

## СПЕКТР ЭНЕРГИИ ВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ В МЕЗОННОМ ГЕЛИИ

*А. В. Эскин*<sup>1,\*</sup>, *В. И. Коробов*<sup>1,2</sup>, *А. П. Мартыненко*<sup>1</sup>,  
*Ф. А. Мартыненко*<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Самарский национальный исследовательский университет, Самара, Россия

<sup>2</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В рамках вариационного метода в квантовой электродинамике выполнен расчет уровней энергии возбужденных состояний в мезонном гелии и сигма-гиперонном гелии. Для расчета использовался базис из экспоненциальных волновых функций. Учтены ведущие релятивистские поправки, ведущие радиационные (собственная энергия и поляризация вакуума) поправки и поправки на отдачу.

Within the framework of the variational method in quantum electrodynamics, the energy levels of excited states in meson helium and sigma-hyperon helium are calculated. For the calculations, a basis of exponential wave functions is used. The leading relativistic corrections, radiation (self-energy and vacuum polarization) corrections and recoil corrections are taken into account.

PACS: 12.15.–y; 11.10.St; 12.20.Ds; 36.10.Dr

### ВВЕДЕНИЕ

Прецизионное исследование уровней энергии экзотических связанных состояний частиц представляло и продолжает представлять собой важное направление исследования фундаментальных взаимодействий частиц. Самые точные эксперименты в физике связаны с измерением частот перехода между уровнями энергии в атоме водорода, позитронии, мюонии, легких мюонных атомов и других систем [1–4]. Если в первые десятилетия после создания квантовой электродинамики основной упор делался именно на атом водорода, позитроний, мюоний, то со временем и в экспериментальные, и в теоретические исследования стали включаться другие экзотические системы, такие как ион позитрония, мюонный водород, мюонный гелий и др. Хотя экзотические атомы и имеют короткое время жизни, с ними можно проводить такие эксперименты, которые позволяют заглянуть в область, недоступную для исследования со стабильными системами. Среди трехчастичных экзотических атомов выделяется

---

\* E-mail: eskinalexey1992@gmail.com

атом мюонного гелия, для которого было измерено сверхтонкое расщепление основного состояния в [5]. Новое экспериментальное измерение сверхтонкой структуры дало результат 4464,980(20) МГц [6], который на 0,4 МГц отличается от теоретических расчетов [7]. Число изучаемых трехчастичных экзотических систем продолжает расти. Появляются различные экспериментальные коллаборации с целью исследования свойств таких связанных состояний и получения при работе с ними более точных значений фундаментальных параметров Стандартной модели. Две коллаборации (ASACUSA и PiHe) были созданы для исследования антипротонного гелия и пионного гелия [8–10]. Уже проведенные эксперименты свидетельствуют об успешной реализации намеченных программ. Исследование адронных экзотических атомов имеет важное значение для более точного определения масс пи-мезона, каона, антипротона и др.

## 1. ОБЩИЙ ФОРМАЛИЗМ

Когда массивная отрицательно заряженная частица  $X = (\pi^-, K^-, \Sigma^-, \bar{p})$  замедляется в гелиевой мишени, она может заменить один из электронов атома гелия и оказаться в высоковозбужденном состоянии с главным и орбитальным квантовыми числами  $(n, \ell)$ , где  $n$  — главное квантовое число, а  $\ell$  — орбитальный угловой момент  $X$ -частицы. Такие возбужденные состояния претерпевают оже-переходы на более низкие энергетические уровни, где отрицательно заряженная частица теряется либо из-за поглощения ядром гелия (как в случае с  $\pi^-, K^-$ ), либо через аннигиляцию с нуклоном (как в случае  $\bar{p}$ ).

Для расчета уровней энергии введем гамильтониан трехчастичной системы, который в системе центра масс в нерелятивистском приближении содержит парное кулоновское взаимодействие частиц [11]:

$$H = T + V = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + \frac{\mathbf{p}_3^2}{2m_3} + \frac{z_1 z_2}{R} + \frac{z_1 z_3}{r_1} + \frac{z_2 z_3}{r_2}, \quad (1)$$

где  $T$  и  $V$  обозначают операторы кинетической и потенциальной энергии, а импульсы частиц удовлетворяют соотношению  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0$ . Частицы нумеруются следующим образом: 1 — для ядра гелия-4, 2 — для каона (или  $\Sigma^-$ ) и 3 — для электрона соответственно. Заряды частиц обозначаются как  $z_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ), а  $\mathbf{R} = \mathbf{r}_{12} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{13} = \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{23} = \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_2$ , где  $\mathbf{R}_a$  — координаты частиц в системе центра масс.

