

# РЕДКИЕ РАСПАДЫ ОЧАРОВАННЫХ МЕЗОНОВ НА ТРИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЛЕПТОНА И НЕЙТРИНО

*А. В. Данилина*<sup>1, \*</sup>, *Н. В. Никитин*<sup>1, 2, 3, 4, \*\*</sup>

<sup>1</sup> Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына  
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

<sup>2</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

<sup>3</sup> Курчатовский комплекс теоретической и экспериментальной физики  
Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», Москва

<sup>4</sup> Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия

В рамках Стандартной модели получены парциальные ширины и дифференциальные распределения для распадов очарованных  $D^{\pm}$ - и  $D_s^{\pm}$ -мезонов на три легких заряженных лептона и нейтрино. Учтены вклады от процессов излучения виртуального фотона легкими ( $d$  или  $s$ ) и тяжелым ( $c$ ) кварками очарованных мезонов и тормозное излучение виртуального фотона заряженным лептоном в конечном состоянии. Излучение виртуального фотона легкими кварками описывается с помощью модели доминантности векторных мезонов.

In the framework of the Standard Model, the branching ratios and differential distributions for the four-lepton decays  $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  and  $D^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  are found. In our calculations, we took into account the processes of a virtual photon emission by light ( $d$  or  $s$ ) and heavy ( $c$ ) quarks of the charmed meson and bremsstrahlung. The emission of a virtual photon by light quark has been described using the vector mesons dominance model.

PACS: 14.40.Lb; 12.39.-x; 12.15.-y; 14.65.Dw; 13.40.Hq; 23.70.+j

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время имеется только одна экспериментальная работа коллаборации LHCb, в которой определен верхний предел для парциальной ширины распада заряженного прелестного псевдоскалярного мезона ( $B$ -мезона) на три легких заряженных лептона и нейтрино [1]. Для аналогичных распадов заряженных очарованных псевдоскалярных мезонов ( $D$ - или  $D_s$ -мезонов) экспериментальных данных пока нет.

Теоретическому изучению четырехлептонных распадов заряженных  $B$ -мезонов посвящены работы [2–10]. Отметим, что в работе [7] была

---

\* E-mail: danechka@student.su

\*\* E-mail: 679nik@mail.ru

предложена согласованная с требованием калибровочной инвариантности вычитательная процедура, использование которой позволило наилучшим образом согласовать теоретические предсказания с экспериментальным результатом [1].

Четырехлептонные распады  $D_s^\pm$ -мезонов впервые изучались в работе [11], а распады  $D^\pm$ -мезонов на три заряженных лептона и нейтрино до настоящего времени в публикациях не рассматривались. В данной работе мы приведем численные предсказания для парциальных ширин и дифференциальные характеристики распадов  $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  и  $D^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ . При получении амплитуд распадов  $D_{(s)}^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$  использован подход работы [11], который учитывает идею необходимости вычитательной процедуры [7], хотя конкретная модель вычитательной процедуры строится иначе.

## ОБОСНОВАНИЕ МОДЕЛИ И БАЗОВЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В низшем порядке теории возмущений распады  $D_{(s)}^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$  идут на древесном уровне за счет вкладов большого числа электрослабых вершин. В таких распадах отсутствует петлевое подавление, обусловленное унитарностью матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскавы (ККМ). Напомним, что подобное подавление, например, делает практически невозможным экспериментальное наблюдение распада  $D^0 \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \mu^-$  и аналогичных ему распадов.

Если рассматривать только нерезонансный вклад, то распады  $D_s^\pm$ -мезонов с легкими лептонами в конечном состоянии имеют ККМ-преимущество над аналогичными распадами  $D^\pm$ , поскольку

$$\frac{\text{Br}_{\text{NR}}(D_s^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-)}{\text{Br}_{\text{NR}}(D^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-)} \sim \frac{|V_{cs}|^2}{|V_{cd}|^2} \left( \frac{M_{D_s}}{M_D} \right)^5 \frac{\tau_{D_s}}{\tau_D} \sim 10,$$

