

## ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОСЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

*М. И. Высоцкий*<sup>1</sup>

Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

В четырех лекциях излагается теория электрослабых взаимодействий.

Theory of electroweak interactions is given in 4 lectures.

PACS: 14.80.Bn; 12.15.-y; 14.70.-e; 11.10.-z; 11.15.-q; 11.55.-m

Содержание лекций будет понятно только после детальной проработки курса квантовой теории поля. На русском языке доступно большое количество прекрасных монографий как отечественных, так и переводных. Разумно выбрать какую-либо из приведенных в списке литературы книг в качестве основного учебника, используя остальные как справочный материал.

Что касается собственно предмета лекций, то в качестве учебника можно рекомендовать книгу [7], а также две последние главы (20 и 21) из монографии [6]. «Обзор свойств элементарных частиц» [8] содержит детальную справочную информацию и обзорные статьи по физике частиц и смежным вопросам.

### ЛЕКЦИЯ 1. ЭФФЕКТ ГОЛДСТОУНА, ЭФФЕКТ ХИГГСА

Неперенормируемость 4-фермионного взаимодействия, теория массивного векторного бозона — опять неперенормируемость, эффект Голдстоуна — спонтанное «нарушение» симметрии, решаемые примеры:  $U(1)$ ,  $O(3)$ ,  $SU(2)$ .

Локальная  $U(1)$ , эффект Хиггса, бозон Хиггса, унитарная калибровка, калибровка Ландау,  $R_\xi$ -калибровки.

Надежно установлено, что локальное 4-фермионное взаимодействие хорошо описывает слабые взаимодействия лептонов и кварков. Взаимодействие имеет вид произведения ток×ток; фермионный ток дается разностью векторного и аксиального токов:  $(V - A) \times (V - A)$ . Сила (вернее, слабость) взаимодействия обусловлена малостью фермиевской константы  $G_F$ . Приведем 4-фермионный лагранжиан, ответственный за распад мюона:

$$\mathcal{L}_W = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\mu \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \mu \bar{e} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_e, \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>E-mail: vysotsky@itep.ru

где  $G_F \approx 10^{-5}/m_p^2 \approx (1/300 \text{ ГэВ})^2$ . Соответствующая фейнмановская диаграмма показана на рис. 1. Аналогичное (1) взаимодействие с универсальной константой  $G_F$  описывает целый ряд наблюдавшихся процессов с лептонами ( $\nu_\mu e \rightarrow \mu \nu_e$ -рассеяние, распады  $\tau \rightarrow \nu_\tau \mu \bar{\nu}_\mu$  и  $\tau \rightarrow \nu_\tau e \bar{\nu}_e$ ) и кварками ( $\beta$ -распад нейтрона, распады  $\pi$ - и  $K$ -мезонов и т.д.). Тем не менее оно не может рассматриваться как фундаментальное: 4-фермионная теория неперенормируема. Проще всего это увидеть из анализа размерностей. Константы связи перенормируемых теорий либо безразмерны (заряд в КЭД), либо имеют размерность положительной степени энергии. Если константа связи имеет размерность отрицательной степени энергии, то ряд теории возмущений по степеням константы связи является одновременно рядом по положительным степеням энергии. Вычисление членов ряда теории возмущений требует суммирования по промежуточным состояниям, что сводится к интегрированию по импульсам виртуальных частиц. Из соображений размерности следует, что ряд по  $G_F$  окажется рядом по  $(G_F \Lambda^2)$ , где  $\Lambda$  — ультрафиолетовое обрезание (импульсами внешних частиц при анализе ультрафиолетового поведения интегралов можно пренебречь). Таким образом, любая амплитуда 4-фермионной теории оказывается расходящейся, начиная с некоторого (может быть достаточно высокого) члена теории возмущений, т.е. не может быть вычислена (сравните со случаем КЭД, где расходится масса электрона и его заряд, остальные же амплитуды конечны и вычислимы, что и означает перенормируемость теории).

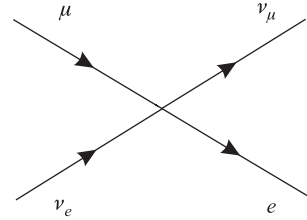


Рис. 1. Распад мюона в локальной 4-фермионной теории

Итак, древесные амплитуды, вычисляемые по лагранжианам типа (1), хорошо описывают экспериментальные данные, в то время как поправки к ним невычислимы — последовательная теория отсутствует. Поправки к амплитудам сравниваются с древесными выражениями при обрезании  $\Lambda \approx 1/\sqrt{G_F} \approx 300 \text{ ГэВ}$ , поэтому успешное описание опытных данных древесными формулами объяснимо, если теория при меньших энергиях видоизменяется, превращаясь в перенормируемую. Поучительно посмотреть на зависимость сечения рассеяния  $\nu_e e \rightarrow \nu_e e$  от энергии.

В 4-фермионной теории сечение упругого  $\nu_e e$ -рассеяния при высокой энергии равно

$$\sigma_{\nu_e e} = \frac{G_F^2 s}{\pi}, \tag{2}$$

где  $s = (k_1 + p_1)^2$  — квадрат инвариантной энергии. В с.ц.и. дифференциальное сечение не зависит от угла рассеяния, поэтому рассеяние происходит только в состоянии с полным моментом ноль.

Согласно соотношению унитарности для рассеяния с моментом ноль имеем

$$\sigma_{\nu_e e} \leq \frac{4\pi}{s}, \tag{3}$$

и сечение (2) превосходит унитарный предел при  $\sqrt{s} > \sqrt{2\pi/G_F}$ , т.е. рассеивается больше частиц, чем падает, что, очевидно, нелепо. Опять-таки мы видим, что лагранжиан (1) может рассматриваться как эффективный низкоэнергетический, при высоких же энергиях теория должна меняться.

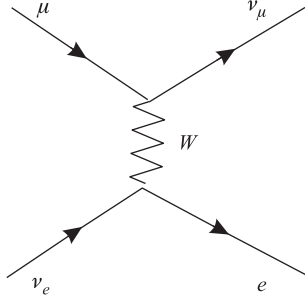


Рис. 2. Распад мюона в теории с промежуточным векторным бозоном

Рис. 2 сведется к диаграмме рис. 1 (так как пропагатор  $W$ -бозона может быть «стянут в точку»:  $1/(k^2 - M_W^2) \rightarrow 1/(-M_W^2)$ ), и мы получим «микроскопическую» теорию фермиевской константы:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{M_W^2}. \quad (5)$$

Требование  $g \leq 1$  приводит к верхнему ограничению на массу промежуточного бозона:  $M_W \leq 300$  ГэВ. В случае сильной связи ( $g \approx 1$ )  $M_W \approx 300$  ГэВ; если константа  $g$  порядка заряда электрона  $e = \sqrt{4\pi\alpha} \approx 0,3$ , то  $M_W \approx 100$  ГэВ. Совсем легким  $W$ -бозон быть не может, так как при характерных импульсах  $\sim 1$  ГэВ должна воспроизводиться четырехфермионная теория. С точки зрения теорий Великого объединения величина  $g$  порядка  $e$  представляется естественной, и экспериментальное значение  $M_W \approx 80$  ГэВ служит одним из аргументов в пользу этих теорий.

Итак, является ли теория с массивным промежуточным векторным бозоном перенормируемой? Свободный лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}M^2 A_\mu^2, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (6)$$

приводит к следующим уравнениям движения  $\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_\alpha} = \partial_\beta \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\beta A_\alpha}\right)$ :

$$\begin{aligned} M^2 A_\alpha &= \partial_\beta \left[ -\frac{1}{2}F_{\mu\nu} \frac{\delta F_{\mu\nu}}{\delta\partial_\beta A_\alpha} \right] = \partial_\beta \left[ -\frac{1}{2}F_{\mu\nu} (g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} - g_{\nu\beta} g_{\mu\alpha}) \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\beta (F_{\beta\alpha} - F_{\alpha\beta}) = -\partial_\beta F_{\beta\alpha}, \\ \partial_\beta \partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha \partial_\beta A_\beta + M^2 A_\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В импульсном представлении получим следующие уравнения движения и уравнения для функции Грина массивного векторного поля:

$$(k^2 - M^2)A_\alpha - k_\alpha k_\beta A_\beta = 0 \implies k_\alpha A_\alpha = 0, \quad (8)$$

$$[(k^2 - M^2)g_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta] G_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}. \quad (9)$$

Хорошо известный пример перенормируемой теории — квантовая электродинамика. Естественный путь приблизиться к КЭД — «расшить» взаимодействие ток  $\times$  ток, заменив его на обмен векторным бозоном:

$$\mathcal{L}_{W_\alpha} = g [\bar{\nu}_\mu \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \mu + \bar{\nu}_e \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) e] W_\alpha^-. \quad (4)$$

Константа  $g$  этого взаимодействия безразмерна, и обескуражившая до сих пор причина неперенормируемости слабых взаимодействий устранена. Каким образом из лагранжиана (4) может быть получено взаимодействие ток  $\times$  ток (1)? Для этого следует предположить, что промежуточный векторный бозон  $W_\alpha$  тяжелый. Тогда при энергиях много меньше его массы диаграмма рис. 2 сведется к диаграмме рис. 1 (так как пропагатор  $W$ -бозона может быть «стянут в точку»:

Окончательно для функции Грина получим

$$G_{\alpha\beta} = \frac{g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{M^2}}{k^2 - M^2}. \quad (10)$$

Ее полюс при  $k^2 = M^2$  означает правильность коэффициента  $1/2$  при массовом члене в (6). На массовой оболочке ( $k^2 = M^2$ ) числитель функции Грина поперечен ( $k_\alpha \left( g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{M^2} \right) = 0$ ), что отвечает условию на вектор поляризации массивного поля спина 1:  $k_\alpha A_\alpha = 0$  (последнее условие является обобщением на движущуюся частицу равенства нулю компоненты  $A_0$  в ее системе покоя).

Второй член в числителе формулы (10) таит в себе опасность: функция Грина массивного векторного поля не падает  $\sim 1/k^2$  при  $k^2 \rightarrow \infty$ , и счет степеней расходимости петлевых графиков опять-таки демонстрирует неперенормируемость теории. Если бы массивный векторный бозон взаимодействовал с сохраняющимся током,  $\partial_\alpha J_\alpha = 0$ , то вклад опасного члена в (10) занулялся бы, и мы бы имели последовательную перенормируемую квантовую теорию поля. Такой является КЭД с массивным фотоном. Но в случае слабых взаимодействий мы имеем аксиальные и недиагональные векторные токи, которые не сохраняются:

$$i\partial_\alpha \bar{\psi}_1 \gamma_\alpha \psi_2 = (m_2 - m_1) \bar{\psi}_1 \psi_2, \quad (11)$$

$$i\partial_\alpha \bar{\psi}_1 \gamma_\alpha \gamma_5 \psi_2 = -(m_2 + m_1) \bar{\psi}_1 \gamma_5 \psi_2. \quad (12)$$

Теория массивного векторного поля, взаимодействующего с несохраняющимися токами, неперенормируема. Нормированный на единицу вектор поляризации поля векторного бозона подчинен следующему условию:

$$k_\alpha e_\alpha = 0, \quad (13)$$

которое допускает три решения

$$e_\alpha^{(1)} = (0, 1, 0, 0), \quad e_\alpha^{(2)} = (0, 0, 1, 0), \quad e_\alpha^{(3)} = \left( \frac{|\vec{k}|}{M}, 0, 0, \frac{E}{M} \right), \quad (14)$$

где предположено, что частица летит вдоль третьей оси. Числитель функции Грина поля  $W_\alpha$  совпадает с матрицей плотности  $\rho_{\alpha\beta} = e_\alpha^i e_\beta^i$ . Первые два вектора поляризации те же, что у безмассового фотона. Сингулярное при больших импульсах поведение возникает от продольной поляризации  $e^{(3)}$ :

$$e_\alpha^{(3)} = \frac{k_\alpha}{M} - \frac{M}{E + |\vec{k}|} (1, 0, 0, -1). \quad (15)$$

Итак, лагранжиан (6) свободного массивного векторного поля приводит к неперенормируемой теории. Можно ли как-то еще получить массивное векторное поле, не вводя массовый член в исходный лагранжиан? Плодотворным примером является эффект Мейснера — вытеснение магнитного поля из сверхпроводника. Безмассовое в вакууме поле

фотона набирает в сверхпроводнике массу, что приводит к экспоненциальному затуханию магнитного поля в глубь сверхпроводника. Феноменологический лагранжиан Гинзбурга–Ландау, описывающий эффект Мейснера, включает наряду с полем фотона скалярный «параметр порядка»  $\varphi$ , ненулевое среднее значение которого в среде приводит к возникновению массы фотона.

