

# РОЖДЕНИЕ ЛЕПТОННЫХ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ В РАСПАДЕ БОЗОНА ХИГГСА

*Ф. А. Мартыненко* \*, *А. П. Мартыненко*, *А. В. Эскин*

Самарский национальный исследовательский университет, Самара, Россия

Исследуется рождение связанных состояний лептонов в распаде бозона Хиггса. Изучены различные механизмы распада, которые вносят значительный вклад в его ширину. Вычислены ширины распада с учетом релятивистских поправок к амплитуде распада и волновой функции связанного состояния лептонов.

The production of lepton bound states in the decay of the Higgs boson has been studied. We explore different decay mechanisms that contribute significantly to the decay width. The decay widths are calculated taking into account relativistic corrections in the decay amplitude and in the wave function of the bound state of leptons.

PACS: 12.15.–y; 11.10.St; 12.20.Ds; 36.10.Dr

## ВВЕДЕНИЕ

После открытия бозона Хиггса начался период более детального изучения его свойств и характеристик распада по различным каналам. Такие теоретические исследования сейчас опираются на существующие экспериментальные данные, набор которых постоянно расширяется. Начали формироваться планы относительно различных будущих ускорителей, в которых произойдет значительный рост рождения бозонов Хиггса, а следовательно, откроется возможность более точного определения различных параметров сектора Хиггса [1]. Как это часто бывает при формулировании программ будущих коллайдеров, ставится задача поиска событий, не укладывающихся в схему Стандартной модели. Среди редких распадов бозона Хиггса можно выделить класс процессов, в которых возникают связанные состояния фундаментальных частиц, таких как мезоны и барионы [2]. Теоретический интерес к этим реакциям обусловлен тем, что они, помимо прочего, позволяют дополнительно тестировать модели описания связанных состояний кварков. Число таких работ за последние 10 лет значительно выросло, а методы расчета наблюдаемых характеристик получили значительное развитие [3]. Другую группу реакций рождения связанных состояний частиц составляют те

---

\* E-mail: f.a.martynenko@gmail.com

реакции, в которых могут образовываться связанные состояния лептонов (позитроний, димюоний, дитауоний). В реакциях этого типа отсутствуют неопределенности, обусловленные непертурбативным взаимодействием кварков. Различные процессы образования и распада позитрония уже имеют богатую историю, включающую критические периоды расхождения между теорией и экспериментом. Другие связанные состояния лептонов изучены гораздо меньше. Так, можно отметить, что расчеты характеристик димюония были проведены достаточно давно с большой точностью, но само связанное состояние еще не наблюдалось. Различные концепции образования димюония и дитауония обсуждаются во многих статьях [4, 5]. Одна из возможностей образования связанных состояний лептонов (дилептония) обусловлена распадом бозона Хиггса. В данной работе мы изучаем процессы одиночного рождения дилептония в рамках релятивистского подхода, который ранее использовался для расчета рождения чармония и  $B_c$ -мезонов [6–8]. Это позволяет получить значения ширины распада с учетом релятивистских эффектов.

### 1. РОЖДЕНИЕ ОДИНОЧНЫХ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ ЛЕПТОНОВ

Рассмотрим одиночное рождение связанных состояний лептонов при распаде  $H \rightarrow \gamma + \bar{l}l$ ,  $H \rightarrow Z + \bar{l}l$ . Вершина взаимодействия бозона Хиггса с лептонами определяется фактором

$$m(\sqrt{2} G_F)^{1/2} = \frac{e}{\sin 2\theta_W} \frac{m}{M_Z}, \tag{1}$$

где  $m$  — масса лептона;  $M_Z$  — масса  $Z$ -бозона;  $\theta_W$  — угол Вайнберга;  $G_F$  — константа Ферми.

