

## **ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ ИНТЕГРАЛЬНО-ОПТИЧЕСКОЙ ЛИНЗЫ ЛЮНЕБЕРГА В НУЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ**

*А. Л. Севастьянов*<sup>1</sup>

Российский университет дружбы народов, Москва

В качестве метода исследования интегрально-оптического многослойного волновода, удовлетворяющего условию плавного изменения профиля исследуемой трехмерной структуры, использован асимптотический метод. Аналитически описаны трехмерные поля плавно деформирующихся мод четырехслойного волновода. Получена явная зависимость вкладов первого порядка малости в амплитуды электрического и магнитного полей квазिवолноводных мод. Представлен канонический для асимптотического метода вид квазиволновых уравнений, описывающих распространение квази-ТЕ и квази-ТМ мод в плавно-нерегулярной части трехмерного четырехслойного интегрально-оптического волновода. С помощью теории возмущений и метода связанных волн в явном виде получены сдвиги комплексных постоянных распространения для квази-ТЕ и квази-ТМ мод. Разработанная теория применима для анализа аналогичных структур из диэлектрических, магнитных и метаматериалов в достаточно широком диапазоне электромагнитных длин волн.

As a method of research of an integrated optical multilayer waveguide, satisfying the condition of smooth modification of the shape of the studied three-dimensional structure, an asymptotic method is used. Three-dimensional fields of smoothly deforming modes of the integrated optical waveguide are described analytically. An evident dependence of the contributions of the first order of smallness in the amplitudes of the electrical and magnetic fields of the quasi-waveguide modes is obtained. The canonical type of the equations describing propagation of quasi-TE and quasi-TM modes in the smoothly irregular part of a four-layer integrated optical waveguide is represented for an asymptotic method. With the help of the method of coupled waves and perturbation theory method, the shifts of complex propagation constants for quasi-TE and quasi-TM modes are obtained in an explicit form. The elaborated theory is applicable for the analysis of similar structures of dielectric, magnetic materials.

PACS: 42.65.Wi

### **ВВЕДЕНИЕ**

При распространении собственных мод в плавно-нерегулярных волноводах возможен обмен энергией как между различными направляемыми модами, так и между направляемыми и различными излучательными модами. Тонкопленочная волноводная линза Люнеберга является примером плавно-нерегулярной интегрально-оптической структуры. Задачу синтеза тонкопленочной волноводной линзы Люнеберга Саутвелл [1] решил с

---

<sup>1</sup>E-mail: [alsevastianov@sci.pfu.edu.ru](mailto:alsevastianov@sci.pfu.edu.ru)

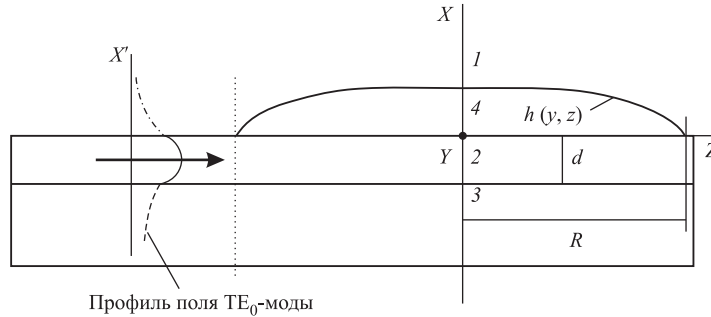


Рис. 1. Поперечное сечение исследуемой интегральной структуры, образованной слоями 1–4. Интегральный волновод образован средами 1, 2, 3. 1 — обрамляющая среда или покровный слой (воздух) с показателем преломления  $n_c$ ; 2 — волноводный слой (регулярная часть интегральной структуры) с показателем преломления  $n_f$ ; 3 — подложка с показателем преломления  $n_s$ ; 4 — тонкопленочная волноводная линза Люнеберга (нерегулярная часть интегральной структуры) с показателем преломления  $n_l$ ;  $R$  — радиус-апертура линзы;  $d$  — толщина регулярной части волноводной интегральной структуры;  $x = h(y, z)$  — граница раздела волноводного слоя 4 и воздуха 1