Нетривиальные свойства вакуума не влияют на поведение амплитуд при высоких энергиях, поэтому изначально перенормируемая теория останется таковой. Вопрос о форме пропагатора векторного поля в теории указанного типа (называемой теорией со «спонтанно нарушенной симметрией») отложим до следующей лекции; сейчас же сосредоточимся на поле  $\varphi$ . Для того чтобы безмассовое векторное поле получило массу, оно должно смешаться с безмассовой частицей. Как обеспечить существование безмассовой скалярной частицы? Взаимодействие перенормирует затравочную массу, поэтому безмассовый скаляр выглядит чрезвычайно искусственным.

Эффект Голдстоуна позволяет получить безмассовые частицы естественным образом. В квантовой теории имеется два способа реализации симметрии.

1. Основное состояние имеет симметрию исходного лагранжиана. При этом возбуждения реализуют представления исходной группы симметрии. Так, в частности, реализуются симметрии в квантовой механике систем с конечным числом степеней свободы (например,  $O(3)$ -симметрия атома водорода). Такая реализация получила название реализации Вигнера–фон Неймана.

2. Основное состояние имеет меньшую симметрию, а «нарушенным» генераторам отвечают безмассовые скалярные частицы (голдстоуновские бозоны). «Нарушенная» симметрия сдвигает поле «своего» голдстоуна на константу — т. е. симметрия реализуется на безмассовых бозонах. Такая реализация называется реализацией Намбу–Голдстоуна.

Перейдем к рассмотрению простых решаемых моделей теории поля, в которых симметрия спонтанно нарушается.

1)  $U(1)$ . Имеется одно комплексное скалярное поле  $\phi(x)$ , описываемое следующим лагранжианом:

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - \frac{\lambda^2}{2} \left[ \phi^+ \phi - \frac{\eta^2}{2} \right]^2, \quad (16)$$

инвариантным относительно абелева унитарного преобразования  $\phi(x) = e^{i\lambda} \phi'(x)$ . Рассмотрим два возможных случая.

а)  $\eta^2 < 0$ . Зависимость  $V(|\phi|)$  показана на рис. 3, а. Имеется одно комплексное поле  $\phi$  с массой  $\lambda|\eta|/\sqrt{2}$ . Вакуумное среднее  $\phi$  равно нулю; в теории имеется нетривиальное взаимодействие.

б)  $\eta^2 > 0$ . Зависимость  $V(|\phi|)$  показана на рис. 3, б. Функция  $V(\phi_x, \phi_y)$  получается вращением графика рис. 3, б вокруг вертикальной оси. Полученная фигура напоминает доньшко бутылки или перевернутое сомбреро. Вместо одного минимума потенциала здесь имеется кольцо минимумов:  $|\phi| = \eta/\sqrt{2}$ , фаза  $\phi$  произвольна. Квантование следует проводить относительно какой-либо точки на этом кольце. Колебанию вдоль модуля  $\phi$  отвечает массивное скалярное поле; его масса определяется крутизной стенок. Движению вдоль фазы  $\phi$  отвечает безмассовое поле — голдстоуновский бозон.  $U(1)$ -симметрия в спектре масс частиц нарушена (при  $\eta^2 < 0$  имеется два вырожденных вещественных поля:  $\phi_x$  и  $\phi_y$ ); она реализуется на голдстоуновском бозоне. Происходит спонтанное нарушение симметрии. Итак, раскладываем  $\phi$  относительно вакуумного значения, которое выбираем

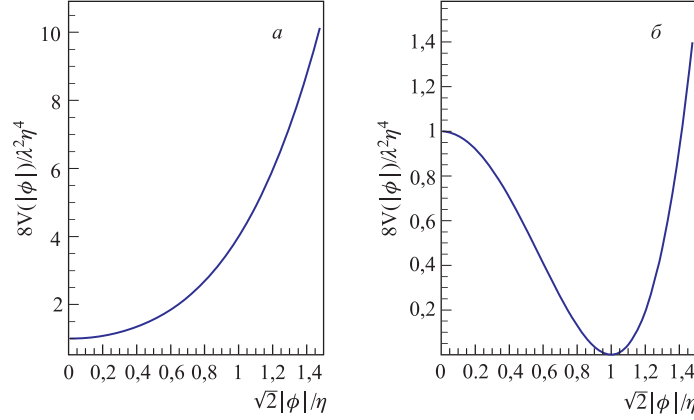


Рис. 3. Обычная (а) и приводящая к эффекту Голдстоуна (б) зависимости плотности потенциальной энергии от безразмерной величины  $\sqrt{2}|\phi|/\eta$

вещественным:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho(x) + \eta) e^{i\alpha(x)}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} |\partial_\mu \rho + i\partial_\mu \alpha (\eta + \rho)|^2 - \frac{\lambda^2}{8} (2\eta\rho + \rho^2)^2 = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho)^2 + \frac{1}{2} \eta^2 (\partial_\mu \alpha)^2 - \frac{\lambda^2 \eta^2}{2} \rho^2 + (\partial_\mu \alpha)^2 \left( \frac{\rho^2}{2} + \eta\rho \right) - \frac{\lambda^2}{8} (\rho^4 + 4\eta\rho^3). \end{aligned}$$

В теории имеется одна частица  $\rho$  с массой  $\lambda\eta$  и одна безмассовая частица — голдстоуновский бозон  $\alpha$ .  $U(1)$ -симметрия  $\alpha(x) = \alpha'(x) + \lambda$  проявляется в том, что масса  $\alpha$  равна нулю, а ее взаимодействие пропорционально импульсу. Рассмотренный пример иллюстрирует все характерные черты эффекта Голдстоуна.

В основе электрослабой теории лежит неабелева симметрия  $SU(2) \times U(1)$ , поэтому посмотрим на эффект Голдстоуна в неабелевом случае.

2)  $O(3)$  — простейшая неабелева группа. Рассмотрим вектор вещественных скалярных полей  $A_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , описываемых лагранжианом с той же характерной формой потенциальной энергии:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_i)^2 - \lambda^2 (A_i^2 - \eta^2)^2. \quad (18)$$

Лагранжиан обладает  $O(3)$ -симметрией. Спонтанное нарушение симметрии происходит при положительном  $\eta^2$ . Новый вакуум характеризуется вектором  $A_i^0$ ,  $|A_i^0| = \eta$ , имеющим произвольное направление в изопространстве. В теории остается  $O(2)$ -симметрия относительно вращений вокруг вектора  $A_i^0$ . Спектр масс теории состоит из пары голдстоуновских бозонов (если  $A_i^0$  смотрит вдоль третьей оси, то это поля  $A_1$  и  $A_2$  с нулевыми вакуумными средними) и одной массивной частицы. Голдстоуновских бозонов два, так как имеющая три генератора группа  $O(3)$  нарушилась до абелевой группы  $O(2)$ ,  $3-1=2$ .

Выбирая вакуумное среднее вдоль третьей оси, запишем

$$A_3(x) = \eta + \tilde{A}_3(x), \quad A_{1,2}(x) = \tilde{A}_{1,2}(x), \quad (19)$$

где тильдой обозначены квантовые поля. Подставляя разложение (19) в (18), получим лагранжиан теории с описанным выше спектром масс.

3) Спинорное представление группы  $SU(2)$ . Лагранжиан изодублета  $H$  имеет вид

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu H|^2 - \frac{\lambda^2}{2} \left[ H^+ H - \frac{\eta^2}{2} \right]^2. \quad (20)$$

Выбирая вакуумное среднее в виде

$$\langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (21)$$

и раскладывая поле  $H$  в окрестности вакуума

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_1(x) + iH_2(x) \\ \eta + H_3(x) + iH_4(x) \end{pmatrix}, \quad (22)$$

найдем, что в теории имеются три голдстоуновских поля  $H_1, H_2$  и  $H_4$ , а поле  $H_3$  имеет массу  $\lambda\eta$ . Три голдстоуновских бозона отвечают трем нарушенным генераторам группы  $SU(2)$ . На самом деле лагранжиан (20) имеет более широкую  $SU(2) \times U(1)$ -симметрию, где  $U(1)$  отвечает вращению всего спинора  $H$ . Вакуумное состояние (21) инвариантно относительно преобразования, генерируемого суммой  $T_3$ , и генератора  $U(1)$ -вращения, поэтому счет голдстоуновских бозонов происходит так:  $4 - 1 = 3$ . В электрослабой теории ненарушенная симметрия отвечает электродинамике, а три голдстоуновских бозона, смешиваясь с безмассовыми калибровочными полями, дают массы  $W^\pm$ - и  $Z$ -бозонам.

До сих пор мы рассматривали инвариантные относительно *глобальных* (не зависящих от координаты  $x_\mu$ ) непрерывных преобразований теории. Если минимум потенциальной энергии в таких теориях достигается при значении поля, не инвариантном относительно преобразований симметрии, то в теории возникают безмассовые скалярные поля — голдстоуновские бозоны. Посмотрим, что произойдет в вышеописанной ситуации, если исходная симметрия была локальной. Рассмотрим простейший пример — одно комплексное скалярное поле, инвариантное относительно *локального*  $U(1)$ -преобразования:

$$\phi(x) = e^{i\Lambda(x)} \phi'(x). \quad (23)$$

Для поддержания инвариантности кинетического члена поля  $\phi$  необходимо ввести векторное поле  $A_\mu$  со следующим законом преобразования:

$$A_\mu(x) = A'_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x). \quad (24)$$

Локально-инвариантное обобщение лагранжиана (16) имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = |(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi|^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{\lambda^2}{2} \left[ \phi^+ \phi - \frac{\eta^2}{2} \right]^2, \quad (25)$$

где  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  — калибровочно-инвариантный тензор векторного поля. При  $\eta^2 < 0$  мы имеем электродинамику массивного скалярного поля  $\phi$ . При  $\eta^2 > 0$  знак массы поля  $\phi$  меняется, поэтому точка  $\langle \phi \rangle = 0$  становится неустойчивой. Модуль вакуумного среднего поля  $\phi$  определяется формой потенциальной энергии; фаза — произвольна (положение вдоль донышка бутылки). Выберем ее равной нулю и разложим поле в окрестности вакуума:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + \rho(x) + i\varphi(x)). \quad (26)$$

Подставим это разложение в лагранжиан (25):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}|\partial_\mu\rho + i\partial_\mu\varphi - ieA_\mu\eta - ieA_\mu\rho + eA_\mu\varphi|^2 - \frac{\lambda^2}{8}[2\eta\rho + \rho^2 + \varphi^2]^2 = \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}e^2\eta^2 A_\mu^2 - e\eta A_\mu\partial_\mu\varphi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 - \frac{1}{2}\lambda^2\eta^2\rho^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \\ &\quad + eA_\mu\varphi\partial_\mu\rho + \frac{1}{2}e^2 A_\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{2}e^2 A_\mu^2\rho^2 + e^2\eta\rho A_\mu^2 - e\rho A_\mu\partial_\mu\varphi - \\ &\quad - \frac{\lambda^2}{2}\eta\rho(\rho^2 + \varphi^2) - \frac{\lambda^2}{8}(\rho^2 + \varphi^2)^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Перед тем как перейти к физике, описываемой полученным лагранжианом, вернемся к эффекту Голдстоуна. При  $A_\mu \equiv 0$  лагранжиан (27) описывает ту же систему, что и лагранжиан (17); голдстоуновский бозон теперь описывается полем  $\varphi$ . Полезно подумать, как при этом из лагранжиана (27) получается пропорциональность импульсу взаимодействия голдстоуновского бозона  $\varphi$ , которая явно следует из (18) для голдстоуновского бозона  $\alpha$ .

Займемся квадратичными по полям членами. Поле  $\rho$  описывает массивную частицу, которая называется бозоном Хиггса;  $m_\rho = \lambda\eta$ . Векторное поле  $A_\mu$  смешивается с голдстоуновским бозоном  $\varphi$  членом  $-e\eta A_\mu\partial_\mu\varphi$ , с которым нам предстоит разобраться. Простейший способ сделать это — совершить калибровочное преобразование

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi'(x) + \eta\Lambda(x), \\ A_\mu(x) &= A'_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x) \end{aligned} \quad (28)$$

со следующим параметром преобразования:

$$\Lambda(x) = \frac{\varphi(x)}{\eta}. \quad (29)$$

Новое поле  $\varphi'$  тождественно равно нулю, а поле  $\varphi(x)$  «поглощается» новым векторным полем:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e\eta}\partial_\mu\varphi(x), \quad (30)$$

образуя его продольную компоненту. В лагранжиане (27) остаются члены, не содержащие поля  $\varphi$ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}e^2\eta^2 A_\mu^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 - \frac{1}{2}\lambda^2\eta^2\rho^2 + \mathcal{L}_{\text{вз}}(A_\mu, \rho), \quad (31)$$



где мы опустили штрих у поля  $A_\mu$ . При таком выборе калибровки физические поля четко видны: векторное массивное поле  $A_\mu$ ,  $m_A = e\eta$ , и бозон Хиггса  $\rho$ . Поэтому эта калибровка получила название унитарной. Возникновение массы у векторного поля при отличном от нуля параметре порядка  $\phi$  — знаменитое свойство феноменологического лагранжиана Гинзбурга–Ландау, описывающего сверхпроводимость. В физике частиц это явление было (пере)открыто в 60-е годы и получило название эффекта Хиггса. Отметим, что число степеней свободы в нарушенной и ненарушенной фазах совпадает:  $2+2 = 3+1$ .