Поскольку каонные метастабильные состояния погружены в электронный континуум, эти состояния являются квазисвязанными для оже-распада. Для определения уровней энергии в этом случае можно применить метод комплексного вращения координат (CCR) [12]. При использовании этого метода выполняется следующее комплексное преобразование

гамильтониана:

$$H \rightarrow H(\theta) = T \exp(-2i\theta) + V \exp(-i\theta), \quad (2)$$

которое возникает при соответствующем преобразовании координат:  $r \rightarrow r \exp(i\theta)$ , где угол поворота  $\theta$  является вещественным и положительным. В комплексной плоскости энергии при достаточно больших значениях  $\theta$  это преобразование поворачивает непрерывный спектр гамильтониана, обнажая резонансные полюса вокруг порогов от нефизического листа к физическому листу римановой поверхности, а полюса связанных состояний остаются неизменными в отрицательной части действительной оси энергии. Было показано, что резонансы возникают в виде комплексных уровней энергии, а соответствующие волновые функции являются квадратично интегрируемыми. Данный метод подробно описан в работе [11].

Для улучшения точности расчета уровней энергии мы учитываем вклад ряда других слагаемых в спин-независимой части гамильтониана Брейта–Паули [1, 2], имеющих следующий вид:

$$H^{(2)} = \alpha^2 \left\{ -\frac{\mathbf{p}_1^4}{8m_1^3} - \frac{\mathbf{p}_2^4}{8m_2^3} - \frac{\mathbf{p}_3^4}{8m_3^3} + \frac{z_{\text{He}}\pi}{2m_e^2} \delta(\mathbf{r}_1) + \frac{z_X\pi}{2m_e^2} \delta(\mathbf{r}_2) - \sum_{a>b} \frac{z_a z_b}{2m_a m_b} \left[ \frac{\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b}{r_{ab}} + \frac{\mathbf{r}_{ab} \cdot (\mathbf{r}_{ab} \cdot \mathbf{p}_a) \mathbf{p}_b}{r_{ab}^3} \right] \right\}. \quad (3)$$

Вклад этих слагаемых оператора взаимодействия в спектр энергии вычислялся с использованием преобразованной волновой функции в рамках ССР-метода [11]. Этот релятивистский вклад главного порядка рассчитывается с использованием повернутой волновой функции. Были учтены дарвиновские члены для электрона в электрическом поле ядра гелия и  $K$ -мезона (частицы  $\Sigma^-$ ) ( $m_e = m_3 = 1$ ). Поскольку тяжелые отрицательно заряженные адроны движутся по почти круговым орбитам в случае метастабильных состояний, представляющих спектроскопический интерес, математическое ожидание оператора  $\delta(\mathbf{R})$  близко к нулю из-за сильного отталкивающего центробежного барьера.

В наших расчетах учтена также поправка на конечный размер ядра, которая определяется матричными элементами дельта-функций в виде [3]

$$E_{\text{nuc}}^{(2)} = \frac{2\pi z_{\text{He}} \left( \frac{R_{\text{He}}}{a_0} \right)^2}{3} \langle \delta(\mathbf{r}_1) \rangle, \quad (4)$$

где  $R_{\text{He}}$  — среднеквадратичный (rms) радиус распределения заряда ядра  $\text{He}^4$ :  $R_{\text{He}} = 1,6757(26)$  фм [13]. Суммарный вклад (3) и (4) обозначается далее  $E^{(2)}$ :

$$E^{(2)} = \langle H^{(2)} \rangle + E_{\text{nuc}}^{(2)}. \quad (5)$$

Радиационные поправки лидирующего порядка  $R_\infty \alpha^3$  определяются в спектре энергии следующим выражением [14–16]:

