

ЭКСКЛЮЗИВНОЕ РОЖДЕНИЕ АДРОНОВ ПРИ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОЙ АННИГИЛЯЦИИ И МЕТОД СТРУКТУРНЫХ ФУНКЦИЙ

В. С. Фадин *

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера СО РАН, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Метод структурных функций в настоящее время широко используется для вычисления радиационных поправок к эксклюзивным сечениям электрон-позитронной аннигиляции. При этом точность вычисления поправок снижается, поскольку составляющее основу метода коллинеарное приближение не позволяет правильно учитывать ограничения на кинематику излученных фотонов, накладываемые экспериментальным отбором событий. Предлагается модификация метода, правильно учитывающая эти ограничения.

The structure function method is currently widely used to calculate radiative corrections to exclusive electron–positron annihilation cross sections. In this case, the accuracy of calculating the corrections decreases, since the collinear approximation that forms the basis of the method does not allow one to correctly take into account the restrictions on the kinematics of emitted photons imposed by the experimental selection of events. A modification of the method is proposed that correctly takes these limitations into account.

PACS: 44.25.+f; 44.90.+c

ВВЕДЕНИЕ

Исследование процесса рождения адронов при электрон-позитронной аннигиляции изначально было основной задачей электрон-позитронных встречных пучков. Одной из важнейших характеристик этого процесса служит величина отношения $R(s)$ однофотонного вклада в полное сечение e^+e^- -аннигиляции в адроны при энергии в системе центра масс \sqrt{s} к сечению процесса $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ в борновском приближении и при нулевой массе мюона. В частности, функция $R(s)$ входит в дисперсионное представление [1, 2] для вклада адронной поляризации вакуума в аномальный магнитный момент мюона (АМММ), вызывающий в последнее время повышенный интерес в связи с противоречиями как между экспериментальным измерением АМММ [3–5] и основанными на этом представлении теоретическими его предсказаниями [6], так и между этими предсказаниями и предсказаниями решеточной КХД [7, 8]. Надо

* E-mail: fadin@inp.nsk.su

сказать, что основанные на дисперсионном представлении предсказания АМММ называются теоретическими лишь условно. Дело в том, что основной вклад в интеграл для вклада адронной поляризации вакуума в АМММ от функции, содержащий $R(s)$, дает область «умеренных» s , $s \lesssim 1 \text{ ГэВ}^2$, в которой нельзя вычислить $R(s)$ в квантовой хромодинамике (КХД), пользуясь асимптотической свободой КХД. Поэтому в этой области $R(s)$ извлекают из экспериментальных данных по измерению сечений рождения адронов при электрон-позитронных столкновениях. В последнее время противоречия обострились в связи с экспериментальными результатами для $R(s)$, полученными в [9, 10].

К сожалению, непосредственное измерение $\sigma_{e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{hadrons}}(s)$ невозможно. Выражение для измеряемого в эксперименте числа событий содержит это сечение вместе с радиационными поправками к нему. Точность извлечения $R(s)$ из экспериментальных данных напрямую зависит от точности учета радиационных поправок. Поэтому первостепенное значение приобретает анализ точности вычисления радиационных поправок и ее улучшение.

В настоящее время для вычисления радиационных поправок широко применяется так называемый метод структурных функций (правильнее его было бы назвать методом партонных распределений), предложенный в работе [11] для вычисления радиационных поправок к инклюзивному сечению однофотонной аннигиляции электрон-позитронной пары. Этот метод приобрел большую популярность и получил дальнейшее развитие (см., например, [12–18]). Сечение $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{anything}$ с учетом радиационных поправок в методе структурных функций представляется в виде свертки партонных распределений с сечением однофотонной аннигиляции без учета взаимодействия в начальном состоянии. Достоинством этого метода является то, что он позволяет единым образом учесть в радиационных поправках члены с «большими логарифмами» $L = \ln(s/m^2)$ (m — масса электрона), связанными с взаимодействием в начальном состоянии. Эти члены содержатся в партонных распределениях, которые вычисляются с помощью уравнений эволюции.

Точность метода структурных функций определяется величиной опущенных в этом представлении вкладов и точностью вычисления входящих в него величин.

В этом представлении опущены вклады диаграмм аннигиляции через два и более фотонов и их интерференции с однофотонной, так же как интерференции при рождении реальных частиц в начальном и конечном состояниях. Интерференция может давать вклад относительного порядка $(\alpha/\pi) \ln \sin^2 \theta$, но она обращается в ноль для зарядово-симметричных сечений. Поэтому для таких сечений не охватываемые этим представлением вклады начинаются с квадрата диаграмм двухфотонного обмена и интерференции трехфотонного с однофотонным. Диаграммы с двухфотонным обменом не дают вкладов с большими логарифмами, так что их учет дает для зарядово-симметричных сечений вклад в поправку

порядка α^2 , т.е. такого же порядка, как и вклад интерференции однофотонной и трехфотонных диаграмм. Вклады такого порядка зависят от структуры рождающихся адронов и не могут быть вычислены «из первых принципов». Приведенные выше рассуждения хорошо работают в случае «гладких» сечений и должны быть подправлены при наличии резонансов.