Переход к унитарной калибровке помогает разобраться в составе частиц нашей модели; для анализа перенормируемости теории эта калибровка нехороша. Если искать пропагатор векторного поля, отвечающий лагранжиану (31), то мы получим тот же пропагатор (10), что и в случае «жесткого» введения массы векторного поля, который имеет плохое поведение в области больших импульсов и приводит к неперенормируемости теории. Кажущаяся неперенормируемость теории с «мягким» введением массы калибровочного поля связана с сингулярным калибровочным преобразованием, обращающим в ноль поле  $\varphi'(x)$ . Перенормируемость таких теорий была доказана в начале 70-х годов, однако простые аргументы позволяли с самого начала надеяться, что удалось найти способ построения перенормируемой теории массивного векторного поля — теории слабого взаимодействия (Салам, 1968). Дело в том, что вопрос перенормируемости — это поведение теории при больших импульсах, в ультрафиолетовом пределе. Свойства вакуума — это поведение теории при малых импульсах, в инфракрасном пределе. Поэтому перенормируемость не должна зависеть от формы вакуума теории. Лагранжиан (25) при отрицательном  $\eta^2$  описывает электродинамику скалярного поля — хорошо известную перенормируемую теорию. При изменении знака  $\eta^2$  свойства вакуума кардинально меняются, но на поведении амплитуд при больших переданных импульсах это сказаться не должно — теория должна остаться перенормируемой.

От общих рассуждений вернемся к лагранжиану (25). Напомним, что для нахождения пропагатора фотона в квантовой электродинамике в лагранжиан приходится добавлять фиксирующий калибровку член

$$\mathcal{L}_\xi = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2, \quad (32)$$

после чего для пропагатора фотона находим

$$G_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu} - (1 - \xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2}. \quad (33)$$

Калибровочная инвариантность исходной теории приводит к сохранению тока, в силу чего амплитуды не зависят от второго члена в числителе пропагатора фотона и, значит, от  $\xi$ . Так как в пределе  $\xi \rightarrow \infty$  лагранжиан (32) переходит в исходный, пропагатор (33) позволяет вычислять амплитуды исходной теории — калибровочно-инвариантной квантовой электродинамики. Отметим несколько полезных калибровок:  $\xi = 1$  — калибровка Фейнмана, в которой пропагатор фотона имеет наиболее простой вид;  $\xi = 0$  — калибровка Ландау (в ней пропагатор фотона поперечен); калибровку с  $\xi = \infty$  следует назвать унитарной (она никогда не используется в КЭД, но именно в ней лагранжиан (32) приобретает свою первоначальную форму). Наш следующий шаг — это КЭД

в калибровке Ландау + скаляр в голдстоуновской ситуации, т. е. мы рассматриваем лагранжиан (25) с фиксирующей калибровку добавкой при  $\eta^2 > 0$ . Выпишем квадратичные члены по полям фотона и голдстоуновского бозона:

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2}e^2\eta^2 A_\mu^2 - e\eta A_\mu \partial_\mu \varphi. \quad (34)$$

Наша задача — нахождение пропагаторов полей  $A_\mu$  и  $\varphi$ . Будем работать в рамках теории возмущений по заряду  $e$ . В нулевом приближении в калибровке Ландау имеем

$$G_{\mu\nu}^0 = \frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2}{k^2}, \quad G_\varphi^0 = \frac{1}{k^2}. \quad (35)$$

Теперь следует выяснить, как последние два члена в (34) изменяют пропагаторы  $A_\mu$  и  $\varphi$ . Очевидно, что в силу поперечности  $G_{\mu\nu}^0$  в калибровке Ландау пропагатор поля  $\varphi$  не перенормируется; по той же причине не возникает недиагонального пропагатора, отвечающего переходам  $\varphi \rightarrow A_\mu$  и  $A_\mu \rightarrow \varphi$ .

Вычисление пропагатора поля  $A_\mu$  начнем с нахождения поляризационного оператора векторного поля  $\Pi_{\mu\nu}$ , итерации которого дают «одетый» пропагатор фотона  $G_{\mu\nu}$ :

$$-iG_{\mu\nu} = -iG_{\mu\nu}^0 + (-iG_{\mu\rho}^0)(i\Pi_{\rho\sigma})(-iG_{\sigma\nu}^0) + \dots \quad (36)$$

Поляризационный оператор дается суммой двух диаграмм (рис. 4), вычисляя которые, получим

$$i\Pi_{\rho\sigma} = (-ie\eta)^2 k_\rho k_\sigma \frac{i}{k^2} + \frac{1}{2}2e^2\eta^2 i g_{\rho\sigma} = ie^2\eta^2 \left( g_{\rho\sigma} - \frac{k_\rho k_\sigma}{k^2} \right). \quad (37)$$

Поперечность поляризационного оператора следует из калибровочной инвариантности теории; полюс при  $k^2 = 0$  обусловлен обменом безмассовым голдстоуновским бозоном. Сосуществование этих двух свойств приводит к калибровочно-инвариантной теории массивного векторного поля. Впервые в квантовой теории поля такое явление обнаружил Швингер в КЭД безмассовых фермионов в двумерном пространстве-времени. Отсутствие щели (наличие безмассовых возбуждений) также привело к появлению динамической массы фотона.

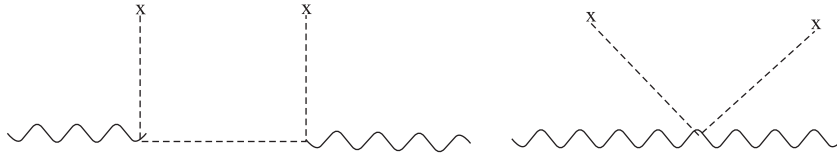


Рис. 4. Две диаграммы, описывающие вклад  $\sim e^2$  в поляризационный оператор векторного бозона

Подставляя (37) в (36) и используя явное выражение для  $G_{\mu\nu}^0$ , находим пропагатор векторного поля; таким образом, в калибровке Ландау ( $\xi \rightarrow 0$ ) лагранжиан (34) приводит к следующим пропагаторам:

$$G_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu} - (k_\mu k_\nu / k^2)}{k^2 - e^2\eta^2}, \quad G = \frac{1}{k^2}. \quad (38)$$

Полученные пропагаторы падают при больших  $k^2$  как  $1/k^2$ ; мы получаем перенормируемую теорию массивной векторной частицы. Ее масса имеет динамическое происхождение: она равна произведению заряда на вакуумное среднее скалярного поля. Полюс при  $k^2 = 0$  — фиктивный (при учете вклада вектора и скаляра в физических амплитудах он сокращается), в теории нет безмассовых частиц. Какова связь перенормируемой калибровки Ландау ( $\xi = 0$ ) с унитарной калибровкой ( $\xi = \infty$ ), в которой ясен набор физических частиц теории? Обратимся вновь к лагранжиану (34) с целью найти пропагаторы полей  $A_\mu$  и  $\varphi$  при произвольном  $\xi$ . Последний член приводит к смешиванию  $A_\mu$  и  $\partial_\mu\varphi$ ; найдем диагональные комбинации полей и их пропагаторы. Введем фиксирующий калибровку член, предложенный 'т Хофтом:

$$\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 \rightarrow \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu + e\eta\xi\varphi)^2, \quad (39)$$

используя который в (34), мы приходим к лагранжиану (40) и пропагаторам (41):

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}e^2\eta^2 A_\mu^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}\xi e^2\eta^2\varphi^2, \quad (40)$$

и для пропагаторов полей  $A_\mu$  и  $\varphi$  имеем

$$G_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - M^2\xi}}{k^2 - M^2}, \quad G = \frac{1}{k^2 - \xi M^2}, \quad (41)$$

где  $M = e\eta$ . Полученные пропагаторы в литературе называются пропагаторами в перенормируемых  $R_\xi$ -калибровках 'т Хофта.

**Задача 1.** *Получить пропагаторы фотона (33) и массивного векторного бозона (41).* Мы видим, что при любом конечном  $\xi$  пропагаторы (41) падают как  $1/k^2$ , т.е. дают перенормируемую теорию. Полюса при  $k^2 = \xi M^2$  фиктивные — они сокращаются в амплитудах физических процессов (в матричных элементах  $S$ -матрицы). Для древесных амплитуд это сокращение легко увидеть, преобразовав тождественно пропагатор векторного поля:

$$G_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu} - (k_\mu k_\nu/M^2)}{k^2 - M^2} + \frac{k_\mu k_\nu}{M^2(k^2 - \xi M^2)}. \quad (42)$$

Второй член в этом выражении сокращается пропагатором поля  $\varphi$ , и зависимость от  $\xi$  древесных амплитуд исчезает. При  $\xi \rightarrow \infty$  скаляр становится бесконечно тяжелым и «отщепляется» (дает нулевой вклад); остается массивная векторная частица, описываемая пропагатором Прока. Это унитарная калибровка. При  $\xi = 0$  мы получаем калибровку 'т Хофта–Ландау. При  $\xi = 1$  — калибровку 'т Хофта–Фейнмана, удобную для петлевых расчетов. Ключевой является калибровочная инвариантность теории: она дает возможность, проводя вычисления в перенормируемой калибровке, получать амплитуды для физической массивной векторной частицы (унитарная калибровка). Независимость от  $\xi$  амплитуд физических процессов во всех порядках теории возмущений в неабелевых калибровочных теориях с хиггсовским механизмом была доказана Велтманом, 'т Хофтом и др.

## ЛЕКЦИЯ 2. БОЗОННЫЙ СЕКТОР СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ, ФЕРМИОНЫ В СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ

Локальная  $SU(2)$ , лагранжиан векторных полей, хиггсовский сектор,  $SU(2) \otimes U(1)$ -теория Глэшоу–Вайнберга–Салама (ГВС): хиггсовский и калибровочный секторы.

Левые и правые фермионы, слабые взаимодействия лептонов и кварков, фермиевская константа  $G_\mu$ , определение параметров  $SU(2)_L \times U(1)$ -модели, нейтральные токи, треугольные аномалии: кварк-лептонная симметрия, нейтральность атома водорода и нейтрино в стандартной модели (СМ).

Слабые взаимодействия похожи на квантовую электродинамику: они также обусловлены обменами векторными частицами. Отличие в том, что наряду с диагональными слабыми взаимодействиями, обусловленными обменом  $Z$ -бозоном (и открытыми сравнительно недавно), имеются традиционные недиагональные слабые взаимодействия, обусловленные обменом  $W^\pm$ -бозонами. Поэтому в основе модели Глэшоу–Вайнберга–Салама лежит не абелева  $U(1)$ -симметрия, а (простейшая) неабелева симметрия  $SU(2)$  (полная симметрия модели  $SU(2) \otimes U(1)$ ; фотон является четвертым векторным бозоном, и теория описывает наряду со слабыми взаимодействиями электродинамику).

У группы  $SU(2)$  (унитарные матрицы  $2 \times 2$  с равным единице детерминантом) имеются три генератора  $T_i$ , традиционно выбираемые в спинорном представлении в следующем виде:

$$T_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

$$\text{tr } T_i^2 = \frac{1}{2}, \quad [T_i T_k] = i\epsilon_{ikl} T_l, \quad T_i T_k = \frac{1}{4} \delta_{ik} + \frac{i}{2} \epsilon_{ikl} T_l. \quad (44)$$

Произвольное  $SU(2)$ -преобразование характеризуется тремя параметрами  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 \equiv \vec{\Lambda}$ , которые в случае локальной симметрии различны в различных точках пространства-времени,  $\vec{\Lambda} = \vec{\Lambda}(x)$ , и имеет следующий вид:

$$\Psi(x) = S\Psi'(x), \quad S = e^{i\vec{\Lambda}(x)\vec{T}}, \quad (45)$$

где  $\Psi(x)$  — комплексный спинор. Эрмитовость генераторов приводит к унитарности  $S$ ,  $S^+ S = 1$ . Пусть поле  $\Psi(x)$  описывает частицу с лоренцевским спином  $1/2$ . Из требования инвариантности кинетического члена спинорного поля относительно локальных  $SU(2)$ -преобразований получим закон  $SU(2)$ -преобразования триплета векторных полей  $A_\mu^i$ :

$$\bar{\Psi}(\partial_\mu - igA_\mu)\Psi = \bar{\Psi}'(\partial_\mu - igA'_\mu)\Psi', \quad \text{где } A_\mu \equiv A_\mu^i T^i. \quad (46)$$

Подставляя (45) в (46), получим

$$-igA_\mu = S\partial_\mu S^+ - igSA'_\mu S^+ \quad (47)$$

и, окончательно:

$$A'_\mu = S^+ A_\mu S - \frac{i}{g} (\partial_\mu S^+) S. \quad (48)$$

Этот закон преобразования демонстрирует двойную роль неабелевых полей  $A_\mu$ : первый член отвечает преобразованию полей, находящихся в присоединенном представлении

$SU(2)$ ; второй же неоднородный член аналогичен случаю фотонного поля и характеризует  $A_\mu$  как калибровочное поле.