Лептон-фотонный ( $Z$ -бозонный) механизм рождения дилептония определяется тремя амплитудами, представленными на рис. 1, а–в. Исходное выражение для амплитуды такого процесса можно представить как свертку амплитуды рождения фотона и пары лептон–антилептон с волновой функцией Бете–Солпитера, описывающей в рамках четырехмерного формализма связанное лептон–антилептонное состояние,

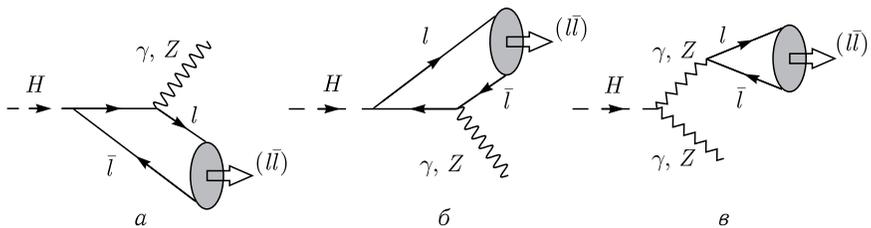


Рис. 1. Лептон-фотонный ( $Z$ -бозонный) механизм одиночного рождения дилептония в распаде бозона Хиггса

движущееся с 4-импульсом  $P$ . Преобразуя амплитуду при переходе к трехмерному формализму и используя закон преобразования квазипотенциальной волновой функции при переходе от движущейся системы отсчета к системе покоя связанного состояния лептонов, получим две амплитуды распада (см. рис. 1, а, б) в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1(k, P) = & \frac{4\pi\alpha m_l}{\sin 2\theta_W M_Z} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\Psi(\mathbf{p})}{\frac{\varepsilon}{m} \frac{(\varepsilon + m)}{2m} [(r - p_2)^2 - m^2]} \times \\ & \times \text{Tr} \left\{ \left[ \frac{\hat{v} - 1}{2} - \hat{v} \frac{p^2}{2m(\varepsilon + m)} - \frac{\hat{p}}{2m} \right] \times \right. \\ & \left. \times \hat{\varepsilon}_{\vec{l}} \frac{(\hat{v} + 1)}{2\sqrt{2}} \left[ \frac{\hat{v} + 1}{2} - \hat{v} \frac{p^2}{2m(\varepsilon + m)} + \frac{\hat{p}}{2m} \right] \hat{\varepsilon}_\gamma (\hat{r} - \hat{p}_2 + m) \right\}, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2(k, P) = & \frac{4\pi\alpha m_l}{\sin 2\theta_W M_Z} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\Psi(\mathbf{p})}{\frac{\varepsilon}{m} \frac{(\varepsilon + m)}{2m} [(p_1 - r)^2 - m^2]} \times \\ & \times \text{Tr} \left\{ \left[ \frac{\hat{v} - 1}{2} - \hat{v} \frac{p^2}{2m(\varepsilon + m)} - \frac{\hat{p}}{2m} \right] \times \right. \\ & \left. \times \hat{\varepsilon}_{\vec{l}} \frac{(\hat{v} + 1)}{2\sqrt{2}} \left[ \frac{\hat{v} + 1}{2} - \hat{v} \frac{p^2}{2m(\varepsilon + m)} + \frac{\hat{p}}{2m} \right] (\hat{p}_1 - \hat{r} + m) \hat{\varepsilon}_\gamma \right\}, \quad (3) \end{aligned}$$

где  $r$  — 4-импульс бозона Хиггса;  $\varepsilon_\gamma$  — вектор поляризации фотона;  $\varepsilon_{\vec{l}}$  — вектор поляризации дилептона;  $k$  — 4-импульс фотона;  $\varepsilon(p) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ ;  $v = P/M$ ,  $M$  — масса состояния ( $\vec{l}$ );  $p$  — относительный 4-импульс лептонов. Выражения для амплитуд (2), (3) получаются в результате преобразований Лоренца так же, как в наших работах [6–8]. Они позволяют учесть релятивистские поправки, определяемые импульсом  $p$ .

Упрощения, которые можно сделать в амплитудах, связаны прежде всего со знаменателями лептонных пропагаторов. Величина относительного импульса мала по сравнению с массой бозона Хиггса  $M_H$ , поэтому

$$(p_1 - r)^2 - m^2 \approx (r - p_2)^2 - m^2 \approx \frac{1}{2}(M_H^2 - M^2), \quad (4)$$

где массу лептона здесь можно приближенно заменить на  $m = M/2$ , пренебрегая малыми эффектами связанности частиц.