Для инклюзивных сечений единственным ограничением на кинематику испущенных в процессе e^+e^- -столкновения частиц (фотонов и возможных пар заряженных частиц) является минимально допустимая масса $\sqrt{s_0}$ виртуального фотона γ^* . В настоящее время метод структурных функций широко применяется к эксклюзивным сечениям и активно используется для создания Монте-Карло генераторов событий. При этом ограничения, накладываемые на кинематику испущенных частиц, определяются критериями отбора событий в эксперименте и не сводятся уже к $\sqrt{s_0}$.

Нас здесь интересует недостаток метода структурных функций в применении к вычислениям радиационных поправок к эксклюзивным сечениям, который не может быть устранен повышением точности партонных распределений: неправильный учет ограничений на кинематические параметры частиц сопровождающего излучения, накладываемых критериями отбора событий в проводимых экспериментах.

На этот недостаток косвенно указывает отмеченное в [9] обстоятельство, что Монте-Карло генератор MCGPJ [19] хуже описывает дифференциальные распределения, чем генератор BabaYaga [20]. Дело в том, что создатели этих генераторов, конечно, осознавали обсуждаемый недостаток и пытались исправить его, но делали это по-разному. В генераторе MCGPJ в однопетлевом приближении вводился «компенсатор» для устранения вклада излучения реальных фотонов, запрещенных условиями отбора событий. В генераторе BabaYaga из сравнения точного однопетлевого вклада с вычисленным в партонном приближении вводились поправочные коэффициенты, которые затем использовались и в высших приближениях.

Важно понять, насколько значимым является указанный недостаток, и разработать в КЭД метод партонных распределений с учетом углового распределения излученных частиц. Для ответа на первый вопрос мы вычисляли однопетлевые радиационные поправки, связанные с взаимодействием в начальном состоянии, к сечению электрон-позитронной аннигиляции в пару заряженных пи-мезонов для типичных энергий и критериев отбора событий, используемых в эксперименте КМД-3 [9] тремя разными способами: методом партонных распределений, модифицированным методом квазиреальных электронов и фотонов и с использованием точных матричных элементов. Мы убедились, что разница между двумя последними способами пренебрежимо мала, тогда как первый и второй способы дают, как и следовало ожидать, существенно разные результаты. Затем модифицированный метод квазиреальных электронов был развит в двухпетлевом приближении.

1. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

Метод эквивалентных электронов [21] можно назвать предшественником метода партоновых распределений. Его преимущество в том, что он учитывает распределение по поперечному импульсу в процессе расщепления партонов.

Для ультрарелятивистских частиц a, b, c , импульсы которых

$$\mathbf{p}_a \equiv \mathbf{p}, \quad \mathbf{p}_b = x_b \mathbf{p} + \mathbf{p}_{b\perp}, \quad \mathbf{p}_c = x_c \mathbf{p} + \mathbf{p}_{c\perp}, \quad (\mathbf{p}_a \mathbf{p}_{b\perp}) = (\mathbf{p}_a \mathbf{p}_{c\perp}) = 0 \quad (1)$$

удовлетворяют закону сохранения, $x_c + x_b = 1$, $\mathbf{p}_{b\perp} = \mathbf{q}_\perp = -\mathbf{p}_{c\perp}$ и почти коллинеарны, $|\mathbf{q}_\perp| \equiv q_\perp \ll |\mathbf{p}| = p$, все 4-импульсы лежат на массовой поверхности, так что энергия не сохраняется, разность энергий

$$\Delta\epsilon = \epsilon_b + \epsilon_c - \epsilon_a \simeq \frac{\mathbf{q}_\perp^2 + m_b^2 x_c + m_c^2 x_b - m_a^2 x_c x_b}{2px_c x_b} \quad (2)$$

мала (стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$). Если распад $a \rightarrow b + c$ разрешен по квантовым числам, то матричный элемент процесса $i \rightarrow f$, где одной из частиц начального состояния является частица a , а одной из частиц конечного состояния — частица c , представляется в виде

$$M_{i \rightarrow f} \simeq \frac{M_a^{bc}}{\Delta\epsilon} \frac{1}{2\epsilon_b} M_{i \rightarrow \tilde{f}}, \quad (3)$$

