

# ПАРНОЕ РОЖДЕНИЕ ЧАРМОНИЕВ В ЭКСПЕРИМЕНТЕ LHCb В ПОДХОДЕ РЕДЖЕЗАЦИИ ПАРТОНОВ

*В. А. Салеев*<sup>1, 2, \*</sup>, *А. А. Чернышев*<sup>2, \*\*</sup>

<sup>1</sup> Самарский университет, Самара, Россия

<sup>2</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В работе изучаются процессы парного рождения прямых  $1S$ - и  $2S$ -состояний чармониев в улучшенной модели испарения цвета с использованием факторизации при высоких энергиях так, как это сформулировано в подходе реджезации партонных функций. Последний основан на модифицированной модели Кимбера–Мартина–Рыскина–Вотта неинтегрированных партонных функций распределения и эффективной теории поля процессов в мультиреджевской кинематике Липатова. Мы предсказываем сечения процессов парного рождения  $\psi[1S] + \psi[1S, 2S]$ , учитывая механизмы однопартонного и двухпартонного рассеяний и используя набор модельных параметров, фиксированных ранее при описании процессов парного рождения  $1S$ -состояний чармониев при энергиях LHC. Численные расчеты на партонном уровне проведены с использованием Монте-Карло генератора KaTie. Результаты вычислений сравниваются с недавними экспериментальными данными коллаборации LHCb при  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ.

In this paper, we study pair production of prompt  $1S$  and  $2S$  charmonia states in the improved color evaporation model using high energy factorization as formulated in the Parton Reggeization Approach. The latter is based on modified Kimber–Martin–Ryskin–Watt model for unintegrated parton distribution functions and Lipatov's effective theory for processes in multi-Regge kinematics. We predict cross sections for pair  $\psi[1S] + \psi[1S, 2S]$  production taking into account contributions from single and double parton scattering mechanisms using the set of model parameters which have been fixed earlier for description of pair  $1S$  charmonia states production at the LHC energies. Numerical calculations are performed using Monte Carlo event generator KaTie. Results of calculations are compared with recent LHCb Collaboration data at  $\sqrt{s} = 13$  TeV.

PACS: 12.38.Bx; 13.90.Ni; 14.40.Lb

## ВВЕДЕНИЕ

Процессы ассоциативного рождения тяжелых кваркониев при высоких энергиях являются важными источниками информации о ме-

---

\* E-mail: saleev.va@ssau.ru

\*\* E-mail: aachernyshoff@gmail.com

ханизме адронизации тяжелых кварков. Кроме того, такие процессы являются индикаторами жестких мультипартоновых взаимодействий в области относительно малых значений жестких масштабов. Сечения парного рождения  $J/\psi$ -мезонов (далее  $\psi[1S]$ ) измерены при энергиях  $\sqrt{s} = 7\text{--}13$  ТэВ в экспериментах на Большом адронном коллайдере коллаборациями CMS [1], ATLAS [2] и LHCb [3, 4]. Для недавних измерений коллаборации LHCb [4, 5] сечений процессов парного рождения  $1S$ - и  $2S$ -состояний чармониев были получены теоретические предсказания в модели цветowych синглетов (МЦС) [6, 7] и нерелятивистской квантовой хромодинамики (НРКХД) [8] с учетом лишь механизма однопартонового рассеяния (ОПР), которые явно указывают на сильно подавленный вклад механизма двухпартонового рассеяния (ДПР) в образовании пары чармониев, однако экспериментально это не подтверждается [4]. Ранее мы уже изучали процессы парного рождения  $1S$ -состояний чармониев и различные процессы ассоциативного рождения кваркониев при высоких энергиях [9–11], используя подход факторизации при высоких энергиях так, как он реализован в подходе реджезации партонов (ПРП) [12, 13], в рамках улучшенной модели испарения цвета (УМИЦ) [14], учитывая вклады механизмов ОПР и ДПР.

В настоящей работе мы проводим расчет сечений и спектров процессов парного рождения  $\psi[1S] + \psi[1S, 2S]$  в ПРП, основанный на эффективной теории поля реджезованных глюонов и кварков Липатова, модифицированной модели Кимбера–Мартина–Рыскина–Вотта (КМРВ) для неинтегрированных партоновых функций распределения (нПФР) [15–17] и УМИЦ, и проводим сравнение с недавними экспериментальными данными коллаборации LHCb [4, 5].