После расчета следа и выделения релятивистских поправок по  $p/m$  второго и четвертого порядка в числителе получаем следующее выражение для полной амплитуды распада:

$$\mathcal{M} = \frac{64\pi\alpha r_1}{\sin 2\theta_W M_Z(r_2^2 - 1)} \tilde{\psi}(0) \left\{ (\varepsilon_\gamma \varepsilon_{\bar{l}}) \left[ r_2^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\omega_1 \right) - r_1 + r_1\omega_1 + \frac{4}{3}r_1\omega_2 \right] - (v_\gamma \varepsilon)(v\varepsilon_\gamma) \left[ 1 - \frac{1}{3}\omega_1 \right] \right\}, \quad (5)$$

где введены отношения масс частиц:  $r_1 = m/M$ ,  $r_2 = M_H/M$ .

Релятивистские поправки в (5) второго и четвертого порядков по  $p/m$  в нашем подходе определяются параметрами  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и значением волновой функции в нуле  $\tilde{\psi}(0)$ . Определение этих параметров и их численный расчет приведены в следующем разделе. Заметим, что мы сохранили здесь  $\alpha$ -поправки четвертого порядка только для того, чтобы продемонстрировать общую структуру амплитуды. В дальнейшем при получении численных оценок мы пренебрегаем поправками четвертого порядка.

В числителе амплитуды (5) определим две функции  $g_{1,2}$ :

$$N = g_1(\varepsilon_{\bar{l}}\varepsilon_\gamma) - g_2(v\varepsilon_\gamma)(v_\gamma\varepsilon_{\bar{l}}), \quad (6)$$

$$g_1 = \left[ r_2^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\omega_1 \right) - r_1 + r_1\omega_1 + \frac{4}{3}r_1\omega_2 \right], \quad g_2 = \left[ 1 - \frac{1}{3}\omega_1 \right].$$

Импульс конечного дилептонного состояния выражается через массы бозона Хиггса ( $M_H$ ),  $Z$ -бозона ( $M_Z$ ) и дилептонного состояния ( $M$ ):

$$|\mathbf{P}| = \begin{cases} \sqrt{\frac{M^4 + (M_H^2 - M_Z^2)^2 - 2M^2(M_H^2 + M_Z^2)}{4M_H^2}}, & H \rightarrow (\bar{l}l) + Z, \\ \frac{M_H^2 - M^2}{2M_H}, & H \rightarrow (\bar{l}l) + \gamma. \end{cases} \quad (7)$$

После суммирования по поляризациям фотона и ортодилептония получим полную ширину распада  $H \rightarrow \gamma + (\bar{l}l)$

$$\Gamma_{\gamma(\bar{l}l)} = \frac{512\pi\alpha^2 r_1^2}{r_2^3 \sin^2 2\theta_W M_Z^2 (r_2^2 - 1)} \left[ \frac{1}{2}r_2^2 g_2^2 + 3g_1^2 - \frac{1}{4}g_2^2 - \frac{1}{4}r_2^4 g_2^2 \right] |\tilde{\psi}(0)|^2. \quad (8)$$

Ширина распада бозона Хиггса на  $Z$ -бозон и  $(\bar{l}l)$  (см. рис. 1, а, б) вычисляется аналогично и имеет следующий вид:

$$\Gamma_{Z(\bar{l}l)} = \frac{32\pi\alpha^2 \sqrt{[(r_2 + 1)^2 - r_3^2][(r_2 - 1)^2 - r_3^2]}}{r_2^3 \sin^4 2\theta_W M_Z^2 (r_2^2 - 1)^2} |\tilde{\psi}(0)|^2 \times$$

$$\times \left\{ g_{2Z}^2 \left( \frac{1}{16r_3^2} - \frac{1}{4} + \frac{3}{8}r_3^2 - \frac{1}{4}r_3^4 + \frac{1}{16}r_3^6 - \frac{1}{4}r_3^2 + \frac{1}{4}r_3^2 + \frac{1}{4}r_3^2 r_3^2 - \frac{1}{4}r_3^2 r_3^4 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{3}{8}r_3^4 + \frac{1}{4}r_3^4 + \frac{3}{8}r_3^4 r_3^2 - \frac{1}{4}r_3^6 - \frac{1}{4}r_3^6 + \frac{1}{16}r_3^8 \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 &+ g_{1Z}g_{2Z} \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{4r_3^2} - \frac{1}{4}r_3^2 + \frac{1}{4}r_3^4 + \frac{3}{4}\frac{r_2^2}{r_3^2} - \frac{1}{2}r_2^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{4}r_2^2r_3^2 + \frac{3}{4}\frac{r_2^4}{r_3^2} + \frac{3}{4}r_2^4 - \frac{1}{4}\frac{r_2^6}{r_3^2} \right) + \\
 &\quad \left. + g_{1Z}^2 \left( \frac{5}{2} + \frac{1}{4r_3^2} + \frac{1}{4}r_3^2 - \frac{1}{2}\frac{r_2^2}{r_3^2} - \frac{1}{2}r_2^2 + \frac{1}{4}\frac{r_2^4}{r_3^2} \right) \right\}, \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{1Z} &= (r_2^2 - r_3^2) \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{4}a_z - \frac{1}{24}\omega_1 - \frac{1}{12}\omega_1 a_z \right) + \\
 &\quad + r_1 \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}a_z + \frac{1}{4}\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_1 a_z \right), \quad (10) \\
 g_{2Z} &= \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2}a_z - \frac{1}{12}\omega_1 - \frac{1}{6}a_z\omega_1 \right),
 \end{aligned}$$