где  $\tau_{D_{(s)}}$  и  $M_{D_{(s)}}$  — время жизни и масса  $D_{(s)}$ -мезона [12]. Величину нерезонансного вклада грубо (прежде всего, без полного учета процессов тормозного излучения) можно оценить как

$$\text{Br}_{\text{NR}}(D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-) \sim \alpha_{\text{em}} \text{Br}(D_s^- \rightarrow \gamma \bar{\nu}_e e^-).$$

Для  $\text{Br}(D_s^- \rightarrow \gamma \bar{\nu}_e e^-)$  имеется только экспериментальный верхний предел  $1,3 \cdot 10^{-4}$  на 90%-м уровне достоверности [13]. Поэтому гарантированно

$$\text{Br}_{\text{NR}}(D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-) < 10^{-6} \quad (1)$$

и

$$\text{Br}_{\text{NR}}(D^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-) < 10^{-7}. \quad (2)$$

Ожидается, что эти значения должны быть еще как минимум на порядок меньше.

Перейдем к оценке резонансных вкладов. Основной вклад в распады  $D_s$ -мезонов вносит каскадный распад  $D_s^- \rightarrow (\varphi(1020) \rightarrow \ell^+ \ell^-) \bar{\nu}_\ell \ell'^-$ . Поскольку  $\varphi(1020)$ -резонанс является узким, то возможно написать простую оценку для резонансного вклада:

$$\begin{aligned} \text{Br}_\varphi(D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-) &\approx \\ &\approx \text{Br}(D_s^- \rightarrow \varphi(1020) \bar{\nu}_e e^-) \text{Br}(\varphi(1020) \rightarrow \mu^+ \mu^-) \approx 0,7 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \quad (3)$$

В распадах  $D^\pm$ -мезонов основную роль играют каскадные процессы  $D^- \rightarrow (\omega(782) \rightarrow \ell^+ \ell^-) \bar{\nu}_\ell \ell'^-$  и  $D^- \rightarrow (\rho^0(770) \rightarrow \ell^+ \ell^-) \bar{\nu}_\ell \ell'^-$ . Резонанс  $\omega(782)$  — узкий. В этом он похож на резонанс  $\varphi(1020)$  в распадах  $D_s^\pm$ -мезонов. Поэтому его вклад можно оценить как

$$\begin{aligned} \text{Br}_\omega(D^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-) &\approx \\ &\approx \text{Br}(D^- \rightarrow \omega(782) \bar{\nu}_e e^-) \text{Br}(\omega(782) \rightarrow \mu^+ \mu^-) \approx 1,3 \cdot 10^{-7}. \end{aligned} \quad (4)$$

Резонанс  $\rho^0(770)$  — широкий. Для оценки его вклада мы можем пренебречь его интерференцией с узким резонансом  $\omega(782)$  и отдельно написать, что

$$\begin{aligned} \text{Br}_\rho(D^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-) &\approx \\ &\approx \text{Br}(D^- \rightarrow \rho^0(770) \bar{\nu}_e e^-) \text{Br}(\rho^0(770) \rightarrow \mu^+ \mu^-) \approx 0,9 \cdot 10^{-7}. \end{aligned} \quad (5)$$

Сравнивая (1) и (3), видим, что в четырехлептонных распадах  $D_s$ -мезонов нерезонансный вклад будет минимум на порядок меньше резонансного. Учитывая примерно 15% неопределенности при вычислении факторов переходов  $D_s \rightarrow \varphi(1020)$  (см., например, [14]), заключаем, что нерезонансным вкладом от процесса  $D_s^- \rightarrow \gamma^* \bar{\nu}_e e^-$  в первом приближении можно пренебречь.

В распадах  $D^\pm$ -мезонов вклад от  $\omega(782)$ -резонанса (4) также можно считать намного больше нерезонансного вклада (2) с учетом того, что говорилось выше о реальной величине нерезонансного вклада (2). При этом в качестве своеобразного «эффективного нерезонансного вклада» можно рассматривать вклад (5) широкого  $\rho^0(770)$ -резонанса.

