ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2025. Т. 56, вып. 2. С. 431–441

ЭВОЛЮЦИЯ КРУПНОМАСШТАБНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЧЕРНА–САЙМОНСА В РАСШИРЯЮЩЕМСЯ ПРОСТРАНСТВЕ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ СКАЛЯРНОЙ КРИВИЗНЫ

М. С. Дворников [1,2,*], *П. М. Ахметьев* [1,**]

[1] Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова РАН, Троицк, Москва, Россия
[2] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Изучается проблема нарушения неабелевой калибровочной симметрии для решения уравнения Янга–Миллса в расширяющемся пространстве с параметром отрицательной скалярной кривизны, которое становится плоским на больших временах расширения и которое называется пространством геодезического потока плоскости Лобачевского. Используется предположение о том, что физические свойства магнитного поля связаны со шкалой Колмогорова. Это позволило в каждый момент времени оценить α-эффект от параметра кривизны пространства. С другой стороны, в расширяющемся гиперболическом пространстве наблюдается изменение плотности магнитной спиральности, не связанное с α-эффектом. Сравниваются два указанных фактора изменения магнитной спиральности, и делается вывод, что на достаточно стабильном этапе расширения α-эффект, вызванный влиянием скалярной кривизны на колмогоровский МГД-спектр, становится малым.

We study the problem of breaking non-Abelian gauge symmetry for solving the Yang–Mills equation in an expanding space with a parameter of negative scalar curvature, which becomes flat at large expansion times and which is called the geodesic flow space of the Lobachevsky plane. We use the following assumption: the physical properties of the magnetic field are related to the Kolmogorov scale, which made it possible to estimate the α effect of the space curvature parameter at each moment of time. On the other hand, in an expanding hyperbolic space, a change in the density of magnetic helicity is observed, unrelated with the α effect. We compare the two indicated factors of change in magnetic helicity and conclude that at a fairly stable stage of expansion, the α effect caused by the influence of scalar curvature on the Kolmogorov MHD spectrum becomes small.

PACS: 44.25.+f; 44.90.+c

* E-mail: maxdvo@izmiran.ru
** E-mail: pmakhmet@mail.ru

ВВЕДЕНИЕ

С тех пор когда уравнения Янга–Миллса впервые были сформулированы в 1954 г. в работе [1], важность неабелевой теории в современной физике невозможно переоценить. Это происходит потому, что экспериментально подтвержденная Стандартная модель элементарных частиц основана на $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ калибровочной теории. Наибольшая сложность при изучении магнитного поля с неабелевой калибровочной группой не только связана с потерей коммутативности, но проистекает также и из нелинейности соответствующих уравнений. Это проявляется, например, при исследовании инстантонных решений, которые играют важную роль в моделях квантовой хромодинамики (КХД) [2].

С другой стороны, к изучению полей с неабелевой калибровочной группой возможен чисто геометрический подход, аналогичный подходу в работе [3]. При таком подходе хорошо прослеживается связь с топологическими методами в магнитной гидродинамике (МГД) [4] с уравнениями среднего поля [5, 6].

Наш основной результат уточняет вычисление [7] M-инварианта магнитных линий [8] применительно к задаче в расширяющемся пространстве с учетом конформного фактора расширения, как в [9, 10]. Мы вычислили асимптотические показатели для линейного приближения α-эффекта с учетом вклада кривизны пространства, вызванного, во-первых, сохранением высшего инварианта магнитных линий при турбулентной магнитной диффузии. Этот инвариант непосредственно связан со вторым слагаемым интеграла Черна–Саймонса для исходного поля Янга–Миллса. Во-вторых, это происходит из-за наличия пространственного масштабного фактора, характеризующего расширение и ненулевое кручение искривленного пространства. В предыдущих работах, например в [11], изучался лишь эффект расширения, но не кручения, влияющий на решения уравнения Янга–Миллса.

1. МАСШТАБИРОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО И ПРОСТРАНСТВА ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ПОТОКА

Определим в 3D-пространстве Минковского метрику $\Re$

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1). \tag{1}$$

Плоскость Лобачевского $\Lambda \subset \Re$ определяется уравнением $g_{mu\nu}(\hat{\mathbf{b}}) = 1$, скалярная кривизна во внутренней геометрии в каждой точке $\hat{\mathbf{b}} \in \Lambda$ составит -1. Плоскость Λ удобно задавать в координатах декартовой открытой полуплоскости (x, y) $y > 0$, на которой метрика определена по формуле

$$dl^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \tag{2}$$

Наряду с Λ нам потребуется 3D-многообразие, которое называется многообразием геодезического потока на Λ и обозначается через $T\Lambda$. Координаты на этом многообразии обозначаются через (φ, x, y), причем координаты точки $\mathbf{b} \in T\Lambda$ визуализируются как касательный вектор на плоскости Λ, приложенный к точке $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, направленный под углом φ в декартовой системе (x, y).

Однопараметрическое семейство метрик в 3D-многообразии $T\Lambda_{\lambda^{-2/3}}$ определено по формуле

$$g_{\mu\nu}^{T\Lambda_{\lambda^{-2/3}}} = \lambda^{-2/3}\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + \lambda^{4/3}\left(d\varphi + \frac{dx}{y}\right)^2. \tag{3}$$

В каждой метрике из семейства объем 3D-области над многоугольником в горизонтальной плоскости со стороной длины $\simeq \lambda^{-1/3}$ составит величину порядка $\simeq 1$, а высота этого объема (интегральное значение φ-координаты) составит $\simeq \lambda^{2/3}$. Параметр $\lambda^{-2/3}$ равен обратному значению абсолютной величины средней скалярной кривизны (отрицательной) пространства $T\Lambda_{\lambda^{-2/3}}$, которую выбирают по значению секционной кривизны горизонтального сечения.

Теперь преобразуем метрику (3) с масштабным фактором $\lambda^{4/3}$ по каждой координате. В результате получаем метрику

$$g_{\mu\nu}^{T\Lambda_{\lambda^2}} = \lambda^2\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + \lambda^4\left(d\varphi + \frac{dx}{y}\right)^2. \tag{4}$$

Тем самым в метрике (3) пространства $T\Lambda_{\lambda^2}$ масштабный параметр λ можно связать с абсолютным значением скалярной кривизны горизонтальной плоскости по формуле $\lambda^{-2} = \kappa$. Вертикальные скалярные кривизны составят λ^{-6}. При $\lambda \to +\infty$ вертикальные скалярные кривизны по абсолютной величине становятся много меньше горизонтальной скалярной кривизны.

Предположим, что пространство с постоянной горизонтальной отрицательной скалярной кривизной расширяется с пространственным фактором $\hat{a}(t)$, где $\hat{a}(t) \to +\infty, t \to +\infty$, как в [11, гл. 14, с. 262]. В этом случае следует связать масштабный фактор в расширяющемся пространстве с абсолютной величиной κ скалярной кривизны пространства по формуле

$$\hat{a} = \kappa^{-1/2}, \tag{5}$$

из которой видно, что $\hat{a}^{-2}$ имеет смысл конформной скалярной кривизны.

В пределе $\lambda \to +\infty$ пространство $T\Lambda_{\lambda^2}$ становится плоским за счет расширения и за счет одновременного «раскручивания», т. е. увеличения масштаба вдоль φ-координаты. Масштабный фактор, изменяющийся во времени, влияет на МГД, поскольку конформная плотность магнитной спиральности, связанная с этим фактором, определяет поток магнитной спиральности в каждый момент времени.