использованием горизонтальных граничных условий в точках наклона границ (рис. 1). Правильные тангенциальные граничные условия учитывают локальные наклоны границы и соответствующее изменение эффективных оптических характеристик. Эти условия отличаются от горизонтальных условий регулярной части на малую величину  $\delta$ , входящую в условия применимости метода адиабатических мод [2–4]  $\delta = \max |\nabla_{y, z} \beta| (k_0 \beta^2)^{-1}$ , которая для тонкопленочной волноводной линзы Люнеберга удовлетворяет оценке  $\delta \leq 10^{-5}$ . В качестве метода решения сформулированной электродинамической задачи, удовлетворяющего условию плавного изменения профиля исследуемой интегрально-оптической структуры, в работах [2, 3] использован асимптотический метод.

В работе [4] получены дифференциальные выражения для поперечных компонент поля  $E_x, E_y, H_x, H_y$  через  $E_z, H_z$  и уравнения второго порядка для продольных компонент поля  $E_z, H_z$ . Там же методом разложения по малому параметру  $\delta$  получены уравнения для продольных компонент поля  $E_z, H_z$  соответствующих мод в нулевом порядке по  $\delta$ . Из них получены общие решения для  $E_z, H_z$ , а также выражения для  $E_y, H_x$  и  $E_x, H_y$  в нулевом по  $\delta$  порядке.

Дисперсионное соотношение в нулевом по  $\delta$  приближении является нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка в частных производных относительно  $h(y, z)$  и алгебраическим уравнением относительно распределения коэффициента замедления  $\beta^{(0)}(y, z)$ , для решения которого в численном виде нужно привлекать соответствующие алгоритмы. В случае регулярных волноводов выполняются равенства  $\partial h / \partial y \equiv 0, \partial h / \partial z \equiv 0$ , с учетом чего дисперсионное соотношение становится алгебраическим уравнением относительно  $h, \beta$ , а вся модель адиабатических мод полностью совпадает с моделью регулярного волновода в продольных компонентах.

Напомним [5–7], что решения уравнений Максвелла, распространяющиеся вдоль регулярного диэлектрического волновода, ищем в виде

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x) \exp \{i(\omega t - k_0 \beta z)\}, \quad \mathbf{H}(x, y, z, t) = \mathbf{H}(x) \exp \{i(\omega t - k_0 \beta z)\}.$$

Представим, следуя [7], трехмерные векторные поля электрической и магнитной напряженности в виде суммы продольной и поперечной компонент. Если расписать это разложение в координатном виде, то вышеприведенные системы уравнений примут вид: для ТМ-мод

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_z}{dx^2} + k_0^2(\varepsilon\mu - \beta^2)E_z = 0, \quad H_z = 0, \quad E_x = -\left(\frac{i\beta k_0}{\chi^2}\right) \frac{dE_z}{dx}, \\ E_y = 0, \quad H_y = -\left(\frac{ik_0\varepsilon}{\chi^2}\right) \frac{dE_z}{dx}, \quad H_x = 0 \end{aligned}$$

и для ТЕ-мод

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H_z}{dx^2} + k_0^2(\varepsilon\mu - \beta^2)H_z = 0, \quad E_z = 0, \quad H_x = -\left(\frac{i\beta k_0}{\chi^2}\right) \frac{dH_z}{dx}, \\ H_y = 0, \quad E_y = -\left(\frac{ik_0\mu}{\chi^2}\right) \frac{dH_z}{dx}, \quad E_x = 0. \end{aligned}$$

