

ЭФФЕКТЫ ГРИБОВСКИХ КОПИЙ В МАКСИМАЛЬНОЙ АБЕЛЕВОЙ КАЛИБРОВКЕ

И. Е. Кудров^{1, *}, *В. Г. Борняков*^{1, 2, 3, **}

¹ Институт физики высоких энергий им. А. А. Логунова Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», Протвино, Россия

² Тихоокеанский квантовый центр ДВФУ, Владивосток, Россия

³ Курчатовский комплекс теоретической и экспериментальной физики Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», Москва

Изучены эффекты грибовских копий в максимальной абелевой калибровке в решеточной глюодинамике $SU(3)$. Подтверждены более ранние предположения о том, что с помощью эффективного алгоритма фиксации калибровки можно найти грибовские копии максимальной абелевой калибровки, которые производят менее 90% натяжения струны после абелевой проекции. В то же время, используя гораздо менее эффективный алгоритм релаксации, можно найти грибовские копии с улучшенной абелевой доминантностью для натяжения струны.

We study effects of Gribov copies in the Maximal Abelian gauge in $SU(3)$ lattice gluodynamics. We confirm earlier results that with effective gauge fixing algorithm one finds Gribov copies of the Maximal Abelian gauge which produce about 90% of the non-Abelian string tension after Abelian projection. At the same time, using much less effective relaxation algorithm, one finds Gribov copies with nice Abelian dominance for the string tension.

PACS: 11.15.Na; 12.38.Gc; 12.38.A

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе численно изучается решеточная глюодинамика с калибровочной группой $SU(3)$ в максимальной абелевой (МА) калибровке, введенной в [1] и сформулированной для решеточной регуляризации в работах [2, 3]. Функционал фиксации калибровки определяется следующим образом:

$$F = \frac{1}{V} \int d^4x \sum_{\mu, a \neq 3, 8} A_\mu^a(x) A_\mu^a(x), \quad (1)$$

* E-mail: Ilya.Kudrov@ihep.ru

** E-mail: Vitaly.Borniyakov@ihep.ru

где $A_\mu^a(x)$ — калибровочное поле. Функционал (1) инвариантен относительно абелевых калибровочных преобразований $g(x) \in U(1) \times U(1)$. В решеточной регуляризации минимизация калибровочного функционала (1) эквивалентна максимизации

$$F_{\text{lat}} = \frac{1}{12V} \sum_{x,\mu} \left[|U_\mu^{(11)}(x)|^2 + |U_\mu^{(22)}(x)|^2 + |U_\mu^{(33)}(x)|^2 \right]. \quad (2)$$

Функционал (1) имеет многочисленные локальные минимумы, соответствующие грибовским копиям, открытым Грибовым для кулоновской калибровки в работе [4]. В рамках теории возмущений эта проблема не проявляется и квантование может быть успешно выполнено с помощью метода Фаддеева–Попова. Однако в непертурбативной области метод Фаддеева–Попова не работает, так как существует множество калибровочно-эквивалентных конфигураций, называемых грибовскими копиями, удовлетворяющих заданному калибровочному условию. Утверждение Грибова было обобщено на другие калибровки в работе [5].

Непертурбативно фиксацию калибровки можно определить следующим образом [6, 7]:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z(\lambda)} \int DA e^{-S(A)} I^{-1}(A) \int Dg e^{-\lambda F(A^g)} \mathcal{O}(A^g), \quad (3)$$

где λ — калибровочный параметр; \mathcal{O} — некоторая наблюдаемая,

$$I(A) = \int Dg e^{-\lambda F(A^g)}. \quad (4)$$

Предел $\lambda \rightarrow \infty$ соответствует ограничению интегрирования в функциональном интеграле на фундаментальную модулярную область. Такой способ решения проблемы грибовских копий был предложен в работе [8]. Решеточная регуляризация позволяет исследовать эффекты грибовских копий численными методами. В МА-калибровке были обнаружены сильные эффекты копий Грибова, т. е. сильная зависимость калибровочно-неинвариантных наблюдаемых от выбора копий Грибова [9]. Практически невозможно найти глобальные минимумы калибровочного функционала численно, но естественно предположить, что, генерируя множество таких минимумов и беря минимальный из них, мы приближаемся к глобальному минимуму. Такой практический подход к уменьшению эффекта грибовских копий был предложен в работе [9], где МА-калибровка изучалась в решеточной $SU(2)$ -глюодинамике. Этот подход затем использовался в исследованиях МА-калибровки как в глюодинамике [10], так и в КХД [11], а также в исследованиях других калибровок [12–14].