2. ПОЛЕ ЯНГА–МИЛЛСА И ВОЛНА ЧЕРНА–САЙМОНСА

Уравнение индукции (5) в работе [3] для максвелловского поля допускает обобщение на $SU(2)$-магнитное поле. При этом интеграл Черна–Саймонса, как в формуле (2) работы [7], оказывается законом сохранения в $SU(2)$–МГД. Для удобства выпишем этот интеграл:

$$\mathrm{CS}\,(\mathbf{F}^L) = \int\limits_{S^3} \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^L \wedge d\mathbf{A}^L + \mathbf{A}^L \wedge \mathbf{A}^L \wedge \mathbf{A}^L). \tag{6}$$

Тем самым в интеграле (6) речь идет о тройке векторных потенциалов $(\mathbf{A}_\mathbf{i}, \mathbf{A}_\mathbf{j}, \mathbf{A}_\mathbf{k})$, записанных в координатах 3D. Первое слагаемое в (6) представляет собой сумму трех магнитных спиральностей для максвелловских полей, которые определены по значениям соответствующих компонент матричного вектор-потенциала $\mathbf{A}^L$. Второе слагаемое зависит от всех трех компонент $\mathbf{A}^L$. Эти три компоненты можно рассматривать как тройку максвелловских потенциалов, которые при этом удовлетворяют некоторым простым дополнительным условиям совместности, сформулированным в работе [3, теорема 3]. Эти условия проистекают из первого уравнения системы Янга–Миллса для рассматриваемой тройки потенциалов, которую следует понимать как координаты связности в $SU(2)$-расслоении над объемом с магнитным полем (см. уравнение (1) в работе [7]). Второе уравнение системы Янга–Миллса непосредственно для закона сохранения (6) не требуется. В этой же работе показано, что при специальном выборе тройки потенциалов получается точное решение системы Янга–Миллса, т. е. и второе уравнение системы также выполнено.

Каждая компонента тройки $(\mathbf{A}_\mathbf{i}, \mathbf{A}_\mathbf{j}, \mathbf{A}_\mathbf{k})$ называется вектор-потенциалом волны Черна–Саймонса и сама по себе характеризуется магнитной спиральностью. Были вычислены (см. формулу (4) в [7]) для пространства $T\Lambda_\lambda$ с полем базисных реперов

$$\{f^\varphi, e^x, \tilde{e}^y\}, \quad (f^\varphi, f^\varphi) = \lambda^{4/3}, \quad (e^x, e^x) = \lambda^{-2/3}, \quad (\tilde{e}^y, \tilde{e}^y) = \lambda^{-2/3},$$

компоненты поля Янга–Миллса:

$$\mathbf{A}_\mathbf{i}^\lambda = f^\varphi, \quad \mathbf{A}_\mathbf{j}^\lambda = e^x, \quad \mathbf{A}_\mathbf{k}^\lambda = \tilde{e}^y. \tag{7}$$

Каждую из горизонтальных волн вдоль e^x, $\tilde{e}^y$ можно понимать как одну из двух сопряженных волн крупномасштабного максвелловского магнитного поля. При рассыпании тройки на набор вектор-потенциалов интеграл Черна–Саймонса поля Янга–Миллса тройки компонент преобразуется в M-инвариант магнитных линий горизонтальных волн Черна–Саймонса. Сделаем необходимое геометрическое пояснение.

Горизонтальная волна Черна–Саймонса $\mathbf{A}_\mathbf{j}^\lambda$ состоит из магнитных линий, которые являются геодезическими на плоскости Лобачевского Λ. Значение плотности M-интеграла выражается через интегральное среднее число геодезических треугольников, имеющих центр в заданной точке на Λ. Такая функция плотности определяет постоянную функцию в $T\Lambda_{\lambda^{-2/3}}$. При произвольном масштабировании пространства $T\Lambda_{\lambda^{-2/3}}$, в частности при переходе к пространству $T\Lambda_{\lambda^2}$, значение плотности M-интеграла не меняется.

Поскольку размерность плотности M-инварианта подпадает под показатель колмогоровского МГД-спектра, в [7] сделан вывод, что турбулентная диффузия крупномасштабной волны Черна–Саймонса происходит в соответствии со значением скалярной кривизны пространства. Так как α-эффект также меняет конформную плотность M-инварианта волны Черна–Саймонса, этот α-эффект зависит от параметра скалярной кривизны с тем же показателем, что и M-инвариант.