Для построения кинетического члена следует начать с тензора поля. В абелевом случае тензор электромагнитного поля строится из коммутатора ковариантных производных следующим образом:

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \frac{i}{g}[\partial_\mu - igA_\mu, \partial_\nu - igA_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{КЭД}), \quad (49)$$

допускающим обобщение на неабелев случай:

$$G_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \quad (\text{ЯМ}). \quad (50)$$

В отличие от  $F_{\mu\nu}$  тензор  $G_{\mu\nu}$  не инвариантен относительно калибровочных преобразований. С помощью (48) находим

$$G'_{\mu\nu} = S^+ G_{\mu\nu} S, \quad (51)$$

т. е. неоднородный член в преобразовании  $A_\mu$  сокращается. Это дает возможность немедленно написать  $SU(2)$ -инвариантный кинетический член

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{Tr} (G_{\mu\nu}^2), \quad (52)$$

где коэффициент  $1/2$  связан с нормировкой матриц  $T_i$ . В отличие от КЭД неабелева симметрия определяет самодействие векторных полей; лагранжиан (52) содержит кубические и квадратичные члены. Теория безмассовых полей Янга–Миллса является перенормируемой, в частности, такая теория, основанная на группе  $SU(3)$ , описывает взаимодействие глюонов.

Добавляя массовый член векторных полей в (52) и вычисляя древесные амплитуды рассеяния, мы увидим, что в случае продольной поляризации векторных частиц они растут с энергией — теория перенормируема. Глобальная неабелева симметрия приводит к сохранению токов, что понижает показатель степени энергии на две единицы согласно (15), но недопустимый в перенормируемых теориях рост с энергией не устраняется. Требованию перенормируемости удовлетворяет только локально инвариантный лагранжиан. Перейдем к спонтанному нарушению  $SU(2)$ -симметрии. Введем скалярный дублет  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  и рассмотрим следующий лагранжиан:

$$\mathcal{L} = |D_\mu \varphi|^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 [\varphi^+ \varphi - \eta^2/2]^2 - \frac{1}{2} \text{Tr} G_{\mu\nu}^2. \quad (53)$$

В первой лекции было установлено, что в отсутствие векторных полей в данной теории происходит спонтанное нарушение симметрии и возникают три голдстоуновских бозона. Смешиваясь с векторными полями, они дают им массу. Физический состав теории проще всего виден в унитарной калибровке, где из четырех вещественных компонент комплексного дублета  $\varphi$  остается одно поле хиггсовского бозона:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\eta + \chi(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (54)$$

где мы выбрали вакуумное среднее  $\varphi$  вещественным и направленным вдоль  $\varphi_2$ . Подставляя (54) в (53), для массовых членов векторных полей получим

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^2\eta^2\frac{1}{4}\left((A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2 + (A_\mu^3)^2\right), \quad M_{A^1} = M_{A^2} = M_{A^3} = \frac{g\eta}{2}. \quad (55)$$

В теории не осталось безмассовых полей: имеются три векторных бозона с равными массами и хиггсовский бозон  $\chi$ , масса которого определяется константой  $\lambda$ .

Фиксация калибровки требует введения д $\acute{u}$ хов Фаддеева–Попова, взаимодействующих с векторными и скалярными полями. Духовые поля впервые проявляются при вычислении петель, поэтому мы не будем ими заниматься.

Электрослабая теория Глэшоу–Вайнберга–Салама (ГВС) основана на локальной симметрии  $SU(2)_L \otimes U(1)$  (здесь индекс  $L$  означает, что преобразования  $SU(2)$  действуют только на левые частицы со спином  $1/2$ , см. ниже). В этой лекции мы рассмотрим бозонный сектор теории. Четырем генераторам отвечают три калибровочных поля  $A_\mu^i$  и поле гиперзаряда  $B_\mu$ . Ковариантная производная имеет следующий вид:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^i T^i - ig' B_\mu \frac{Y}{2}, \quad (56)$$

где  $g$  — заряд  $SU(2)$ ;  $g'$  — заряд  $U(1)$ . Абелев заряд может отличаться для различных полей (в отличие от неабелева, фиксированного нелинейностью коммутационных соотношений). Эта возможность отражена введением гиперзаряда  $Y$ . Скалярный сектор теории образует изодублет хиггсовских полей  $H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix}$ , имеющий знакомый нам лагранжиан:

$$\mathcal{L}_H = \left| \left( \partial_\mu - igA_\mu^i T^i - ig' B_\mu \frac{Y}{2} \right) H \right|^2 - \frac{1}{2}\lambda^2 \left[ H^+ H - \frac{\eta^2}{2} \right]^2. \quad (57)$$

Перейдем в унитарную калибровку и разложим скалярное поле относительно его вакуумного среднего:

$$H = e^{i\bar{\alpha}(x)\bar{T}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + \rho(x)) \end{pmatrix}, \quad \langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Единственное физическое скалярное поле в теории — бозон Хигса  $\rho(x)$ ; его масса

$$M_H = \lambda\eta \quad (59)$$

и определяется величиной неизвестной константы  $\lambda$ . Отрицательный результат поиска распада  $Z \rightarrow Z^* H \rightarrow l^+ l^- H$ , где  $l$  — заряженный лептон, на ускорителе LEP I в ЦЕРН дало ограничение снизу на массу бозона Хигса  $M_H > 65$  ГэВ. На ускорителе LEP II бозон Хигса не был обнаружен в реакции  $e^+ e^- \rightarrow Z^* \rightarrow ZH$  при энергии  $\sqrt{s} = 210$  ГэВ, что подняло нижнее ограничение на его массу до  $M_H > 114$  ГэВ. Для поиска более тяжелого бозона Хигса в ЦЕРН построен ускоритель LHC. Роль хиггсовского бозона в современной физике исключительна: массы лептонов, кварков и промежуточных бозонов дает механизм Хигса. Его обнаружение, в основном, завершит изучение стандартной модели.

Перейдем к векторным частицам. Лагранжиан дается суммой кинетических членов для  $SU(2)$ -триплета  $A_\mu^i$  (52) и  $U(1)$ -поля  $B_\mu$  и массовыми членами, получаемыми из (57) подстановкой вакуумного среднего поля  $H$ . Займемся последними:

$$\left| \begin{pmatrix} \sim -ig \frac{A_1 - iA_2}{2} \\ \sim ig \frac{A_3}{2} - \frac{ig'}{2} B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \frac{g\eta}{2} \frac{A_1 - iA_2}{\sqrt{2}} \right|^2 + \left[ \frac{\bar{g}\eta}{2\sqrt{2}} \frac{gA_3 - g'B}{\bar{g}} \right]^2, \quad \bar{g} = \sqrt{g^2 + g'^2}, \quad (60)$$

где мы положили гиперзаряд дублета  $H$  равным единице (это условие определяет нормировку  $g'$ ). Первый член дает равные массы полям  $A_1$  и  $A_2$ . Так как в переходах между компонентами изомультиплета излучается когерентная суперпозиция  $\frac{A_1 - iA_2}{\sqrt{2}} \equiv W^+$ , то это и есть заряженный  $W$ -бозон. Массивная нейтральная частица —  $Z$ -бозон. Ортогональную ей суперпозицию, остающуюся безмассовой, естественно отождествить с фотоном. Итак:

$$W^\pm = \frac{A_1 \mp iA_2}{\sqrt{2}}, \quad M_W = \frac{g\eta}{2}, \quad (61)$$

$$Z = \frac{gA_3 - g'B}{\bar{g}}, \quad M_Z = \frac{\bar{g}\eta}{2}, \quad (62)$$

$$\gamma = \frac{g'A_3 + gB}{\bar{g}}, \quad M_\gamma = 0. \quad (63)$$

Физические поля  $\gamma$  и  $Z$  развернуты относительно затравочных полей  $A_3$  и  $B$  на электрослабый угол смешивания  $\theta_W$ ,  $\sin \theta_W = g'/\bar{g}$ ,  $\cos \theta_W = g/\bar{g}$ . То, что в  $SU(2) \otimes U(1)$ -теории с одним дублетом хиггсовских полей остается один безмассовый векторный бозон, можно было предвидеть: вакуум (58) инвариантен относительно комбинации  $T_3$  и  $U(1)$ -вращений; трем же нарушенным преобразованиям симметрии отвечают три массивных векторных бозона:  $W^\pm$  и  $Z$ .

Взаимодействие фотона определяется формулами (63) и (56):

$$\gamma : \frac{g'g}{\bar{g}} T_3 + \frac{gg'}{\bar{g}} \frac{Y}{2} = \frac{gg'}{\bar{g}} \left( T_3 + \frac{Y}{2} \right). \quad (64)$$

В один изодублет объединяются нейтральное электронное нейтрино и электрон; изменению заряда на единицу отвечает изменение третьей проекции изоспина  $T_3$ . Отсюда имеем

$$\frac{gg'}{\bar{g}} = e \equiv \sqrt{4\pi\alpha}, \quad Q = T_3 + \frac{Y}{2}. \quad (65)$$

Знание экспериментальных значений масс  $W$ - и  $Z$ -бозонов и постоянной тонкой структуры  $\alpha$  позволяет определить значения параметров  $SU(2)_L \times U(1)$ -теории. Правило определения гиперзаряда изомультиплета следует из формулы для оператора электрического

заряда  $Q$ . Гиперзаряд всех членов одного изомультиплета одинаков ( $SU(2)_L$  и  $U(1)$  коммутируют), а сумма третьих компонент изоспина равна нулю:

$$Y = 2 \frac{\sum Q}{n}, \quad (66)$$

или гиперзаряд равен удвоенному среднему электрическому заряду членов изомультиплета.

Взаимодействие  $Z$ -бозона фиксируется формулами (62) и (56):

$$Z : \frac{g^2}{\bar{g}} T_3 - \frac{g'^2}{\bar{g}} \frac{Y}{2} = \bar{g} T_3 - \frac{g'^2}{\bar{g}} Q = \bar{g} \left( T_3 - \frac{g'^2}{\bar{g}^2} Q \right), \quad (67)$$

т. е. заряд нейтрального слабого тока равен  $\bar{g}$ , а оператор заряда равен  $T_3 - \sin^2 \theta_W Q$ .

Приведем экспериментально измеренные значения масс промежуточных бозонов:

$$M_W = (80,398 \pm 0,025) \text{ ГэВ}, \quad M_Z = (91,188 \pm 0,002) \text{ ГэВ}. \quad (68)$$

Одним из наиболее удивительных открытий в физике было открытие несохранения  $P$ -четности в слабых взаимодействиях. В работе 1956 г. Ли и Янг выдвинули гипотезу, разрешающую  $\theta$ - $\tau$ -проблему в распадах заряженных  $K$ -мезонов несохранением  $P$ -четности в слабых взаимодействиях.

Как известно из курса квантовой электродинамики, волновая функция электрона является биспинором, реализующим представление группы Лоренца. У биспинора имеются четыре комплексные компоненты. Неприводимое представление группы Лоренца реализуется на спиноре, имеющем две комплексные компоненты и называемом вейлевским (Г. Вейль). Биспинор состоит из двух спиноров. Теория вейлевских спиноров автоматически приводит к максимальному нарушению  $P$ -четности, наблюдаемому на эксперименте. Мы будем использовать стандартное представление матриц Дирака  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_5 &= -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_i &= 2T_i, \quad \gamma_\mu\gamma_5 = -\gamma_5\gamma_\mu. \end{aligned} \quad (69)$$

Определим проектор на левое состояние  $P_L$ :

$$P_L = \frac{1 + \gamma_5}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_L^2 = P_L, \quad (70)$$

и подействуем им на дираковский биспинор  $\Psi$ :

$$\frac{1 + \gamma_5}{2} \Psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi - \chi \\ -\varphi + \chi \end{pmatrix}. \quad (71)$$

Из дираковского биспинора мы получили собственное состояние оператора  $P_L$  — левый спинор, или состояние с определенной (левой) киральностью, или вейлевский спинор.