Кинематика распадов  $D_{(s)}^-(p, M_1) \rightarrow \mu^+(k_1) \mu^-(k_2) \bar{\nu}_e(k_3) e^-(k_4)$  показана на рис. 1. Угол  $\theta_{12}$  определяется в системе покоя  $\mu^+ \mu^-$ -пары, угол  $\theta_{34}$  определяется в системе покоя  $\bar{\nu}_e e^-$ -пары, угол  $\varphi$  задается в системе покоя  $D_{(s)}^-$ -мезона. Определим безразмерные переменные  $x_{12} = (k_1 + k_2)^2 / M_1^2 = q^2 / M_1^2$  и  $x_{34} = (k_3 + k_4)^2 / M_1^2 = k^2 / M_1^2$ . Легко понять, что  $\sqrt{q^2}$  находится в диапазоне

$$0,001 \text{ ГэВ} \approx 2m_\mu \leq \sqrt{q^2} \leq M_{D_{(s)}} - m_e \sim 2 \text{ ГэВ}.$$

При  $\sqrt{q^2} > 1,2\text{--}1,4 \text{ ГэВ}$  предложенная модель, по всей видимости, неприемлема, поскольку в данной области необходимо учитывать нерезонанс-

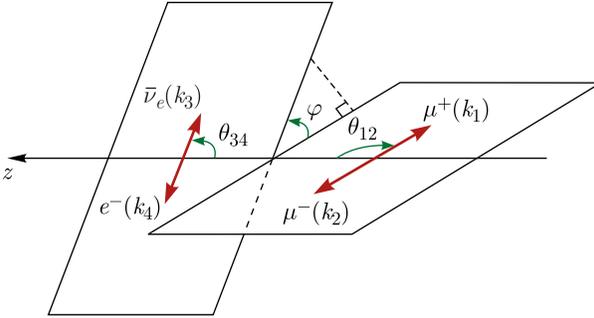


Рис. 1. Кинематика распадов  $D_{(s)}^-(p, M_1) \rightarrow \mu^+(k_1) \mu^-(k_2) \bar{\nu}_e(k_3) e^-(k_4)$

ный вклад от процесса  $D_{(s)}^- \rightarrow (\gamma^* \rightarrow \ell^+ \ell^-) \bar{\nu}_\ell \ell'^-$ , резонансный вклад от  $\varphi(1680)$ -резонанса для  $D_{(s)}^\pm$ -мезонов и вклады  $\omega(1420)$ ,  $\rho(1450)$ ,  $\omega(1650)$ ,  $\rho(1700)$  для распадов  $D^\pm$ -мезонов. Однако численно эти вклады малы.

## ВЫЧИСЛЕНИЕ АМПЛИТУДЫ РАСПАДА

$$D_{(s)}^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$$

В рамках Стандартной модели учитываются три основных вклада в амплитуды распадов  $D_{(s)}^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ .

Во-первых, это вклад от излучения виртуального фотона легким  $d$ - или  $s$ -кварком, который описывается с помощью модели доминантности векторных мезонов (VMD) с эффективным гамильтонианом

$$\mathcal{H}_{\text{VMD}}(x) = -e \sum_{V_i} \frac{M_{V_i}^2}{f_{V_i}} V_i^\mu(x) A_\mu(x), \quad (6)$$

где  $e = |e| > 0$ ,  $\alpha_{\text{em}} = e^2/4\pi \approx 1/137$ ;  $V_i^\mu(x)$  — поле векторного мезона  $V_i$ ;  $M_{V_i}$  — масса этого мезона. Безразмерные константы взаимодействия  $f_{V_i}$  могут быть получены численно. Ориентируемся на работу [15], в которой  $f_{\varphi(1020)} = -13,2$ ,  $f_{\rho(770)} = 5,04$  и  $f_{\omega(782)} = 17,1$ . Предполагается, что амплитуда распадов  $D_{(s)}^\pm$ -мезонов насыщается только  $\varphi(1020)$ -резонансом, как это показано на рис. 2. А амплитуда распадов  $D^\pm$ -мезонов насыщается  $\rho^0(770)$ - и  $\omega(782)$ -резонансами. В последнем случае в резонансы переходит только  $d\bar{d}$ -пара, что учитывается с помощью введения изотопических факторов  $I_\rho = \langle \rho^0(770) | d\bar{d} \rangle = -1/\sqrt{2}$  и  $I_\omega = \langle \omega(782) | d\bar{d} \rangle = +1/\sqrt{2}$ , которые аналогичны изотопическим факторам из работ [15, 16].