Введем полезные обозначения  $\gamma_c = k_0\sqrt{\beta^2 - n_c^2}$ ,  $\gamma_s = k_0\sqrt{\beta^2 - n_s^2}$ . Поля рассматриваются для значений  $\beta$  в следующей области  $n_c < n_s < \beta < n_l$ , при этом если  $\beta \leq n_f$ , то  $\chi_f = k_0\sqrt{n_f^2 - \beta^2}$ , а если  $\beta \geq n_f$ , то  $\gamma_f = k_0\sqrt{\beta^2 - n_f^2}$ , кроме того  $\chi_l = k_0\sqrt{n_l^2 - \beta^2}$ . Поле  $E_z$  в каждом интервале постоянного значения  $\varepsilon$  имеет вид:  $E_s = A_s \exp(\gamma_s x)$ ,  $E_f = A_f^+ \exp(i\chi_f x) + A_f^- \exp(-i\chi_f x)$  при  $\beta \leq n_f$ ,  $E_f = A_f^+ \exp(\gamma_f x) + A_f^- \exp(-\gamma_f x)$  при  $\beta \geq n_f$ ,  $E_l = A_l^+ \exp(i\chi_l x) + A_l^- \exp(-i\chi_l x)$ ,  $E_c = A_c \exp(-\gamma_c x)$ . Поле  $H_z$  в каждом интервале постоянного значения  $\varepsilon$  имеет вид:  $H_s = B_s \exp(\gamma_s x)$ ,  $H_f = B_f^+ \exp(i\chi_f x) + B_f^- \exp(-i\chi_f x)$  при  $\beta \leq n_f$ ,  $H_f = B_f^+ \exp(\gamma_f x) + B_f^- \exp(-\gamma_f x)$  при  $\beta \geq n_f$ ,  $H_l = B_l^+ \exp(i\chi_l x) + B_l^- \exp(-i\chi_l x)$ ,  $H_c = B_c \exp(-\gamma_c x)$ . Тогда для поперечных компонент поля согласно выражениям  $H_y = -\left(\frac{ik_0\varepsilon}{\chi^2}\right) \frac{dE_z}{dx}$  и  $E_y = -\left(\frac{ik_0\mu}{\chi^2}\right) \frac{dH_z}{dx}$  получим соответствующие выражения.

## 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛЕЙ В РЕГУЛЯРНОМ ВОЛНОВОДЕ

Во введении мы получили решения ОДУ с постоянными коэффициентами, описывающие напряженности электромагнитного поля ТМ- и ТЕ-мод в регулярных многослойных волноводах. Эти напряженности записаны в виде общих решений ОДУ с неопределенными амплитудными коэффициентами  $A_j$  и  $B_j$ . Решение электродинамической задачи описания распространения поляризованного монохроматического света во всем многослойном диэлектрическом волноводе, состоящем из нескольких слоев, является частным решением ОДУ в каждом из слоев и удовлетворяет тангенциальным граничным условиям на границах раздела регулярных горизонтальных слоев, т.е. для компонент  $E_z$  и  $H_y$  для ТМ-мод и для компонент  $H_z$  и  $E_y$  для ТЕ-мод. Пусть границами раздела являются горизонтальные плоскости, пересекающие ось  $Ox$  в точке  $x = a_1$  для границы между подложкой и волноводным слоем и в точке  $x = a_2$  для границы между волноводным слоем и покровным слоем в случае трехслойного волновода. В случае четырехслойного волновода в точке  $x = a_2$  проходит граница между первым и вторым волноводными слоями,

а граница между вторым волноводным слоем и покрывным слоем проходит через точку  $x = a_3$ . Полное решение получается при разрешении системы условий совместности общих решений в слоях, т. е. системы тангенциальных граничных условий на границах раздела слоев.

