

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ ВКЛАДОВ В АНОМАЛЬНЫЕ МАГНИТНЫЕ МОМЕНТЫ ЛЕПТОНОВ ОТ ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА ЛЕПТОННЫМИ ПЕТЛЯМИ НА ОСНОВЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МЕЛЛИНА–БАРНСА

О. П. Соловцова^{1,2,*}, *В. И. Лашкевич*^{2,**}
Л. П. Кантарь^{1,***}

¹ Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

² Гомельский государственный технический университет, Гомель, Беларусь

Получены явные аналитические выражения для электромагнитных поправок к аномальным магнитным моментам a_L лептонов ($L = e, \mu$ и τ) в десятом порядке разложения по константе взаимодействия от фейнмановских диаграмм со вставками поляризационного оператора из четырех лептонных петель, одна из которых образована лептонами того же сорта, что и исходный лептон L , а три другие петли — лептонами сорта $\ell \neq L$. Исследования основаны на последовательном применении дисперсионных соотношений для поляризованного оператора и преобразовании Меллина–Барнса для пропагаторов массивных частиц. Полученные из точных формул разложения в пределе как малых, так и больших значений отношения масс лептонов $r = m_\ell/m_L$, $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$, сравниваются с соответствующими асимптотическими выражениями для поправок к a_L , имеющимися в литературе.

Analytical expressions for the tenth-order electromagnetic corrections to the lepton ($L = e, \mu$ and τ) anomaly a_L are derived explicitly for a class of Feynman diagrams with insertions of the polarization operator consisting of four closed lepton loops. We consider the particular case when one loop is formed by the lepton L of the same kind as the one under consideration, the other three loops being formed by leptons $\ell \neq L$. The method is based on the consecutive application of dispersion relations for the polarization operator and the Mellin–Barnes transform for the propagators of massive particles. The result is expressed in terms of the mass ratio $r = m_\ell/m_L$. We investigate the behaviour of the exact analytical expressions at $r \rightarrow 0$ and $r \rightarrow \infty$ and compare them with the corresponding asymptotic expansions known in the literature.

PACS: 13.40.Eg; 12.20.Ds; 14.60.Ef

* E-mail: olsol@theor.jinr.ru

** E-mail: lashkevich@gstu.by

*** E-mail: kaptari@theor.jinr.ru

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что взаимодействие лептона L с фотонами приводит к сдвигу гиромагнитного отношения g_L от значения, равного 2, следующего из уравнения Дирака [1]. Величина такого сдвига характеризуется аномальным магнитным моментом лептона a_L и определяется как отношение $a_L \equiv (g_L - 2)/2$. Несмотря на то, что сдвиг чрезвычайно мал, его теоретические и экспериментальные исследования представляют большой научный интерес. Это связано с тем, что измерения a_L для электрона [2, 3] и мюона [4, 5] проведены с чрезвычайно высокой точностью, и это налагает соответствующие требования на точность теоретических расчетов. Детальный обзор вкладов различных механизмов в a_L можно найти, например, в [6, 7], а широко обсуждаемое до сих пор отклонение между экспериментальными значениями и теоретическими предсказаниями Стандартной модели для аномального магнитного момента мюона — в работах [8–14].

В настоящее время, как правило, теоретические расчеты для вкладов в a_L вычисляются до пятого порядка по постоянной тонкой структуры ($\sim \alpha^5$) с помощью специальных алгоритмов (см., например, [14–18]), позволяющих достичь очень высокой точности вычислений. Однако такие расчеты требуют довольно больших компьютерных ресурсов и тщательной проверки, к тому же детальный анализ вкладов различных механизмов в a_L затруднен. В связи с этим представляет интерес выделение хотя бы подклассов фейнмановских диаграмм, для которых удалось бы провести расчеты в аналитическом, замкнутом виде. К такому подклассу относятся диаграммы со вставками фотонного поляризованного оператора, состоящего только из лептонных петель, так называемые диаграммы пузырькового типа. В работе [19] на основании интегрального представления Меллина–Барнса рассматривалась задача получения аналитических выражений от таких диаграмм в аномальный магнитный момент мюона в виде разложений по отношению масс лептонов $r = m_\ell/m_L$, где m_L и m_ℓ обозначают массу внешнего лептона L и массу лептонов ℓ из поляризованного оператора соответственно. В работе [20] этот подход был обобщен для нахождения явных аналитических выражений вкладов для любого из лептонов $L = e, \mu$ и τ и для всего интервала отношения масс лептонов $0 < m_\ell/m_L < \infty$. Было показано, что поправки к a_L от диаграмм со вставками фотонного поляризованного оператора целиком определяются диаграммами с обменом всего лишь одного, но массивного фотона. Применение преобразования Меллина–Барнса к таким диаграммам позволяет получить общие выражения для a_L в виде одномерных интегралов в комплексной плоскости от произведения двух меллиновских моментов. Следует отметить, что преобразование Меллина–Барнса широко используется в физике частиц (см. например, [21]). Впервые применение преобразования Меллина–Барнса при вычислении фейнмановских интегралов, содержащих массивные пропагаторы, было предложено

в работе [22], а непосредственное использование этой техники в получении аналитических выражений для вкладов в a_L — в работе [23], и далее, как отмечалось выше, получило развитие в [19, 20].

Настоящая работа является дальнейшим применением подхода [19, 20] для нахождения поправок к a_L порядка α^5 от диаграмм с четырьмя внутренними петлями, одна из которых сформирована лептонами того же сорта, что и исходный лептон L , а три другие петли — лептонами другого сорта $\ell \neq L$. Ранее в работе [24] были получены точные аналитические выражения для поправок к a_L от диаграмм со вставками в поляризационный оператор из четырех одинаковых лептонных петель $\ell \neq L$, а в работе [25] — точные аналитические выражения для вкладов, когда две петли образованы такими же лептонами, как и исходный лептон L , а две другие — лептонами сорта ℓ . Понятно, что расчеты по точным формулам позволяют легко находить численные значения интересующих нас вкладов в a_L с любой наперед заданной точностью, а также получать более простые выражения в виде разложений по отношению лептонных масс $r = m_\ell/m_L$ с контролируемой точностью. Отметим, что приведенные ранее в литературе выражения для поправок к a_L порядка α^5 от диаграмм с четырьмя лептонными петлями [19, 26, 27] были получены лишь в пределе малых значений $r \ll 1$.