Воспользуемся тем, что плотность магнитной спиральности в пространстве $T\Lambda_{\lambda^2}$ с метрикой (4) не зависит от параметра λ, соответствующие вычисления из [7] приводятся ниже.

Следующее уравнение (в метрике (4)) выполнено:

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}_{\mathbf{i}}^{\lambda} = -2\mathbf{A}_{\mathbf{i}}^{\lambda}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{A}_{\mathbf{j}}^{\lambda} = -2\mathbf{A}_{\mathbf{j}}^{\lambda}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^{\lambda} = -2\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^{\lambda}.$$

Отрицательные собственные числа показывают, что волна Черна–Саймонса является левополяризованной, со знаком спиральности левого геодезического потока, как в [12].

Интеграл магнитной спиральности имеет размерность G^2cm^4, его плотность имеет размерность G^2cm. В результате получаем, что

$$(\mathbf{A}_{\mathbf{i}}^{\lambda}, \mathbf{B}_{\mathbf{i}}^{\lambda}) = (\mathbf{A}_{\mathbf{j}}^{\lambda}, \mathbf{B}_{\mathbf{j}}^{\lambda}) = (\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^{\lambda}, \mathbf{B}_{\mathbf{k}}^{\lambda}) = -2.$$

Видим, что подынтегральное ядро для плотности магнитной спиральности каждой горизонтальной компоненты не зависит от параметра λ. Таким образом, плотность магнитной спиральности, первого слагаемого в интеграле (6), не зависит от параметра горизонтальной секционной кривизны, а поток плотности вызван расширением пространства.

Нам останется лишь уточнить зависимость потока плотности магнитной спиральности от параметра скалярной кривизны. Перейдем от пространства с постоянным масштабным фактором λ, в котором поток плотности магнитной спиральности для среднего поля зависит лишь от среднего магнитного потока и обусловлен значением M-инварианта, к пространству с переменным масштабным фактором. Это реализуется в расширяющемся пространстве, для которого масштабный фактор зависит от времени.

3. УРАВНЕНИЯ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

Система уравнений МГД (см., например, [4, гл. V, § 1, замечание 1.6]) для идеального приближения (т. е. для несжимаемой невязкой бесконечно проводящей жидкости (без магнитной диссипации)) нелинейна. Напомним основы теории среднего поля.

Обозначим через $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ гидродинамическое поле скорости, через $\mathbf{B}(\mathbf{x}; t)$ — магнитное поле в жидкой проводящей среде, предполагается, что среда однородна и изотропна. В нашей задаче 3D-область совпадает с пространством $T\Lambda_{\chi^2}$, спектры Фурье для $\mathbf{V}$, $\mathbf{B}$ непрерывны.

Рассмотрим двухмасштабную модель МГД. Предположим, что вектор-функции $\mathbf{V}$, $\mathbf{B}$ являются случайными, и разделим их на среднюю часть (крупномасштабную компоненту $\mathbf{V}_0$, $\mathbf{B}_0$) и флуктуирующую компоненту (мелкомасштабную или турбулентную компоненту $\mathbf{v}$, $\mathbf{b}$). Характерная длина мелкомасштабной компоненты (но, вообще говоря, не сама компонента) считается много меньшей характерного масштаба измерения усредненных величин (подробнее см. [5, гл. 7, уравнения (7.5), (7.6)]). При этом для средних величин получится $\langle \mathbf{V} \rangle = \mathbf{V}_0$, $\langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{B}_0$. При более детальном исследовании предполагается, что определен случайный ансамбль, а само усреднение наблюдаемых величин описывается предельным переходом для характерных значений длины и времени.

Наша цель — исследовать, каким образом мелкомасштабная компонента наблюдаемого поля действует на поток магнитной спиральности крупномасштабной компоненты магнитного поля. Случайные поля $\mathbf{V}$, $\mathbf{v}$ предполагаются заданными, а векторы $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{b}$ вычисляются. Основное — это свойство линейности уравнения индукции по магнитному полю.