где введен другой массовый коэффициент  $r_3 = M_Z/M$ ,  $a_z = 2 \sin^2 \theta_W$ .

Для получения полной ширины распада  $H \rightarrow Z + (\bar{l}l)$ , включая вклад механизма  $ZZ$ -рождения, необходимо сделать следующую замену в (9):

$$g_{1Z} \rightarrow g_{1Z} + \frac{r_2^2}{r_1} g_{1ZZ}, \quad g_{1ZZ} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}a_z - \frac{1}{12}\omega_1 - \frac{1}{6}\omega_1 a_z. \quad (11)$$

Выражения (6), (8), (9), (10) показывают, что к основным параметрам, определяющим значения брэнчингов распада, относятся (наряду с постоянной тонкой структуры) отношения масс частиц  $r_1, r_2, r_3$ .

Исследования, проведенные нами в [6, 7], показывают, что необходимо учитывать петлевой ( $W$ -бозонный и кварковый) механизм рождения  $Z + (\bar{l}l)$ , показанный на рис. 2. Хотя формально в нем появляется дополнительная степень  $\alpha$  по сравнению с  $ZZ$ -бозонным, постоянная тонкой структуры не является решающим фактором при определении порядка величины вклада. Здесь начинают играть более существенную роль многочисленные параметры отношения масс частиц. Петли тяжелых

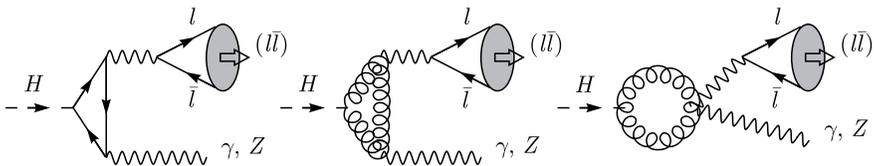


Рис. 2. Петлевые кварковый и  $W$ -бозонный механизмы рождения одиночных дилептонных связанных состояний в распаде бозона Хиггса

кварков и  $W$ -бозона вносят свой вклад в функции  $g_{1,2}$  в виде

$$g_{1Z}^{(\text{loop})} = \frac{(r_2^2 - r_3^2)}{2r_1} \left( 1 + \frac{1}{3}\omega_1 \right) \times \\ \times \left[ \pi\alpha r_2^2 r_3^2 \cos^2 \theta_W A_W^Z + \sum_{Q=c,b,t} \frac{6\alpha q_Q r_2^2 m_Q^2}{M^2} A_Q^Z \right], \quad (12)$$

$$g_{2Z}^{(\text{loop})} = \frac{\pi\alpha r_2^2 r_3^2 \cos^2 \theta_W}{r_1} A_W^Z \left( 1 + \frac{1}{3}\omega_1 \right) + \\ + \sum_{Q=c,b,t} \frac{6\alpha q_Q r_2^2 m_Q^2}{r_1 M^2} A_Q^Z \left( 1 + \frac{1}{3}\omega_1 \right), \quad (13)$$

где указаны относительные коэффициенты по лептон- $Z$ -бозонному механизму распада. Определение параметров  $A_W^Z$ ,  $A_Q^Z$  описано ниже в случае рождения  $\gamma + (\bar{l})$ . Численные результаты расчета ширины распада с образованием  $Z + (\bar{l})$  приведены ниже в таблице.