1. ОСНОВНОЙ ФОРМАЛИЗМ

В рамках рассматриваемого подхода, в котором используется преобразование Меллина–Барнса, выражение для электромагнитных поправок от диаграмм с n замкнутыми петлями, p из которых образованы лептонами сорта L , а j — лептонами сорта ℓ , записывается в виде одномерного интеграла [19, 20]

$$a_L(p, j) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{2\pi i} F_{(p,j)} \times \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dz \left(\frac{4m_\ell^2}{m_L^2} \right)^{-z} \Gamma(z)\Gamma(1-z) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^p \Omega_p(z) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^j R_j(z), \quad (1)$$

где $F_{(p,j)} = (-1)^{p+j+1} C_{p+j}^p$, а C_{p+j}^p — биномиальные коэффициенты, число c — любое из интервала $a < \text{Re } z < b$, в котором подынтегральная функция (1) аналитична. Меллиновские моменты $\Omega_p(z)$ и $R_j(z)$ определяются поляризационными операторами $\Pi^{(L)}$ и $\Pi^{(\ell)}$ согласно выражениям

$$\left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^p \Omega_p(z) = \int_0^1 dx x^{2z} (1-x)^{1-z} \left[\Pi^{(L)} \left(-\frac{x^2}{1-x} m_L^2 \right) \right]^p, \quad (2)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^j R_j(z) = \int_0^{\infty} \frac{dy}{y} \left(\frac{4m_\ell^2}{y}\right)^z \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[\Pi^{(\ell)}(y) \right]^j. \quad (3)$$

Явный вид поляризаационных операторов $\Pi^{(L,\ell)}$ в формулах (2) и (3) хорошо известен [28]:

$$\text{Re} \Pi^{(L,\ell)}(y) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) \left[\frac{8}{9} - \frac{\delta^2}{3} + \delta \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta^2}{6} \right) \ln \frac{|1-\delta|}{1+\delta} \right], \quad (4)$$

$$\frac{1}{\pi} \text{Im} \Pi^{(L,\ell)}(y) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) \delta \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \delta^2 \right) \theta \left(y - 4m_{(L,\ell)}^2 \right), \quad (5)$$

где $\delta = \sqrt{1 - 4m_{(L,\ell)}^2/y}$. Из-за наличия θ -функции в (5) поляризаационный оператор $\Pi^{(L)}(-x^2/(1-x)m_L^2)$ чисто веществен и не зависит от лептонных масс:

$$\Pi^{(L)} \left(-\frac{x^2}{1-x} m_L^2 \right) = \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{5}{9} + \frac{4}{3x} - \frac{4}{3x^2} + \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{3x^3} \right) \ln(1-x) \right]. \quad (6)$$

Простой заменой переменной $y = (4m_\ell^2)/\xi$ в (3) легко показать, что и $R_j(z)$ также не зависит от масс лептонов. Таким образом, единственная зависимость аномального магнитного момента (1) от лептонных масс входит только через их отношение

$$r = \frac{m_\ell}{m_L}. \quad (7)$$

Соответственно, в публикациях общепринято классифицировать электродинамические вклады в аномальный магнитный момент a_L в зависимости от r , выделяя при этом масс-независимый вклад A_1 (также называемый универсальным, $r = 1$) и масс-зависимые A_2 и A_3 вклады (см., например, [7]):

$$a_L = A_1 \left(\frac{m_L}{m_L} \right) + A_2 \left(\frac{m_\ell}{m_L} \right) + A_3 \left(\frac{m_{\ell_1}}{m_L}, \frac{m_{\ell_2}}{m_L} \right). \quad (8)$$

Каждое из слагаемых в сумме (8) может быть представлено в виде разложения по постоянной тонкой структуре α как

$$A_1 \left(\frac{m_L}{m_L} \right) = A_1^{(2)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^1 + A_1^{(4)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + A_1^{(6)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + \dots, \quad (9)$$

$$A_2(r) = A_2^{(4)}(r) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + A_2^{(6)}(r) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + A_2^{(8)}(r) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + A_2^{(10)}(r) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^5 + \dots, \quad (10)$$

$$A_3(r_1, r_2) = A_3^{(6)}(r_1, r_2) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + A_3^{(8)}(r_1, r_2) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + A_3^{(10)}(r_1, r_2) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^5 + \dots, \quad (11)$$

где $r_1 = m_{\ell_1}/m_L, r_2 = m_{\ell_2}$, а $m_{\ell_{1,2}}$ обозначают массы лептонов двух разных типов, отличных от L . Лидирующей поправке к a_L , впервые полученной Ю. Швингером [29, 30], соответствует коэффициент $A_1^{(2)} = 1/2$. Точные аналитические выражения известны только для универсальных коэффициентов $A_1^{(4)}$ и $A_1^{(6)}$ (см., например, [6]). Если же диаграммы содержат только одинаковые лептонные петли, то точные аналитические выражения известны вплоть до 13 петель [31, 32].

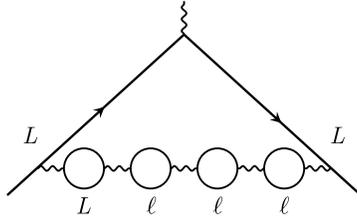


Рис. 1. Диаграмма, дающая вклад в поправку десятого порядка в аномальный магнитный момент лептона L , в случае, когда одна из петель образована лептоном того же сорта, что и внешний лептон L , а три другие петли — лептонами $\ell \neq L$

В настоящей работе мы продолжим нахождение явных аналитических выражений для вкладов от четырех лептонных петель для масс-зависимых коэффициентов десятого порядка $A_2^{(10)}(r)$, входящих в выражение (10). Соответствующая этому случаю диаграмма представлена на рис. 1. В дальнейшем для проверки предела при $r \rightarrow 1$ нам понадобится выражение для универсального коэффициента, соответствующего поляризации вакуума четырьмя одинаковыми лептонными петлями [31, 32]:

$$A_1^{(10)} = -\frac{3689383}{656100} - \frac{21928 \pi^4}{1403325} - \frac{128\zeta(3)}{675} + \frac{64\zeta(5)}{9} = 4,7090571603\dots \cdot 10^{-4}. \quad (12)$$

2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ

Как следует из выражения (1), коэффициент разложения $A_2^{(10),L\ell\ell\ell}$, определяющий вклад $a_L^{L\ell\ell\ell} = A_2^{(10),L\ell\ell\ell} (\alpha/\pi)^5$ в аномальный магнитный момент лептона L от изображенной на рис. 1 диаграммы, с учетом значения фактора $F_{(p,j)} = -4$ (поскольку $p = 1, j = 3$) представляется в виде

$$A_2^{(10),L\ell\ell\ell}(r) = -\frac{4}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (4r^2)^{-z} \Gamma(z) \Gamma(1-z) \Omega_1(z) R_3(z) dz. \quad (13)$$

Вычисляя по формулам (2) и (3) входящие в это выражение меллиновские моменты $\Omega_1(z)$ и $R_3(z)$, получаем

$$\Omega_1(z) = \frac{2^{2z}}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{(1-2z)(1+2z)(36+54z-29z^2-34z^3+5z^4+4z^5)}{9(1-z)z(1+z)(z+2)} - 2\pi(-z^2+z+1)\operatorname{ctg}(\pi z) \right\} \Gamma(-2-z)\Gamma\left(-\frac{1}{2}+z\right), \quad (14)$$

$$R_3(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{864} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(\frac{11}{2}+z)} \left[\frac{(z-1)Y(z)}{z(1+z)(2+z)} - (1+z)(35+21z+3z^2) \times \right. \\ \left. \times (27\pi^2 - 162\psi^{(1)}(z)) \right], \quad (15)$$

где $\psi^{(1)}(z)$ — полигамма-функция первого порядка и для краткости записи введено обозначение $Y(z) = -3492 + 5256z + 31831z^2 + 41045z^3 + 22650z^4 + 5632z^5 + 512z^6$.