Поскольку имеется линейное соотношение между $\mathbf{b}$ и $\mathbf{B}_0$, поле Υ и поле $\mathbf{B}_0$ также связаны между собой линейным соотношением. Предполагается, что соотношение между $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{b}$ является изотропным, поэтому возникнут следующие два ведущих слагаемых:

$$\Upsilon = \alpha \mathbf{B}_0 - \beta \operatorname{rot}(\mathbf{B}_0). \tag{8}$$

Слагаемые соответствуют разложению случайных полей $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{b}$ на симметрическую и кососимметрическую части.

В рамках сделанного предположения (8) возьмем скалярное произведение обеих частей равенства с вектором $\mathbf{B}_0$. Возьмем интегралы от обеих частей по объему Ω, воспользуемся равенством $\mathbf{A}_0$, $\operatorname{rot}(\mathbf{A}_0) = \mathbf{B}_0$. Получится следующее уравнение, которое описывает перенос магнитной спиральности крупномасштабного магнитного поля $\chi_{\mathbf{B}_0} = \int (\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0)\, d\Omega$:

$$\frac{d\chi_{\mathbf{B}_0}}{dt} = 2\alpha \int (\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_0)\, d\Omega - 2\beta \int (\mathbf{B}_0, \operatorname{rot}(\mathbf{B}_0))\, d\Omega. \tag{9}$$

Один из интегралов в правой части уравнения уже был раньше рассмотрен: $U_{\mathbf{B}_0} = 2 \int (\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_0)\, d\Omega$ — это магнитная энергия среднего магнитного поля, интеграл $\chi_{\operatorname{rot}\mathbf{B}_0} = 2 \int (\mathbf{B}_0, \operatorname{rot}(\mathbf{B}_0))\, d\Omega$ называется интегралом токовой спиральности (крупномасштабного магнитного поля). Коэффициенты α, β играют в МГД фундаментальную роль, эти два коэффициента небезразмерные, их масштабные показатели определяют свойства решения.

Разнос каждой компоненты мелкомасштабного магнитного поля $\mathbf{b}$ (по энергетическим соображениям) распределен, как у $\mathbf{v}$, это определяет распределение мелкомасштабного магнитного поля в колмогоровском спектре. Более того, в МГД-системе крупномасштабные магнитные и гидродинамические поля находятся во взаимном балансе (поле скорости переносит магнитное поле, магнитное поле влияет на поле скорости силами Лоренца), для спектра магнитной энергии крупномасштабного поля выписывают соотношение

$$\mathbf{U_B}(k) = (\mathbf{B}_0(k), \mathbf{B}_0(k)) \sim k^{-5/3}, \tag{10}$$

которое будем называть наклоном колмогоровского спектра.

В случае (10) для спектра турбулентной вязкости получим $\beta(k) \sim \sim k^{-2/3}$; для токовой спиральности $(\mathbf{B}_0, \operatorname{rot}(\mathbf{B}_0)) \sim k^{-2/3}$.

Отсюда в левой части спектральный показатель для плотности потока магнитной спиральности $(\mathbf{A}_0(k), \mathbf{B}_0(k))^{\mathrm{flow}} \sim k^{-4/3}$, спектральный показатель для потока магнитной энергии $(\mathbf{B}_0(k), \mathbf{B}_0(k))^{\mathrm{flow}} \sim k^{-1/3}$. Для расчетов вычислим (условно) плотность магнитного 3D-потока

$$\mathbf{B}_0^{\mathrm{flow}} \sim k^{-7/6}, \tag{11}$$

показатель потока магнитной энергии для магнитного потока с указанной плотностью вычисляется по формуле $-(7 \cdot 2)/6 + 2 = -1/3$. Общие соображения для вычисления показателей МГД-спектров имеются в [6].