## ПОДХОД РЕДЖЕЗАЦИИ ПАРТОНОВ

В ПРП сечение адронного процесса связано с сечением партонового подпроцесса факторизационной формулой

$$d\sigma \simeq \sum_{i,\bar{j}} \int \frac{dx_1}{x_1} \int \frac{d^2\mathbf{q}_{T1}}{\pi} \Phi_i(x_1, t_1, \mu^2) \int \frac{dx_2}{x_2} \int \frac{d^2\mathbf{q}_{T2}}{\pi} \Phi_{\bar{j}}(x_2, t_2, \mu^2) d\hat{\sigma}_{\text{PRA}}, \quad (1)$$

где  $t_i = \mathbf{q}_{T_i}^2$ , коэффициент жесткого рассеяния  $d\hat{\sigma}_{\text{PRA}}$  связан с квадратированной реджезованной амплитудой  $|\overline{\mathcal{A}}_{\text{PRA}}|^2$  стандартным образом. Начальные партоны вне массовой поверхности в ПРП рассматриваются как реджезованные партоны калибровочно-инвариантной эффективной теории поля (ЭТП) [18–20] для процессов в мультиреджевской кинематике (МРК), вследствие чего амплитуды жесткого процесса  $|\overline{\mathcal{A}}_{\text{PRA}}|^2$  также являются калибровочно-инвариантными.

В модифицированной модели КМРВ нПФР вычисляются по формуле [15–17]:

$$\Phi_i(x, t, \mu^2) = \frac{\alpha_S(\mu)}{2\pi} \frac{T_i(t, \mu^2, x)}{t} \sum_j \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{ij}(z) F_i(x, \mu^2) \theta(\Delta(t, \mu) - z),$$

где  $F_i(x, \mu^2) = x f_i(x, \mu^2)$ ,  $\Delta(t, \mu) = \sqrt{\mu^2} / (\sqrt{t} + \sqrt{\mu^2})$  — КМР-функция обрезания, устраняющая инфракрасную расходимость при  $z \rightarrow 1$ , здесь и далее факторизационный и ренормализационный масштабы равны:  $\mu_F = \mu_R = \mu$ . Для устранения коллинеарных расходимостей мы требуем, чтобы модифицированные нПФР удовлетворяли точному условию нормировки:

$$\int_0^{\mu^2} dt \Phi_i(x, t, \mu^2) = F_i(x, \mu^2), \quad (2)$$

что эквивалентно

$$\Phi_i(x, t, \mu^2) = \frac{d}{dt} [T_i(t, \mu^2, x) F_i(x, t)], \quad (3)$$

где  $T_i(t, \mu^2, x)$  — судаковский формфактор, удовлетворяющий граничным условиям:  $T_i(0, \mu^2, x) = 0$  и  $T_i(\mu^2, \mu^2, x) = 1$  и также устраняющий расходимости при  $t \rightarrow 0$ . Точное выражение для судаковского формфактора, зависящего от  $x$ , было найдено в [17].

## МОДЕЛЬ ИСПАРЕНИЯ ЦВЕТА

Поскольку в ПРП начальные партоны имеют поперечный импульс, описание инклюзивного рождения чармония возможно уже в лидирующем порядке  $\mathcal{O}(\alpha_S^2)$  в партонных подпроцессах:

$$R + R \rightarrow c + \bar{c}, \quad (4)$$

$$Q_q + \bar{Q}_q \rightarrow c + \bar{c}, \quad (5)$$

где  $R$  — реджезованный глюон;  $Q_q$  ( $\bar{Q}_q$ ) — реджезованный кварк (антикварк).

В УМИЦ сечение рождения  $c\bar{c}$ -пары связано с сечением рождения чармония  $\psi[nS]$  (в данной работе мы рассматриваем состояния с  $n = 1, 2$ ) при однопартонном рассеянии, как в [14]:

$$\frac{d\sigma_\psi^{\text{SPS}}}{d^3p_\psi} \simeq \mathcal{F}^\psi \int_{M_\psi}^{2M_D} dM d^3\mathbf{p}' \delta^{(3)}\left(\mathbf{p}_\psi - \frac{M_\psi}{M} \mathbf{p}'\right) \frac{d\sigma_{c\bar{c}}}{dM d^3p'}, \quad (6)$$