Ниже наряду с переменной r мы используем переменную $t = r^2$, в терминах которой традиционно приводится большинство результатов. Тогда выражение (13) представляется в виде

$$A_2^{(10),L\ell\ell\ell}(t) = -\frac{4}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-z} \mathcal{F}(z) dz, \quad (16)$$

где подынтегральная функция $\mathcal{F}(z)$ с учетом выражений (14) и (15) равна

$$\mathcal{F}(z) = \left[\frac{(1-2z)(1+2z)(36+54z-29z^2-34z^3+5z^4+4z^5)}{9(1-z)(1+z)z(z+2)} - 2\pi(1+z-z^2)\operatorname{ctg}(\pi z) \right] \left[\frac{(-1+z)Y(z)}{27z(1+z)(2+z)} - (1+z) \times \right. \\ \left. \times (35+21z+3z^2) (\pi^2 - 6\psi^{(1)}(z)) \right] \frac{\pi^2}{Z(z)\sin^2(\pi z)}, \quad (17)$$

а полином $Z(z)$ есть

$$Z(z) = z(2+z)(-1+2z)(1+2z)(3+2z)(5+2z)(7+2z)(9+2z). \quad (18)$$

Легко заметить, что подынтегральная функция $\mathcal{F}(z)$ в (16) сингулярна в комплексной плоскости переменной z с многочисленными полюсами различной кратности, обусловленными знаменателями в $\mathcal{F}(z)$ и сингулярностями функций $\operatorname{ctg}(\pi z)$, $\psi^{(1)}(z)$, $1/\sin^2(\pi z)$ и нулями $Z(z)$. Тогда интеграл (16) может быть вычислен по теореме Коши о вычетах путем замыкания контура интегрирования поочередно в правой ($t > 1$) и левой ($t < 1$) полуплоскостях.

Левая полуплоскость: $t < 1$. Функция $\mathcal{F}(z)$ имеет в левой полуплоскости полюсы при $z = -1/2, -3/2, -5/2, -7/2, -9/2, 0, -1, -2, -3, -4, \dots, -n, \dots$. Вычеты в точках z с отрицательными полуцелыми значениями $z = -1/2, -3/2, -5/2, -7/2$ и $-9/2$ вычисляются непосредственно как вычеты первого порядка. При отрицательных целочисленных значениях $z = -n$ имеются полюсы более высокого порядка, вплоть до шестого. Эти вычеты обычно вычисляются при помощи компьютерных программ, допускающих аналитические символьные вычисления, например, при помощи программных систем Wolfram Mathematica или Maple со встроенными библиотеками символьных вычислений в этой области.

Результат применения теоремы Коши для (16)–(18) в левой полуплоскости может быть представлен в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 A_2^{(10),L\ell\ell}(t < 1) = & P_0(t) + P_1(t) \ln(t) + P_2(t) \ln^2(t) + P_3(t) \ln^3(t) + P_4(t) \times \\
 & \times \ln^4(t) + t^{3/2} \left(\frac{82}{45} + \frac{44t}{7} - \frac{52762t^2}{30375} - \frac{139001992t^3}{343814625} - \pi^2 g_1(t) \right) \times \\
 & \times \left[\text{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}} \right) - \text{Li}_2 \left(-\frac{1 - \sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}} \right) \right] - g_3(t) \text{Li}_2(1 - t) + \frac{472}{10395} \times \\
 & \times (2 + \pi^2) \left[\text{Li}_2(1 - t) - \frac{\pi^2}{6} \right] + \left[\frac{230}{81} + \frac{7088t}{1225} + \frac{20714t^2}{675} - \frac{28\pi^2}{9} \right] \times \\
 & \times \left(\frac{1}{3} + t^2 \right) \text{Li}_3(t) - \left(\frac{3716}{2835} + \frac{944}{10395t} - \frac{16t}{7} - \frac{4t^2}{9} \right) \text{Li}_4(t) - \frac{40}{3} \times \\
 & \times (1 + t^2) \text{Li}_5(t) + g_4(t) \Phi \left(t, 3, \frac{1}{2} \right) + g_1(t) t^2 \Phi \left(t, 4, \frac{1}{2} \right) + g_2(t) \times \\
 & \times \Phi \left(t, 5, \frac{1}{2} \right) + \Sigma_1(t), \quad (19)
 \end{aligned}$$

где $\text{Li}_n(t)$ обозначают полилогарифмические функции порядка n , а $\Phi(t, n, \alpha)$ — трансцендентную функцию Лерха: $\Phi(t, n, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k / (k + \alpha)^n$. В частности, при значениях $\alpha = 1/2$ и $\alpha = 1$ имеют место равенства $\sqrt{t} \Phi(t, n, 1/2) = 2^{n-1} [\text{Li}_n(\sqrt{t}) - \text{Li}_n(-\sqrt{t})]$, $\text{Li}_n(t) = t \Phi(t, n, 1)$.

Полиномиальные коэффициенты $P_n(t)$ при степенях логарифмов $\ln^n(t)$ ($n = 0..4$), кроме степеней по t , включают также и явные выражения ζ -функции Римана ($\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-z}$, где, например, $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$). Слагаемое $P_0(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 P_0(t) = & -\frac{196219921}{25259850} - \frac{137710949t}{5613300} + \frac{47812833977t^2}{1375258500} + \frac{198811157t^3}{152806500} + \\
 & + \frac{287301521t^4}{1375258500} + \pi^2 \left(-\frac{25134061}{26943840} + \frac{3975131357t}{1833678000} - \frac{532838t^2}{155925} - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{295639t^3}{498960} - \frac{108041t^4}{997920} \Big) - \pi^2 t^{3/2} \left[\frac{41}{90} + \frac{11t}{7} - \frac{26381t^2}{60750} - \frac{34750498t^3}{343814625} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{12} \pi^2 g_1(t) \right] - \left[\frac{476}{81} + \frac{3364t^2}{225} - \frac{16}{9} \pi^2 \left(\frac{1}{3} + t^2 \right) \right] \zeta(3) - \\
 & \qquad \qquad \qquad - \frac{2}{27} \pi^4 \left(\frac{131}{630} - \frac{4t}{7} + \frac{187t^2}{150} \right).
 \end{aligned}$$