Наиболее эффективный алгоритм фиксации калибровки, если требуется поиск глобального минимума калибровочного функционала, — алгоритм симулированного отжига. Другой, менее эффективный, но часто используемый на практике алгоритм, — локальная релаксация (миними-

зация). Оба алгоритма кратко описаны в следующем разделе. В случае МА-калибровки эти алгоритмы дают существенно разные результаты как для калибровочного функционала, так и для физически интересных величин, таких как абелево натяжение струны $\sigma_{\text{аб}}$. В случае $SU(2)$ -глюодинамики было показано, что алгоритм релаксации может давать для $\sigma_{\text{аб}}$ значение, равное или даже превосходящее значение неабелевого натяжения струны σ , а при использовании процедуры фиксации калибровки алгоритма симулированного отжига и выбора грибовской копии из нескольких копий результат получается $\sigma_{\text{аб}} < \sigma$ [10], по крайней мере для конечного шага решетки. В работе [15] было показано, что в случае $SU(2)$ -глюодинамики в континуальном пределе описанная выше процедура оптимальной фиксации калибровки приводит к $\sigma_{\text{аб}} \approx \sigma$. В случае $SU(3)$ -глюодинамики ситуация менее определенная. Эффекты грибовских копий исследованы в работе [11] с использованием алгоритма симулированного отжига. Была продемонстрирована сильная зависимость $\sigma_{\text{аб}}$ от выбора грибовской копии, для шага решетки $a \approx 0,1$ Фм получено $\sigma_{\text{аб}}/\sigma \approx 0,83$. Позднее в работе [16] был сделан вывод, что $\sigma_{\text{аб}} \approx \sigma$ для шага решетки $a \approx 0,1$ Фм или меньше, и этот результат критически зависит от физического размера решетки. Ниже представлены результаты, разрешающие противоречие между выводами работ [11] и [16].

1. ДЕТАЛИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

В табл. 1 приведены параметры (размеры, шаг решетки a , число конфигураций) решеток, использованных в данной работе. Для генерации конфигураций решеточного калибровочного поля применялось вильсоновское решеточное действие. Для определения шага решетки в физических единицах использовался параметр Зоммера [17], значения r_0/a взяты из работы [18]. В глюодинамике принято использовать значение этого параметра $r_0 = 0,5$ Фм.

Таблица 1. Параметры использованных в данной работе решеток

β	r_0/a	a , Фм	L/a	L , Фм	N_{conf}
6,0	5,37	0,093	16	1,49	1600
6,0	5,37	0,093	24	2,24	5000
6,0	5,37	0,093	32	2,98	4000
6,1	6,34	0,079	28	2,21	5000
6,2	7,38	0,068	32	2,17	3800
6,3	8,51	0,059	36	2,11	2100

Для фиксации МА-калибровки на каждой решеточной конфигурации находилось калибровочное преобразование, которое максимизирует функционал (2). Это было сделано с использованием двух алгоритмов.

Первый — это релаксация, когда в каждом узле решетки поочередно находится калибровочное преобразование, которое локально максимизирует функционал (2) до тех пор, пока не будет найден локальный максимум этого функционала. Второй — симулированный отжиг — более эффективный алгоритм, который применяется перед алгоритмом релаксации, что дает большую вероятность получить более высокое значение функционала после релаксации. На каждом шаге этого алгоритма производится обновление калибровочного преобразования с помощью алгоритма тепловой бани. Локальное калибровочное преобразование выбирается с вероятностью $\propto e^{F_{\text{local}}/T_{\text{SA}}}$, где T_{SA} — эффективная температура этого алгоритма, а F_{local} — вклад от узла в функционал (2). Изначально выбирается достаточно большая температура T_{SA} , затем после каждого обновления калибровочного преобразования температура постепенно понижается вплоть до некоторого минимального значения T_{SA} , после чего алгоритм симулированного отжига завершается, и МА-калибровка окончательно фиксируется с помощью релаксации. В случае $SU(3)$ был выбран оптимальный диапазон температуры $T_{\text{SA}} = 1,25-0,01$. Этот алгоритм случайным образом находит локальный максимум функционала. Повторяя данную процедуру, с некоторой вероятностью можно находить более хорошее значение локального максимума и исследовать зависимость от калибровочных копий. Получившиеся значения функционала приведены в табл. 2.