Плотности инвариантов χ, M имеют показатели $k = -1$, $k = -7/6$ (вычисление см. в [8]). Как было отмечено, указанные показатели соответствуют спектральным показателям крупномасштабных магнитных полей, возникающих в задачах МГД. Формула M-инварианта весьма громоздка, поскольку речь идет об асимптотическом эргодическом высшем (т. е. не выражающемся через попарные коэффициенты зацепления) инварианте магнитных линий. К счастью, для пространства $T\Lambda_{\chi^2}$ формула M упрощается, поскольку в этом пространстве если пара магнитных линий зацеплена, то с коэффициентом 1. В магнитном потоке, вызванном α-эффектом (первое слагаемое в правой части (9)), магнитные линии уже не являются геодезическими. Магнитный поток, вызванный первым α-слагаемым, компенсирует магнитный поток, вызванный вторым слагаемым турбулентной магнитной диффузии. Зависимость плотности потока второго слагаемого от кривизны пространства изучена в [7] и в разд. 2.

4. ЭФФЕКТ РАСШИРЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Обозначим плотности магнитной спиральности сопряженных горизонтальных волн Черна–Саймонса, которые в нашем случае определяют главные моды крупномасштабного магнитного поля, через

$$(\mathbf{A}_\mathbf{j}^\lambda, \mathbf{B}_\mathbf{j}^\lambda) = (\mathbf{A}_\mathbf{k}^\lambda, \mathbf{B}_\mathbf{k}^\lambda) = \chi.$$

Было показано, что χ — отрицательна и постоянна в пространстве $T\Lambda_{\chi^2}$. Пользуясь результатом из [7], заключаем, что величина χ зависит от времени, поскольку магнитный поток генерирует магнитные линии крупномасштабного поля, причем, если учитывать лишь эффект, связанный с параметром скалярной кривизны, вызванный турбулентной диффузией и α-эффектом, получится

$$\frac{d\chi(t)}{dt} \simeq \lambda^{-1/3} = \kappa^{1/4}. \tag{12}$$

При этом, конечно, поток волны Черна–Саймонса может, вообще говоря, включать и сопряженную волну, что не противоречит формуле потока плотности магнитной спиральности.

В каждый момент времени $t \in [t_0, +\infty)$, если крупномасштабное поле имеет спиральность $\chi(t)$, то для потока спиральности, обусловленного масштабным фактором $\lambda(t)$ опосредованно через M-инвариант магнитного потока, получится

$$\frac{d\chi(t)}{dt} \simeq C(t)\lambda^{-1/3}(t), \tag{13}$$

причем константа $C(t)$ не зависит от геометрии пространства. Положим, что $C = C(t)$, поскольку мы ищем зависимость потока магнитной спиральности от геометрии пространства, которое в условиях сделанного приближения полностью определяется единственным параметром λ.

Теперь сравним плотность потока магнитной спиральности, оцененного по (12), и эффект потока магнитной спиральности, связанный с расширением масштаба. Пусть $a(t)$ — масштабный фактор, связанный с расширением пространства, примем

$$a(t) = t^{\gamma}, \quad \gamma \geqslant 0. \tag{14}$$

Перейдем к конформной плотности χ_c магнитной спиральности, как в [9]. В каждый момент времени получится $\chi_c = a^3(t)\chi(t)$. Если поток магнитной спиральности $\chi(t)$ вызван МГД мелкомасштабного магнитного поля, что не связано с расширением, то получится уравнение (13), в котором λ постоянная, и этот магнитный поток мы в рамках работы не сможем оценить, поскольку константа C нам неизвестна. При вычислении потока магнитной спиральности, обусловленного лишь одним расширением, можно положить, согласно (14):

$$\frac{d\chi}{dt} = 3\gamma t^{3\gamma-1}\chi. \tag{15}$$

Объединив уравнения (15) и (13), получим

$$\frac{d\chi}{dt} = C\lambda^{-1/3}\chi + 3\gamma t^{3\gamma-1}\chi, \tag{16}$$

где константа C обусловлена МГД и для оценочных вычислений роли не играет.