Множитель $P_1(t)$ при первой степени логарифма в (19) равен

$$\begin{aligned}
 P_1(t) = & \frac{19410659}{5613300} - \frac{175598723t}{11226600} - \frac{23321950727t^2}{2750517000} + \frac{689996977t^3}{916839000} + \\
 & + \frac{287301521t^4}{2750517000} + \pi^2 \left(- \frac{2456747}{5987520} + \frac{17246717t}{17463600} - \frac{9060551t^2}{4989600} - \frac{1889t^3}{6160} - \right. \\
 & \left. - \frac{108041t^4}{1995840} \right) + \frac{32}{15} t^2 \zeta(3) + \frac{53}{135} \pi^4 \left(\frac{1}{3} + t^2 \right) + \frac{g_4(t)}{\sqrt{t}} \left[\text{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}} \right) - \right. \\
 & \left. - \text{Li}_2 \left(- \frac{1 - \sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}} \right) - \frac{\pi^2}{4} \right] - \left[\frac{41}{81} - \frac{3544t}{3675} - \frac{233t^2}{45} + \frac{2\pi^2}{9} \left(\frac{1}{3} + t^2 \right) \right] \times \\
 & \times \text{Li}_2(1 - t) - \left[\frac{115}{81} + \frac{3544t}{1225} + \frac{10357t^2}{675} - \frac{14\pi^2}{9} \left(\frac{1}{3} + t^2 \right) \right] \text{Li}_2(t) + \\
 & + \left(\frac{2456}{2835} + \frac{944}{10395t} + \frac{16t}{105} - \frac{44t^2}{45} \right) \text{Li}_3(t) + \frac{32}{3} \left(\frac{2}{3} + t^2 \right) \text{Li}_4(t) - \\
 & - \frac{1}{2} g_4(t) \Phi \left(t, 2, \frac{1}{2} \right) - g_1(t) t^2 \Phi \left(t, 3, \frac{1}{2} \right) - g_2(t) \Phi \left(t, 4, \frac{1}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Аналогично множители $P_{2,3,4}(t)$ при логарифме во второй, третьей и четвертой степенях соответственно равны

$$\begin{aligned}
 P_2(t) = & - \frac{18137003}{7484400} - \frac{2840603t}{1663200} + \frac{573063097t^2}{104781600} - \frac{17015189t^3}{62868960} - \\
 & - \frac{2618141t^4}{34927200} - \pi^2 \left(\frac{229949}{6531840} + \frac{236}{93555t} - \frac{9617t}{40320} + \frac{2051t^2}{3240} + \frac{275t^3}{10368} + \right. \\
 & \left. + \frac{19t^4}{6912} \right) - \frac{g_1(t)}{3} t^{3/2} \left[\text{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}} \right) - \text{Li}_2 \left(- \frac{1 - \sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}} \right) - \frac{\pi^2}{4} \right] - \\
 & - \left(\frac{1826}{8505} + \frac{944}{31185t} + \frac{16t}{35} - \frac{76t^2}{135} \right) \text{Li}_2(t) + \left(\frac{598}{8505} + \frac{472}{31185t} + \frac{136t}{315} - \right. \\
 & \left. - \frac{2t^2}{5} \right) \text{Li}_2(1 - t) - 4 \left(\frac{4}{9} + t^2 \right) \text{Li}_3(t) + \frac{1}{3} g_1(t) t^2 \Phi \left(t, 2, \frac{1}{2} \right) + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{2} g_2(t) \Phi \left(t, 3, \frac{1}{2} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_3(t) = & -\frac{1868939}{5987520} - \frac{265571t}{1496880} - \frac{1365941t^2}{14968800} - \frac{769337t^3}{4490640} - \frac{151931t^4}{5987520} + \\
 & + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{1}{3} + t^2 \right) + \frac{g_2(t)}{12\sqrt{t}} \left[\operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}} \right) - \operatorname{Li}_2 \left(-\frac{1 - \sqrt{t}}{1 + \sqrt{t}} \right) - \frac{\pi^2}{4} \right] + \frac{7}{9} \times \\
 & \times \left(\frac{1}{3} + t^2 \right) \operatorname{Li}_2(t) - \frac{1}{9} \left(\frac{1}{3} + t^2 \right) \operatorname{Li}_2(1 - t) - \frac{1}{8} g_2(t) \Phi \left(t, 2, \frac{1}{2} \right), \\
 P_4(t) = & -\frac{37}{1536} + \frac{49t}{6912} - \frac{313t^2}{2160} - \frac{275t^3}{20736} - \frac{19t^4}{13824},
 \end{aligned}$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}
 g_1(t) &= \frac{41}{180} + \frac{99t}{140} - \frac{713t^2}{3780} - \frac{5381t^3}{124740}, \\
 g_2(t) &= \frac{37}{128} + \frac{101t}{384} + \frac{451t^2}{192} + \frac{31t^3}{64} + \frac{59t^4}{384} + \frac{19t^5}{1152}, \\
 g_3(t) &= \frac{2593}{729} + \frac{20019064t}{3472875} - \frac{63253t^2}{10125} - \pi^2 \left(\frac{598}{2835} + \frac{136t}{105} - \frac{6t^2}{5} \right), \\
 g_4(t) &= \frac{22927}{21600} - \frac{451t^2}{48} - \frac{155t^3}{72} - \frac{15281t^4}{21600} - \frac{61351t^5}{793800} + \frac{\pi^2}{6} g_2(t), \\
 g_5(t) &= \frac{64}{675} + \frac{101t}{96} + \frac{2255t^2}{216} + \frac{8029t^3}{3600} + \frac{190511t^4}{264600} + \\
 & + \frac{2231911t^5}{28576800} + \frac{\pi^2}{6} g_2(t), \\
 g_6(t) &= \frac{164}{81} + \frac{814t}{125} - \frac{18418216t^2}{10418625} - \frac{114927398t^3}{281302875} + \frac{\pi^2}{3} g_1(t).
 \end{aligned}$$

Отметим, что полиномы $g_5(t)$ и $g_6(t)$ используются в дальнейшем для представления $A_2^{(10), L\ell\ell\ell}(t)$ в правой полуплоскости переменной z .