$$E^{(3)} = \frac{4\alpha^3}{3} \left( -\ln \alpha^2 - \beta(n, \ell) + \frac{19}{30} \right) [z_{\text{He}} \langle \delta(\mathbf{r}_1) \rangle + z_X \langle \delta(\mathbf{r}_2) \rangle] + \\ + \frac{2\alpha^3}{3} \left( -\ln \alpha - 4\beta(n, \ell) + \frac{31}{3} \right) \left[ \frac{z_{\text{He}}^2}{m_{\text{He}}} \langle \delta(\mathbf{r}_1) \rangle + \frac{z_X^2}{m_X} \langle \delta(\mathbf{r}_2) \rangle \right] - \\ - \frac{14\alpha^3}{3} \left[ \frac{z_{\text{He}}^2}{m_{\text{He}}} Q(r_1) + \frac{z_X^2}{m_X} Q(r_2) \right], \quad (6)$$

где  $Q(r)$  — члены Араки–Сачера [17, 18]:

$$Q(r) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\langle \frac{\Theta(r - \rho)}{4\pi r^3} + (\ln \rho + \gamma_E) \delta(\mathbf{r}) \right\rangle. \quad (7)$$

Вклад  $Q$ -члена от взаимодействия тяжелых частиц можно эффективно считать равным нулю. Уравнение (6) содержит логарифм Бете, который определяется следующей формулой:

$$\beta(n, \ell) = \frac{\left\langle \mathbf{J}(H - E^{(0)}) \ln \left[ \frac{(H - E^{(0)})}{R_\infty} \right] \mathbf{J} \right\rangle}{\left\langle \frac{[\mathbf{J}, [H, \mathbf{J}]]}{2} \right\rangle}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{J}$  — оператор плотности электрического тока системы:  $\mathbf{J} = \sum_a z_a \mathbf{p}_a / m_a$ .

Для оценки  $\beta(n, \ell)$  используется адиабатический эффективный потенциал  $\beta(R)$  для задачи двух центров, как в работе [19].

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Выполнен расчет уровней энергии возбужденных состояний в трехчастичном атоме мезонного и сигма-гиперонного гелия.

При исследовании уровней энергии в пионном и каонном гелии в предыдущей работе [20, 21] мы использовали вариационные функции двух типов: экспоненциальные и гауссовские. Для расчета метастабильных состояний трехчастичных систем в данной работе использовался метод комплексного вращения координат, а вариационные волновые функции выбирались в экспоненциальном виде, как в рабо-

тах [8, 11]. В табл. 1, 2 представлены результаты численного расчета нерелятивистских энергий и различных матричных элементов гамильтониана, определяющих поправки к этим уровням в случае каонного гелия и  $\Sigma^-$ -гиперонного гелия. Массы  $K^-$ -мезона и  $\Sigma^-$ -гиперона равны соответственно 493,677(13), 1197,45(4) МэВ. Для того чтобы орбиты электрона и мезона (гиперона) приблизительно совпадали, необходимо рассматривать возбужденные состояния с главным квантовым числом порядка  $n \sim \sqrt{\mu/m_e} \sim 29$  ( $K^-$ -мезон),  $n \sim \sqrt{\mu/m_e} \sim 42$  ( $\Sigma^-$ -гиперон).

**Таблица 1. Численные значения нерелятивистских энергий возбужденных состояний и поправок для каонного гелия-4 в электронных атомных единицах**