где  $M$  — инвариантная масса  $c\bar{c}$ -пары с 4-импульсом  $p' = p_c + p_{\bar{c}}$ ;  $M_\psi$  — масса чармония;  $2M_D$  — масса порога адронизации  $c\bar{c}$ -пары в пару легчайших  $D$ -мезонов. В УМИЦ учитывается важный кинематический эффект, заключающийся в разнице масс конечного чармония и промежуточного состояния  $c\bar{c}$ -пары, посредством условия для 4-импульсов:  $p_\psi = (M_\psi/M)p'$ . В УМИЦ предполагается, что конечный чармоний образован всеми  $c\bar{c}$ -парами с инвариантными массами  $M_\psi < M < 2M_D$  с некоторой вероятностью  $\mathcal{F}^\psi$ . Фактор  $\mathcal{F}^\psi$  для каждого состояния  $\psi[nS]$  свой, для  $1S$ -состояния он был фиксирован ранее [9], а для  $2S$  извлекается в настоящей работе.

Партонные подпроцессы парного рождения чармониев  $p + p \rightarrow \psi + \psi' + X$ , где  $\psi = \psi[nS]$  и  $\psi' = \psi[n'S]$ , лидирующего порядка  $\mathcal{O}(\alpha_S^4)$  следующие:

$$\begin{aligned} R + R &\rightarrow c + \bar{c} + c + \bar{c}, \\ Q_q + \bar{Q}_q &\rightarrow c + \bar{c} + c + \bar{c}, \end{aligned}$$

и формула для сечения ОПР в УМИЦ имеет вид

$$d\sigma_{\psi\psi'}^{\text{SPS}} = \mathcal{F}^{\psi\psi'} \int_{M_\psi}^{2M_D} dM_1 \int_{M_{\psi'}}^{2M_D} dM_2 \frac{d\sigma_{(c\bar{c})_1(c\bar{c})_2}}{dM_1 dM_2}, \quad (7)$$

где  $M_i$  — инвариантная масса  $i$ -й  $c\bar{c}$ -пары. Фактор  $\mathcal{F}^{\psi\psi'}$  рассматривается как вероятность адронизации двух  $c\bar{c}$ -пар с инвариантными массами  $M_{\psi,\psi'} < M_i < 2M_D$  в пару конечных чармониев  $\psi$  и  $\psi'$  соответственно и согласно принципу квантовой идентичности факторизуется на инклюзивные вероятности  $\mathcal{F}^{\psi\psi'} = \mathcal{F}^\psi \times \mathcal{F}^{\psi'}$  в случае, когда состояния чармониев различны ( $n \neq n'$ ), и является независимым от  $\mathcal{F}^\psi$  при  $n = n'$ .

При расчетах в подходе ДПР сечение рождения пары чармониев выражается в терминах сечений инклюзивных рождений в двух независимых подпроцессах:

$$d\sigma_{\psi\psi'}^{\text{DPS}} = \frac{1}{1 + \delta_{nn'}} \frac{d\sigma_\psi^{\text{SPS}} d\sigma_{\psi'}^{\text{SPS}}}{\sigma_{\text{eff}}} \quad (8)$$

через свободный параметр  $\sigma_{\text{eff}}$ , контролирующий вклад сечения ДПР,  $\delta_{nn'} = 1$  при  $n = n'$ , параметры  $\mathcal{F}^{\psi,\psi'}$ , входящие в  $d\sigma_{\psi,\psi'}^{\text{SPS}}$ , соответственно фиксируются в одиночных рождениях.

Таким образом, итоговое сечение есть сумма вкладов (7) и (8), зависящая от двух свободных параметров ( $\mathcal{F}^{\psi\psi'}$ ,  $\sigma_{\text{eff}}$ ).

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Процессы рассеяния  $2 \rightarrow 4$  являются крайне трудоемкими для аналитических расчетов и, как правило, исследуются с применением Монте-Карло генераторов. Несколько лет назад был разработан Монте-Карло

генератор партонного уровня KaTie [21], основанный на новом подходе к получению калибровочно-инвариантных амплитуд рассеяния с частицами вне массовой поверхности в начальном состоянии при высоких энергиях. Метод основан на формализме спинорных амплитуд и рекуррентных соотношений типа Бритто–Качазо–Фэн–Виттена [22, 23]. Формализм, использующийся в генераторе KaTie для генерации амплитуд, на этапе численных расчетов эквивалентен методу получения амплитуд по фейнмановским правилам эффективной теории поля Липатова [18–20], используемому в ПРП [12, 13], на уровне древесных диаграмм. Точность численных расчетов в KaTie определяет точность расчета полного сечения процесса.