Наконец, входящая в выражение (19) сумма $\Sigma_1(t)$ равна

$$\begin{aligned}
 \Sigma_1(t) = & \frac{8}{3} \sum_{n=3}^{\infty} \left\{ \left[Q_1(-n) + Q_2(-n) \ln(t) - Q_3(-n) \ln^2(t) \right] \psi^{(1)}(n) + \right. \\
 & \left. + \left[Q_2(-n) - 2Q_3(-n) \ln(t) \right] \psi^{(2)}(n) - Q_3(-n) \psi^{(3)}(n) \right\} t^n, \quad (20)
 \end{aligned}$$

где $\psi^{(k)}(n)$ обозначает полигамма-функцию порядка k от целого аргумента n , а $Q_{i=1,2,3}$ выражаются как

$$\begin{aligned}
 Q_1(n) = & 6751269000 + 40950554400n + 19613108340n^2 - \\
 & - 383309558856n^3 - 826774862139n^4 + 924941026044n^5 + \\
 & + 5538290450480n^6 + 6540701065768n^7 - 2601992148019n^8 - \\
 & - 13947133685004n^9 - 12413008740734n^{10} + 1058973953952n^{11} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 10775553931592n^{12} + 9161255067136n^{13} + 2818170076544n^{14} - \\
 & - 844629934848n^{15} - 1166425861376n^{16} - 492797758464n^{17} - \\
 & - 92025138688n^{18} + 4832247808n^{19} + 7132129280n^{20} + \\
 & + 1858043904n^{21} + 253444096n^{22} + 18677760n^{23} + \\
 & + 589824n^{24} / [(n^2 - 1)Z^3(n)], \\
 Q_2(n) = & 2381400 + 9315810n - 9561069n^2 - 82903809n^3 - 100877126n^4 + \\
 & + 40692827n^5 + 164693675n^6 + 103792048n^7 - 10480368n^8 - \\
 & - 38257440n^9 - 14786656n^{10} + 88768n^{11} + 1590016n^{12} + \\
 & + 483584n^{13} + 62208n^{14} + 3072n^{15} / [(n^2 - 1)Z^2(n)], \\
 Q_3(n) = & 9(n^2 - n - 1)(3n^2 + 21n + 35) / Z(n).
 \end{aligned}$$

Здесь полином $Z(n)$ определяется выражением (18).

Таким образом, как видно из формулы (19), точное выражение для $A_L^{L\ell\ell\ell}(t)$ содержит степени по t , степени логарифма $\ln(t)$ вплоть до 4-й, а также полилогарифмы $\text{Li}_n(t)$.

Правая полуплоскость: $t > 1$. Вычисляя и суммируя все вычеты в правой полуплоскости переменной z , получаем

$$\begin{aligned}
 A_2^{(10),L\ell\ell\ell}(t > 1) = & D_0(t) + D_1(t) \ln(t) + D_2(t) \ln^2(t) + g_6(t)t^{3/2} \times \\
 & \times \left[\text{Li}_2\left(\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}\right) - \text{Li}_2\left(-\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}\right) - \frac{\pi^2}{4} \right] + \left[\frac{658010786}{281302875} + \right. \\
 & + \left. \frac{29015464t}{3472875} - \frac{76078t^2}{10125} + \pi^2 \left(\frac{598}{8505} + \frac{472}{31185t} + \frac{136t}{315} - \frac{2t^2}{5} \right) \right] \times \\
 & \times \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{t}\right) + \frac{4g_5(t)}{\sqrt{t}} \left[\text{Li}_3\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) - \text{Li}_3\left(-\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \right] + \left[\frac{1486136}{297675} + \right. \\
 & + \left. \frac{7088t}{1225} + \frac{22064t^2}{675} + \frac{4}{3}\pi^2 \left(\frac{1}{3} + t^2 \right) \right] \text{Li}_3\left(\frac{1}{t}\right) - \left(\frac{1552}{945} + \frac{512t}{105} - \right. \\
 & \left. - \frac{128t^2}{45} \right) \text{Li}_4\left(\frac{1}{t}\right) + \Sigma_2(t), \quad (21)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 D_0(t) = & \frac{8741299421}{723350250} + \frac{40331092741t}{1125211500} + \frac{153650032027t^2}{28130287500} + \\
 & + \frac{95289439723t^3}{10126903500} + \frac{1622471149t^4}{1125211500} + \pi^2 \left(\frac{63836886989}{297055836000} + \frac{4838}{93555t} - \right. \\
 & \left. - \frac{101990719t}{611226000} + \frac{20342647t^2}{14033250} + \frac{4507981t^3}{13471920} + \frac{151931t^4}{2993760} \right) - \frac{\pi^4}{45} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{299}{567} + \frac{236}{2079t} + \frac{68t}{21} - 3t^2 \right), \\ D_1(t) = & \frac{5884987}{1148175} + \frac{18673392163t}{2250423000} + \frac{38398840507t^2}{11252115000} + \frac{32532326467t^3}{6751269000} + \\ & + \frac{1622471149t^4}{2250423000} + \pi^2 \left(\frac{1868939}{5987520} + \frac{265571t}{1496880} + \frac{1839029t^2}{14968800} + \frac{769337t^3}{4490640} + \right. \\ & + \frac{151931t^4}{5987520} \left. \right) + \frac{g_5(t)}{\sqrt{t}} \left[\text{Li}_2 \left(\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1} \right) - \text{Li}_2 \left(-\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1} \right) - \frac{\pi^2}{4} - \right. \\ & - \text{Li}_2 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) + \text{Li}_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{t}} \right) \left. \right] - \left[\frac{743068}{893025} + \frac{3544t}{3675} + \frac{248t^2}{45} + \frac{2}{9}\pi^2 \times \right. \\ & \times \left. \left(\frac{1}{3} + t^2 \right) \right] \left[\text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{t} \right) - \frac{\pi^2}{6} \right] + \left[\frac{743068}{297675} + \frac{3544t}{1225} + \frac{11032t^2}{675} + \right. \\ & + \left. \frac{2}{3}\pi^2 \left(\frac{1}{3} + t^2 \right) \right] \text{Li}_2 \left(\frac{1}{t} \right) - \left(\frac{776}{945} + \frac{256t}{105} - \frac{64t^2}{45} \right) \text{Li}_3 \left(\frac{1}{t} \right), \\ D_2(t) = & \frac{482938648}{281302875} + \frac{5591300261t}{1000188000} + \frac{355194901t^2}{142884000} + \frac{2558299t^3}{3429216} + \\ & + \frac{2231911t^4}{28576800} + \pi^2 \left(\frac{181439}{2177280} + \frac{236}{31185t} + \frac{24397t}{120960} + \frac{97t^2}{1080} + \right. \\ & + \left. \frac{275t^3}{10368} + \frac{19t^4}{6912} \right) + \left(-\frac{388}{2835} - \frac{128t}{315} + \frac{32t^2}{135} \right) \text{Li}_2 \left(\frac{1}{t} \right). \end{aligned}$$

Последнее слагаемое $\Sigma_2(t)$ в выражении (21) есть сумма

$$\begin{aligned} \Sigma_2(t) = \frac{8}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left[Q_1(n) + Q_2(n) \ln(t) - Q_3(n) \ln^2(t) \right] \psi^{(1)}(n) - \right. \\ \left. - \left[Q_2(n) - 2Q_3(n) \ln(t) \right] \psi^{(2)}(n) - Q_3(n) \psi^{(3)}(n) \right\} \frac{1}{t^n}, \quad (22) \end{aligned}$$

в которой обозначения такие же, как в сумме Σ_1 , определяемой выражением (20).

3. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Приведенные выше выражения (19) и (21) определяют в явном виде точные формулы для коэффициента $A_2^{(10),L\ell\ell\ell}(t)$ и позволяют провести численные расчеты соответствующих радиационных поправок с любой наперед заданной точностью. Причем требуемая точность численных расчетов ограничена точностью экспериментально измеренных фундаментальных физических величин α , m_ℓ и m_L .

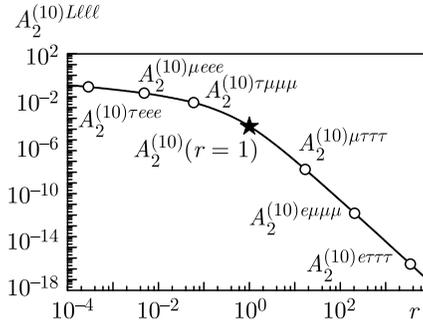


Рис. 2. Поведение $A_2^{(10),L\ell\ell}$ в зависимости от отношения масс лептонов $r = m_\ell/m_L$. Кружки указывают на значения коэффициента при физических массах лептонов, звездочка — это универсальное значение при $r = 1$

На рис. 2 представлены результаты численных расчетов (сплошная линия), полученных по формулам (19) и (21), коэффициента $A_2^{(10),L\ell\ell}$, определяющего поправку десятого порядка, $a_L^{L\ell\ell} = A_2^{(10),L\ell\ell} (\alpha/\pi)^5$, в зависимости от отношения масс лептонов $r = m_\ell/m_L$ * в широком диапазоне значений $0 < r < \infty$. Кружками обозначены значения коэффициентов при реальных физических массах лептонов для всех возможных комбинаций внутренних ℓ и внешних L лептонов. Универсальное значение при $r = 1$ отмечено на графике звездочкой. Видно, что основной вклад в $A_2^{(10),L\ell\ell}(r)$ дают диаграммы с поляризационными операторами, состоящими из трех петель легчайших лептонов (электронов). С ростом масс лептонов в петлях значения резко падают, примерно на 18 порядков. Хотя относительные вклады тяжелых лептонов в аномальный магнитный момент электрона, т. е. коэффициенты $A_2^{(10),e\mu\mu\mu}$ и $A_2^{(10),e\tau\tau\tau}$, чрезвычайно малы, они (ввиду высокой точности экспериментальных измерений) достаточно важны при оценках достоверности теоретических предсказаний.

Заметим, что для всех комбинаций из существующих лептонов отношение масс в интервале слева от единицы $r < 1$ имеет максимально возможное отношение $r_{\max} = m_\mu/m_\tau \simeq 5,9510^{-2} \ll 1$, а в интервале справа от единицы — минимально возможное отношение $r_{\min} = m_\tau/m_\mu \simeq 16,8 \gg 1$ (см. [33]). Это указывает на то, что физические значения r находятся либо в области $r < 0,06$, либо в области $r > 16$, что позволяет заменить точные выражения для $A_2^{(10),L\ell\ell}(r)$ более простыми, приближенными формулами, разложив (19)–(22) в ряд при $r \ll 1$ и $r \gg 1$ и сохранив конечное число членов разложения в соответствии с желаемой точностью результата. Разложение, получаемое из формулы (19) при

* Для наглядности графика мы вновь используем переменную r ($t = r^2$).

$t = r^2 \ll 1$ до порядка $\sim \mathcal{O}(t^4)$, имеет вид

$$\begin{aligned}
 A_{2,\text{asympt}}^{(10),L\ell\ell\ell}(t) \underset{t \ll 1}{=} & \frac{64244}{6561} + \frac{8}{405}\pi^4 - \frac{2593}{2187}\pi^2 - \frac{476}{81}\zeta(3) + \left(-\frac{119}{243} + \right. \\
 & + \left. \frac{4}{81}\pi^2 \right) \ln^3(t) - \left(\frac{61}{243} - \frac{2}{81}\pi^2 \right) \ln^2(t) - \left(\frac{7627}{1458} + \frac{52}{81}\pi^2 - \frac{16}{135}\pi^4 \right) \ln(t) - \\
 & - \left[\frac{17525}{729} - \frac{76}{243}\pi^2 - \frac{32}{135}\pi^4 - \left(\frac{230}{81} - \frac{8}{27}\pi^2 \right) \ln^2(t) + \left(\frac{454}{27} - \frac{16}{9}\pi^2 \right) \times \right. \\
 & \times \ln(t) \left. \right] t + \left[\frac{675818203}{13668750} - \frac{592}{2025}\pi^4 - \frac{62}{243}\pi^2 + \frac{16}{9}\pi^2\zeta(3) - \frac{3364}{225}\zeta(3) + \right. \\
 & + \frac{2}{45}\ln^4(t) - \left(\frac{2459}{2025} - \frac{4}{27}\pi^2 \right) \ln^3(t) + \left(\frac{19268}{3375} - \frac{26}{81}\pi^2 \right) \ln^2(t) + \\
 & + \left. \left(-\frac{8929444}{455625} - \frac{98}{81}\pi^2 + \frac{16}{45}\pi^4 + \frac{32}{15}\zeta(3) \right) \ln(t) \right] t^2 + \left[\frac{15420978231787}{1837845450000} - \right. \\
 & - \frac{125}{243}\pi^2 + \frac{88}{4725}\pi^4 - \frac{23192}{11025}\zeta(3) - \frac{22}{945}\ln^4(t) - \frac{5798}{33075}\ln^3(t) + \\
 & + \left. \frac{978421}{6945750}\ln^2(t) - \left(\frac{14067530059}{4375822500} + \frac{4}{81}\pi^2 + \frac{352}{315}\zeta(3) \right) \ln(t) \right] t^3 - \\
 & - \frac{41}{540}\pi^4 t^{3/2} - \frac{33}{140}\pi^4 t^{5/2} + \frac{713}{11340}\pi^4 t^{7/2} + \mathcal{O}(t^4). \quad (23)
 \end{aligned}$$

Это выражение полностью согласуется с приведенными ранее в работах [19, 27] формулами, полученными с точностью $\sim \mathcal{O}(t^{1/2})$ и $\sim \mathcal{O}(t^{5/2})$ соответственно.