$(n, l)$	$E_{nr}$	$\mathbf{p}_1^4$ $\mathbf{p}_2^4$ $\mathbf{p}_3^4$	$Q(r_1)$ $Q(r_2)$ $Q(r_{12})$	$\delta(\mathbf{r}_{13})$ $\delta(\mathbf{r}_{23})$	$R_{12}$ $R_{13}$ $R_{23}$
(28, 26)	-2,93144359	10959082 10961011 42,747028	0,698078 -1,916781 0,149788	1,427408 0,067957	6728,0429 5,7413995 2,2109540
(28, 27)	-2,91521778	9532455,7 9525355,9 41,350437	0,622635 -1,856872 0,157072	1,386028 0,070633	6092,2723 5,5287062 2,0623499
(29, 27)	-2,81667969	8574272,3 8569162,9 46,769877	0,521465 -2,090888 0,142225	1,548177 0,057095	5385,9675 7,0653091 1,7336888
(29, 28)	-2,80020578	7448968,8 7437460,3 45,555405	0,465246 -2,038738 0,149760	1,512156 0,058871	4881,3561 6,8700349 1,6142531
(30, 28)	-2,71879220	6631874,7 6622439,7 50,884008	0,387600 -2,268832 0,132268	1,671549 0,167154	4279,1355 8,3149204 1,3533165
(30, 29)	-2,70242817	5712562,8 5698486,2 49,986467	0,343964 -2,230252 0,139371	1,644920 0,047366	3860,1316 8,1855636 1,2461250
(31, 28)	-2,65055300	5877807,2 5869926,9 55,549496	0,324735 -2,470407 0,114874	1,811230 0,037086	3747,4561 9,5524952 1,1443766
(31, 29)	-2,63573255	5065703,3 5053833,5 54,993269	0,286373 -2,446510 0,120259	1,794717 0,037088	3371,6563 9,4909612 1,0492153
(31, 30)	-2,61990319	4312969,5 4297765,8 54,476856	0,252151 -2,424268 0,126252	1,779375 0,036647	3020,1541 9,4425596 0,9530652

**Таблица 2. Численные значения нерелятивистских энергий возбужденных состояний и матричные элементы поправок для сигма-гиперонного гелия-4 в электронных атомных единицах**

$(n, l)$	$E_{nr}$	$P_1^4$ $P_2^4$ $P_3^4$	$Q(r_1)$ $Q(r_2)$ $Q(r_{12})$	$\delta(\mathbf{r}_{13})$ $\delta(\mathbf{r}_{23})$	$R_{12}$ $R_{13}$ $R_{23}$
(38, 36)	-3,15601970	65130890 65175142 35,905089	1,058745 -1,620968 0,159801	1,2223376 0,0881314	18975,041 2,5075989 3,7414869
(37, 35)	-3,27238545	76074735 76142913 33,461894	1,289743 -1,515041 0,160525	1,1488518 0,0960665	21922,922 1,4519854 4,3026975
(39, 38)	-3,04005002	33741406 33739464 41,603239	0,594397 -1,867825 0,157571	1,2671453 0,0824779	11306,870 4,4346121 2,7874984
(40, 38)	-2,95663637	31294272 31293940 45,581541	0,522565 -2,039736 0,146770	1,3806071 0,0720710	10347,725 5,6642370 2,4630556
(41, 38)	-2,88266679	28835130 28835556 49,332014	0,459568 -2,201630 0,135102	1,4905204 0,0626129	9434,4392 6,7992575 2,1781738
(40, 39)	-2,94530596	28210755 28200660 44,657932	0,481473 -1,999921 0,152340	1,3493320 0,0740978	9631,9228 5,4741190 2,3880289
(41, 39)	-2,87177831	26035234 26027143 48,598744	0,422295 -2,170140 0,140024	1,4640489 0,0641850	8778,6765 6,6498973 2,1097876
(42, 39)	-2,80670960	23912616 23905907 52,235298	0,370931 -2,327183 0,127360	1,5733791 0,0553188	7982,1654 7,7156580 1,8686946
(41, 40)	-2,86022472	23395253 23379122 47,825738	0,388340 -2,136843 0,145505	1,4355257 0,0657311	8159,8084 6,4997393 2,0332524
(42, 40)	-2,79567721	21503016 21489207 51,658518	0,340006 -2,302384 0,131994	1,5500844 0,0564092	7411,1371 7,6100345 1,7971157
(42, 41)	-2,78402939	19226486 19206124 51,072429	0,311643 -2,277129 0,137104	1,5252245 0,0574575	6869,6120 7,5070637 1,7200972
(43, 41)	-2,72761687	17625943 17608150 54,716990	0,272666 -2,434575 0,122830	1,6379216 0,0488646	6224,8320 8,5373561 1,5225496