**1.1. Граничные условия.** Для ТЕ-моды тангенциальные компоненты  $E_z \equiv 0$  и  $H_y \equiv 0$ , для нетривиальных компонент  $H_z$  и  $E_y$  на границе  $x = a_1$  между подложкой и волноводным слоем выполняются граничные условия

$$\begin{aligned} H_{zs}(a_1) = H_{zf}(a_1) &\Leftrightarrow B_s \exp(\gamma_s a_1) = B_f^+ \exp(i\chi_f a_1) + B_f^- \exp(-i\chi_f a_1), \\ E_{ys}(a_1) = E_{yf}(a_1) &\Leftrightarrow \frac{ik_0}{\gamma_s} B_s \exp(\gamma_s a_1) = \frac{k_0}{\chi_f} (B_f^+ \exp(i\chi_f a_1) - B_f^- \exp(-i\chi_f a_1)). \end{aligned}$$

На границе  $x = a_2$  между первым и вторым волноводными слоями выполняются граничные условия

$$\begin{aligned} H_{zf}(a_2) = H_{zl}(a_2) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow B_f^+ \exp(i\chi_f a_2) + B_f^- \exp(-i\chi_f a_2) = B_l^+ \exp(i\chi_l a_2) + B_l^- \exp(-i\chi_l a_2), \\ E_{yf}(a_2) = E_{yl}(a_2) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{k_0}{\chi_f} (B_f^+ \exp(i\chi_f a_2) - B_f^- \exp(-i\chi_f a_2)) = \frac{k_0}{\chi_l} (B_l^+ \exp(i\chi_l a_2) - B_l^- \exp(-i\chi_l a_2)). \end{aligned}$$

На границе  $x = a_3$  между вторым волноводным слоем и покрывным слоем выполняются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} H_{zl}(a_3) = H_{zc}(a_3) &\Leftrightarrow B_l^+ \exp(i\chi_l a_3) + B_l^- \exp(-i\chi_l a_3) = B_c \exp(-\gamma_c a_3), \\ E_{yl}(a_3) = E_{yc}(a_3) &\Leftrightarrow \frac{k_0}{\chi_l} (B_l^+ \exp(i\chi_l a_3) - B_l^- \exp(-i\chi_l a_3)) = -\frac{ik_0}{\gamma_c} B_c \exp(-\gamma_c a_3). \end{aligned}$$

Для ТМ-моды тангенциальные компоненты  $H_z \equiv 0$  и  $E_y \equiv 0$ , для нетривиальных компонент  $E_z$  и  $H_y$  на границе  $x = a_1$  между подложкой и волноводным слоем выполняются граничные условия

$$\begin{aligned} E_{zs}(a_1) = E_{zf}(a_1) &\Leftrightarrow A_s \exp(\gamma_s a_1) = A_f^+ \exp(i\chi_f a_1) + A_f^- \exp(-i\chi_f a_1), \\ H_{ys}(a_1) = H_{yf}(a_1) &\Leftrightarrow \frac{ik_0 \varepsilon_s}{\gamma_s} A_s \exp(\gamma_s a_1) = \frac{k_0 \varepsilon_f}{\chi_f} (A_f^+ \exp(i\chi_f a_1) - A_f^- \exp(-i\chi_f a_1)). \end{aligned}$$

На границе  $x = a_2$  между первым и вторым волноводными слоями выполняются граничные условия

$$\begin{aligned} E_{zf}(a_2) = E_{zl}(a_2) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A_f^+ \exp(i\chi_f a_2) + A_f^- \exp(-i\chi_f a_2) = A_l^+ \exp(i\chi_l a_2) + A_l^- \exp(-i\chi_l a_2), \\ H_{yf}(a_2) = H_{yl}(a_2) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{k_0 \varepsilon_f}{\chi_f} (A_f^+ \exp(i\chi_f a_2) - A_f^- \exp(-i\chi_f a_2)) = \frac{k_0 \varepsilon_l}{\chi_l} (A_l^+ \exp(i\chi_l a_2) - A_l^- \exp(-i\chi_l a_2)). \end{aligned}$$