где M_a^{bc} — вычисленный по правилам Фейнмана матричный элемент процесса $a \rightarrow b + c$; состояние \tilde{i} получается из i заменой частицы a на b , \tilde{f} получается из f отбрасыванием c . Здесь предполагается, что существенные передачи импульсов в процессе $\tilde{i} \rightarrow \tilde{f}$ велики по сравнению с q_\perp . Поэтому для неполяризованных частиц сечение процесса $i \rightarrow f$ представляется [21] в виде

$$d\sigma_a(\mathbf{p}) \simeq dn_a^b(z, \mathbf{q}_\perp) d\sigma_b(z\mathbf{p}), \quad (4)$$

$dn_a^b(z, \mathbf{q}_\perp)$ — распределение частиц (партонов) b в частице a по доле продольного импульса z и поперечному импульсу q_\perp ,

$$dn_a^b(z, \mathbf{q}_\perp) = \frac{1}{2\epsilon_a} \sum \frac{|M_a^{bc}|^2}{(\Delta\epsilon)^2} \frac{d^3 p_b}{2\epsilon_b (2\pi)^3} \frac{d^3 p_c}{2\epsilon_c (2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b - \mathbf{p}_c), \quad (5)$$

где \sum означает суммирование по квантовым числам конечных частиц и усреднение по квантовым числам начальных.

В случае, когда частицы a и b — электроны с импульсом \mathbf{p} и $\mathbf{p}' = z\mathbf{p} + \mathbf{q}_\perp$ (тогда c — фотон с импульсом $\mathbf{k} = x\mathbf{p} + \mathbf{k}_\perp$, $x = 1 - z$, $\mathbf{k}_\perp = -\mathbf{q}_\perp$), имеем

$$\Delta\epsilon \simeq \frac{\mathbf{k}_\perp^2 + m^2 x^2}{2px(1-x)}. \quad (6)$$

Поскольку энергия не сохраняется, матричный элемент $M_e^{e\gamma}$ не калибровочно-инвариантен, поэтому при его вычислении нужно использовать физическую калибровку. Удобной является светоконусная калибровка

$$(ek) = 0, \quad (el) = 0, \quad (7)$$

где l — светоподобный вектор, $l^2 = 0$; при этом

$$\sum_{\lambda_\gamma} e_{\lambda_\gamma}^\mu e_{\lambda_\gamma}^{*\nu} = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu l^\nu + l^\mu k^\nu}{(kl)}. \quad (8)$$

Удобно также выбрать l в виде $l = \frac{1}{p(\epsilon_p + p)}(p, -\mathbf{p})$, $\epsilon_p = \sqrt{p^2 + m^2}$, так что $(pl) = 1$, и ввести определение $x = (kl)$, совпадающее с использованным выше с точностью до членов $\sim m^2/p^2, q_\perp^2/p^2$ (в дальнейшем такими членами будем систематически пренебрегать), и $\kappa = (kp)$. При этом

$$k = xp + (\kappa - m^2x)l + k_\perp, \quad p' = p - k + \frac{\kappa}{1-x}l, \quad (9)$$

$$\mathbf{k}_\perp^2 = 2x\kappa - m^2x^2, \quad (kp') = \frac{\kappa}{1-x}.$$

Используя (8) и (9), получаем

$$\overline{\sum_{\lambda, \lambda', \lambda_\gamma} |M_e^{e'\gamma}|^2} = 4e^2 \left[\frac{(1 + (1-x)^2)}{x(1-x)} \kappa - m^2 \right], \quad (10)$$

что вместе с (5) и (6) дает

$$dn_e^e(1-x, \mathbf{q}_\perp) = \frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{d^3k}{\omega} \left[\frac{1 + (1-x)^2}{\kappa x} - \frac{m^2(1-x)}{\kappa^2} \right]. \quad (11)$$

Этот результат совпадает с полученным в [21]. Проведенный вывод показывает эквивалентность результатов, полученных в кулоновской или радиационной калибровке, используемой в [21], и светоконусной калибровке (8), которая будет использоваться в дальнейшем.

Это можно понять из сравнения (8) с суммой по поляризациям выражением в кулоновской калибровке

$$\sum_{\lambda} e_{\lambda}^{(c)i} e_{\lambda}^{*(c)j} = \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\mathbf{k}^2}. \quad (12)$$

В четырехмерном виде (12) записывается как

$$\sum_{\lambda} e_{\lambda}^{(c)\mu} e_{\lambda}^{*(c)\nu} = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu n^\nu + n^\mu k^\nu}{(kn)} - \frac{k^\mu k^\nu}{(kn)^2}, \quad (13)$$

$n^\mu = (1, \mathbf{0}) = |\mathbf{p}|l^\mu + p^\mu/(\epsilon_p + |\mathbf{p}|)$. Легко видеть, что разница между результатами использования (8) и (13) для вычисления $\sum_{\lambda, \lambda', \lambda_\gamma} |M_e^{e\gamma}|^2$ (10)

мала как $\kappa/(\epsilon_p^2 x)$, т. е. имеет порядок членов, которые мы систематически отбрасываем.