На массовой оболочке из уравнения Дирака получим

$$\begin{aligned} (\hat{p} - m)\Psi = 0, \quad \begin{pmatrix} E - m & -\bar{p}\bar{\sigma} \\ \bar{p}\bar{\sigma} & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0, \\ \bar{p}\bar{\sigma}\varphi = (E + m)\chi, \quad \chi = \frac{\bar{p}\bar{\sigma}}{E + m}\varphi, \end{aligned} \quad (72)$$

следовательно, для левого вейлевского спинора имеем

$$\varphi - \chi = \left(1 - \frac{\bar{p}\bar{\sigma}}{E + m}\right)\varphi. \quad (73)$$

В пределе высоких энергий (или для безмассовой частицы) киральные состояния становятся диагональными:

$$\begin{aligned} (E - \bar{p}\bar{\sigma})(\varphi - \chi) &= m(\varphi + \chi), \\ (E - \bar{p}\bar{\sigma})(\varphi + \chi) &= m(\varphi - \chi), \end{aligned}$$

и имеют простую физическую интерпретацию:

$$1 - \frac{\bar{p}\bar{\sigma}}{E} = 1 - \bar{n}\bar{\sigma}, \quad (74)$$

т. е. левая частица поляризована против направления своего импульса. Правый спинор выделяется из биспинора проектором  $P_R = (1 - \gamma_5)/2$ . Аналогично получим, что правая частица поляризована по импульсу. При инверсии координат  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$  левый спинор переходит в правый, а правый — в левый. Промежуточный  $W$ -бозон взаимодействует с левыми частицами, что и объясняет нарушение  $P$ -четности в слабых распадах частиц (или наоборот). Примесь направленной вдоль импульса поляризации в волновой функции левой частицы подавлена как  $m/E$ . Волновая функция позитрона ( $\mu^+, \dots$ ) описывается зарядово-сопряженным биспинором  $\psi^c = C\bar{\psi}$  ( $C = \gamma_0\gamma_2$ ), поэтому наряду с левыми частицами в слабом взаимодействии участвуют правые античастицы. Это означает, что в слабых взаимодействиях нарушается и  $C$ -четность (Иоффе, Окунь, Рудик; Ли, Оме, Янг, 1957): античастица левой частицы есть левая античастица, не взаимодействующая с  $W^\pm$ . Произведение  $P$  и  $C$ , преобразование  $CP$ , переводит левую частицу в правую античастицу, что позволяло до 1964 г. надеяться на  $CP$ -инвариантность слабого взаимодействия (гипотеза комбинированной четности, сформулированная Л. Д. Ландау в 1957 г.). Нарушение  $CP$  было обнаружено в распадах нейтральных каонов.

В минимальной СМ имеется три поколения (или семейства) фермионов:  $(u, d, \nu_e, e)$ ,  $(c, s, \nu_\mu, \mu)$  и  $(t, b, \nu_\tau, \tau)$ .  $SU(2)_L \otimes U(1)$ -взаимодействия поколений одинаковы, поэтому рассмотрим только первое поколение. Входящие в него частицы описываются пятнадцатью вейлевскими спинорами:  $(u_L)^i, (u_R)^i, (d_L)^i, (d_R)^i, \nu_{eL}, e_L$  и  $e_R$ , где  $i = 1, 2, 3$  — цветовой индекс. Цветовая симметрия — это группа сильных взаимодействий  $SU(3)_c$ . Стандартная модель — это калибровочная  $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)$ -теория взаимодействия трех семейств фермионов, включающая один дублет хиггсов. Так как цветовая группа коммутирует с электрослабой, электрослабые взаимодействия кварков не зависят от их цвета, и цветовой индекс в дальнейшем мы будем опускать.

Левые лептоны и кварки образуют дублеты по  $SU(2)_L$ , правые — синглеты:

$$L \equiv \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad e_R, \quad Q_L \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad u_R, \quad d_R. \quad (75)$$

Так же, как и для векторных частиц, первичными являются безмассовые поля, описываемые в случае спина 1/2 вейлевскими спинорами. Нарушение  $P$ -четности в распадах заряженных  $K$ -мезонов привело в 1957 г. Ландау (а также Ли и Янга и независимо Салама) к построению слабых взаимодействий с вейлевским нейтрино (тогда, как и много позже, нейтрино считалось безмассовой частицей).

Выпишем кинетический член для полей лептонов

$$\Delta\mathcal{L} = i\bar{L}\left(\hat{\partial} - ig\mathbf{T}\hat{\mathbf{A}} - ig'\frac{Y_L}{2}\hat{B}\right)L + i\bar{e}_R\left(\hat{\partial} - ig'\frac{Y_{eR}}{2}\hat{B}\right)e_R \quad (76)$$

и займемся заряженными токами. Член в лагранжиане, отвечающий переходу  $W^+e^- \rightarrow \nu_e$ , имеет следующий вид:

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_{eL}\hat{W}^+e_L = \frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_e\gamma_\alpha\frac{1+\gamma_5}{2}eW_\alpha^+. \quad (77)$$

Для амплитуды распада мюона, описываемой диаграммой рис. 2, в модели ГВС получим

$$M_{\mu\rightarrow e\nu\bar{\nu}}^{\text{ГВС}} = \frac{g^2}{2\cdot 4\cdot M_W^2}\bar{\nu}_\mu\gamma_\alpha(1+\gamma_5)\mu\bar{e}\gamma_\alpha(1+\gamma_5)\nu_e, \quad (78)$$

где мы пренебрегли членами порядка  $q^2/M_W^2 \sim m_\mu^2/M_W^2$  в пропагаторе  $W$ -бозона. В четырехфермионной теории эта же амплитуда дается следующим выражением:

$$M_{\mu\rightarrow e\nu\bar{\nu}}^{4\Phi} = \frac{G_\mu}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_\mu\gamma_\alpha(1+\gamma_5)\mu\bar{e}\gamma_\alpha(1+\gamma_5)\nu_e. \quad (79)$$

Сравнивая (78) и (79), получим выражение для константы Ферми в модели ГВС:

$$\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}. \quad (80)$$

Для определения численных значений трех параметров электрослабой модели  $\eta$ ,  $g$  и  $\bar{g}$  (или  $g'$ ) с лучшей точностью следует взять три выражающихся через них величины, измеренные с наилучшей точностью. На сегодняшний день это постоянная тонкой структуры  $\alpha$ , фермиевская константа из распада  $\mu$ -мезона  $G_\mu$  и масса  $Z$ -бозона:

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} &= 137,035985(61), \\ G_\mu &= 1,16639(2) \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}, \\ M_Z &= 91,188(2) \text{ ГэВ}. \end{aligned} \quad (81)$$

Подставляя в (80) выражение для массы  $W$ -бозона (61), получим

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}G_\mu}} = 246 \text{ ГэВ}. \quad (82)$$

Используя (65), выражение для  $M_Z$  (62) и выражение для  $\eta$ , получим

$$\sin^2\theta_W \cos^2\theta_W = \frac{4\pi\alpha\eta^2}{4M_Z^2} = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_\mu M_Z^2} = 0,1671, \quad (83)$$

$$\sin^2 \theta_W = 0,212. \quad (84)$$

Используем полученные формулы для нахождения массы  $W$ -бозона:

$$M_W^{\text{теор}} = \cos \theta_W M_Z = 80,94 \text{ ГэВ}, \quad (85)$$

что следует сравнить с экспериментальным результатом

$$M_W^{\text{экс}} = 80,40(3) \text{ ГэВ}, \quad (86)$$

где 30 МэВ — ошибка эксперимента. Расхождение — около 20 стандартных отклонений и составляет 0,7% от величины массы. Учет радиационных поправок устраняет противоречие.

Приведем численные значения зарядов электрослабой теории:

$$\begin{aligned} \bar{g} = \frac{2M_Z}{\eta} = 0,74, \quad g = \frac{\sqrt{4\pi\alpha}}{\sin \theta_W} = \frac{0,30}{\sin \theta_W} = 0,66, \\ g' = \frac{\sqrt{4\pi\alpha}}{\cos \theta_W} = 0,34. \end{aligned} \quad (87)$$

В пределе малых энергий обмен  $W$ -бозоном приводит к локальному взаимодействию заряженных токов, обуславливающему распады частиц.  $SU(2)_L \times U(1)$ -модель предсказала существование также нейтральных слабых токов за счет обмена  $Z$ -бозоном. Обнаружение нейтральных слабых токов с параметрами, предсказанными моделью ГВС, доказало верность этой модели и дало первое измерение электрослабого угла смешивания. Знание угла смешивания позволило предсказать массы  $W$ - и  $Z$ -бозонов ( $M_W^2 = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_\mu \sin^2 \theta_W}$ ,  $M_Z^2 = M_W^2 / \cos^2 \theta_W$ ), что существенно способствовало их экспериментальному наблюдению.

Следующий вопрос — как в модели ГВС возникают массы лептонов и кварков. Дело в том, что массовый член электрона

$$m_e \bar{e}e = m_e (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \quad (88)$$

нарушает  $SU(2)_L$ -симметрию, и поэтому его добавление к электрослабому лагранжиану разрушит перенормируемость теории. Ввести массы фермионов  $SU(2)_L \times U(1)$  инвариантным образом позволяет дублет Хиггса:

$$\Delta \mathcal{L}_{m_e} = f_e \bar{L} e_R H + \text{к. с.}, \quad (89)$$

где к. с. означает комплексно-сопряженное выражение, добавляемое для эрмитовости лагранжиана. В унитарной калибровке получим

$$\Delta \mathcal{L}_{m_e} = \frac{f_e}{\sqrt{2}} (\eta + \rho) \bar{e}e, \quad f_e = \frac{\sqrt{2}m_e}{\eta} \approx 3 \cdot 10^{-6}. \quad (90)$$

Аналогичные формулы справедливы для мюона и тау-лептона. Мы видим, что взаимодействие хиггсовского бозона с фермионами пропорционально массе последних. Поэтому, в частности, вероятность распада  $H \rightarrow \tau\bar{\tau}$  в  $10^7$  раз больше, чем вероятность распада

$H \rightarrow \bar{e}e$ . Электрон Дирака является суперпозицией двух полей  $e_L$  и  $e_R$ , совершенно различных с точки зрения электрослабой теории. Эти поля объединяет в одну частицу взаимодействие (89).

Кинетический член для дублета  $Q_L$  и синглетов  $u_R$  и  $d_R$  выписывается так же, как и для лептонов (ф-ла (76)), поэтому сразу перейдем к массам. Массовый член  $d$ -кварка строится аналогично электронному (ф-ла (89)) с очевидной заменой  $f_e$  на  $f_d$ . Для генерации массы  $u$ -кварка в МСМ используется комплексно-сопряженный дублет хиггсов (используется специфичная для  $SU(2)$  возможность образовывать скаляр как из произведения дублета на антидублет, так и из двух дублетов):

$$\Delta\mathcal{L}_{m_u} = f_u \bar{Q}_L u_R (-i\sigma_2) H^* + \text{к. с.} \quad (91)$$

Таким образом, одного дублета хиггсов хватает для генерации масс лептонов и кварков. Итак, кварки, лептоны и калибровочные бозоны получают массы за счет механизма Хиггса. Может показаться, что все массы имеют хиггсово происхождение. Но это не так. В пределе безмассовых кварков безмассовыми становятся также псевдоскалярные мезоны, большинство же адронов (протон, нейтрон,  $\rho$ -мезон и т. д.) остаются массивными. Происхождение их масс — квантовохромодинамический эффект, связанный с ростом сильного заряда на больших расстояниях. При этом параметр с размерностью массы  $\Lambda_{\text{КХД}}$  отсутствует в лагранжиане КХД и возникает в ходе перенормировки. Вместе с тем массы адронов, имеющих в своем составе тяжелые кварки ( $J/\Psi$ -,  $D$ -,  $\Upsilon$ -,  $B$ -мезоны и т. д.), в основном имеют хиггсово происхождение.

Наличие трех поколений фермионов вносит в описанную картину существенные поправки. Вместо двух чисел  $f_u$  и  $f_d$  вводятся две  $3 \times 3$ -матрицы юкавских констант связи:

$$\Delta\mathcal{L}_{m_q} = f_d^{ik} \bar{Q}'_{Li} d'_{Rk} H + f_u^{ik} \bar{Q}'_{Li} u'_{Rk} (-i\sigma_2) H^* + \text{к. с.} \implies \quad (92)$$

$$\implies \bar{u}'_{Li} M_u^{ik} u'_{Rk} + \bar{d}'_{Li} M_d^{ik} d'_{Rk} + \text{к. с.}, \quad (93)$$

где мы подставили вакуумное среднее поля Хиггса. Видно, что первичные поля  $u$ - и  $d$ -кварков не имеют определенных масс, и поэтому мы их обозначили штрихами. Согласно теореме линейной алгебры аналогично тому, как любое комплексное число представимо в виде произведения модуля на фазу, любая невырожденная матрица  $M$  представима в виде произведения эрмитовой матрицы на унитарную. Представив матрицы  $M_u$  и  $M_d$  в таком виде, мы увидим, что для их диагонализации необходимы две пары унитарных матриц:

$$M_u = U_L^+ M_u^{\text{diag}} U_R, \quad M_D = D_L^+ M_d^{\text{diag}} D_R. \quad (94)$$

Если бы матрицы  $M$  были эрмитовы, то для их диагонализации было бы достаточно одной унитарной матрицы и выполнялись бы равенства  $U_L = U_R$ ,  $D_L = D_R$ .