Лептон-фотонный механизм распада на рис. 1 дает ширину распада пятого порядка по  $\alpha$ . Наш анализ показывает, что лептон-фотонный механизм на рис. 2 имеет больший численный вклад, хотя его порядок  $\alpha^7$ . Это происходит за счет одновременного изменения массовых коэффициентов в амплитуде такого распада. Ранее мы изучали аналогичный механизм распада в связи с рождением тяжелых кваркониев в [6–8].

Общая структура тензора, соответствующего  $W$ -бозонным или кварковым петлям на рис. 2 в случае двух виртуальных фотонов, имеет вид

$$T_{Q,W}^{\mu\nu} = A_{Q,W}(t)(g^{\mu\nu}(v_1 v_2) - v_1^\nu v_2^\mu) + \\ + B_{Q,W}(t)[v_1^2 v_2^\mu - v_1^\mu(v_1 v_2)][v_2^2 v_1^\nu - v_2^\nu(v_1 v_2)], \quad (14)$$

где  $t = M_h^2/(4m_Q^2)$  или  $t = M_h^2/(4m_W^2)$ ,  $m_W$  — масса  $W$ -бозона;  $m_Q$  — масса тяжелого кварка в кварковой петле. Структурные функции  $A_{Q,W}(t)$ ,  $B_{Q,W}(t)$  можно получить, используя выражение для петлевых интегралов [9]. В случае, когда один фотон реальный, единственный вклад вносит структурная функция  $A(t)$ , удовлетворяющая дисперсионному соотношению

$$A_W(t) = A_W(0) + \frac{t}{\pi} \int_1^\infty \frac{\text{Im} A(t') dt'}{t'(t' - t + i0)}. \quad (15)$$

Мнимая часть  $\text{Im} A(t)$  может быть вычислена по правилу Мандельштама–Кутковского:

$$\text{Im} A_W = \frac{r_4^2}{64\pi} \frac{1}{t(4t - r_4^2)^2} \left[ r_4^2 \sqrt{t(t-1)} (r_4^2(2t+1) - 4t - 6) + \right. \\ \left. + 4t(6 - 12t + r_4^2(2t+3) - r_4^4) \text{arcsch}(\sqrt{t-1}) \right], \quad r_4 = \frac{M}{M_W}. \quad (16)$$

Поскольку массовый параметр  $r_4$  очень мал, для вычисления самой функции  $A(t)$  по ее мнимой части можно воспользоваться разложением по  $r_4$ . В лидирующем порядке по  $r_4$  получаем

$$A_W(t) = \frac{r_4^2}{16\pi^2} \left[ 2 + \frac{3}{t} + \frac{3}{t^2} (2t-1) f^2(t) \right], \quad (17)$$

$$f(t) = \begin{cases} \arcsin \sqrt{t}, & t \leq 1, \\ \frac{i}{2} \left[ \ln \frac{1 - \sqrt{1-t^{-1}}}{1 + \sqrt{1-t^{-1}}} - i\pi \right], & t > 1. \end{cases}$$

Вклад петлевого механизма  $W$ -бозона в ширину распада значительно превышает остальные, поэтому полезно привести отдельно соответствующую формулу для ширины распада:

$$\Gamma = \frac{8\pi^3 \alpha^4 (r_2^2 - 1) \text{ctg}^2 \theta_W M_Z^2}{r_2^3 M^4} |\tilde{\psi}(0)|^2 A_W^2 \times$$

$$\times \left[ 3|g_{1W}|^2 - \frac{1}{4}(r_2^2 - 1)^2 |g_{2W}|^2 \right], \quad (18)$$

$$g_{1W} = (r_2^2 - 1) \left( 1 + \frac{7}{3}\omega_1 + \frac{11}{3}\omega_2 \right), \quad (19)$$

$$g_{2W} = 2 \left( 1 + \frac{7}{3}\omega_1 + \frac{11}{3}\omega_2 \right).$$

Подчеркнем, что эта формула содержит массовые факторы, построенные на основе наблюдаемых масс частиц. Таким образом, эффекты связанности в лептонной системе учитываются, несмотря на их малость.