Учтем, что пространственный фактор горизонтального расширения $a = \lambda$, тем самым $\lambda = t^{\gamma}$. Получится, что эффект расширения при

$t \to +\infty$ существенный, если $(3\gamma - 1)/\gamma \geqslant -1/3$, что приводит к условию $\gamma \geqslant 3/10$. На конечной стадии расширения при больших временах следует учитывать α-эффект, обусловленный вкладом скалярной кривизны в мелкомасштабную МГД. Если параметр расширения γ растет экспоненциально, то при достаточно больших временах α-эффект, обусловленный кривизной, полностью исчезает. Но на ранней стадии расширения этот эффект следует учитывать. Вычисление пороговой величины обусловлено значением константы C в формуле (16) и выходит за рамки работы.

5. УРАВНЕНИЯ СРЕДНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРИСУТСТВИИ АКСИОННОГО ПОЛЯ

В этом разделе мы исследуем применение результатов, полученных в данной работе, в аксионной МГД с учетом неоднородности аксионного поля.

В работе [13] приводится вывод уравнения среднего магнитного поля, взаимодействующего с аксионами:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \alpha \mathbf{B} - \eta(\nabla \times \mathbf{B})], \tag{17}$$

где аксионное поле дает вклады в величины $\mathbf{b}$ и α (ср. с уравнением (8)). В работе [9] ранее рассматривалось аналогичное более простое уравнение в предположении $\mathbf{b} = 0$. Этот случай соответствует пространственно-однородному аксионному полю. В статье [9] указана связь параметра расширения с плотностью потока магнитной спиральности, вызванного однородным аксионным полем.

В статье [13] уравнение (17) было использовано для описания эволюции крупномасштабных магнитных полей внутри аксионной звезды. При этом аксионная волновая функция предполагалась пространственно-неоднородной. В этом случае $\mathbf{b} \propto \nabla\varphi \neq 0$. Уравнение (17) также было использовано в статье [14] для изучения эволюции плотной аксионной звезды в солнечной плазме и объяснения нагрева солнечной короны.

Подход в разд. 4 данной статьи идейно аналогичен работе [9]. Отметим, что изученный нами α-эффект вызван турбулентной магнитной диффузией в расширяющемся пространстве с ненулевой секционной кривизной. Заметим, впрочем, что в рассуждениях мы не использовали никаких фундаментальных законов физики, за исключением уравнений МГД (уравнений Максвелла) и закона Колмогорова. В работе [9], напротив, изучался α-эффект, вызванный аксионным полем. При этом вклад первого слагаемого в формуле (17) не учитывался, а также предполагалось, что аксионное поле постоянно по масштабу. Наш эффект более слабый, но при этом не противоречит сохранению конформной плотности магнитной спиральности.

Мы предполагаем, что α-эффект, связанный с наличием аксионного поля, должен подавлять найденный нами эффект, вычисленный в разд. 4.

Тем самым наши вычисления могут оказаться полезными для оценки влияния аксионного поля в рассматриваемой задаче. Впрочем, такая оценка выходит за рамки работы.

Заметим в связи с этим, что инвариант высшей спиральности имеет непрерывный спектр, показатели которого распределены в интервале $[3/5, 1]$. Правый конец спектрального интервала соответствует инварианту M_5, распределение которого подчинено третьему слагаемому в уравнении (17). Действительно, коммутаторы четверок магнитных линий учтены для поля с неразрушенной внутренней симметрией. В свою очередь, левый конец соответствует тому, что только тройки магнитных линий учитываются и поле не обладает внутренней симметрией. Значение потока высшей магнитной спиральности первого слагаемого в (17) достигается при значении спектрального параметра в левом конце отрезка спектра.

Другой вывод состоит в следующем. Разновидность континуального виттеновского интеграла, вычисленного для функционала Черна–Саймонса, доставляет инвариант 3D-многообразия с особенностью, который не зависит от секционных кривизн. Высший инвариант магнитных линий, вычисленный для функционала Черна–Саймонса, напротив, зависит от секционных кривизн. Существование инварианта функционала Черна–Саймонса, который является лагранжианом поля Янга–Миллса, связано с тем, что кривизны пространства влияют на особенность. Напомним, что инвариант Зайберга–Виттена зависит от особенности.