На границе  $x = a_3$  между вторым волноводным слоем и покровным слоем выполняются следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} E_{zl}(a_3) = E_{zc}(a_3) &\Leftrightarrow A_l^+ \exp(i\chi_l a_3) + A_l^- \exp(-i\chi_l a_3) = A_c \exp(-\gamma_c a_3), \\ H_{yl}(a_3) = H_{yc}(a_3) &\Leftrightarrow \frac{k_0 \varepsilon_l}{\chi_l} (A_l^+ \exp(i\chi_l a_3) - A_l^- \exp(-i\chi_l a_3)) = -\frac{ik_0 \varepsilon_c}{\gamma_c} A_c \exp(-\gamma_c a_3). \end{aligned}$$

**1.2. Решение однородных систем линейных алгебраических уравнений для ТЕ- и ТМ-мод.** В четырехслойном волноводе граничные условия для ТЕ-моды образуют однородную систему шести линейных алгебраических уравнений для шести неопределенных амплитудных коэффициентов  $B_s, B_f^\pm, B_l^\pm, B_c$ :

$$\hat{M}_{\text{ТЕ}}^6(\beta) \mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (1)$$

При этом матричные элементы зависят от коэффициента фазового замедления  $\beta$ . Система (1) разрешима при условии

$$\det(\hat{M}_{\text{ТЕ}}^6(\beta)) = 0. \quad (2)$$

Граничные условия для ТМ-моды образуют однородную систему шести линейных алгебраических уравнений для шести неопределенных амплитудных коэффициентов  $A_s, A_f^\pm, A_l^\pm, A_c$ :

$$\hat{M}_{\text{ТМ}}^6(\beta) \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (3)$$

При этом матричные элементы зависят от коэффициента фазового замедления  $\beta$ . Система (3) разрешима при условии

$$\det(\hat{M}_{\text{ТМ}}^6(\beta)) = 0. \quad (4)$$

Трансцендентное алгебраическое уравнение (2) допускает дискретное множество корней  $\tilde{\beta}_1^E, \tilde{\beta}_2^E, \dots, \tilde{\beta}_j^E, \dots$  при фиксированных значениях толщин первого волноводного слоя  $d = a_2 - a_1$  и второго волноводного слоя  $h = a_3 - a_2$ . Трансцендентное алгебраическое уравнение (4) допускает дискретное множество корней  $\tilde{\beta}_1^H, \tilde{\beta}_2^H, \dots, \tilde{\beta}_j^H, \dots$  при фиксированных значениях толщин первого волноводного слоя  $d = a_2 - a_1$  и второго волноводного слоя  $h = a_3 - a_2$ . При плавном изменении толщин основного  $d = a_2 - a_1$  и дополнительного  $h = a_3 - a_2$  волноводных слоев плавно изменяются соответствующие решения  $\tilde{\beta}_j^E(d, h)$  и  $\tilde{\beta}_j^H(d, h)$ . Эти плавные зависимости являются дисперсионными соотношениями, у которых существуют толщины отсечек  $\tilde{d}_{\text{от}}^E$  и  $\tilde{d}_{\text{от}}^H$ .

После вычисления  $\beta^{(0)}(y, z)$  выражения для параметров полей в разных областях постоянства диэлектрической проницаемости получают конкретные численные значения. Однако неопределенные амплитудные множители пока не получили своих численных значений. Указанные амплитуды удовлетворяют однородной системе линейных алгебраических уравнений. Для решения однородной СЛАУ воспользуемся методом точной штрафной функции [8] и методом тихоновской регуляризации [9].