Подставляя полученные представления матриц  $M$  в (92), получим связь диагональных кварковых полей с первичными:

$$\begin{aligned} u_R &= U_R u'_R, & u_L &= U_L u'_L, \\ d_R &= D_R d'_R, & d_L &= D_L d'_L. \end{aligned} \quad (95)$$

Поля  $u = u_L + u_R$  и  $d = d_L + d_R$  имеют определенные массы; одновременно с массовыми членами диагонализуются и связь кварков с физическим бозоном Хиггса. В случае нескольких дублетов Хиггса связь полей кварков со скалярными частицами недиагональна; возникают недиагональные переходы с испусканием скалярных частиц.

В удлиненных кинетических энергиях кварковых полей есть два типа членов: диагональные (производные  $\hat{\partial}$  и испускание векторных полей  $\hat{B}$  и  $\hat{A}_3$ ) и недиагональные (испускание заряженных  $W$ -бозонов). При переходе к обладающим определенными массами полям в силу унитарности матриц  $U_{L,R}$  и  $D_{L,R}$  из членов первого типа они выпадают (нейтральные токи диагональны), оставаясь в излучении  $W$ :

$$\mathcal{L}_W = \bar{u}'_{Li} \gamma_\mu d'_{Li} W_\mu = \bar{u}_L U_L D_L^+ \gamma_\mu d_L W_\mu \equiv \bar{u}_L K \gamma_\mu d_L W_\mu, \quad (96)$$

где  $K = U_L D_L^+$  — унитарная матрица, называемая матрицей Кабиббо–Кобаяши–Маскава. Недиагональность заряженного тока по индексу кварковых поколений известна давно: ток  $\bar{u} \gamma_\mu d$  ведет к распаду  $\pi^\pm$ -мезонов, а ток  $\bar{u} \gamma_\mu s$  — к распаду  $K$ -мезонов. Унитарная матрица параметризуется (вещественными) углами и (комплексными) фазами. В случае двух поколений имеется один угол — это знаменитый угол Кабиббо. В случае трех поколений имеется три угла (число углов унитарной матрицы такое же, как у ортогональной, и равно  $\frac{n(n-1)}{2}$  для матрицы  $n \times n$ ). Среди фаз часть ненаблюдаема, так как  $2n-1$  фаза может быть убрана  $U(1)$ -вращениями полей верхних и нижних кварков (вращение всех верхних кварков на одну и ту же фазу умножает на нее все элементы матрицы  $K$  точно так же, как и вращение на противоположную фазу всех нижних кварков — отсюда  $-1$ ). Вычитая из общего числа параметров унитарной матрицы ( $n^2$  параметров) число углов и ненаблюдаемых фаз, получим число наблюдаемых фаз  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ , т. е. впервые комплексность появляется для трех поколений кварков и является единственным источником  $CP$ -нарушения в СМ. Определение численных значений параметров матрицы Кобаяши–Маскава требует анализа слабых распадов  $b$ -кварка, которыми в этой части курса мы заниматься не будем.

В этой и предыдущей лекциях мы полностью описали лагранжиан электрослабой теории. В следующей лекции будут рассмотрены свойства  $W$ - и  $Z$ -бозонов — очевидное приложение модели ГВС, а сейчас обсудим ряд более общих вопросов, которые возникают при внимательном рассмотрении описанной теории.

Наиболее изящная часть модели — калибровочный сектор, и здесь имеется следующий вопрос: с чем связано появление двух зарядов,  $g$  и  $g'$ ? Нельзя ли как-то связать их друг с другом, уменьшив тем самым число фундаментальных параметров теории? На этот вопрос положительный ответ дают теории Великого объединения, в которых три калибровочных заряда СМ (третий — цветовой заряд  $g_3$ ) возникают из одного фундаментального заряда, описывающего взаимодействия на очень маленьких расстояниях порядка  $10^{-30}$  см.

Хиггсовский сектор, наоборот, наиболее уязвимая часть модели. Почему выбран только один дублет, а не два или больше? Масса бозона Хиггса — произвольный параметр теории. Взаимодействия дублета хиггсов с лептонами и кварками описываются тринадцатью наблюдаемыми параметрами (массы заряженных лептонов и кварков и параметры матрицы Кобаяши–Маскава). Таким образом, большинство фундаментальных параметров связано с хиггсом. Наконец, последний по очереди, но не по важности вопрос: почему перенормировка массового члена скалярного поля, пропорциональная квадрату ультрафиолетового обрезания  $\Lambda$ , не «уводит» шкалу слабых взаимодействий на сверхвысокие энергии (порядка шкалы Великого объединения  $M_{\text{GUT}} \sim 10^{15}$  ГэВ или массы Планка  $M_P = 10^{19}$  ГэВ) — так называемая проблема натуральности. Ответ на послед-

ний вопрос дают суперсимметричные теории. Большое количество параметров во взаимодействии бозона Хиггса с фермионами обусловлено наличием трех кварк-лептонных поколений. Иерархия масс и количество поколений может найти объяснение в теориях горизонтальной симметрии (вертикаль — электрослабые и сильные взаимодействия одного поколения; горизонталь — новые взаимодействия с изменением флэйвора).

Наконец, приведем вопросы, на которые будет дан ответ в этой лекции: почему семейств лептонов столько же, сколько и семейств кварков? Почему атом водорода нейтрален ( $Q_e = -Q_p$ )? Почему нейтрален нейтрон? Почему нейтрино не имеет электрического заряда?

Причина кварк-лептонной симметрии — в необходимости иметь перенормируемую теорию. Как уже было сказано,  $SU(2)_L \times U(1)$  симметричные кинетические члены кварков и лептонов выписываются независимо. Это относится также и к взаимодействиям с бозоном Хиггса, дающим массы фермионов. Тем не менее электрослабая теория одних лептонов (или кварков) неперенормируема, и причина этого — в знаменитой треугольной аномалии. Начнем с обычной квантовой электродинамики и устремим массу электрона к нулю. В этом пределе в теории появляется сохраняющийся аксиальный ток  $J_\mu^5 = \bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi$ ,  $\partial_\mu J_\mu^5 = 0$ , отвечающий глобальной аксиальной симметрии:  $\Psi(x) = e^{i\Lambda\gamma_5}\Psi'(x)$ . Учет показанных на рис. 5 диаграмм приводит к несохранению аксиального тока:  $\partial_\mu J_\mu^5 \sim \alpha\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \equiv \alpha F\tilde{F}$ ; соответствующая аксиальная симметрия лагранжиана нарушена петлевыми поправками.

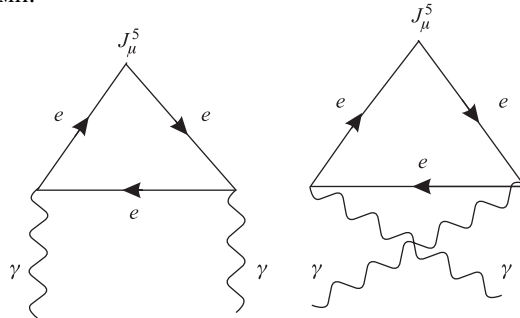


Рис. 5. Диаграммы, приводящие к несохранению аксиального тока в квантовой электродинамике с безмассовым электроном

Дело в том, что доказательство сохранения тока требует сдвига импульса интегрирования, отвечающего петлевой диаграмме. Ультрафиолетовая расходимость интеграла не позволяет сделать сдвиг переменной интегрирования — возникает аномалия в дивергенции аксиального тока. Описываемое явление было открыто в 50-х годах Швингером, а в 60-х — переоткрыто Адлером и Беллом и Джакивом.

К электрослабой теории аксиальная аномалия имеет непосредственное отношение: теория формулируется отдельно для левых и правых спиноров; векторные бозоны взаимодействуют как с векторными, так и с аксиальными токами. Если эти токи перестанут сохраняться при учете петлевых диаграмм, то обеспечивающая перенормируемость теории слабых взаимодействий локальная  $SU(2)_L \times U(1)$ -симметрия окажется разрушенной.

В случае модели ГВС аномальные треугольные диаграммы с распространяющимися по внутренним линиям лептонами сокращаются с кварковыми треугольниками. Теория остается перенормируемой благодаря кварк-лептонной симметрии. Принципиальная воз-

возможность компенсации реализуется при определенных соотношениях между зарядами кварков и лептонов. Получим соответствующие уравнения. Удобно рассматривать треугольные диаграммы, в которых фермионы в петле взаимодействуют с затравочными внешними полями:  $SU(2)$ -триплетом  $A_\mu^i$  и полем гиперзаряда  $B_\mu$ . Имеем три типа треугольных диаграмм:  $B^3$ ,  $A^{i3}$  и  $BA^{i2}$ , в которых к вершинам подходят три поля  $B_\mu$ , три поля  $A_\mu^i$  и  $B_\mu$  переходит в два  $A_\mu^i$  соответственно. (Треугольник  $B^2A^i$  зануляется в силу  $SU(2)$ -симметрии.) Начнем с треугольников, к вершинам которых подходят три поля  $A^i$ . В каждой вершине стоит генератор  $SU(2)$  — матрица  $T_i$ . Суммирование диаграмм рис. 5, *a* и *b* приводит к следующему изотопическому множителю:  $\text{Sp } T^i T^k T^l + \text{Sp } T^i T^l T^k \equiv \text{Sp } T^i \{T^k T^l\}$ . Антicomмутатор двух матриц  $T$  пропорционален  $\delta_{kl}$ , а шпур матриц  $T_i$  равен нулю. Таким образом, в чистой  $SU(2)$ -теории треугольные аномалии не возникают. (В группах  $SU(N)$  с  $N > 2$  антicomмутатор двух матриц  $T$  содержит матрицы  $T$ , и шпур не зануляется.) Остающиеся два типа треугольников дают два арифметических уравнения на гиперзаряды лептонов и кварков. Компенсация аномалий в переходе  $B$  в два  $A_i$  имеет место, если сумма гиперзарядов левых частиц (только левые частицы взаимодействуют с  $A_i$ ) равна нулю:

$$\Sigma Y_L \equiv Y_{\nu_L} + Y_{e_L} + 3Y_{u_L} + 3Y_{d_L} = 0, \quad (97)$$

где множитель 3 возникает от трех цветов кварков, и мы ограничились первым семейством фермионов. Гиперзаряды изопартнеров ( $\nu_L$  и  $e_L$ ,  $u_L$  и  $d_L$ ) равны, поэтому из (97) получим

$$Y_{e_L} + 3Y_{u_L} = 0. \quad (98)$$

Пользуясь уравнением (65), выразим гиперзаряды частиц через их электрические заряды и величины третьей проекции изоспина. Подставляя  $(T_3)_{e_L} = -1/2$ ,  $(T_3)_{u_L} = +1/2$ , получим

$$Q_{e_L} + 3Q_{u_L} = 1. \quad (99)$$

Уберем индекс « $L$ » (электрические заряды левых и правых компонент одинаковы) и заменим один заряд  $u$ -кварка на заряд  $d$ -кварка:

$$Q_e + 2Q_u + Q_d = 0. \quad (100)$$

Итак, из требования отсутствия аномалии в переходе  $B$  в два  $A_i$  получено требование нейтральности атома водорода. Нейтральность нейтрино и нейтрона пока не доказана.

Рассмотрение треугольника  $B^3$  позволит доказать, что заряд электрона равен  $-1$ ,  $u$ -кварка —  $2/3$ ,  $d$ -кварка —  $-1/3$ , а нейтрино и нейтрон нейтральны. Вклады левых и правых частиц в аксиальную аномалию противоположны, поэтому условие отсутствия аномалии в переходе  $B$  в два  $B$  выглядит так:

$$\Sigma Y_L^3 - \Sigma Y_R^3 = 0. \quad (101)$$

Гиперзаряды левой и правой компоненты массивной частицы связаны с гиперзарядом поля Хиггса, так как соответствующие члены в лагранжиане ((89), (91))  $U(1)$ -инвариантны. Гиперзаряд хиггсовского дублета равен  $+1$  (соответственно выбирается  $g'$ ). Учитывая, что в изодублетах имеется два партнера и кварки бывают трех цветов, получим

$$2Y_{e_L}^3 + 2 \cdot 3Y_{u_L}^3 - (Y_{e_L} - 1)^3 - 3(Y_{u_L} + 1)^3 - 3(Y_{u_L} - 1)^3 = 0 \quad (102)$$

или

$$Y_{eL}^3 + 3Y_{eL}^2 - 3Y_{eL} - 18Y_{uL} + 1 = 0. \quad (103)$$

Выражая с помощью (98)  $Y_{uL}$  через  $Y_{eL}$ , окончательно получим

$$(Y_{eL} + 1)^3 = 0, \quad (104)$$

что и дает обещанные значения зарядов кварков и лептонов:

$$Q_e = -1, \quad Q_\nu = 0, \quad Q_u = 2/3, \quad Q_d = -1/3. \quad (105)$$

Итак, в СМ гиперзаряды, а значит, и электрические заряды, не являются свободными параметрами теории — они фиксируются требованием отсутствия аномалий.