В последнем столбце табл. 1, 2 представлены эффекты отдачи, которые определяются следующими матричными элементами:

$$\begin{aligned}
 R_{12} &= - \left\langle \frac{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}{r_{12}} + \frac{\mathbf{r}_{12} (\mathbf{r}_{12} \mathbf{p}_1) \mathbf{p}_2}{r_{12}^3} \right\rangle, \\
 R_{13} &= - \left\langle \frac{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_3}{r_{13}} + \frac{\mathbf{r}_{13} (\mathbf{r}_{13} \mathbf{p}_1) \mathbf{p}_3}{r_{13}^3} \right\rangle, \\
 R_{23} &= - \left\langle \frac{\mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3}{r_{23}} + \frac{\mathbf{r}_{23} (\mathbf{r}_{23} \mathbf{p}_2) \mathbf{p}_3}{r_{23}^3} \right\rangle.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Численные значения поправок, которые представлены выше общими формулами, выписаны в табл. 3 для некоторых переходов, которые можно использовать в эксперименте.

Таблица 3. Численные значения вкладов для перехода (30, 29) → (30, 28) в каонном гелии-4 и (38, 36) → (37, 35) в сигма-гиперонном гелии-4 (в кГц)

Вклад в энергию перехода	Каонный гелий ( $K^- e \ ^4\text{He}$ )	Сигма-гиперонный гелий ( $\Sigma^- e \ ^4\text{He}$ )
$\Delta E_{nr}$	107670455,6	765647981,8
$\Delta E^{(2)}$	9688,4	-21737,0
$\Delta E^{(3)}$	-1158,8	3267,5
$\Delta E_{tot}$	107678985,3	765629512,3

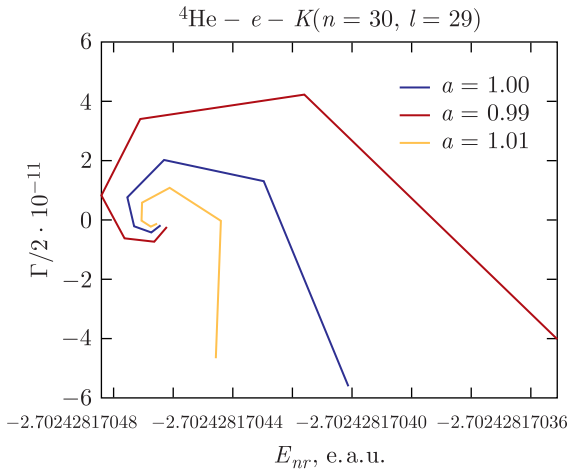


Рис. 1. Ротационные пути для резонанса в системе ( $^4\text{He} - K^- - e$ ). Узел в центре графика соответствует стационарной точке, определяющей положение резонанса  $E$  в комплексной плоскости энергий

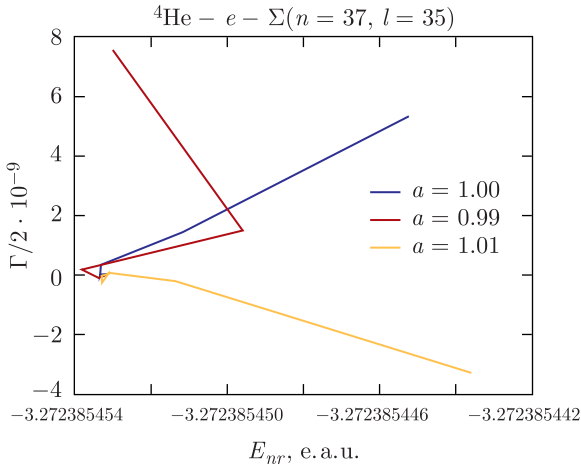


Рис. 2. Ротационные пути для резонанса в системе ( ${}^4\text{He} - e - \Sigma(n = 37, l = 35)$ ). Узел в центре графика соответствует стационарной точке, определяющей положение резонанса  $E$  в комплексной плоскости энергий

На рис. 1, 2 показаны результаты расчета комплексных значений энергий для двух состояний. Для фиксированного значения параметра дилатации  $a$  показаны несколько последовательных значений вычисленной энергии при различных значениях  $\theta$ , которые меняются от 0,12 до 0,24 с шагом 0,02. Численные значения энергии сходятся к узловой точке, определяющей положение резонанса. Три кривые для каждого графика соответствуют разным, но близким значениям параметра дилатации  $a = e^{\text{Re}[\theta]}$ .