Для решения однородной СЛАУ использован метод регуляризирующего функционала А. Н. Тихонова

$$|\hat{M}_{\text{ТМ}}^6(\beta) \mathbf{A}|^2 + |\mathbf{A} - \mathbf{A}_0|^2 \rightarrow \min, \quad |\hat{M}_{\text{ТЕ}}^6(\beta) \mathbf{B}|^2 + |\mathbf{B} - \mathbf{B}_0|^2 \rightarrow \min.$$

Для неизвестной мощности входящего излучения применен метод точной штрафной функции

$$|\hat{M}_{\text{TM}}^6(\beta)\mathbf{A}|^2 + (|\mathbf{A}| - 1)^2 \rightarrow \min, \quad |\hat{M}_{\text{TE}}^6(\beta)\mathbf{B}|^2 + (|\mathbf{B}| - 1)^2 \rightarrow \min.$$

Метод тихоновской регуляризации позволяет получать устойчивые решения. В свою очередь, метод точной штрафной функции позволяет получать решение, нормированное на мощность входящего в волновод излучения. Для того чтобы получить устойчивое нормированное решение, на основе указанных методов был составлен следующий функционал

$$\begin{aligned} |\hat{M}_{\text{TM}}^6(\beta)\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{A} - \mathbf{A}_0|^2 + (|\mathbf{A}| - 1)^2 &\rightarrow \min, \\ |\hat{M}_{\text{TE}}^6(\beta)\mathbf{B}|^2 + |\mathbf{B} - \mathbf{B}_0|^2 + (|\mathbf{B}| - 1)^2 &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

В результате компьютерной реализации данного метода приближенно вычисляются конкретные численные значения величин  $\{A_j\}$  и  $\{B_j\}$ . Таким образом, все компоненты вертикального распределения квазिवолноводных мод  $\mathbf{E}(x; y, z)$  и  $\mathbf{H}(x; y, z)$  вычислены в нулевом по  $\delta$  приближении при любых значениях горизонтальных координат  $(y, z)$  с заданным распределением (профилем) толщины  $h(y, z)$  и любых значениях вертикальной координаты  $x$ .

Отметим, что в области, где толщина линзы Люнеберга меньше критического значения, наблюдается некоторая необычная деформация как дисперсионных зависимостей, так и структуры мод, требующая использования первого приближения для их корректного анализа.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

На рис. 2 приведены рассчитанные зависимости коэффициентов фазового замедления  $\beta$  ТМ<sub>0</sub>-моды от толщины волноводных слоев четырехслойной интегрально-оптической структуры, состоящей из трехслойного регулярного планарного волновода и четырехслойного плавно-нерегулярного волновода.

На дисперсионных зависимостях  $\beta = \beta(d/\lambda; h/\lambda)$  по вертикали отложены значения коэффициента фазового замедления  $\beta$ , а по горизонтали — толщины волноводных

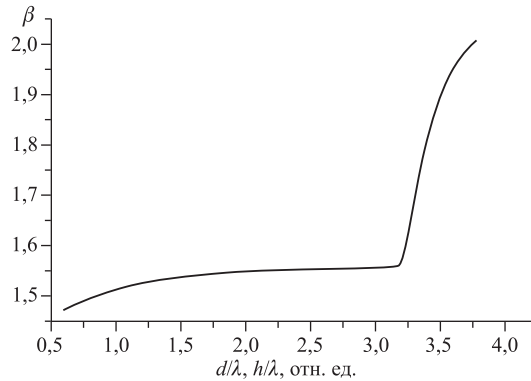


Рис. 2. Дисперсионные зависимости для ТМ<sub>0</sub>-моды интегрально-оптической структуры

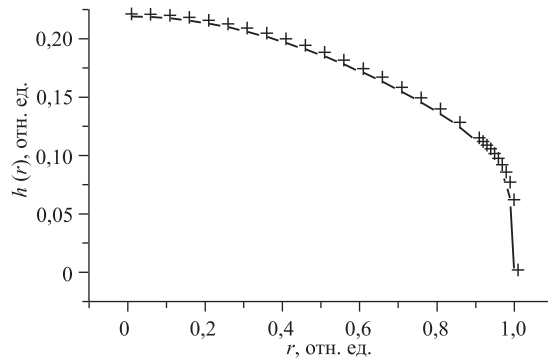


Рис. 3. Профили синтезированных толщин обобщенных интегрально-оптических линз Люнеберга. Фокусное расстояние линзы  $F = 5$ . Кривая — наш расчет; крестики — данные Саутвелла