### ПАРНОЕ РОЖДЕНИЕ $\psi[1S] + \psi[1S]$

В работе [9] мы выполнили фит сечений парного рождения  $\psi[1S] + \psi[1S]$  при высоких энергиях  $\sqrt{s} = 7\text{--}13$  ТэВ [1–3] по двум свободным параметрам  $(\mathcal{F}^{\psi\psi}, \sigma_{\text{eff}})$ , минимизируя функцию

$$x = \sum_k \frac{|\sigma_k^{\text{exp}} - \sigma_k^{\text{theor}}|}{\Delta\sigma_k^{\text{exp}}},$$

где сумма идет по всем экспериментальным данным [1–3]. Выбирая  $x \leq 1,0, 1,5, 2,0$ , мы получили области изменения параметров  $(\mathcal{F}^{\psi\psi}, \sigma_{\text{eff}})$ . Результаты фита представлены как области допустимых значений параметров  $(\mathcal{F}^{\psi\psi}, \sigma_{\text{eff}})$  на рис. 1, отвечающих различным значениям  $x$ , наилучшее согласие для  $x < 1,0$  достигается при выборе параметров  $\mathcal{F}^{\psi\psi} \simeq 0,02$  и  $\sigma_{\text{eff}} \simeq 11$  мб. Недавно коллаборация LHCb представила

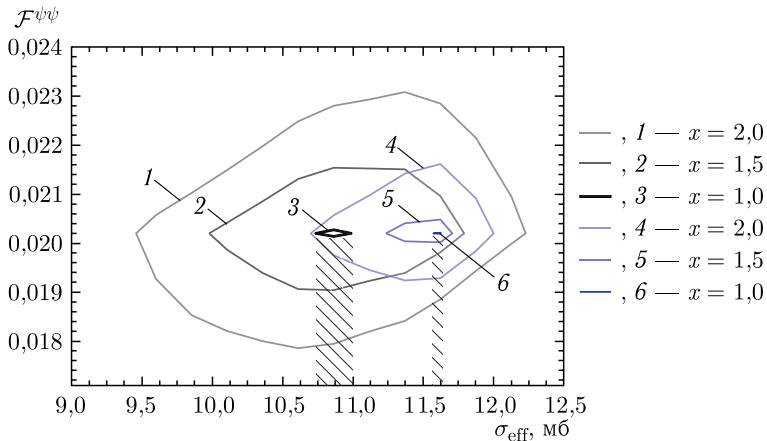


Рис. 1 (цветной в электронной версии). Области допустимых значений параметров  $(\mathcal{F}^{\psi\psi}, \sigma_{\text{eff}})$ . Данные коллабораций CMS [1], ATLAS [2] и LHCb [3, 4]

новые данные по парному рождению  $\psi[1S] + \psi[1S]$  при  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ [4], обновив наш фит добавлением новых данных [4], мы получили область, ограниченную синей кривой, для  $x < 1,0$  на рис. 1 и значение параметра ДПР  $\sigma_{\text{eff}} \simeq 11,5$  мб. В определении границ данных областей не включены неопределенности в выборе жесткого масштаба, которые заведомо перекрыли бы экспериментальные погрешности измерений [1–4]. Поэтому в действительности оба полученных значения,  $\sigma_{\text{eff}} \simeq 11$  мб и  $\sigma_{\text{eff}} \simeq 11,5$  мб, эквивалентны в рамках произвола в выборе жесткого масштаба. В данной работе мы используем ранее полученное значение параметра  $\sigma_{\text{eff}} \simeq 11$  мб, с которым успешно описывали различные процессы ассоциативного рождения тяжелых кваркониев при высоких энергиях [9–11].

В новых данных [4] для спектра по инвариантной массе пары  $M_{\psi\psi}$  коллаборации ЛНСб удалось разделить вклады, отвечающие ОПР и ДПР, — см. рис. 2, где вклад ДПР показан отдельными точками. Наши предсказания в рамках механизма ОПР, полученные при условии