Представленные выводы требуют вычислительного и аналитического исследования. Первым шагом на этом пути может служить вычисление значения M_5-инварианта [8] для магнитного поля с замкнутыми магнитными линиями через коэффициенты полинома Конвея от двух переменных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Хорошо известный инвариант Гаусса (см. [4], где приведено его современное обобщение) играет важную роль при изучении магнитных полей в небесных телах. Арнольд [4] предложил специальную форму инварианта Гаусса магнитной спиральности, которая характеризуется калибровочно-инвариантной плотностью распределения магнитных линий крупномасштабного магнитного поля в области с жидкой проводящей средой, переносимой мелкомасштабным полем гидродинамической скорости. В настоящей работе эта идея применена для изучения следующего вопроса: влияет ли кривизна пространства на α-параметр динамо среднего поля?

Мы уточнили вычисления в этой задаче, предложенные в работе [7], применительно к максвелловскому магнитному полю в расширяющемся пространстве с отрицательной скалярной кривизной. При этом вычислили асимптотический показатель для линейного приближения на больших временах. Дальнейшее продвижение связано с уточнением влияния эффекта расширения, который можно пытаться вычислять и на малых временах, когда еще поле Янга–Миллса не перешло в максвелловское.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Yang C.-N., Mills R. L.* Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance // Phys. Rev. 1954. V. 96. P. 191–195.
2. *Shuryak E., Schäfer T.* The QCD Vacuum as an Instanton Liquid // Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 1997. V. 47. P. 359–394.
3. *Hornig G., Mayer Ch.* Towards a Third-Order Topological Invariant for Magnetic Fields // J. Phys. A. Math. Gen. 2002. V. 35. P. 3945.
4. *Arnold V. I., Khesin B. A.* Applied Mathematical Sciences. Topological Methods in Hydrodynamics. Springer, 1998 (translated into Russian in 2020).
5. *Moffatt H. K.* Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids. Cambridge Univ. Press, 1978.
6. *Zeldovich Ya. B., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D.* Magnetic Fields in Astrophysics. New York: Gordon and Breach, 1983.
7. *Akhmet'ev P. M., Dvornikov M. S.* Invariants of Magnetic Lines for Yang–Mills Solutions // J. Geom. Phys. 2024. V. 198. P. 105102.
8. *Akhmet'ev P. M.* Topological Meaning of the Slope of the Kolmogorov Spectrum of Magnetic Turbulence: M_5-Invariant of Magnetic Lines and Its Combinatorial Formula // J. Geom. Phys. 2022. V. 178. P. 104583.
9. *Dvornikov M., Semikoz V. B.* Evolution of Axions in the Presence of Primordial Magnetic Fields // Phys. Rev. D. 2020. V. 102. P. 123526; arXiv:2011.12712.
10. *Dvornikov M., Semikoz V. B.* Lepton Asymmetry Growth in the Symmetric Phase of an Electroweak Plasma with Hypermagnetic Fields versus Its Washing Out by Sphalerons // Phys. Rev. D. 2013. V. 87. P. 025023; arXiv:1212.1416.
11. *Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М.* Квантовые эффекты в интенсивных внешних полях. М.: Атомиздат, 1980.
12. *Dehornoy P.* Geodesic Flow, Left-Handedness and Templates // Algebr. Geom. Topol. 2015. V. 15, No. 3. P. 1525–1597.
13. *Дворников М. С., Ахметьев П. М.* Эволюция магнитного поля в пространственно-неоднородных аксионных структурах // ТМФ. 2024. Т. 218. С. 3.
14. *Dvornikov M.* Thin Layer Axion Dynamo // Eur. Phys. J. C. 2024. V. 84. P. 892; arXiv:2401.03185.