Проинтегрировав по всем углам излучения, получаем из (11)

$$dn_e^e(z) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{dz}{1-z} \left[P_e^e(z) \ln \left(\frac{4p^2}{m^2} \right) - m^2 \frac{z}{1-z} \right], \quad (14)$$

где $P_e^e(z) = (1+z^2)/(1-z)$ — партонная функция распределения, используемая в методе структурных функций. Отсюда ясно, что метод структурных функций завышает вклад реального излучения в экспериментально наблюдаемое эксклюзивное сечение и тем больше, чем жестче ограничения на отбор событий.

Ясно также, что для учета этих ограничений надо модифицировать формулу (4). Пренебрежение поперечным импульсом частицы b в квадрате матричного элемента в $d\sigma_b(x\mathbf{p})$ вполне правомерно. Однако при достаточно жестких ограничениях на кинематику конечных частиц оно должно учитываться в законе сохранения энергии-импульса, т. е. в (4) вместо $d\sigma_b(z\mathbf{p})$ должно стоять $d\sigma_b(p_a - k)$.

2. СРАВНЕНИЕ ФОТОННЫХ СПЕКТРОВ

Проведем сравнение спектров фотонов, излученных e^+e^- -парой в процессе $e^+(p_+) + e^-(p_-) \rightarrow \pi^+(q_+) + \pi^-(q_-) + \gamma(k)$, для типичных энергий и критериев отбора событий, используемых в эксперименте КМД-3, вычисленных тремя способами: методом структурных функций, модифицированным методом квазиреальных электронов и без использования этих приближений.

Вычисленное первым способом спектральное распределение излучения в процессе $e^+(p_+) + e^-(p_-) \rightarrow \text{hadrons} + \gamma(k)$ представляется в виде

$$\frac{x d\sigma^{(\gamma)}}{dx} = \frac{\alpha}{2\pi} (1+z^2) L \int \left[d\sigma^{(B)}(zp_+, p_-) + d\sigma^{(B)}(p_+, zp_-) \right] \Theta, \quad (15)$$

где $L = \ln(s/m^2)$, $s = (p_- + p_+)^2$, $x = 2\omega/\sqrt{s}$, $z = 1 - x$, $d\sigma^{(B)}(p_+, p_-)$ — сечение процесса $e^+(p_+) + e^-(p_-) \rightarrow \text{hadrons}$ в борновском приближении, а функция Θ содержит все кинематические ограничения, налагаемые отбором событий.

Сечение процесса $e^+(p_+) + e^-(p_-) \rightarrow \text{hadrons}$ в борновском приближении записывается в виде

$$d\sigma^{(B)}(p_+, p_-) = \frac{(4\pi\alpha)^2}{2s^3} L_{\mu\nu}(p_-, p_+) H^{\mu\nu} (2\pi)^4 \times \\ \times \delta \left(p_- + p_+ - \sum_i p_i^{(h)} \right) \prod_i \frac{d^3 p_i^{(h)}}{(2\pi)^3 2\epsilon_i^{(h)}}, \quad (16)$$

где $L_{\mu\nu}(p_-, p_+)$ – лептонный тензор,

$$L_{\mu\nu}(p_-, p_+) = -\frac{1}{2}(g_{\mu\nu}s - (p_- + p_+)_{\mu}(p_- + p_+)_{\nu}) - \frac{1}{2}(p_- - p_+)_{\mu}(p_- - p_+)_{\nu}, \quad (17)$$

$H^{\mu\nu}$ – соответствующий адронный тензор, зависящий от импульсов адронов $p_i^{(h)}$. Для рождения пары пионов с импульсами q_{\pm}

$$H^{\mu\nu} = H_{\pi}^{\mu\nu} = (q_- - q_+)^{\mu}(q_- - q_+)^{\nu} |F_{\pi}((q_- + q_+)^2)|^2,$$

где F_{π} – формфактор пиона.

В модифицированном методе квазиреальных электронов

$$\frac{x d\sigma^{(\gamma)}}{dx} = \frac{\alpha}{4\pi^2} \int \omega^2 d\Omega_{\gamma} \left[\left(\frac{1+z^2}{\kappa_- x} - \frac{m^2 z}{\kappa_-^2} \right) d\sigma^{(B)}(p_+, p_- - k) + \left(\frac{1+z^2}{\kappa_+ x} - \frac{m^2 z}{\kappa_+^2} \right) d\sigma^{(B)}(p_+ - k, p_-) \right] \Theta, \quad (18)$$

где $d\Omega_{\gamma}$ – элемент телесного угла испущенного фотона, $\kappa_{\pm} = (kp)_{\pm}$.

