977. V. 55. P. 1.
17. *Steudtner T.* Effective Potential and Vacuum Stability in the Litim–Sannino Model // *J. High Energy Phys.* 2024. V. 05. P. 149; arXiv:2402.16950.