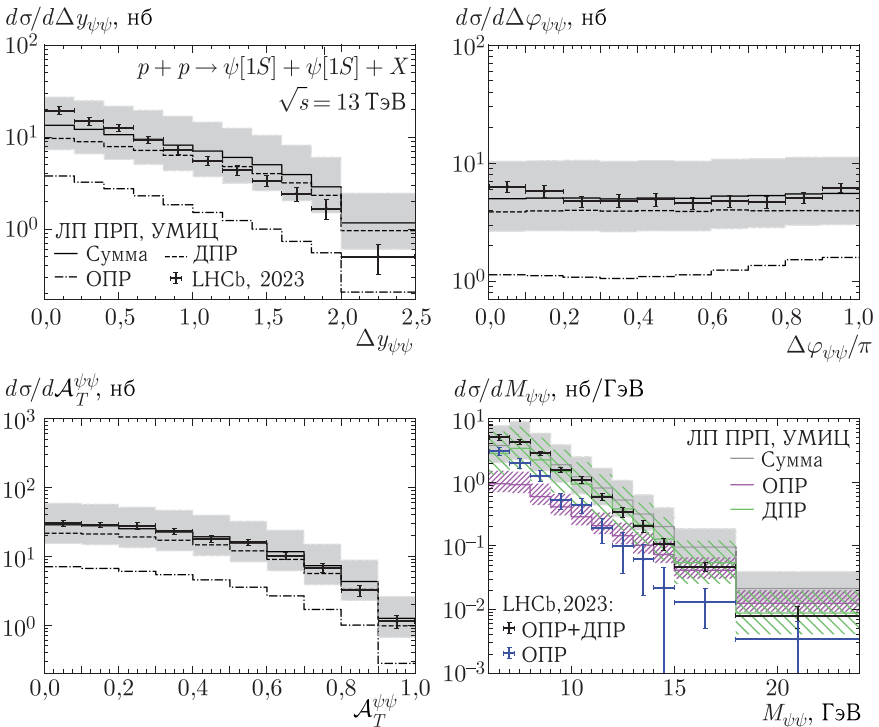


Рис. 2. Дифференциальные сечения парного рождения  $\psi[1S] + \psi[1S]$  при  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ по различным кинематическим переменным. Данные коллаборации ЛНСб [4]

Экспериментальное и расчетное полные сечения процесса  $\psi[1S] + \psi[1S, 2S]$  и отношение сечений при  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ. Теоретические неопределенности отвечают вариации жесткого масштаба на факторы  $2^{\pm 1}$  от центрального значения  $\mu = (m_T^{\psi[1S]} + m_T^{\psi[1S, 2S]})/2$

| Параметр  | Эксп. $\pm$ стат. $\pm$ сист. | ЛП ПРП + УМИЦ            |
|---|-------------------------------|--------------------------|
| $\sigma_{\psi[1S]\psi[1S]}^{\text{ОПР+ДПР}}$ , нб   | $16,36 \pm 0,28 \pm 0,88$     | $16,33^{+17,48}_{-7,67}$ |
| $\sigma_{\psi[1S]\psi[1S]}^{\text{ОПР}}$ , нб   | $7,9 \pm 1,2 \pm 1,1$         | $3,9^{+2,34}_{-1,03}$    |
| $\sigma_{\psi[1S]\psi[1S]}^{\text{ДПР}}$ , нб   | $8,6 \pm 1,2 \pm 1,0$         | $12,4^{+15,14}_{-6,64}$  |
| $\sigma_{\psi[1S]\psi[2S]}^{\text{ОПР+ДПР}}$ , нб   | $4,5 \pm 0,7 \pm 0,3$         | $5,4^{+6,67}_{-2,97}$    |
| $\sigma_{\psi[1S]\psi[2S]}^{\text{ОПР+ДПР}} / \sigma_{\psi[1S]\psi[1S]}^{\text{ОПР+ДПР}}$ | $0,274 \pm 0,044 \pm 0,008$   | 0,332                    |
| $\sigma_{\psi[1S]\psi[2S]}^{\text{ДПР}} / \sigma_{\psi[1S]\psi[1S]}^{\text{ДПР}}$         | $0,282 \pm 0,027$             | 0,434                    |