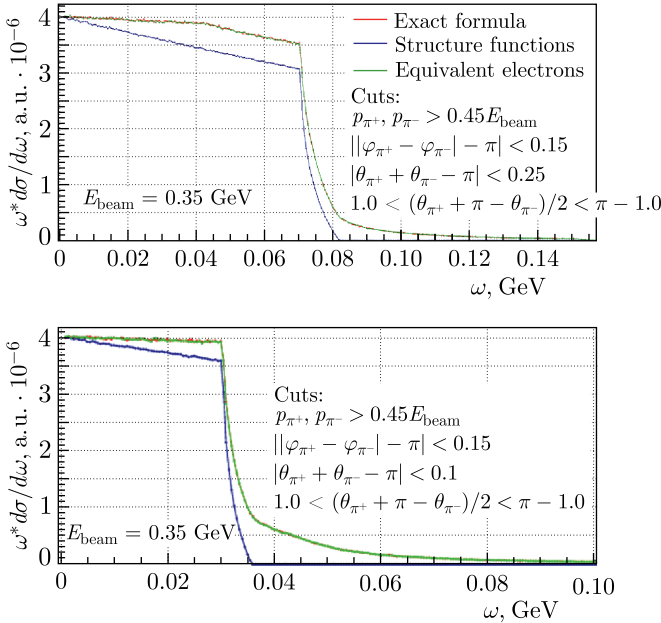
Вычисленный без использования приближений спектр имеет вид

$$\frac{x d\sigma^{(\gamma)}}{dx} = \frac{(4\pi\alpha)^3}{2q^4 s} \int \frac{\omega^2 d\Omega_{\gamma}}{2(2\pi)^3} T_{\mu\nu}(p_+, p_-, k) H_{\pi}^{\mu\nu} \times \\ \times (2\pi)^4 \delta(p_- + p_+ - k - q_- - q_+) \frac{d^3 q_-}{2\omega_- (2\pi)^3} \frac{d^3 q_+}{2\omega_+ (2\pi)^3} \Theta, \quad (19)$$

где $q = q_- + q_+$, $q^2 = s - 2\kappa_+ - 2\kappa_-$, ω_{\pm} – энергии пионов,

$$T^{\mu\nu} = - \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^{\mu} q^{\nu}}{q^2} \right) \left(\frac{(s - 2\kappa_-)^2 + (s - 2\kappa_+)^2}{4\kappa_- \kappa_+} - \frac{m^2 q^2}{2\kappa_-^2} - \frac{m^2 q^2}{2\kappa_+^2} \right) - \\ - \left(p_- - q \frac{(p_- - q)}{q^2} \right)^{\mu} \left(p_- - q \frac{(p_- - q)}{q^2} \right)^{\nu} \left(\frac{q^2}{\kappa_- \kappa_+} - 2 \frac{m^2}{\kappa_+^2} \right) - \\ - \left(p_+ - q \frac{(p_+ + q)}{q^2} \right)^{\mu} \left(p_+ - q \frac{(p_+ + q)}{q^2} \right)^{\nu} \left(\frac{q^2}{\kappa_- \kappa_+} - 2 \frac{m^2}{\kappa_-^2} \right). \quad (20)$$

Поскольку аналитическое интегрирование выражений для сечений по кинематическим областям, определяемым критериями отбора, невозможно, оно проводилось методом Монте-Карло, для чего В. Л. Ивановым был создан соответствующий генератор событий. На рисунке представлены результаты вычислений спектра как функции $\omega = x E_{\text{beam}}$ для центральной энергии пучков $E_{\text{beam}} = \sqrt{s}/2$ из интервала энергий эксперимента [10]. Используются произвольные единицы измерений по вертикальной оси, поскольку они не важны для сравнения разных приближений.



Влияние отбора событий на спектральное распределение однократного излучения

Критерии отбора событий по величине импульсов p_{π^\pm} , расколлинеарности $\theta_{\pi^+} + \theta_{\pi^-} - \pi$ и раскомпланарности $|\phi_{\pi^+} - \phi_{\pi^-} - \pi|$ для верхнего рисунка использованы те же, что и в эксперименте [9]. Вычисления показывают, что относительная величина результатов для разных приближений слабо зависит от энергии пучков и критериев отбора по величине импульсов и раскомпланарности. На нижнем рисунке показана зависимость по расколлинеарности.

Видно, что спектр, вычисленный с помощью модифицированного метода квазиреальных электронов, практически не отличается от точного, тогда как вычисленный методом структурных функций отличается значительно, причем расхождения тем больше, чем строже критерии отбора событий.

3. ВКЛАДЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА В $dn_e^e(z, \mathbf{q}_\perp)$

При вычислении радиационных поправок к сечениям e^+e^- -аннигиляции в следующем порядке по α нужно учитывать излучение двух фотонов и рождение электрон-позитронной пары. При излучении двух фотонов следует разделять два случая: излучение в противоположных направлениях и в одном направлении. В первом случае можно исполь-

зовать уже имеющиеся распределения $dn_e^e(z, \mathbf{q}_\perp)$ и представить сечение в виде

$$d\sigma^{(\gamma\gamma, \text{opp})} = dn_e^e(z_-, \mathbf{q}_{-\perp}) dn_e^e(z_+, \mathbf{q}_{+\perp}) d\sigma^{(B)}(p_+ - k_2, p_- - k_1), \quad (21)$$

где $dn_e^e(z_-, \mathbf{q}_{-\perp})$ дается формулой (11) с заменами

$$x \rightarrow x_1 = 1 - z_-, \quad \kappa \rightarrow \kappa_{1-} = (k_1 p_-), \quad x_1 = 2\omega_1/\sqrt{s}, \quad (22)$$

а $dn_e^e(z_+, \mathbf{q}_{+\perp})$ с заменами

$$x \rightarrow x_2 = 1 - z_+, \quad \kappa \rightarrow \kappa_{2+} = (k_2 p_+), \quad x_2 = 2\omega_2/\sqrt{s}. \quad (23)$$

Во втором случае сечение представляется в виде

$$d\sigma^{(\gamma\gamma, \text{same})} = dn_e^e(z_-, \mathbf{q}_{-\perp}; \gamma\gamma) d\sigma^{(B)}(p_+, p_- - k_1 - k_2) + \\ + dn_e^e(z_+, \mathbf{q}_{+\perp}; \gamma\gamma) d\sigma^{(B)}(p_+ - k_1 - k_2, p_-), \quad (24)$$

где $dn_e^e(z_-, \mathbf{q}_{-\perp}; \gamma\gamma)$ — вклад излучения двух фотонов в $dn_e^e(z, \mathbf{q}_\perp)$. Его можно получить последовательным применением формулы (5). Но более точное выражение для $dn_e^e(z, \mathbf{q}_\perp; \gamma\gamma)$ получается при использовании общей формулы (5), которая в этом случае принимает вид

$$n_e^e(z, \mathbf{q}_\perp; \gamma\gamma) = \frac{1}{2\epsilon} \sum \frac{|M_e^{e'\gamma_1\gamma_2}|^2}{(\Delta\epsilon)^2} \frac{d^3p'}{2\epsilon'(2\pi)^3} \frac{d^3k_1}{2\omega_1(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{2\omega_2(2\pi)^3} \times \\ \times \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2), \quad (25)$$

где

$$M_e^{e'\gamma_1\gamma_2} = \bar{u}^{\lambda_{e'}}(p') \times \\ \times \left[\hat{e}_2^{*\lambda_2} \frac{(\hat{p} - \hat{k}_1 + m)}{-2\kappa_1} \hat{e}_1^{*\lambda_1} + \hat{e}_1^{\lambda_1} \frac{(\hat{p} - \hat{k}_2 + m)}{-2\kappa_2} \hat{e}_2^{*\lambda_2} \right] u^{\lambda_e}(p), \quad (26)$$

$$\Delta\epsilon = \epsilon' + \omega_1 + \omega_2 - \epsilon = \frac{2\kappa}{2\epsilon(1 - x_1 - x_2)}. \quad (27)$$

Здесь

$$\epsilon' = \sqrt{(\mathbf{p}_- - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2 + m^2}, \quad (28)$$

$$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 - (k_1 k_2), \quad \kappa_1 = (k_1 p), \quad \kappa_2 = (k_2 p).$$

Квадрируя (26) и выполняя суммирование по поляризациям конечных частиц и усреднение по поляризации начального электрона, получаем

$$\sum \frac{|M_e^{e'\gamma_1\gamma_2}|^2}{(\Delta\epsilon)^2 2\epsilon'} = \frac{2\epsilon(1 - x_1 - x_2)}{4\kappa^2} \left(\frac{A_{11}}{\kappa_1^2} + \frac{A_{22}}{\kappa_2^2} + 2 \frac{A_{12}}{\kappa_1 \kappa_2} \right), \quad (29)$$

$$A_{11} = \frac{1}{4} \text{tr} [(\hat{p}' + m)\gamma_\nu(\hat{p} - \hat{k}_1 + m)\gamma_\mu(\hat{p} + m)\gamma_{\mu'}(\hat{p} - \hat{k}_1 + m)\gamma_{\nu'}] \Omega_1^{\mu\mu'} \Omega_2^{\nu\nu'}, \quad (30)$$

$$A_{22} = A_{11}(1 \leftrightarrow 2), \quad (31)$$

$$A_{12} = \frac{1}{4} \text{tr} [(\hat{p}' + m)\gamma_\nu(\hat{p} - \hat{k}_1 + m)\gamma_\mu(\hat{p} + m)\gamma_{\nu'}(\hat{p} - \hat{k}_2 + m)\gamma_{\mu'}] \Omega_1^{\mu\mu'} \Omega_2^{\nu\nu'}, \quad (32)$$