Таблица 2. Получившиеся значения функционала (2) с использованием только релаксации (RO) и с использованием симулированного отжига (SA) для первой получившейся калибровочной копии и для наилучшей получившейся калибровочной копии. Погрешность в пятом знаке

β	L/a	$F_{\text{RO}}^{n_{\text{copy}}=1}$	$F_{\text{RO}}^{n_{\text{copy}}=\text{max}}$	$F_{\text{SA}}^{n_{\text{copy}}=1}$	$F_{\text{SA}}^{n_{\text{copy}}=\text{max}}$
6,0	16	0,73216	0,73317	0,73407	0,73431
6,0	24	0,73224	0,73272	0,73404	0,73424
6,0	32	0,73226	0,73253	0,73403	0,73415
6,1	28	0,74216	0,74255	0,74310	0,74349
6,2	32	0,75098	0,75131	0,75169	0,75204
6,3	36	0,75894	0,75923	0,76003	0,76010

В данной работе использовалась реализация алгоритма, представленная в работе [19]. Соответствующий код может быть загружен с сайта <https://github.com/havogt/culgt/tree/master>.

2. АБЕЛЕВО НАТЯЖЕНИЕ СТРУНЫ В СЛУЧАЕ АЛГОРИТМА СИМУЛИРОВАННОГО ОТЖИГА

Как уже сказано выше, наиболее эффективным алгоритмом, используемым для фиксации калибровок, определяемым экстремизацией калиб-

ровочного функционала (калибровка Ландау, кулоновская, МА-калибровка, центральные калибровки), является алгоритм симулированного отжига. В этом разделе представлены наши результаты для абелева натяжения струны $\sigma_{\text{аб}}$, полученные с использованием этого алгоритма.

Абелева проекция, выполняемая после фиксации МА-калибровки, для решеточного калибровочного поля означает декомпозицию неабелева калибровочного поля $U_\mu(x) \in SU(3)$ на произведение недиагональной компоненты $U_\mu^{\text{offd}}(x) \in SU(3)/U(1) \times U(1)$ и диагональной компоненты $U_\mu^{\text{Abel}}(x) \in U(1) \times U(1)$:

$$U_\mu(x) = U_\mu^{\text{offd}}(x)U_\mu^{\text{Abel}}(x). \quad (5)$$

$U_\mu^{\text{Abel}}(x)$ имеет вид

$$U_\mu^{\text{Abel}}(x) = \text{diag} \left(u_\mu^{(1)}(x), u_\mu^{(2)}(x), u_\mu^{(3)}(x) \right), \quad (6)$$

где

$$u_\mu^{(a)}(x) = e^{i\theta_\mu^{(a)}(x)}, \quad (7)$$

$$\theta_\mu^{(a)}(x) = \arg (U_\mu(x))_a - \frac{1}{3} \sum_{b=1}^3 \arg (U_\mu(x))_b \Big|_{\text{mod } 2\pi} \quad (8)$$

и

$$\theta_\mu^{(a)}(x) \in \left[-\frac{4}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \right]. \quad (9)$$

Такое определение абелевой проекции максимизирует выражение $|\text{Tr} (U_\mu^\dagger(x)U_\mu^{\text{Abel}}(x))|^2$.

Хорошо известно, что после выполнения абелевой проекции в МА-калибровке абелево натяжение струны $\sigma_{\text{аб}}$, вычисленное из абелева статического потенциала, довольно близко к неабелеву натяжению σ струны. Это наблюдение, подтвержденное и в глюодинамике, и в КХД [10, 11, 15, 16, 20, 21], согласуется с концепцией доминирования абелевых степеней свободы на больших расстояниях (см., например, обзоры [22–24]).

Мы выполнили стандартное вычисление статического потенциала $V(r)$ для четырех значений шага решетки, приведенных в табл. 1. При вычислении $V(r)$ использовались методы сглаживания — АРЕ-сглаживание [25] для ребер в пространственных направлениях и один шаг гиперкубического блокинга [26] для ребер во временном направлении вильсоновской петли. Мы также вычислили абелев статический потенциал $V_{\text{аб}}(r)$, используя АРЕ-сглаживание. Результаты для $V(r)$ и $V_{\text{аб}}(r)$, обезразмеренные множителем r_0 , представлены на рис. 1. Для исключения вклада расходящейся собственной энергии источника мы показываем разность $V(r) - V(r_0/2)$ и аналогично для $V_{\text{аб}}(r)$.