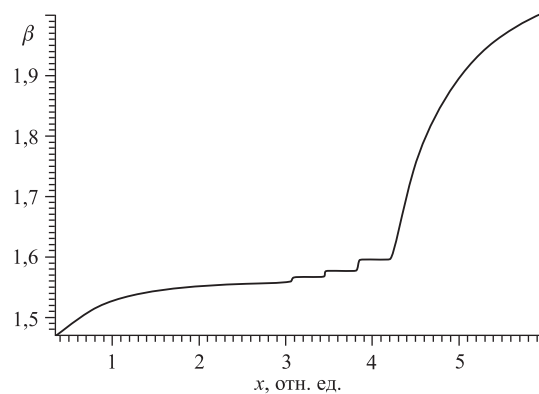


Рис. 4. Дисперсионная зависимость для ТЕ<sub>3</sub>-моды интегрально-оптической структуры. Параметры структуры:  $d = 0,35$ ,  $h = 6$  (в единицах  $\lambda$ )

слоев в относительных единицах ( $d/\lambda$  и  $h/\lambda$ ), где  $\lambda = 0,9$  мкм. Таким образом, левая часть рисунков (примерно от 0 до 3,0) является дисперсионной зависимостью трехслойного регулярного волновода, а правая (от 3,0 до 3,8) — дисперсионной зависимостью четырехслойного плавно-нерегулярного волновода, включающего линзу Люнеберга. Аналогичные дисперсионные зависимости были получены автором и для других типов мод. На рис. 3 приведен результат решения задачи синтеза интегрально-оптической обобщенной ( $F > 1$ ) планарной линзы Люнеберга — при изменении нормированного радиуса  $r$  линзы от 0 до 1 был найден вид распределения профиля  $h(r)$  для нормированного фокусного расстояния  $F = 5$  (в единицах  $\lambda$ ). Данная линза описывается радиальным распределением фазового замедления  $\beta(r, F)$  по  $r \in [0, 1]$  в безразмерных единицах  $r = R/R_{\max}$ , где  $R_{\max}$  — радиус линзы с заданным фокусным расстоянием (в тех же безразмерных единицах). Как видно из рис. 3, в нулевом приближении практически нет расхождений между нашими данными и данными Саутвелла. Однако наше решение обладает существенно более высокой точностью, что особенно важно при синтезе

обобщенных линз Люнеберга, требующих учета краевых эффектов, которые оказывают влияние, например, на фурье-преобразование, совершаемое с помощью линзы.

Приведем пример дисперсионной зависимости в «закритической» области, вычисленной в нулевом приближении (рис. 4).

Такое необычное поведение дисперсионных зависимостей и полей может быть объяснено недостаточностью нулевого приближения для описания вытекающих мод.

Полученные нами результаты численного моделирования демонстрируют высокоточное совпадение нулевого приближения описываемого метода с результатами Саутвелла.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Southwell W. H. // JOSA. 1977. V. 67. 1004; P. 1010.
2. Севастьянов Л. А., Егоров А. А. // Оптика и спектроскопия. 2008. Т. 105. С. 632.
3. Egorov A. A. et al. // Proc. of the «ICO Topical Meeting on Optoinformatics/Information Photonics», St. Petersburg, Russia, Sept. 15–18, 2008. P. 231.
4. Егоров А. А., Севастьянов Л. А. // Квантовая электроника. 2009. Т. 39. С. 566.
5. Дерюгин Л. Н., Марчук А. Н., Сотин В. Е. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1967. Т. 10. С. 134.
6. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир, 1984.
7. Семенов Н. А. Техническая электродинамика. М.: Связь, 1973.
8. Lovetsky K. P., Sevastianov L. A., Tretiakov N. P. // J. Comp. Methods Sci. Eng. 2002. V. 2, No. 1–2. P. 189–194.
9. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1974.