$\mathcal{F}^{\psi\psi} \simeq \mathcal{F}^{\psi}$ , хорошо согласуются с данными в области  $M_{\psi\psi} \in [9, 14]$  ГэВ и идут ниже данных в области  $M_{\psi\psi} < 9$  ГэВ. Феноменологическое условие  $\mathcal{F}^{\psi\psi} \simeq \mathcal{F}^{\psi}$  соответствует максимально возможному вкладу механизма ОПР, так как  $\mathcal{F}^{\psi\psi} \leq \mathcal{F}^{\psi}$ , что подтверждает наш фит (см. рис. 1). Извлеченное экспериментальное значение параметра ДПР равняется  $\sigma_{\text{eff}} = (13,1 \pm 1,8$  (стат.)  $\pm 2,3$  (сист.)) мб и в рамках экспериментальных погрешностей хорошо согласуется с полученным нами ранее значением  $\sigma_{\text{eff}} \simeq 11$  мб. Учитывая удовлетворительное согласие расчетов других процессов ассоциативного рождения кваркониев [9–11] с  $\sigma_{\text{eff}} \simeq 11$  мб, можно считать, что такой выбор значений свободных параметров УМИЦ и механизма ДПР является оптимальным. Сравнение расчетных и экспериментальных сечений механизмов ОПР и ДПР и их суммы представлено в таблице. Спектры по разности быстрот чармониев и поперечной асимметрии на рис. 2 описываются удовлетворительно, спектр по азимутальной корреляции хотя и является плоским за счет доминирующего вклада механизма ДПР, в рамках теоретических неопределенностей не противоречит данным.

### ПАРНОЕ РОЖДЕНИЕ $\psi[1S] + \psi[2S]$

В первую очередь мы фиксировали параметр  $\mathcal{F}^{\psi'}$  при описании сечения рождения  $2S$ -состояния чармония по данным [24] и получили значение  $\mathcal{F}^{\psi'} \simeq 0,06$ , которое в 3 раза больше значения фактора  $\mathcal{F}^{\psi} \simeq 0,02$  для  $1S$ -состояния. Такое отличие естественно связать с выбором нижнего предела интегрирования в (6), и, так как  $M_{\psi[2S]} > M_{\psi[1S]}$ , область интегрирования сильно сужается, что ведет к обратной иерархии вероятностей адронизации. Однако, как было показано в [14], отношение  $\sigma_{\psi[2S]}/\sigma_{\psi[1S]}$  в УМИЦ в рамках погрешностей согласуется с экспериментальными данными и соотношение  $\mathcal{F}^{\psi'} > \mathcal{F}^{\psi}$  не является артефактом модели.