Аналогично  $W$ -петлевому механизму мы можем вычислить вклад кваркового петлевого механизма, показанного на рис. 2. Мнимая часть структурной функции  $A_Q(t)$  имеет вид

$$\text{Im } A_Q = \frac{r_5^2}{32\pi} \frac{1}{t(4t - r_5^2)^3} \left[ 3r_5^2 \sqrt{t(t-1)} (4t - r_5^2) + \right.$$

$$\left. + 4t(r_5^4 + 2r_5^2(1-2t) + 8(t-1)t) \text{arcsinh}(\sqrt{t-1}) \right], \quad r_5 = \frac{M}{m_Q}. \quad (20)$$

После вычисления дисперсионного интеграла для функции  $A_Q(t)$  в ведущем порядке по  $r_5^2$  получается следующий результат:

$$A_Q(t) = \frac{r_5^2}{16\pi^2} \left[ \frac{1}{t} + \frac{(t-1)}{t^2} f^2(t) \right]. \quad (21)$$

Тогда полную ширину распада с учетом кварковых петель можно получить по формуле (18), сделав следующую замену:

$$g_{1W,2W} \rightarrow g_{1W,2W} \left( 1 + \sum_{Q=c,b,t} \frac{24q_Q^2 m_Q^2}{\cos^2 \theta_W M_Z^2} \frac{A_Q}{A_W} \right). \quad (22)$$

Численные значения ширины распада бозона Хиггса с рождением одного дилептонного состояния обсуждаются в разд. 3.

## 2. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПОПРАВКИ

Релятивистские поправки представляют собой важный класс поправок при рождении связанных состояний кварков. В случае рождения связанных состояний лептонов такие поправки невелики, поскольку определяются значением постоянной тонкой структуры. Их учет связан с повышением точности расчета ширины распада.

При расчете ширины распада мы учитываем релятивистские поправки нескольких типов. Первая группа релятивистских поправок связана с законом преобразования волновой функции связанного состояния в систему покоя и импульсом относительного движения лептонов в амплитуде распада. Вторая группа определяется потенциалом Брейта при расчете волновой функции связанного состояния.

Для расчета релятивистских поправок к амплитуде распада  $H$ -бозона мы используем тот же подход, что и в наших предыдущих работах [6, 7]. После вычисления следа в числителе амплитуд выделяются поправки определенного порядка малости по относительному импульсу лептонов. Для учета поправок второго порядка по  $\mathbf{p}^2/m^2$  введем разложение вида

$$\frac{|\mathbf{p}|}{2m} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\varepsilon(p) - m}{\varepsilon(p) + m} \right)^{n+1/2}, \quad \frac{|\mathbf{q}|}{2m} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\varepsilon(q) - m}{\varepsilon(q) + m} \right)^{n+1/2}. \quad (23)$$

Это разложение подчеркивает, что относительные импульсы лептонов малы по сравнению с их массой. В квантовой электродинамике вид волновой функции связанного состояния в начальном приближении известен аналитически. Отсюда следует, что  $|\mathbf{p}| \sim W = m\alpha/2$ .

Используя разложение (23), релятивистские поправки в  $p$  можно представить в виде следующих интегралов в импульсном пространстве:

$$I^{(i)} = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\varepsilon(p) + m}{2\varepsilon(p)} \psi_{1S}^C(\mathbf{p}) \left( \frac{\varepsilon(p) - m}{\varepsilon(p) + m} \right)^i, \quad (24)$$

$$\psi_{1S}^C(p) = \frac{8\sqrt{\pi} W^{5/2}}{(p^2 + W^2)^2}, \quad W = \frac{m}{2}\alpha. \quad (25)$$

В представленных ранее амплитудах релятивистские эффекты выражаются через специальные параметры, которые определяются интеграль-

ными соотношениями (24):

$$\omega_1 = \frac{I^{(1)}}{I^{(0)}}, \quad \omega_2 = \frac{I^{(2)}}{I^{(0)}}, \quad I^{(0)} = \tilde{\psi}(0) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\varepsilon(p) + m}{2\varepsilon(p)} \psi_{1S}^C(\mathbf{p}). \quad (26)$$

После этого при вычислении значений (26) выполняем разложение по  $p/m$  с учетом членов второй степени. Все нерелятивистские разложения по  $|\mathbf{p}|/m$ , которые мы проводим, предполагают, что  $|\mathbf{p}|$  мал по сравнению с  $m$ . Поэтому, хотя интегралы (26) формально сходятся, при их вычислении необходимо брать значение импульса в полюсе волновой функции. Действуя таким образом, получаем следующие результаты:

$$\tilde{\psi}(0) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \psi_{1S}^C(\mathbf{p}) \left[ 1 - \frac{\mathbf{p}^2}{4m^2} \right] = \psi_{1S}^C(0) \left[ 1 + \frac{3}{4}\alpha^2 \right], \quad (27)$$

$$I^{(1)} = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \psi_{1S}^C(\mathbf{p}) \frac{\mathbf{p}^2}{4m^2} = -\frac{3}{4}\alpha^2 \psi_{1S}^C(0), \quad \omega_1 = -\frac{3}{4}\alpha^2. \quad (28)$$