Следующий вклад — это вклад излучения виртуального фотона тяжелым  $s$ -кварком. Данный процесс является кросс-каналом распада

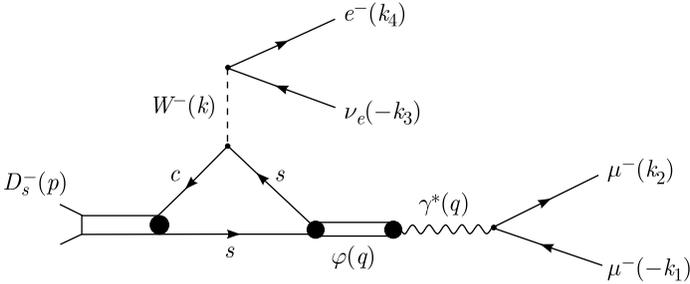


Рис. 2. Диаграмма, описывающая излучение виртуального фотона  $s$ -кварком в распаде  $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$

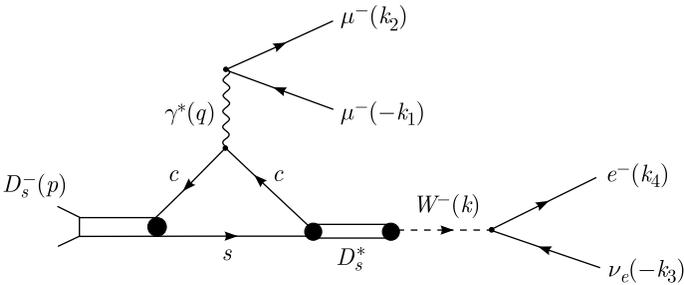


Рис. 3. Диаграмма, описывающая излучение виртуального фотона тяжелым  $c$ -кварком в распаде  $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$

$D_{(s)}^* \rightarrow D_{(s)} \gamma^*$ . Амплитуда процесса имеет вид

$$\mathcal{M}_{fi}^{(c)} \sim \frac{1}{q^2} \frac{M_{D_{(s)}^*} f_{D_{(s)}^*}}{k^2 - M_{D_{(s)}^*}^2} \frac{V_c(q^2)}{M_1 + M_{D_{(s)}^*}} \epsilon_{\mu\nu kq} j^\nu(k_2, k_1) J^\mu(k_4, k_3), \quad (7)$$

где  $j^\nu(k_2, k_1)$  и  $J^\mu(k_4, k_3)$  — слабый и электромагнитный лептонные токи. Мнимая добавка в пропагаторе отсутствует, поскольку  $\sqrt{k^2} < M_{D_{(s)}^*}$ . Диаграмма, соответствующая данному вкладу, представлена на рис. 3.

Третий вклад отвечает тормозному излучению виртуального фотона, которое описывается с помощью диаграммы на рис. 4. Можно показать [11], что амплитуда тормозного излучения имеет вид

$$\mathcal{M}_{fi}^{(\text{brem})} \sim \frac{i}{q^2} f_{D_{(s)}} g_{\mu\nu} j^\nu(k_2, k_1) J^\mu(k_4, k_3). \quad (8)$$

На примере выражений (7) и (8) видно, что полная амплитуда распадов  $D_{(s)}^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  содержит кинематическую особенность при  $q^2 \rightarrow 0$ . Как было отмечено в работе [7], эта особенность не может отвечать реальной частице, поскольку в канале излучения  $\ell^+ \ell^-$ -пары

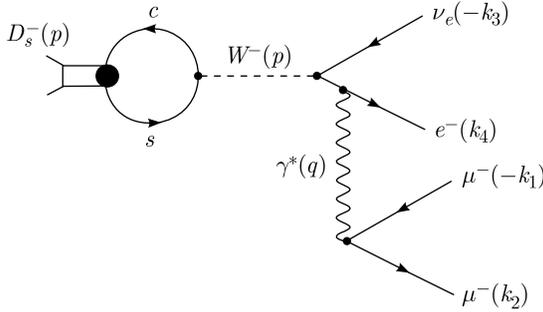


Рис. 4. Диаграмма тормозного излучения в распаде  $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$

отсутствует безмассовый векторный мезон. Для явного устранения нефизического полюса требуется вычитательная процедура. Такая процедура была проведена [7]. В настоящей работе мы придерживаемся модификации данной процедуры из работы [11].

## ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Все необходимые для вычислений массы, времена жизни, формфакторы и ККМ-матричные элементы можно найти в работах [11, 12, 14].

Начнем с получения парциальных ширин распадов  $D_{(s)}^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$ . В качестве кинематических ограничений снизу выберем  $x_{12 \min} = 4\hat{m}_\mu^2 \approx 0,01$  и  $x_{34 \min} = \hat{m}_e^2 \approx 0$ , где  $\hat{m}_\ell = m_\ell/M_1$ . Процедура численного интегрирования с помощью программного пакета EvtGen [17] детально описана в работах [11, 16]. В результате интегрирования имеем

$$\text{Br}(D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-) \Big|_{\sqrt{q^2} \geq 2m_\mu} \approx 0,2 \frac{\tau_{D_s}}{5,04 \cdot 10^{-13} \text{ с}} \frac{|V_{cs}|^2}{0,95} \cdot 10^{-5} \quad (9)$$

и

$$\text{Br}_\rho(D^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-) \Big|_{\sqrt{q^2} \geq 2m_\mu} \approx 4,7 \frac{\tau_D}{1,03 \cdot 10^{-12} \text{ с}} \frac{|V_{cd}|^2}{0,05} \cdot 10^{-7}, \quad (10)$$

что неплохо согласуется с наивными оценками (3), (4) и (5). Неопределенность предсказаний (9) и (10) порядка 30%, что связано как с неопределенностью при непертурбативном вычислении адронных формфакторов, так и с особенностями принятой модели для описания четырехлептонного распада.

Перейдем к распределениям по переменной  $x_{12}$ , которые представлены на рис. 5. Поскольку данные распределения имеют фотонный полюс при  $x_{12} \rightarrow 4\hat{m}_\mu^2$  и полюс в области узких резонансов ( $\varphi(1020)$  для  $D_s^\pm$  и  $\omega(782)$  для  $D^\pm$ ), то эти распределения необходимо строить в логарифмическом масштабе. Распределения по переменной  $x_{12}$  представлены вплоть

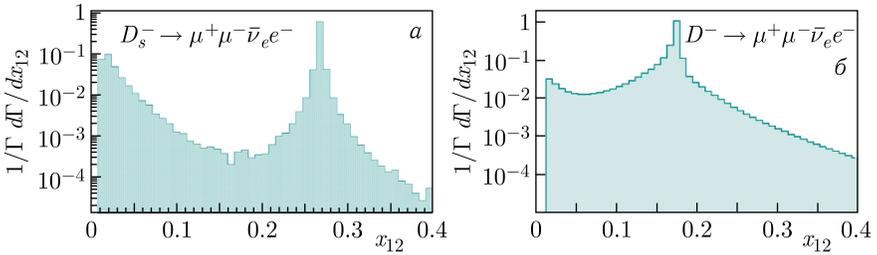


Рис. 5. Нормированные дифференциальные распределения  $(1/\Gamma)(d\Gamma/dx_{12})$  для распадов  $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  (а) и  $D^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  (б) при  $x_{12 \min} = 0,01$

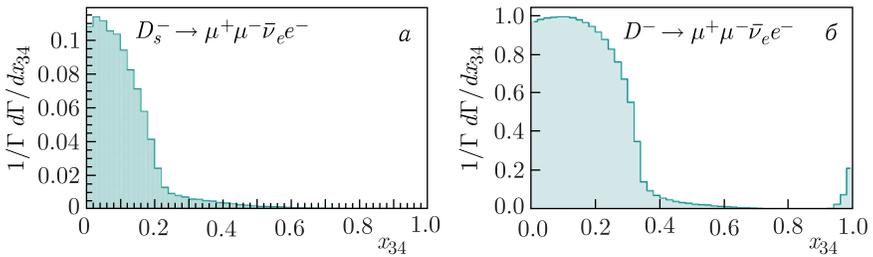


Рис. 6. Нормированные дифференциальные распределения  $(1/\Gamma)(d\Gamma/dx_{34})$  для распадов  $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  (а) и  $D^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  (б)

до  $x_{12} = 0,4$ , что соответствует области применимости предложенной модели. Отметим, что в обоих распадах резонансный вклад доминирует над вкладом фотонного полюса. Кроме того, на рис. 5, б подложка оказывается гораздо выше, чем на рис. 5, а. Это происходит из-за дополнительного вклада в эту подложку широкого  $\rho^0(770)$ -резонанса.