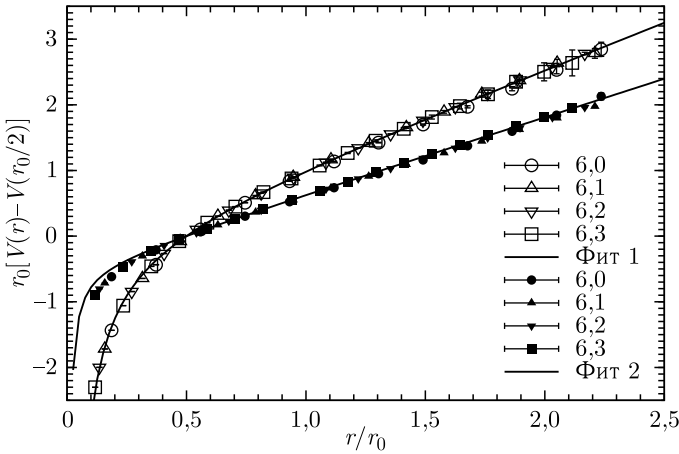


Рис. 1. Неабелев (светлые символы) и абелев (темные символы) статические потенциалы для четырех значений шага решетки. Кривые показывают результаты фитов корнелльским потенциалом в случае $\beta = 6,3$

На рисунке показаны фиты данных для $\beta = 6,3$ корнелльским потенциалом

$$V(r) = V_0 + \frac{\alpha}{r} + \sigma r \tag{10}$$

как для неабелева, так и для абелева потенциалов. Из рисунка видно, что данные для $r_0(V(r) - V(r_0/2))$, полученные для различных значений шага решетки, хорошо согласуются между собой. Аналогичный результат виден для $r_0(V_{ab}(r) - V_{ab}(r_0/2))$. Однако наклон потенциалов $V(r)$ и $V_{ab}(r)$ на больших расстояниях очевидно различается. Мы получили для минимального шага решетки отношение $\sigma_{ab}/\sigma \approx 0,83(2)$ и аналогичные результаты для других значений шага решетки. Этот результат отлично согласуется с результатом, полученным для $\beta = 6,0$ в работе [11]. Также мы видим, что в отличие от случая $SU(2)$ -глюодинамики [15] отношение σ_{ab}/σ не сходится к 1 в пределе снятия обрезания.

Следующий шаг — проверка эффектов конечного объема, наличие которых представлено в [16] как причина отличия σ_{ab}/σ от 1. На рис. 2 представлены результаты для $V_{ab}(r)$, полученные для $\beta = 6,0$ на решетках размерами $L = 24$ и $L = 32$ с помощью алгоритма симулированного отжига. Результаты для $L = 24$ те же самые, которые показаны на рис. 1, они получены для числа грибовских копий $N_{cop} = 4$. В случае $L = 32$ показаны результаты, полученные для $N_{cop} = 20$. Значения параметра N_{cop} подобраны так, чтобы значения функционала (2) получились примерно одинаковые для этих двух решеток. Значения функционала из табл. 2 для алгоритма релаксации совпадают с приведенными в работе [16]. Из рис. 2

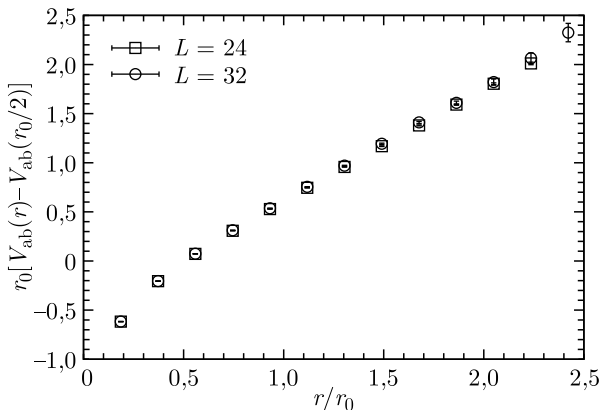


Рис. 2. Сравнение абелевых статических потенциалов на решетках $L = 24$ и $L = 32$ для $\beta = 6,0$

видно, что изменение размера решетки не влияет на наклон потенциала $V_{ab}(r)$, что противоречит выводу, сделанному в работе [16].