Параметры  $\omega_i$  для  $i > 1$  пропорциональны более высоким степеням  $\alpha$ , чем (27), и в дальнейшем опускаются. Результаты (27) получены с использованием следующего выражения [10, 11]:

$$\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{p}^2}{4m^2} \psi_n^C(\mathbf{p}) = -\frac{[3 + 2(n-1)(n+1)]}{4n^2} \alpha^2 \psi_n^C(0). \quad (29)$$

Волновая функция (25) была получена из решения уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом. Мы можем оценить релятивистскую поправку ведущего порядка к волновой функции, используя следующее выражение [12]:

$$\psi_{1S}^{(1)}(0) = \int \tilde{G}_{1S}(0, \mathbf{r}) \Delta V(\mathbf{r}) \psi_{1S}^{(0)}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (30)$$

где  $\tilde{G}_{1S}$  — приведенная кулоновская функция Грина;  $\psi_{1S}^{(0)}$  определяется формулой (25);  $\Delta V$  — пертурбативный потенциал.

После расчета различных матричных элементов с основными вкладами в потенциале Брейта получим следующее выражение для значения волновой функции связанного состояния в нуле [12, 13]:

$$\psi(0) = \psi^C(0) \left\{ 1 + a_{vp} \frac{\alpha}{\pi} + \left( 2 - \frac{7}{6} S(S+1) \right) \frac{1}{2} \alpha^2 \ln \alpha^{-1} - \frac{3}{128} \alpha^2 \right\}, \quad (31)$$

где учтен вклад на поляризацию вакуума, имеющий интегральный вид:

$$\psi(0) = \psi^C(0) \left[ a_{vp} \frac{\alpha}{\pi} \right], \quad r_6 = \frac{m_e}{m\alpha}, \quad (32)$$

$$a_{vp} = \int_1^\infty \frac{\rho(\xi) d\xi}{6(1+r_6\xi)} [2r_6^2 \xi^2 + 7r_6 \xi + 2(1+r_6\xi) \ln(1+r_6\xi) + 3].$$

Численная оценка этой поправки для димюония определяется электронной, мюонной поляризацией вакуума, а для дитауония — электронной, мюонной,  $\tau$ -лептонной поляризацией вакуума в виде

$$\begin{aligned} a_{\text{вп}}(e^+e^-) &= 0,004383, \\ a_{\text{вп}}(\mu^+\mu^-) &= 0,942790, \\ a_{\text{вп}}(\tau^+\tau^-) &= 3,613251. \end{aligned} \quad (33)$$

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теоретическое изучение редких эксклюзивных процессов распада бозона Хиггса представляет собой важную задачу в общем направлении изучения сектора Хиггса в Стандартной модели. В данной работе расчет ширин распада бозона Хиггса проводится в рамках релятивистской квазипотенциальной модели, которую мы ранее использовали при изучении парного рождения мезонов и барионов. Исследование рождения связанных состояний частиц в различных реакциях важно также для проверки теории связанных состояний в квантовой теории поля.

В таблице представлены результаты расчета ширин распада бозона Хиггса с рождением одиночных дилептонных состояний и фотона или  $Z$ -бозона. Полученные значения  $\Gamma$  для этих редких распадов невелики, и их наблюдение возможно только на будущих коллайдерах высокой светимости, когда будет происходить рождение значительного числа бозонов Хиггса ( $\sim 10^{10}$ ) [1]. Учитывая основной канал распада ортодилептония на три фотона, можно ожидать их надежного обнаружения. В данной работе исследована роль релятивистских эффектов, обусловленных законом преобразования волновой функции связанного состояния лептонов при переходе в систему покоя, релятивистскими поправками в самой амплитуде распада и поправками к волновой функции позитрония, димюония и дитауония в нуле. Ведущие поправки имеют порядок  $\alpha$  и  $\alpha^2 \ln \alpha$ . Кроме того, в наших численных результатах в таблице, наряду с релятивистскими поправками, мы учли эффекты связанности частиц. Эти эффекты проявляются потому, что различные массовые коэффициенты в значительной степени влияют на конечный результат. В случае димюо-