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 23-22-00143).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bethe H. A., Salpeter E. E.* Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms. New York: Plenum Publishing Co., 1977.
2. *Berestetsky V. B., Lifshitz E. M., Pitaevsky L. P.* Quantum Electrodynamics. Oxford: Pergamon, 1982.
3. *Sapirstein J. R., Yennie D. R.* Quantum Electrodynamics / Ed. by T. Kinoshita. Singapore: World Sci., 1990.
4. *Eides M. I., Grotch H., Shelyuto V. A.* Theory of Light Hydrogenic Bound States // Phys. Rep. 2001. V. 342. P. 61.
5. *Gardner C. J., Badertscher A., Beer W. et al.* Precise Measurement of the Hyperfine-Structure Interval and Zeeman Effect in the Muonic Helium Atom // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 1168.



6. *Strasser P., Fukumura S., Iwai R. et al.* Improved Measurements of Muonic Helium Ground-State Hyperfine Structure at a Near-Zero Magnetic Field // *Phys. Rev. Lett.* 2023. V. 131. P. 253003.
7. *Faustov R. N., Korobov V. I., Martynenko A. P., Martynenko F. A.* Ground-State Hyperfine Structure of Light Muon–Electron Ions // *Phys. Rev. A.* 2022. V. 105. P. 042816.
8. *Hori M., Sóter A., Korobov V. I.* Proposed Method for Laser Spectroscopy of Pionic Helium Atoms to Determine the Charged-Pion Mass // *Phys. Rev. A.* 2014. V. 89. P. 042515.
9. *Hori M., Aghai-Khozani H., Sóter A. et al.* Laser Spectroscopy of Pionic Helium Atoms // *Nature.* 2020. V. 581. P. 37–41.
10. *Hori M., Aghai-Khozani H., Sóter A. et al.* Laser Spectroscopy of Long-Lived Pionic and Antiprotonic Helium in Superfluid Helium // *PoS ICHEP2022.* 2022. V. 1. P. 141.
11. *Korobov V. I.* Metastable States in the Antiprotonic Helium Atom Decaying via Auger Transitions // *Phys. Rev. A.* 2003. V. 67. P. 062501.
12. *Ho Y. K.* The Method of Complex Coordinate Rotation and Its Applications to Atomic Collision Processes // *Phys. Rep.* 1983. V. 99. P. 1.
13. *Angeli I.* A Consistent Set of Nuclear rms Charge Radii: Properties of the Radius Surface  $R(N, Z)$  // *At. Data Nucl. Data Tables.* 2004. V. 87. P. 185.
14. *Pachucki K.* Simple Derivation of Helium Lamb Shift // *J. Phys. B.* 1998. V. 31. P. 5123.
15. *Yelkhovsky A.* QED Corrections to Singlet Levels of the Helium Atom: A Complete Set of Effective Operators to  $m\alpha^6$  // *Phys. Rev. A.* 2001. V. 64. P. 062104.
16. *Korobov V. I.* Leading-Order Relativistic and Radiative Corrections to the Rovibrational Spectrum of  $H_2^+$  and  $HD^+$  Molecular Ions // *Phys. Rev. A.* 2006. V. 74. P. 052506.
17. *Araki H.* Quantum-Electrodynamical Corrections to Energy Levels of Helium // *Prog. Theor. Phys.* 1957. V. 17. P. 619.
18. *Sucher J.* Energy Levels of the Two-Electron Atom to Order  $\alpha^3$  Ry; Ionization Energy of Helium // *Phys. Rev.* 1958. V. 109. P. 1010.
19. *Korobov V. I., Hilico L., Karr J.-Ph.* Calculation of the Relativistic Bethe Logarithm in the Two-Center Problem // *Phys. Rev. A.* 2013. V. 87. P. 062506.
20. *Korobov V. I., Eskin A. V., Martynenko A. P., Martynenko F. A.* Energy Levels of Mesonic Helium in Quantum Electrodynamics // *Phys. Rev. A.* 2024. V. 109. P. 032802.
21. *Korobov V. I., Eskin A. V., Martynenko A. P., Martynenko F. A.* Energy Levels of Pionic and Kaonic Helium in the Variational Approach // *Phys. Part. Nucl.* 2024. V. 55, No. 4. P. 705.