3. АБЕЛЕВО НАТЯЖЕНИЕ СТРУНЫ В СЛУЧАЕ АЛГОРИТМА РЕЛАКСАЦИИ

В конфигурациях решеточного калибровочного поля, описанных в предыдущем разделе, мы также выполнили фиксацию МА-калибровки с помощью алгоритма релаксации, который является менее эффективным по сравнению с алгоритмом симулированного отжига, т.е. дает более низкие значения для функционала (2). На рис. 3 показаны результаты

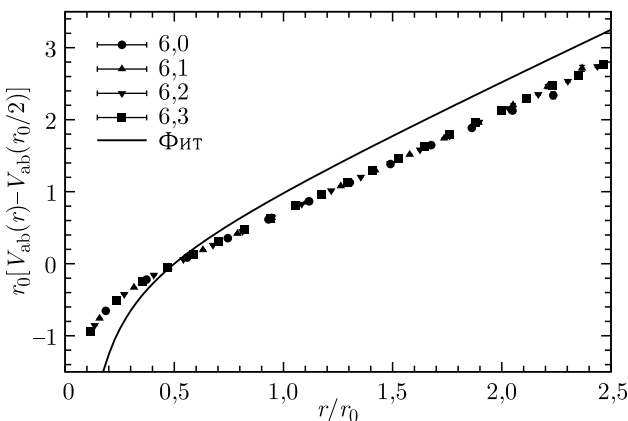


Рис. 3. Абелевы статические потенциалы для четырех значений шага решетки. Кривая — результат фита корнелльским потенциалом для неабелева потенциала в случае $\beta = 6,3$

для $V_{ab}(r)$, вычисленного после такой фиксации МА-калибровки для $N_{\text{cop}} = 1$. Результаты для $V(r)$ представлены фитирующей кривой, показанной также на рис. 1. Из рисунка видно, что данные для абелева потенциала, вычисленные для разных значений шага решетки, лежат на универсальной кривой, как и в предыдущем случае, однако наклон абелева потенциала значительно изменился. Видно хорошее согласие наклона потенциала $V_{ab}(r)$ с наклоном потенциала $V(r)$. Для отношения σ_{ab}/σ мы получили значение 0,96(3). Таким образом, мы подтверждаем ранее полученные результаты о том, что существуют грибовские копии, на которых абелево натяжение струны равно неабелеву.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе выполнено исследование эффектов грибовских копий в МА-калибровке, которая интенсивно используется для изучения сценария дуального сверхпроводника для описания явления конфайнмента [27, 28]. Для фиксации МА-калибровки были использованы два алгоритма, которые дают существенно различные значения для калибровочного функционала (2). На полученных после фиксации калибровки конфигурациях калибровочного поля была выполнена абелева проекция, вычислен абелев статический потенциал $V_{ab}(r)$ и выполнено сравнение с неабелевым потенциалом $V(r)$. Показано, что на грибовских копиях, полученных с помощью алгоритма симулированного отжига, σ_{ab} существенно ниже σ , что согласуется с предыдущим результатом, представленным в работе [11]. Важно отметить, что в рассматриваемом случае $SU(3)$ -глюодинамики отношение σ_{ab}/σ не зависит от шага решетки, что отличается от результата, полученного в [15] для $SU(2)$ -глюодинамики.

Сравнивая результаты, полученные на решетках разного размера для фиксированного шага решетки при $\beta = 6,0$, мы сделали вывод, что σ_{ab} не зависит от размера решетки, а определяется значением калибровочного функционала (2). Этот результат противоречит выводу о сильном влиянии эффектов конечного объема на значение σ_{ab} , сделанному в работе [16].

Далее было показано, что на грибовских копиях, полученных с помощью алгоритма релаксации, которые имеют заметно пониженное значение калибровочного функционала (2), отношение σ_{ab}/σ близко к 1 и слабо зависит от шага решетки. Это позволяет сделать вывод о том, что существуют грибовские копии, на которых можно наблюдать «абсолютную» абелеву доминантность. Эта «абсолютная» абелева доминантность была продемонстрирована ранее в [16], но, как отмечено выше, в этой работе был сформулирован неправильный способ достижения данного результата.

В заключение отметим, что проблема правильного выбора грибовских копий обсуждалась интенсивно для центральных калибровок в работах [29–31]. В дальнейшем мы планируем выполнить исследование этой

проблемы в МА-калибровке, используя идеи, сформулированные в этих работах. Обоснование выбора грибовских копий, на которых $\sigma_{\text{аб}} \approx \sigma$, важно для нас с точки зрения декомпозиции калибровочного поля на монополярную и безмонополярную компоненты, которую мы исследовали в работах [32, 33].