где

$$k_i = x_i p + (\kappa_i - m^2 x_i) l + k_{i\perp}, \quad (33)$$

$$p' = p - k_1 - k_2 + \frac{\kappa}{z} l, \quad z = 1 - x_1 - x_2,$$

$$\Omega_i^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} + \frac{k_i^\mu l^\nu + l^\mu k_i^\nu}{(kl)}. \quad (34)$$

Прямым вычислением получаем

$$A_{11} = \frac{8\kappa_1}{x_1 x_2} \left[\left(\frac{\kappa(1-x_1)}{z} - \kappa_1 \right) (1 + (1-x_1)^2 + z^2) + \kappa_2 z \right] + 8m^2 \times \\ \times \left[-\frac{\kappa}{x_2 z} ((1-x_1)^2 + z^2) + \frac{\kappa_1}{x_1 x_2} (2x_1(1-x_1) - x_2(2+x_1)) + m^2 \right], \quad (35)$$

$$A_{12} = \frac{4}{x_1 x_2} \left[\frac{\kappa^2}{2z} (1+z^2) + \kappa \kappa_1 \left(1 - x_1 - (1-x_2) \frac{1+z^2}{z} \right) - \right. \\ \left. - \kappa_1^2 (1-x_1)(1-x_2) + \frac{\kappa_1 \kappa_2}{2} (3(1+z^2) - 2x_1 x_2) + \right. \\ \left. + m^2 \left(\frac{\kappa}{2} \left(1 - z + 2z^2 - x_1 x_2 \left(\frac{1}{z} + 2 \right) \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \kappa_1 (2 - z + z^2 - x_1(3 - z - 2x_1)) \right) \right] + 1 \leftrightarrow 2. \quad (36)$$

Учет рождения пары заряженных лептонов массы m_l с суммарным импульсом k дает вклад в сечение

$$d\sigma^{(\text{pair})} = dn_e^e(z_-, \mathbf{q}_{-\perp}; \text{pair}) d\sigma^{(B)}(p_+, p_- - k) + \\ + dn_e^e(z_+, \mathbf{q}_{+\perp}; \text{pair}) d\sigma^{(B)}(p_+ - k, p_-), \quad (37)$$

где

$$dn_e^e(z, \mathbf{q}_{\perp}; \text{pair}) = \frac{\alpha}{3\pi} \frac{k^2 + 2m_l^2}{k^4} \sqrt{\frac{k^2 - 4m_l^2}{k^2}} d^4 k \times \\ \times \frac{2\kappa(1 + (1-x)^2) - 2m^2(1-x)x - k^2(2-x)}{x(2\kappa - k^2)^2}, \quad (38)$$

где $z = 1 - x$, $\mathbf{q}_\perp = -\mathbf{k}_\perp$. «Ручной» счет был проверен с помощью пакета FeynCalc [22] системы компьютерной алгебры Mathematica.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как всякий приближенный метод, метод структурных функций (партоновых распределений) имеет ряд недостатков.

Специфическим для вычисления поправок к сечениям эксклюзивного рождения адронов недостатком является отсутствие ограничений, связанных с отбором событий при измерении эксклюзивных сечений.

Учет этих ограничений требует отказа от коллинеарного приближения, используемого при вычислении партоновых распределений.

Свободным от указанного недостатка является модифицированный метод квазиреальных электронов, дающий в отличие от коллинеарного приближения распределение партонов не только по продольному, но и по поперечному импульсу и использующий точный закон сохранения энергии-импульса. Показано, что для отбора событий, используемого в эксперименте [10], вычисленный этим методом спектр однократного излучения практически не отличается от точного. Получены партоновые распределения $n_e^e(z, \mathbf{q}_\perp; \gamma\gamma)$ и $dn_e^e(z, \mathbf{q}_\perp; \text{pair})$ при излучении двух фотонов и электрон-позитронной пары, необходимые для вычисления радиационных поправок двухпетлевого приближения.

Благодарности. Я благодарен В. Л. Иванову за предоставление файлов .pdf, использованных для генерации рисунка, а также Р. Н. Ли, П. А. Крачкову и И. В. Образцову за помощь в освоении Mathematica и FeynCalc.