При больших значениях $t \gg 1$ из (21) следует

$$\begin{aligned}
 A_{2,\text{asympt}}^{(10),L\ell\ell\ell}(t) \underset{t \gg 1}{=} & \left[\frac{6007320707}{328706428050} - \frac{89}{675675}\pi^4 - \frac{8651128}{2029052025}\zeta(3) + \right. \\
 & + \left. \left(\frac{87709}{7297290} - \frac{356}{45045}\zeta(3) \right) \ln(t) \right] \frac{1}{t^2} + \left[\frac{31956039083}{61632455259375} - \right. \\
 & - \frac{8}{81081}\pi^4 - \frac{4}{3375}\ln^2(t) + \frac{24687032}{6087156075}\zeta(3) + \left. \left(\frac{15610069}{1368241875} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{160}{27027}\zeta(3) \right) \ln(t) \right] \frac{1}{t^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^4}\right). \quad (24)
 \end{aligned}$$

На рис. 3 приведено сравнение точных расчетов с результатами, полученными из разложений (23) и (24). Из этого рисунка видно, что приближенные расчеты практически совпадают с точными в большом интервале переменной r , а именно, в интервале $0 < r < 0,1$ для разложения вблизи $r \rightarrow 0$ и в интервале $2 < r < \infty$ для разложения вблизи $r \rightarrow \infty$. Как было уже отмечено ранее, эти два интервала полностью перекрывают все значения $r = m_\ell/m_L$ для всех возможных комбинаций

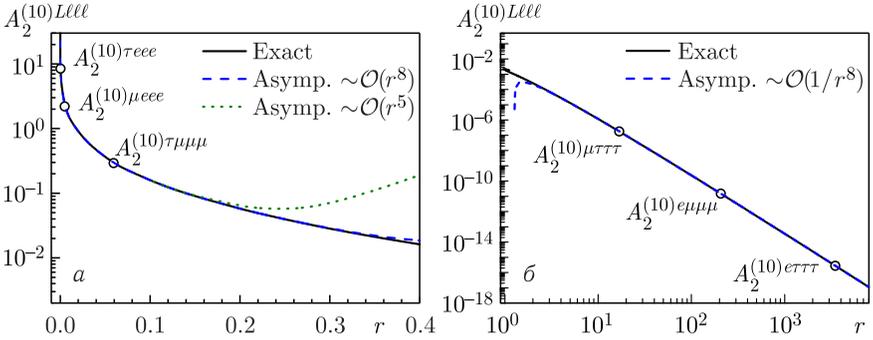


Рис. 3. Сравнение точных результатов с результатами вычислений по асимптотическим формулам. а) Сплошная кривая соответствует расчету по формуле (19), пунктирная — асимптотика при $r < 1$, приведенная в [19], т.е. асимптотическое разложение точной формулы (19) до членов $\mathcal{O}(r^5)$, штриховая кривая соответствует асимптотическому разложению с точностью до членов $\mathcal{O}(r^8)$, т.е. уравнению (23). б) Сплошная кривая — точный результат (21), штриховая — асимптотика при $r > 1$ с точностью до членов $\mathcal{O}(1/r^8)$

масс внутренних ℓ и внешних L физических лептонов. Это указывает на то, что выражения (23) и (24) вполне могут быть использованы не только для качественного, но и для количественного анализа поправок к аномальному магнитному моменту любого лептона (e , μ и τ) с любыми лептонными вставками. Точность таких вычислений можно наглядно продемонстрировать на примере аномального магнитного момента мюонов. Определим относительную погрешность ε :

$$\varepsilon(r) = \frac{|A_{2,\text{asymp}}^{(10),\mu\ell\ell\ell}(r) - A_{2,\text{exact}}^{(10),\mu\ell\ell\ell}(r)|}{A_{2,\text{exact}}^{(10),\mu\ell\ell\ell}(r)}.$$

Для электронных петель ($\ell = e$) отношение электрон-мюонной массы $r = 0,00483633169(11)$ [33] и расчет по формуле (19) для среднего значения дает $A_{2,\text{exact}}^{(10),\mu e e e}(r) = 2,2033273165555885939\dots$, тогда как расчет по приближенной формуле (23) с сохранением членов до порядка r^5 (что соответствует разложению в работе [19]) дает значение $A_{2,\text{asymp}}^{(10),\mu e e e}(\sim \mathcal{O}(r^5)) = 2,20332731662$. В терминах относительной погрешности это соответствует $\varepsilon(\sim \mathcal{O}(r^5)) \approx 2,8 \cdot 10^{-11}$. Точность разложения существенно возрастает, если в (23) сохранить все выписанные слагаемые. В этом случае получается $A_{2,\text{asymp}}^{(10),\mu e e e}(\sim \mathcal{O}(r^8)) = 2,20332731655558856$ и $\varepsilon(\sim \mathcal{O}(r^8)) \approx 1,4 \cdot 10^{-17}$. Таким образом, в поправках от электронных петель в мюонный аномальный магнитный момент вполне достаточно ограничиться разложением до $\sim \mathcal{O}(r^5)$.

Для того чтобы оценить, насколько далеко от физических значений r можно применить приближенную формулу (23), мы сравнили точные результаты с результатами разложения $\sim \mathcal{O}(r^5)$ и $\sim \mathcal{O}(r^8)$ в точке $r = 0,1$. Получено, что в этой точке разложение $\mathcal{O}(\sim r^5)$ обеспечивает только три точных значащих цифры, а разложение $\sim \mathcal{O}(r^8)$ дает существенно более точный результат, а именно, семь точных значащих цифр. Аналогичные результаты получены и в области $r > 2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые получены точные аналитические выражения для поправок десятого порядка к аномальному магнитному моменту лептонов (e , μ и τ) от фейнмановских диаграмм со вставками поляризационного оператора, состоящего из четырех лептонных петель, одна из которых образована лептонами того же типа L , что и внешний лептон, а три других — лептонами $\ell \neq L$. Рассмотрены все возможные комбинации исследуемого лептона L с тремя внутренними лептонами ℓ , образующими петли. Подход основан на интегральном представлении Меллина–Барнса, которое позволяет получить аналитические выражения для соответствующих поправок во всем диапазоне изменения отношения массы лептона ℓ в петле к массе внешнего лептона ($0 < r < \infty$). Проиллюстрировано, что основной вклад дают диаграммы с тремя электронными петлями. Поскольку полученные аналитические выражения для соответствующих поправок довольно громоздки, а в действительности отношения r масс физических лептонов либо $r \ll 1$, либо $r \gg 1$, то из точных формул были получены асимптотические разложения в пределах $r \ll 1$ и $r \gg 1$ и исследованы области их применимости — это области $0 < r < 0,1$ и $2 < r < \infty$. Сравнение с ранее известными из публикаций разложениями показало полное согласие с нашими более точными выражениями.