### ЛЕКЦИЯ 3. СВОЙСТВА $W$ - И $Z$ -БОЗОНОВ И СВОЙСТВА БОЗОНА ХИГГСА

Рождение и распады  $W$ - и  $Z$ -бозонов. Бозон Хиггса: масса, рождение, распады.

$W$ - и  $Z$ -бозоны были впервые зарегистрированы на специально построенном с этой целью  $p\bar{p}$ -коллайдере ЦЕРН. Рождаются они в  $u\bar{d}$ -,  $d\bar{u}$ - и  $u\bar{u}$ - и  $d\bar{d}$ -столкновениях соответственно. Основным источником кварков являются протоны, антикварков — антипротоны. При последующем распаде  $W$  возникает характерная угловая асимметрия: спин  $W^+$  выстроен в направлении пучка антипротонов, и образующиеся в распадах  $W^+ \rightarrow e^+\nu, \mu^+\nu$  положительно заряженные лептоны, являясь правыми, летят преимущественно по спине  $W^+$ , т. е. по пучку  $\bar{p}$ . Отрицательно заряженные лептоны, наоборот, летят преимущественно по пучку протонов. Образование одиночных заряженных лептонов (нейтрино не детектируется) с большим перпендикулярным направлением пучка импульсом и характерной угловой асимметрией послужило четким указанием на рождение  $W$ -бозона. В случае  $Z$ -бозона регистрируются оба лептона от распада  $Z \rightarrow l^+l^-$  и  $Z$  идентифицируется по пику в инвариантной массе продуктов распада. В экспериментах на  $p\bar{p}$ -коллайдере впервые были измерены массы  $W$  и  $Z$ . Наиболее точное на сегодняшний день измерение массы  $Z$ -бозона проделано на  $e^+e^-$ -коллайдере LEP I при суммарной энергии пучков, равной массе  $Z$ -бозона (рис. 6). Масса и ширина  $W$  точнее всего измеряются на тэватроне.

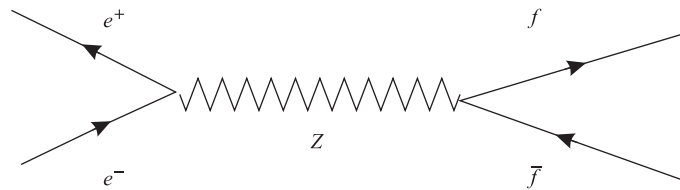


Рис. 6. Рождение  $Z$ -бозона с последующим распадом на пару  $f\bar{f}$  в  $e^+e^-$ -аннигиляции (ускорители SLC и LEP I)

Ширина  $W$ -бозона, приводимая в таблицах свойств элементарных частиц, равна

$$\Gamma_W^{\text{эсп}} = (2,14 \pm 0,04) \text{ ГэВ}. \quad (106)$$



Полная ширина  $W$ -бозона складывается из ширины распадов в пары лептонов и кварков:

$$\Gamma_W = 3\Gamma_{W \rightarrow e\nu} + 2\Gamma_{W \rightarrow u\bar{d}}, \quad (107)$$

где учтены пять каналов распада:  $e\nu_e$ ,  $\mu\nu_\mu$ ,  $\tau\nu_\tau$ ,  $u\bar{d}$  и  $c\bar{s}$ . Для амплитуды распада в  $e\nu$  имеем

$$A_{W \rightarrow e\nu} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{e} \gamma_\alpha \frac{1 + \gamma_5}{2} \nu_e W_\alpha, \quad (108)$$

квадрируя которую, суммируя по поляризациям конечного электрона и пользуясь матрицей плотности  $W$ -бозона  $\rho_{\alpha\beta} = -\frac{1}{3} \left( g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{M_W^2} \right)$ , получим

$$\overline{\Sigma|A|^2} = \frac{g^2}{2} \text{Sp} \left( \hat{p}_e \gamma_\alpha \hat{p}_\nu \gamma_\beta \frac{1 + \gamma_5}{2} \right) W_\alpha W_\beta = \frac{g^2}{3} 2p_e p_\nu = \frac{g^2}{3} M_W^2, \quad (109)$$

где мы пренебрегли членами  $\sim m_e^2/m_W^2$ . Для ширины распада получим

$$\Gamma_{W \rightarrow e\nu} = \frac{\overline{\Sigma|A|^2}}{2M_W} \tau_2 = \frac{g^2 M_W}{48\pi} = \frac{G_F M_W^3}{6\sqrt{2}\pi}, \quad (110)$$

где было использовано выражение для ультрарелятивистского 2-частичного фазового объема  $\tau_2 = 1/8\pi$  и связь калибровочной константы с фермиевской  $g^2/8M_W^2 = G_F/\sqrt{2}$ .

Помнящие выражение для асимптотики поляризационного оператора фотона при  $q^2 \gg m_e^2$  могут получить ту же формулу без всяких вычислений:

$$\Gamma_{W \rightarrow e\nu} = \frac{\text{Im} \Pi_W(q^2)}{M_W} = \frac{\alpha_W M_W^2}{2(\sqrt{2})^2 \cdot 3\pi M_W} \text{Im} \ln \left( \frac{\Lambda^2}{-q^2} \right) = \frac{g^2}{48\pi} M_W. \quad (111)$$

Подставляя числа, получим

$$\Gamma_{W \rightarrow e\nu} = 226 \text{ МэВ}, \quad \Gamma_W = 9\Gamma_{W \rightarrow e\nu} = 2,03 \text{ ГэВ}, \quad (112)$$

где учтены распады на  $\mu\nu$ ,  $\tau\nu$ ,  $u\bar{d}$  и  $c\bar{s}$  и кварковая ширина учитывает наличие трех цветов. Учет глюонной поправки к распаду  $W \rightarrow q\bar{q}$  домножает кварковую ширину на  $1 + \frac{\alpha_s(M_W)}{\pi}$ , несколько увеличивая ширину  $W$ -бозона:

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma_W &= \frac{\alpha_s}{\pi} \cdot 6\Gamma_{W \rightarrow e\nu} = 0,05 \text{ ГэВ}, \\ (\Gamma_W + \Delta\Gamma_W)_{\text{теор}} &= 2,09 \text{ ГэВ}, \end{aligned} \quad (113)$$

что согласуется с (106) (мы использовали значение  $\alpha_s(M_W) = 0,12$ ). Точное измерение параметров  $Z$ -бозона проделано на  $e^+e^-$ -коллайдерах СЛАК и ЦЕРН. Сечение рождения  $Z$ -бозона в  $e^+e^-$ -аннигиляции описывается формулой Брейта–Вигнера:

$$\sigma = \frac{4\pi(2J+1)}{2 \cdot 2M_Z^2} \frac{\Gamma_i \Gamma_f}{(E - M_Z)^2 + \Gamma_Z^2/4}, \quad (114)$$

где  $J = 1$  — спин резонанса;  $\Gamma_i$  — ширина распада  $Z \rightarrow e^+e^-$ ;  $\Gamma_f$  — ширина распада  $Z$  в конечное состояние;  $M_Z$  и  $\Gamma_Z$  — масса и полная ширина  $Z$ -бозона.

**Задача 2.** Оценить величину поправки к сечению в пике  $Z$ -бозона, описываемому формулой (114), за счет диаграммы, в которой промежуточный  $Z$ -бозон заменен фотоном.

Наблюдаемое на эксперименте сечение сильно отличается от брейт-вигнеровского за счет квантово-электродинамических радиационных поправок, связанных с испусканием реальных и виртуальных фотонов. Численно наиболее заметный эффект — дважды логарифмические поправки к сечению в резонансе. Дважды логарифмические поправки хорошо изучены в квантовой электродинамике (Судаков, 1956). Обычно уменьшающие сечение поправки такого типа от виртуальных фотонов сокращаются с испусканием реальных фотонов, и в полном сечении с учетом мягких фотонов больших дважды логарифмических поправок нет. Специфика узкого резонанса ( $Z$ -бозона) в том, что происходит «недокомпенсация» дважды логарифмов — испускание мягких фотонов с энергией, большей, чем ширина резонанса, «выводит» сечение из резонанса. В итоге сечение в пике  $Z$  подавлено множителем  $\exp \left[ -\frac{2\alpha}{\pi} \ln \left( \frac{M_Z^2}{m_e^2} \right) \ln \left( \frac{M_Z}{\Gamma_Z} \right) \right] \approx 0,7$ , где мы использовали  $\Gamma_Z = 2,5$  ГэВ (см. ниже). Сечение подавлено в полтора раза по сравнению с древесной формулой. Другой заметный эффект — асимметрия брейт-вигнеровской кривой — возникает за счет излучения фотона из начального электрона (или позитрона), когда суммарная энергия  $e^+e^-$  превышает массу  $Z$ . Излучение фотона возвращает реакцию в резонанс, и сечение увеличивается — правое крыло резонансной кривой приподнято. При анализе экспериментальных данных электродинамические эффекты тщательно учитываются; мы же в педагогических целях ограничимся обсуждением формулы (114). Положение максимума резонансной кривой и ее полуширина позволяют измерить  $M_Z$  и  $\Gamma_Z$ . Выход электрон-позитронных пар дает ширину распада  $Z \rightarrow e^+e^-$ ;  $\mu^+\mu^-$ - и  $\tau^+\tau^-$ -пар —  $\Gamma_Z \rightarrow \mu^+\mu^-, \tau^+\tau^-$ ; адронов —  $\Gamma_Z \rightarrow$  адроны. По «невидимой ширине  $Z$ » (равной разности полной ширины и суммы вероятностей распада на заряженные лептоны и кварки) находят ширину  $Z \rightarrow \nu\bar{\nu}$ . Из других наблюдаемых в  $Z$ -пике чрезвычайно важной является асимметрия вперед-назад  $A_{FB}$ , равная отношению разности сечений реакций  $e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow f\bar{f}$  в переднюю и заднюю полусферы к их сумме. Эта асимметрия возникает за счет поляризованности рождаемого  $Z$ -бозона. На ускорителе SLC имеется возможность создавать пучки продольно-поляризованных электронов, что позволяет измерять асимметрию  $A_{LR}$  — отношение разности числа  $Z$ -бозонов, рождаемых левыми и правыми электронами, к полному числу образующихся  $Z$ -бозонов. Также с хорошей точностью измеряется ширина  $Z$  в пару кварков  $b\bar{b}$  и с несколько худшей — в пару  $c\bar{c}$ .

Получим формулы, описывающие распады  $Z$ -бозона. Амплитуду распада на фермион-антифермионную пару запишем в следующем общем виде:

$$A_{Z \rightarrow f\bar{f}} = \frac{\bar{g}}{2} \bar{f} (g_V^f \gamma_\alpha + g_A^f \gamma_\alpha \gamma_5) f Z_\alpha, \quad (115)$$

где значения  $g_V$  и  $g_A$  определяются третьей проекцией изоспина и электрическим зарядом фермиона:  $g_V^f = T_3^f - 2Q^f \sin^2 \theta_W$ ,  $g_A^f = T_3^f$ . Проведя те же выкладки, что и для  $W$ -бозона (или воспользовавшись результатом (110)), для ширины распада  $Z$  получим

$$\Gamma_{Z \rightarrow f\bar{f}} = \frac{G_F M_Z^3}{6\sqrt{2}\pi} [(g_V^f)^2 + (g_A^f)^2] = 332 [(g_V^f)^2 + (g_A^f)^2] \text{ МэВ}. \quad (116)$$

Начнем с невидимой ширины: распада  $Z$ -бозона на пару нейтрино–антинейтрино.

Учитывая, что нейтрино бывает трех сортов ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ), получим

$$\Gamma_{Z \rightarrow \nu\nu}^{\text{теор}} = 3 \cdot 332 \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right] = 498 \text{ МэВ}, \quad (117)$$

что следует сравнить с экспериментальным результатом:

$$\Gamma_{\text{inv}}^{\text{эксп}} = (499 \pm 1,5) \text{ МэВ} \quad (118)$$

(inv — от invisible, невидимый). Согласие вполне удовлетворительное.