Благодарности. Авторы благодарят за предоставленные компьютерные ресурсы: центральный Linux-кластер Института физики высоких энергий им. А. А. Логанова НИЦ «Курчатовский институт» (Протвино), Linux-кластер ККТЭФ НИЦ «Курчатовский институт» (Москва) и «Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мегакласса» НИЦ «Курчатовский институт» (Москва).

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 23-12-00072.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. 't Hooft G. // Nucl. Phys. B. 1981. V. 190. P. 455–478.
2. Kronfeld A. S., Schierholz G., Wiese U. J. // Nucl. Phys. B. 1987. V. 293. P. 461–478.
3. Brandstater F., Wiese U. J., Schierholz G. // Phys. Lett. B. 1991. V. 272. P. 319–325.
4. Gribov V. N. // Nucl. Phys. B. 1978. V. 139. P. 1.
5. Singer I. M. // Commun. Math. Phys. 1978. V. 60. P. 7–12.
6. Zwanziger D. // Nucl. Phys. B. 1990. V. 345. P. 461–471.
7. Parrinello C., Jona-Lasinio G. // Phys. Lett. B. 1990. V. 251. P. 175–180.
8. Zwanziger D. // Nucl. Phys. B. 1994. V. 412. P. 657–730.
9. Bali G. S., Bornyakov V., Muller-Preussker M., Schilling K. // Nucl. Phys. B. Proc. Suppl. 1996. V. 49. P. 256–261.
10. Bali G. S., Bornyakov V., Muller-Preussker M., Schilling K. // Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 2863–2875.
11. Bornyakov V. G. et al. (DIK Collab.) // Phys. Rev. D. 2004. V. 70. P. 074511.
12. Bornyakov V. G., Komarov D. A., Polikarpov M. I. // Phys. Lett. B. 2001. V. 497. P. 151–158.
13. Bornyakov V. G., Mitrjushkin V. K., Muller-Preussker M. // Phys. Rev. D. 2009. V. 79. P. 074504.
14. Bornyakov V. G., Mitrjushkin V. K. // Phys. Rev. D. 2011. V. 84. P. 094503.
15. Bornyakov V., Muller-Preussker M. // Nucl. Phys. B. Proc. Suppl. 2002. V. 106. P. 646–648.
16. Sakumichi N., Suganuma H. // Phys. Rev. D. 2014. V. 90, No. 11. P. 111501.
17. Sommer R. // Nucl. Phys. B. 1994. V. 411. P. 839–854.
18. Necco S., Sommer R. // Nucl. Phys. B. 2002. V. 622. P. 328–346.
19. Schröck M., Vogt H. // Comput. Phys. Commun. 2013. V. 184. P. 1907–1919.
20. Suzuki T., Yotsuyanagi I. // Phys. Rev. D. 1990. V. 42. P. 4257–4260.
21. Hioki S., Kitahara S., Kiura S., Matsubara Y., Miyamura O., Ohno S., Suzuki T. // Phys. Lett. B. 1991. V. 272. P. 326–332; Erratum // Phys. Lett. B. 1992. V. 281. P. 416.

22. *Chernodub M.N., Polikarpov M.I.* // NATO Advanced Study Institute on Confinement, Duality and Nonperturbative Aspects of QCD. 1997. June. P.387–414.
23. *Greensite J.* // Prog. Part. Nucl. Phys. 2003. V.51. P. 1.
24. *Suganuma H.* // Handbook of Nuclear Physics. 2023. P.1–48.
25. *Albanese M. et al. (APE Collab.)* // Phys. Lett. B. 1987. V.192. P.163–169.
26. *Hasenfratz A., Knechtli F.* Phys. Rev. D. 2001. V.64. P.034504.
27. *'t Hooft G.* // 1975 High-Energy Part. Phys. Divisional Conf. of EPS (includes 8th Biennial Conf. on Elem. Part.). 1975. Sept.
28. *Mandelstam S.* // Phys. Rep. 1976. V.23. P.245–249.
29. *Faber M., Greensite J., Olejnik S.* // Phys. Rev. D. 2001. V.64. P.034511.
30. *Golubich R., Faber M.* // Acta Phys. Polon. Supp. 2020. V.13. P.59–64.
31. *Dehghan Z., Golubich R., Höllwieser R., Faber M.* // Phys. Rev. D. 2024. V.110. Iss.1. P.014501.
32. *Bornnyakov V.G., Kudrov I., Rogalyov R.N.* // Phys. Rev. D. 2022. V.105, No.5. P.054519.
33. *Bornnyakov V.G., Kudrov I.E.* // JETP Lett. 2023. V.117, No.5. P.328–331.