Проводимые исследования в большой степени поддержаны грантом сотрудничества Белоруссия–ОИЯИ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dirac P. A. M. The Quantum Theory of the Electron // Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1928. V. 117. P. 610–624.
2. Parker R. H., Zhong C. Yu. W., Estey B., Müller H. Measurement of the Fine-Structure Constant as a Test of the Standard // Science. 2018. V. 360. P. 191–195.
3. Morel L., Yao Z., Clade P., Guellati-Khelifa S. Determination of the Fine-Structure Constant with an Accuracy of 81 Parts per Trillion // Nature. 2020. V. 588. P. 61–65.
4. Abi B. et al. (*Muon $g - 2$ Collab.*). Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm // Phys. Rev. Lett. 2021. V. 126. P. 141801.

5. *Aguillard D.P. et al. (Muon $g - 2$ Collab.).* Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.20 ppm // *Phys. Rev. Lett.* 2023. V. 131. P. 141801.
6. *Jegerlehner F.* The Anomalous Magnetic Moment of the Muon // *Springer Tracts Mod. Phys.* 2017. V. 274. P. 1–693.
7. *Aoyama T. et al.* The Anomalous Magnetic Moment of the Muon in the Standard Model // *Phys. Rep.* 2020. V. 887. P. 1–166.
8. *Ignatov F.V. et al.* Measurement of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ Cross Section from Threshold to 1.2 GeV with the CMD-3 Detector. arXiv:2302.08834 [hep-ph]. 2023.
9. *Ignatov F.V. et al.* Measurement of the Pion Formfactor with CMD-3 Detector and Its Implication to the Hadronic Contribution to Muon ($g - 2$). arXiv:2309.12910 [hep-ex]. 2023.
10. *Davier M., Fodor Z., Gerardin A., Lellouch L., Malaescu B., Stokes F.M. et al.* Hadronic Vacuum Polarization: Comparing Lattice QCD and Data-Driven Results in Systematically Improvable Ways // *Proc. of Science Department, CERN, Geneva, 2023.* arXiv:2308.04221 [hep-ph].
11. *Davier M., Hoecker A., Lutz A.M., Malaescu B., Zhang Z.* Tensions in $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-(\gamma)$ Measurements: The New Landscape of Data-Driven Hadronic Vacuum Polarization Predictions for the Muon $g_\mu - 2$. arXiv:2312.02053 [hep-ph]. 2023.
12. *Masjuan P., Roig P.* Data-Driven Approximations to the Hadronic Light-by-Light Scattering Contribution to the Muon($g - 2$). arXiv:2401.05666 [hep-ph]. 2024.
13. *Bryzgalov V., Zenin O.* A Comment on the Impact of CMD-3 $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ Cross Section Measurement on the SM $g_\mu - 2$. arXiv:2401.07204v1[hep-ph]. 2024.
14. *Volkov S.* Calculation of the Total 10-th Order QED Contribution to the Lepton Magnetic Moments. arXiv:2404.00649 [hep-ph]. 2024.
15. *Laporta S.* High-Precision Calculation of the 4-Loop Contribution to the Electron $g - 2$ in QED // *Phys. Lett. B.* 1997. V. 772. P. 232–238.
16. *Laporta S.* High-Precision Calculation of the 4-Loop QED Contribution to the Slope of the Dirac Form Factor // *Phys. Lett. B.* 2020. V. 800. P. 135–137.
17. *Volkov S.* A Method of Fast Calculation of Lepton Magnetic Moments in Quantum Electrodynamics // *Phys. Part. Nucl.* 2022. V. 53. P. 805–810.
18. *Volkov S.* Calculation of Lepton Magnetic Moments in Quantum Electrodynamics: A Justification of the Flexible Divergence Elimination Method // *Phys. Rev. D.* 2024. V. 109. P. 03007.
19. *Aguilar J.P., de Rafael E., Greynat D.* Muon Anomaly from Lepton Vacuum Polarization and the Mellin–Barnes Representation // *Phys. Rev. D.* 2008. V. 77. P. 093010.
20. *Solovtsova O.P., Lashkevich V.I., Kaptari L.P.* Lepton Anomaly from QED Diagrams with Vacuum Polarization Insertions within the Mellin–Barnes Representation // *Eur. Phys. J. Plus.* 2023. V. 138. P. 212.
21. *Dubovyk I., Gluza J., Somogyi G.* Mellin–Barnes Integrals: A Primer on Particle Physics Applications // *Lect. Notes Phys.* 2022. V. 1008. P. 1–208.
22. *Boos E.E., Davydychev A.E.* A Method of Evaluating Massive Feynman Integrals // *Theor. Math. Phys.* 1991. V. 89. P. 1052–1063.

23. *Aguilar J. P., Greynat D., de Rafael E.* Asymptotics of Feynman Diagrams and the Mellin–Barnes Representation // *Phys. Lett. B.* 2005. V. 628. P. 73–84.
24. *Лашкевич В. И., Соловцова О. П., Каптарь Л. П.* Аналитические расчеты электромагнитных поправок пятого порядка к аномальному магнитному моменту лептонов в представлении Меллина–Барнса // *Изв. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук.* 2023. Т. 59. С. 338–351.
25. *Solovtsova O. P., Lashkevich V. I., Kaptari L. P.* Analytical Calculations of the Tenth Order QED Radiative Corrections to Lepton Anomalies within the Mellin–Barnes Representation // *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* 2024. V. 51. P. 055001.
26. *Kataev A. L.* Renormalization Group and the Five-Loop QED Asymptotic Contributions to the Muon Anomaly // *Phys. Lett. B.* 1992. V. 284. P. 401–409.
27. *Laporta S.* Analytical and Numerical Contributions of Some Tenth-Order Graphs Containing Vacuum Polarization Insertions to the Muon ($g - 2$) in QED // *Phys. Lett. B.* 1994. V. 328. P. 522–527.
28. *Lautrup B. E., de Rafael E.* Calculation of the Sixth-Order Contribution from the Fourth-Order Vacuum Polarization to the Difference of the Anomalous Magnetic Moments of Muon and Electron // *Phys. Rev.* 1968. V. 174. P. 1835–1842.
29. *Schwinger J. S.* On Quantum Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron // *Phys. Rev.* 1948. V. 73. P. 416–417.
30. *Schwinger J. S.* Quantum Electrodynamics. III. The Electromagnetic Properties of the Electron: Radiative Corrections to Scattering // *Phys. Rev.* 1949. V. 76. P. 790–817.
31. *Laursen M. L., Samuel M. A.* The n -Bubble Diagram Contribution to ($g - 2$) of the Electron. Mathematical Structure of the Analytical Expression // *Phys. Lett. B.* 1980. V. 91. P. 249–252.
32. *Laursen M. L., Samuel M. A.* Borel Transform Technique and the n -Bubble Diagram Contribution to the Lepton Anomaly // *Phys. Rev. D.* 1981. V. 23. P. 2478–2481.
33. *Tiesinga E., Mohr P. J., Newell D. B., Taylor B. N.* CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2018 // *Rev. Mod. Phys.* 2021. V. 93. P. 025010.