Рассмотрим распределения по переменной  $x_{34}$ , которые приведены на рис. 6. Как было показано в работе [11], форма таких распределений в основном определяется интегрированием по переменной  $x_{12}$  в области вклада узкого резонанса и может быть хорошо описана формулой

$$\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dx_{34}} \sim g(x_{34}) \left( C_1 + C_2 \operatorname{arctg} \left( \frac{(1 - \sqrt{x_{34}})^2 - \hat{M}_{V_i}^2}{\hat{\Gamma}_{V_i} \hat{M}_{V_i}} \right) \right), \quad (11)$$

где  $\hat{M}_{V_i} = M_{V_i}/M_1$ . Из формулы (11) видно, что «излом» распределений (рис. 6) должен происходить при  $\tilde{x}_{34} = (1 - \hat{M}_{V_i})^2$ . Отсюда получаем, что  $\tilde{x}_{34} \approx 0,23$  (для рис. 6, а) и  $\tilde{x}_{34} \approx 0,34$  (для рис. 6, б). Эти результаты прекрасно соответствуют рисункам.

На рис. 7 показаны нормированные на единицу двойные дифференциальные распределения по переменным  $x_{12}$  и  $x_{34}$ . Вряд ли стоит ожидать, что эти распределения будут измерены в обозримом будущем. Однако форма данных распределений однозначно показывает, что именно

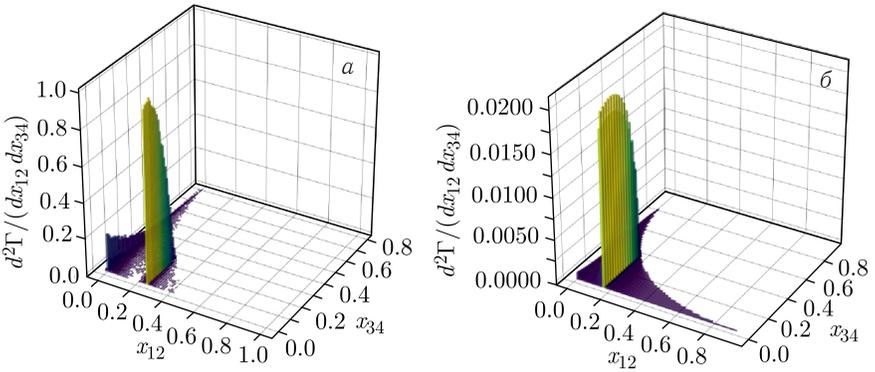


Рис. 7. Двойные нормированные дифференциальные распределения для распада  $D_s^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  (а) и для распада  $D^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \bar{\nu}_e e^-$  (б)

легчайшие векторные резонансы и фотонный полюс дают основной вклад в парциальные ширины, а вклад более высоких резонансов должен быть подавлен по фазовому объему.

Полученные выше оценки парциальных ширин показывают, что распады  $D_{(s)}^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$  с легкими лептонами в конечном состоянии потенциально находятся в зоне экспериментального обнаружения на установках BESIII и LHCb. Имеет смысл более подробно проработать возможность регистрации подобных распадов на установках коллайдера NICA и на планируемых чарм-тау фабриках.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе даны предсказания (9) и (10) для парциальных ширин и построены дифференциальные распределения (рис. 5–7) для распадов  $D_{(s)}^- \rightarrow \ell^+ \ell^- \bar{\nu}_{\ell'} \ell'^-$ .

**Благодарности.** Авторы искренне благодарят С. П. Баранова, Э. Э. Бооса, А. А. Бузину, В. Ю. Егорычева и Д. И. Мелихова за плодотворные обсуждения, которые способствовали улучшению настоящей работы.