Финансирование. Работа поддержана Российским научным фондом, грант № 22-22-00923.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bouchiat C., Michel L.* La résonance dans la diffusion méson π -méson π et le moment magnétique anormal du méson μ // J. Phys. Radium. 1961. V. 22, No. 2. P. 121.
2. *Brodsky S.J., De Rafael E.* Suggested Boson–Lepton Pair Couplings and the Anomalous Magnetic Moment of the Muon // Phys. Rev. 1968. V. 168. P. 1620–1622.
3. *Bennett G. W. et al. (Muon $g-2$ Collab.).* Final Report of the Muon E821 Anomalous Magnetic Moment Measurement at BNL // Phys. Rev. D. 2006. V. 73. P. 072003; arXiv:hep-ex/0602035.
4. *Abi B. et al. (Muon $g-2$ Collab.).* Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm // Phys. Rev. Lett. 2021. V. 126, No. 14. P. 141801; arXiv:2104.03281.
5. *Aguillard D. P. et al. (Muon $g-2$ Collab.).* Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.20 ppm // Phys. Rev. Lett. 2023. V. 131, No. 16. P. 161802; arXiv:2308.06230.

6. *Aoyama T. et al.* The Anomalous Magnetic Moment of the Muon in the Standard Model // *Phys. Rep.* 2020. V. 887. P. 1–166; arXiv:2006.04822.
7. *Borsanyi S. et al.* Leading Hadronic Contribution to the Muon Magnetic Moment from Lattice QCD // *Nature.* 2021. V. 593, No. 7857. P. 51–55; arXiv:2002.12347.
8. *Toth B.C. et al.* Muon $g-2$: BMW Calculation of the Hadronic Vacuum Polarization Contribution // *PoSL.* 2022. V. ATTICE2021. P. 005.
9. *Ignatov F.V. et al. (CMD-3 Collab.).* Measurement of the Pion Form Factor with CMD-3 Detector and Its Implication to the Hadronic Contribution to Muon ($g-2$) // *Phys. Rev. Lett.* 2024. V. 132, No. 23. P. 231903; arXiv:2309.12910.
10. *Ignatov F.V. et al. (CMD-3 Collab.).* Measurement of the $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ Cross Section from Threshold to 1.2 GeV with the CMD-3 Detector // *Phys. Rev. D.* 2024. V. 109, No. 11. P. 112002; arXiv:2302.08834.
11. *Kuraev E.A., Fadin V.S.* On Radiative Corrections to e^+e^- Single Photon Annihilation at High Energy // *Sov. J. Nucl. Phys.* 1985. V. 41. P. 466–472.
12. *Nicrosini O., Trentadue L.* Soft Photons and Second Order Radiative Corrections to $e^+e^- \rightarrow Z^0$ // *Phys. Lett. B.* 1987. V. 196. P. 551.
13. *Jadach S., Ward B.F.L.* Yfs2: The Second Order Monte Carlo for Fermion Pair Production at LEP/SLC with the Initial State Radiation of Two Hard and Multiple Soft Photons // *Comput. Phys. Commun.* 1990. V. 56. P. 351–384.
14. *Skrzypek M., Jadach S.* Exact and Approximate Solutions for the Electron Nonsinglet Structure Function in QED // *Z. Phys. C.* 1991. V. 49. P. 577–584.
15. *Skrzypek M.* Leading Logarithmic Calculations of QED Corrections at LEP // *Acta Phys. Polon. B.* 1992. V. 23. P. 135–172.
16. *Cacciari M., Deandrea A., Montagna G., Nicrosini O.* QED Structure Functions: A Systematic Approach // *Eur. Phys. Lett.* 1992. V. 17. P. 123–128.
17. *Arbuzov A.B., Kopylova T.V.* On Higher Order Radiative Corrections to Elastic Electron–Proton Scattering // *Eur. Phys. J. C.* 2015. V. 75, No. 12. P. 603; arXiv:1510.06497.
18. *Arbuzov A.B.* Leading and Next-to-Leading Logarithmic Approximations in Quantum Electrodynamics // *Phys. Part. Nucl.* 2019. V. 50, No. 6. P. 721–825.
19. *Arbuzov A.B., Fedotov G.V., Ignatov F.V., Kuraev E.A., Sibidanov A.L.* Monte-Carlo Generator for e^+e^- Annihilation into Lepton and Hadron Pairs with Precise Radiative Corrections // *Eur. Phys. J. C.* 2006. V. 46. P. 689–703; arXiv:hep-ph/0504233.
20. *Balossini G., Carloni Calame C.M., Montagna G., Nicrosini O., Piccinini F.* Matching Perturbative and Parton Shower Corrections to Bhabha Process at Flavour Factories // *Nucl. Phys. B.* 2006. V. 758. P. 227–253; arXiv:hep-ph/0607181.
21. *Baier V.N., Fadin V.S., Khoze V.A.* Quasireal Electron Method in High-Energy Quantum Electrodynamics // *Nucl. Phys. B.* 1973. V. 65. P. 381–396.
22. *Shtabovenko V., Mertig R., Orellana F.* FeynCalc 10: Do Multiloop Integrals Dream of Computer Codes? // *Comput. Phys. Commun.* 2023. V. 306. P. 109357; arXiv:2312.14089.