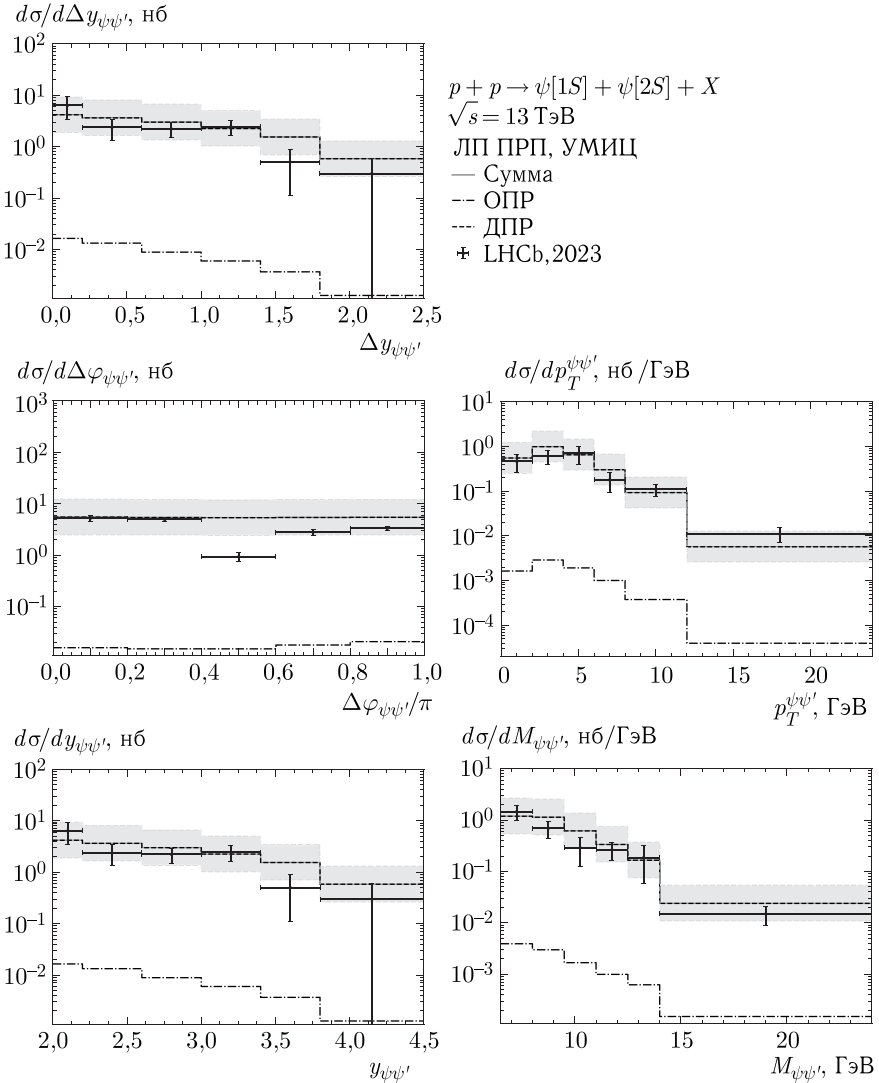


Рис. 3. Дифференциальные сечения парного рождения  $\psi[1S] + \psi[2S]$  при  $\sqrt{s} = 13 \text{ ТэВ}$  по различным кинематическим переменным. Данные коллаборации ЛНСб [4]

Сечение процесса парного рождения 1S- и 2S-состояний чармониев впервые было измерено коллаборацией ЛНСб [5] при  $\sqrt{s} = 13 \text{ ТэВ}$ . Согласно изложенному выше подходу, с учетом вкладов механизмов ОПР (7) и ДПР (8), все свободные параметры УМИЦ фиксированы



в одиночном рождении  $\psi[1S, 2S]$ , а параметр ДПР — в парном рождении  $\psi[1S]$ . Таким образом, при описании данных [5] парного рождения  $1S$ - и  $2S$ -состояний чармониев мы делаем предсказания без использования свободных параметров.

Отношение вкладов ОПР к ДПР в ПРП+УМИЦ оказывается равным  $(3,1_{-3,1}^{+10,1}) \cdot 10^{-3}$ , что сильно разнится с теоретическими предсказаниями, представленными в [5], где сечение переоценивается в МЦС с учетом лишь вклада ОПР. В таблице приведено сравнение расчетного и экспериментального полных сечений парного рождения  $\psi[1S] + \psi[2S]$  и отношения сечений  $\sigma_{\psi[1S]\psi[2S]}^{\text{ОПР+ДПР}} / \sigma_{\psi[1S]\psi[1S]}^{\text{ОПР+ДПР}}$ , которого в нашем подходе сравнимо с экспериментальным. Отношение  $\sigma_{\psi[1S]\psi[2S]}^{\text{ОПР}} / \sigma_{\psi[1S]\psi[1S]}^{\text{ОПР}}$  хотя и не приведено в работе [5], однако указано, что оно оказывается много меньше предсказанного в МЦС:  $0,94 \pm 0,30$ , в случае расчетов в ПРП+УМИЦ оно равняется  $0,8 \cdot 10^{-3}$ . Согласие различных спектров, полученных в ПРП+УМИЦ, с экспериментальными данными показано на рис. 3.

**Благодарности.** Авторы благодарны А. Ван Хамерену за консультацию по программе KaTie. Исследование проведено в рамках государственного задания для поддержки работ на комплексе NICA (шифр проекта FSSS-2025-0003). Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «Базис», грант № 24-1-1-16-5.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Khachatryan V. et al. (CMS Collab.).* Measurement of Prompt  $J/\psi$  Pair Production in  $pp$  Collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV // J. High Energy Phys. 2014. V. 09. P. 094.
2. *Aaboud M. et al. (ATLAS Collab.).* Measurement of the Prompt  $J/\psi$  Pair Production Cross-Section in  $pp$  Collisions at  $\sqrt{s} = 8$  TeV with the ATLAS Detector // Eur. Phys. J. C. 2017. V. 77, No. 2. P. 76.
3. *Aaij R. et al. (LHCb Collab.).* Measurement of the  $J/\psi$  Pair Production Cross-Section in  $pp$  Collisions at  $\sqrt{s} = 13$  TeV // J. High Energy Phys. 2017. V. 06. P. 047; Erratum // Ibid. V. 10. P. 068.
4. *Aaij R. et al. (LHCb Collab.).* Measurement of  $J/\psi$ -Pair Production in  $pp$  Collisions at  $\sqrt{s} = 13$  TeV and Study of Gluon Transverse-Momentum Dependent PDFs // J. High Energy Phys. 2024. V. 03. P. 088.
5. *Aaij R. et al. (LHCb Collab.).* Measurement of Associated  $J/\psi$ - $\psi(2S)$  Production Cross-Section in  $pp$  Collisions at  $\sqrt{s} = 13$  TeV. 2023. LHCb-PAPER-2023-023, CERN-EP-2023-243.
6. *Baier R., Ruckl R.* Hadronic Collisions: A Quarkonium Factory // Z. Phys. C. 1983. V. 19. P. 251.
7. *Berger E.L., Jones D.L.* Inelastic Photoproduction of  $J/\psi$  and Upsilon by Gluons // Phys. Rev. D. 1981. V. 23. P. 1521–1530.