**Финансирование.** Данная работа финансировалась за счет бюджетных средств физического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова и Научно-исследовательского института ядерной физики им. Д. В. Скобельцына Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

**Конфликт интересов.** Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aaij R. et al. (LHCb Collab.)*. Search for the Rare Decay  $B^+ \rightarrow \mu^+ \mu^- \mu^+ \nu_\mu$  // Eur. Phys. J. C. 2019. V. 79, No. 675. P. 1–12; arXiv:1812.06004 [hep-ex].
2. *Danilina A. V., Nikitin N. V.* Four-Leptonic Decays of Charged and Neutral  $B$  Mesons within the Standard Model // Phys. At. Nucl. 2018. V. 81, No. 3. P. 347–359.
3. *Danilina A. V., Nikitin N. V.* Differential Distributions in Rare Four-Leptonic  $B$ -Decays // Eur. Phys. J. Web Conf. 2018. V. 191. 02011.
4. *Danilina A. V., Nikitin N. V., Toms K. S.* Decays of Charged  $B$ -Mesons into Three Charged Leptons and a Neutrino // Phys. Rev. D. 2020. V. 101. 096007; arXiv:1911.03670 [hep-ph].
5. *Beneke M., Boer P., Rigatos P., Vos K. K.* QCD Factorization of the Four-Lepton Decay  $B^- \rightarrow \ell \bar{\nu}_\ell \ell^{(\prime)} \bar{\ell}^{(\prime)}$  // Eur. Phys. J. C. 2021. V. 81. P. 638; arXiv:2102.10060 [hep-ph].
6. *Bharucha A., Kindra B., Mahajan N.* Probing the Structure of the  $B$  Meson with  $B \rightarrow \ell \ell' \nu$ . arXiv:2102.03193 [hep-ph]. 2021.
7. *Ivanov M., Melikhov D.* Theoretical Analysis of the Leptonic Decays  $B \rightarrow \ell \ell' \bar{\nu}_\ell$  // Phys. Rev. D. 2022. V. 105. 014028; arXiv:2204.02792 [hep-ph]; Erratum // Phys. Rev. D. 2022. V. 106. 119901; arXiv:2107.07247 [hep-ph].
8. *Ivanov M., Melikhov D.* Theoretical Analysis of the Leptonic Decays  $B \rightarrow \ell \ell' \bar{\nu}_\ell$ . Identical Leptons in the Final State // Phys. Rev. D. 2022. V. 105. 094038; arXiv:2204.02792 [hep-ph].
9. *Wang C., Wang Yu-M., Wei Y.-B.* QCD Factorization for the Four-Body Leptonic  $B$ -Meson Decays // J. High Energy Phys. 2022. V. 2202. P. 141; arXiv:2111.11811 [hep-ph].
10. *Kurten S., Zanke M., Kubis B., van Dyk D.* Dispersion Relations for  $B^- \rightarrow \ell - \bar{\nu}_\ell \ell' - \ell'^+$  Form Factors // Phys. Rev. D. 2023. V. 107. 053006; arXiv:2210.09832 [hep-ph].
11. *Danilina A. V., Nikitin N. V.* The Rare  $D_s$ -Mesons' Decays into Three Charged Leptons and Neutrinos in the Framework of Standard Model // Phys. At. Nucl. 2024. V. 87, No. 5.
12. *Workman R. L. et al. (PDG Collab.)*. Review of Particle Physics // Prog. Theor. Exp. Phys. 2022. V. 2022. 083C01.
13. *Ablikim M. et al. (BESIII Collab.)*. Search for the Decay  $D_s^+ \rightarrow \gamma e^+ \nu_e$  // Phys. Rev. D. 2019. V. 99. 072002; arXiv:1902.03351 [hep-ex].
14. *Melikhov D., Stech B.* Weak Form-Factors for Heavy Meson Decays: An Update // Phys. Rev. D. 2000. V. 62. 014006; arXiv:0001113 [hep-ph].
15. *Melikhov D., Nikitin N., Toms K.* Rare Radiative Leptonic Decays  $B_{(d,s)} \rightarrow \ell^+ \ell^- \gamma$  // Phys. At. Nucl. 2005. V. 68, No. 11. P. 1842–1850.
16. *Danilina A. V., Nikitin N. V.* Description of the Four-Particle Decays  $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \mu^+ \mu^- e^+ e^-$  on the Basis of the Standard Model // Phys. At. Nucl. 2024. V. 87, No. 3. P. 274–296.
17. The Development Page for the EvtGen Project. <https://evtgen.hepforge.org/>.