#### Численные значения брэнчингов распада

Конечное состояние	Результат работы [3]	Наш результат
$(e^+e^-) + \gamma$	$3,5 \cdot 10^{-12}$	$0,88 \cdot 10^{-10}$
$(\mu^+\mu^-) + \gamma$	$3,5 \cdot 10^{-12}$	$1,12 \cdot 10^{-11}$
$(\tau^+\tau^-) + \gamma$	$2,2 \cdot 10^{-12}$	$3,48 \cdot 10^{-12}$
$(e^+e^-) + Z$	$5,2 \cdot 10^{-13}$	$7,87 \cdot 10^{-13}$
$(\mu^+\mu^-) + Z$	$5,7 \cdot 10^{-13}$	$9,85 \cdot 10^{-13}$
$(\tau^+\tau^-) + Z$	$1,4 \cdot 10^{-11}$	$5,68 \cdot 10^{-11}$

ния и дитауония эти поправки составляют порядка 1 %, что обусловлено в основном эффектом поляризации вакуума порядка  $O(\alpha)$  в волновой функции. Для позитрония ведущими поправками являются поправки порядка  $O(\alpha^2)$ , что приводит к их значительному уменьшению до 0,01 %. Ширины редких распадов бозона Хиггса были вычислены ранее в [3]. Наши результаты согласуются с [3], а имеющееся различие может быть связано с учетом в наших расчетах различных механизмов распада.

**Финансирование.** Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «Базис» (грант № 22-1-1-23-1).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Contino R. et al.* Physics at a 100 TeV  $pp$  Collider: Higgs and EW Symmetry Breaking Studies. CERN Yellow Rep. Monogr. CERN-TH-2016-113. 2017. V. 3. P. 255–440.
2. *Martynenko A. P., Martynenko F. A.* Relativistic Theory of Paired Heavy Meson and Baryon Production // Phys. At. Nucl. 2023. V. 86. P. 878.
3. *d’Enterria D., Le Van Dung.* Rare and Exclusive Few-Body Decays of the Higgs,  $Z$ ,  $W$  Bosons, and the Top Quark // J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 2024. P. 1–56; arXiv:2312.11211[hep-ph].
4. *Ginzburg I. F. et al.* Production of Bound  $\mu^+\mu^-$  Systems in Relativistic Heavy Ion Collisions // Phys. Rev. C. 1998. V. 58. P. 3565–3573.
5. *d’Enterria D., Shao H.-S.* Prospects for Ditaonium Discovery at Colliders // Phys. Lett. B. 2023. V. 842. P. 137960.
6. *Faustov R. N., Martynenko A. P., Martynenko F. A.* Pair Quarkonium Production in Higgs Boson Decay // Phys. Part. Nucl. Lett. 2023. V. 20, No. 3. P. 368.
7. *Martynenko A. P., Martynenko F. A.* Paired Double Heavy Baryons Production in Decays of the Higgs Boson // Symmetry. 2023. V. 15. P. 1944.
8. *Faustov R. N., Martynenko A. P., Martynenko F. A.* Relativistic Corrections to Paired Production of Charmonium and Bottomonium in Decays of the Higgs Boson // Phys. Rev. D. 2023. V. 107, No. 5. P. 056002.
9. *Boradjiev I., Christova E., Eberl H.* Dispersion Theoretic Calculation of the  $H \rightarrow Z + \gamma$  Amplitude // Phys. Rev. D. 2018. V. 97. P. 073008.
10. *Khriplovich I. B., Milstein A. I.* Large Relativistic Corrections to the Positronium Decay Probability // J. Exp. Theor. Phys. 1994. V. 106. P. 689.
11. *Faustov R. N., Martynenko A. P.* Corrections of Order  $(Z\alpha)^6 m_e^2/m_\mu$  in the Muonium Fine Structure // J. Exp. Theor. Phys. 1999. V. 88. P. 672.
12. *Kniehl B. A., Penin A. A.* Order  $\alpha^3 \ln(1/\alpha)$  Corrections to Positronium Decays // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. P. 1210.
13. *Martynenko F. A., Martynenko A. P., Eskin A. V.* Production of Dileptonic Bound States in the Higgs Boson Decay. arXiv.2405.00829[hep-ph].