8. *Bodwin G. T., Braaten E., Lepage G. P.* Rigorous QCD Analysis of Inclusive Annihilation and Production of Heavy Quarkonium // *Phys. Rev. D.* 1995. V. 51. P. 1125–1171; Erratum // *Phys. Rev. D.* 1997. V. 55. P. 5853.
9. *Chernyshev A. A., Saleev V. A.* Single and Pair  $J/\psi$  Production in the Improved Color Evaporation Model Using the Parton Reggeization Approach // *Phys. Rev. D.* 2022. V. 106, No. 11. P. 114006.
10. *Chernyshev A., Saleev V.* Associated Production of  $J/\psi$  Plus  $Z(W)$  in the Improved Color Evaporation Model Using the Parton Reggeization Approach // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2023. V. 38, No. 35–36. P. 2350193.
11. *Chernyshev A., Saleev V.* Associated Production of Heavy Quarkonia and  $D$  Mesons in the Improved Color Evaporation Model with KaTie // *Phys. Rev. D.* 2024. V. 109, No. 9. P. 094029.
12. *Saleev V. A., Nefedov M. A., Shipilova A. V.* Prompt  $J/\psi$  Production in the Regge Limit of QCD: From Tevatron to LHC // *Phys. Rev. D.* 2012. V. 85. P. 074013.
13. *Nefedov M. A., Saleev V. A., Shipilova A. V.* Dijet Azimuthal Decorrelations at the LHC in the Parton Reggeization Approach // *Phys. Rev. D.* 2013. V. 87, No. 9. P. 094030.
14. *Ma Y. Q., Vogt R.* Quarkonium Production in an Improved Color Evaporation Model // *Phys. Rev. D.* 2016. V. 94, No. 11. P. 114029.
15. *Kimber M. A., Martin A. D., Ryskin M. G.* Unintegrated Parton Distributions // *Phys. Rev. D.* 2001. V. 63. P. 114027.
16. *Watt G., Martin A. D., Ryskin M. G.* Unintegrated Parton Distributions and Inclusive Jet Production at HERA // *Eur. Phys. J. C.* 2003. V. 31. P. 73–89.
17. *Nefedov M. A., Saleev V. A.* High-Energy Factorization for Drell–Yan Process in  $pp$  and  $p\bar{p}$  Collisions with New Unintegrated PDFs // *Phys. Rev. D.* 2020. V. 102. P. 114018.
18. *Lipatov L. N.* Gauge Invariant Effective Action for High-Energy Processes in QCD // *Nucl. Phys. B.* 1995. V. 452. P. 369–400.
19. *Lipatov L. N., Vyazovsky M. I.* Quasi-Multi-Regge Processes with a Quark Exchange in the  $t$ -Channel // *Nucl. Phys. B.* 2001. V. 597. P. 399–409.
20. *Antonov E. N., Lipatov L. N., Kuraev E. A., Cherednikov I. O.* Feynman Rules for Effective Regge Action // *Nucl. Phys. B.* 2005. V. 721. P. 111–135.
21. *van Hameren A.* KaTie: For Parton-Level Event Generation with  $k_T$ -Dependent Initial States // *Comput. Phys. Commun.* 2018. V. 224. P. 371–380.
22. *van Hameren A., Kotko P., Kutak K.* Helicity Amplitudes for High-Energy Scattering // *J. High Energy Phys.* 2013. V. 01. P. 078.
23. *van Hameren A., Kutak K., Salwa T.* Scattering Amplitudes with Off-Shell Quarks // *Phys. Lett. B.* 2013. V. 727. P. 226–233.
24. *Aaij R. et al. (LHCb Collab.).* Measurement of  $\psi(2S)$  Meson Production in  $pp$  Collisions at  $\sqrt{s} = 7$  TeV // *Eur. Phys. J. C.* 2012. V. 72. P. 2100; Erratum // *Eur. Phys. J. C.* 2020. V. 80. P. 49.