Значение этого совпадения фундаментально: в природе нет четвертого и последующих кварк-лептонных поколений, устроенных так же, как три известных поколения. Массы кварков и заряженных лептонов в каждом следующем поколении больше, чем в предыдущем. При этом можно ожидать, что фермионы последующих поколений так тяжелы, что они не рождаются на существующих ускорителях. Однако массы всех трех известных нейтрино гораздо меньше. Значит, наличие новых поколений должно приводить к существованию дополнительных (четвертого, пятого и т. д.) нейтрино, увеличивая тем самым невидимую ширину  $Z$ . Но это противоречит измерению (118). Таким образом, изучение  $Z$ -бозона позволяет заглянуть в кинематически (пока) недостижимую область энергий. Вместе с тем нельзя исключить существование последующих поколений, в которых масса нейтральных лептонов больше половины массы  $Z$ -бозона.

Перейдем к распаду  $Z$  на пару заряженных лептонов:  $e^+e^-$ ,  $\mu^+\mu^-$  и  $\tau^+\tau^-$ . В силу лептонной универсальности амплитуды этих распадов одинаковы. Приведем экспериментальные значения векторной и аксиальной констант распада  $Z$  на пару заряженных лептонов, полученные в приближении лептонной универсальности (которая отдельно проверена и хорошо выполняется в распадах  $Z \rightarrow l^+l^-$ ):

$$g_{Al}^{\text{эксп}} = -0,5012 \pm 0,0003, \quad (119)$$

$$g_{Vl}^{\text{эксп}} = -0,0378 \pm 0,0004. \quad (120)$$

Для извлечения численных значений этих двух параметров потребовались две измеряемые величины. Одной такой величиной является ширина распада  $Z$  в заряженные лептоны; другой — асимметрия вперед-назад в реакции  $e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow l^+l^-$ . Квадрируя амплитуду указанной реакции, получим

$$A_{\text{FB}} = \frac{\int_0^1 \frac{d\sigma}{d \cos \theta} d \cos \theta - \int_{-1}^0 \frac{d\sigma}{d \cos \theta} d \cos \theta}{\int_0^1 \frac{d\sigma}{d \cos \theta} d \cos \theta + \int_{-1}^0 \frac{d\sigma}{d \cos \theta} d \cos \theta} \sim \frac{g_V^e g_A^e g_V^l g_A^l}{[(g_V^e)^2 + (g_A^e)^2][(g_V^l)^2 + (g_A^l)^2]}. \quad (121)$$

**Задача 3.** Получить выражение для асимметрии вперед-назад в реакции  $e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow l^+l^-$ .

Измеряемая в Стэнфорде на SLC асимметрия  $A_{LR}$  (пропорциональная разности числа  $Z$ -бозонов, рождаемых левым и правым электронами) линейна по малой константе  $g_V^e$ , поэтому, обладая существенно меньшей статистикой, чем набранная на LEP, данные SLC

по  $g_V^e$  имеют точность, не сильно уступающую точности, достигнутой на LEP. Число (120) учитывает данные обоих ускорителей.

Каковы теоретические предсказания? Воспользовавшись значением синуса электрослабого угла (84), получим

$$g_{A_l}^{\text{теор}} = -0,5, \quad g_{V_l}^{\text{теор}} = -0,076. \quad (122)$$

Значение аксиальной константы неплохо согласуется с экспериментальным числом, чего нельзя сказать о векторной константе: различие достигает 95 экспериментальных ошибок. Это большое различие связано с тем, что при вычислении  $\sin \theta_W$  по формуле (83) было использовано значение постоянной тонкой структуры  $\alpha = (137 \dots)^{-1}$ , описывающее взаимодействие фотона с заряженными частицами при низких энергиях. В анализируемых нами процессах распада  $Z$ -бозона характерные энергии — порядка  $M_Z$ . Наличие двух этих шкал приводит к тому, что в радиационных поправках к слабым процессам возникают большие логарифмы  $\ln(M_Z/m_e)$ . Эти логарифмы связаны с изменением электромагнитной константы, и их удобно учесть с самого начала, отделив от собственно слабых радиационных поправок, которые будут рассмотрены в лекции 4. Отметим, что  $G_\mu$  и  $M_Z$  определяются сразу на шкале слабых взаимодействий, поэтому логарифмически усиленные радиационные поправки присутствуют только в беге  $\alpha$ . Ноль-зарядное поведение  $\alpha$  приводит к ее росту с увеличением энергии. Аккуратное вычисление дает:  $\alpha(M_Z) \equiv \bar{\alpha} = [128,95 \pm 0,05]^{-1}$ . Определенный по формуле (83) с заменой  $\alpha$  на  $\bar{\alpha}$  электрослабый угол смешивания будем называть  $\theta$  без индекса « $W$ ». Для  $\sin^2 \theta$  найдем

$$\sin^2 \theta = 0,2310(1), \quad (123)$$

и, подставляя это число в формулу для  $g_V^e$ , получаем

$$g_{V_l}^{\text{теор}}(\bar{\alpha}) = -0,0380 \pm 0,0002 \quad (124)$$

— число, прекрасно согласующееся с экспериментальным результатом (120). Используя аксиальную константу из (122) и векторную из (124), по формуле (116) для ширины распада  $Z$  в пару заряженных лептонов получим

$$\Gamma_{Z \rightarrow l^+ l^-}^{\text{теор}} = 83,48 \text{ МэВ}. \quad (125)$$

Приведем экспериментальное значение ширины распада  $Z$  на пару заряженных лептонов:

$$\Gamma_{Z \rightarrow l^+ l^-}^{\text{эксп}} = (83,98 \pm 0,09) \text{ МэВ}. \quad (126)$$

Наконец, перейдем к распадам  $Z$  в адроны. Аксиальная константа для верхних кварков равна  $+1/2$ , для нижних  $-1/2$ . Векторная константа верхних кварков  $g_{V_{\text{up}}} = \frac{1}{2} - \frac{4}{3}s^2$ , нижних —  $g_{V_{\text{down}}} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}s^2$ . Учитывая распады  $Z$ -бозона в  $u\bar{u}$ ,  $c\bar{c}$ ,  $d\bar{d}$ ,  $s\bar{s}$  и  $b\bar{b}$  и используя численное значение  $s^2$  из (123), имеем

$$\Gamma_{Z \rightarrow \text{адр}} = 3 \cdot 332 \left\{ 2 \left[ \frac{1}{4} + \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{3}s^2 \right)^2 \right] + 3 \left[ \frac{1}{4} + \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3}s^2 \right)^2 \right] \right\} \text{ МэВ} = 1676 \text{ МэВ}, \quad (127)$$

где первый множитель учитывает три цвета кварков. Для сравнения с экспериментом необходимо учесть радиационные поправки, возникающие за счет излучения и обмена глюонами. В первом порядке по  $\alpha_s$  они сводятся к умножению правой части (127) на  $(1 + \alpha_s/\pi)$ . Экспериментаторы приводят следующее значение:

$$\Gamma_{Z \rightarrow \text{адр}} = (1744 \pm 3) \text{ МэВ}. \quad (128)$$

Сравнивая две последние формулы и учитывая множитель  $1 + \alpha_s/\pi$ , получаем величину константы сильного взаимодействия на масштабе  $M_Z$ , следующую из полной ширины распада  $Z$  в адроны:

$$\alpha_s(M_Z) = 0,127 \pm 0,006. \quad (129)$$

Значение  $\alpha_s(M_Z)$ , определяемое из ширины адронных распадов  $Z$ , с учетом электро-слабых радиационных поправок и высших поправок по  $\alpha_s$ , смещается и становится равным 0,118. Ошибка же оказывается равной 0,003, делая адронные распады  $Z$  одним из лучших мест для определения численного значения константы сильного взаимодействия. Для полной ширины  $Z$ -бозона имеем

$$\Gamma_Z^{\text{теор}} = \left[ 498 + 3 \times 83,48 + \left( 1 + \frac{0,12}{\pi} \right) 1676 \right] \text{ МэВ} = 2488,5 \text{ МэВ}, \quad (130)$$

что следует сравнить с определяемым по форме резонансной кривой  $Z$ -бозона числом:

$$\Gamma_Z^{\text{эксп}} = (2495,2 \pm 2,3) \text{ МэВ}. \quad (131)$$

Для сечения рождения адронов в пике  $Z$  из формулы (114) следует

$$\sigma_{\text{адр}}^{\text{теор}} = \frac{12\pi}{M_Z^2} \frac{\Gamma_{Z \rightarrow e\bar{e}} \Gamma_{Z \rightarrow \text{адр}}}{\Gamma_Z^2} = 41,45 \text{ нб}, \quad (132)$$

что отстоит на два стандартных отклонения от экспериментального числа

$$\sigma_{\text{адр}}^{\text{эксп}} = (41,54 \pm 0,04) \text{ нб}, \quad (133)$$

где  $1 \text{ б} = 10^{-24} \text{ см}^2$ ,  $1 \text{ нб} = 10^{-9} \text{ б}$ .

Древесные формулы, в которых  $\alpha$  заменено на  $\bar{\alpha}$ , с неплохой точностью описывают распады  $Z$ -бозона. Наихудшее согласие — в параметре  $g_A$  — достигает четырех стандартных отклонений. Хуже обстоит дело с массой  $W$ -бозона — древесный результат (85) отстоит от экспериментального числа на 20 стандартных отклонений. Переход от  $\alpha$  к  $\bar{\alpha}$  изменяет теоретическое предсказание:

$$(M_W^{\text{теор}})' = \cos \theta M_Z = 79,96 \text{ ГэВ}, \quad (134)$$

тем не менее разница с экспериментальным числом по-прежнему на уровне 15 стандартных отклонений (теперь — в другую сторону). Учет электрослабых радиационных поправок приводит к хорошему описанию как массы  $W$ -бозона, так и параметров распада  $Z$  в рамках СМ.

Как уже было сказано в лекции 2, масса бозона Хиггса определяется константой, стоящей в лагранжиане при четвертичном члене по полям Хиггса:

$$\Delta \mathcal{L} = -\frac{1}{2} \lambda^2 \left[ H^+ H - \frac{\eta^2}{2} \right]^2, \quad M_H = \lambda \eta, \quad (135)$$

а необнаружение хиггсовского бозона на ускорителе LEP II показывает, что  $\lambda$  не мала:

$$M_H > 114 \text{ ГэВ} \implies \lambda \gtrsim 0,5. \quad (136)$$

Петли с обменом  $H$  сдвигают массы  $W$ - и  $Z$ -бозонов, а также влияют на константы взаимодействия  $Z$ -бозона с лептонами и кварками. Точное измерение этих величин для массы хиггсовского бозона дает (лекция 4)

$$M_H = 80_{-20}^{+30} \text{ ГэВ}; \quad (137)$$

на 95 %-м уровне достоверности (у. д.) с учетом прямого ограничения (136) было получено

$$M_H < 200 \text{ ГэВ}. \quad (138)$$

Это ограничение имеет место в стандартной модели и, как отмечается в лекции 4, новая физика может привести к петлевым поправкам, ликвидирующим центральное значение (137) и верхнее ограничение (138).

Наконец, тэватрон на 95 %-м у. д. исключает интервал  $175 > M_H > 158 \text{ ГэВ}$  (лето 2010 г.).

Увеличение константы самодействия хиггсовских бозонов  $\lambda$  приводит к сильному взаимодействию в хиггсовском секторе стандартной модели. При этом хиггсовский бозон, масса которого пропорциональна  $\lambda$ , становится тяжелым. Посмотрим, при каких  $\lambda$  и  $M_H$  это происходит (Бен Ли, Квиг, Тэкер; Велтман, 1977). Рассмотрим упругое рассеяние продольных  $Z$ -бозонов:  $Z_L Z_L \rightarrow Z_L Z_L$ . На древесном уровне амплитуда описывается тремя диаграммами (рис. 7).

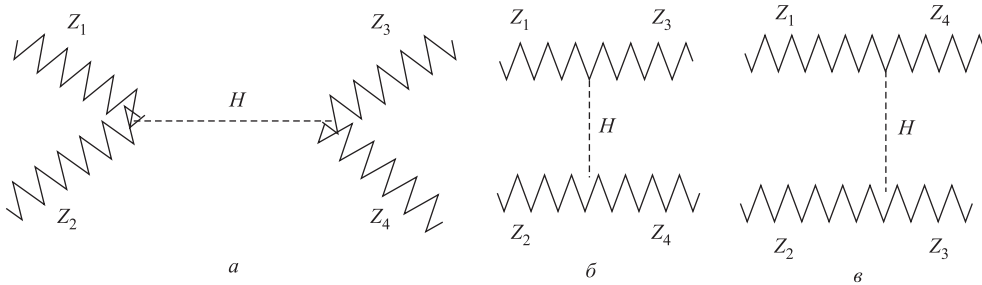


Рис. 7. Диаграммы, описывающие упругое рассеяние  $Z$ -бозонов

Для амплитуды рассеяния при высоких энергиях и для достаточно тяжелого хиггсовского бозона ( $s \gg M_H^2 \gg M_{W,Z}^2$ ) нетрудно получить

$$\begin{aligned} M &= 4\sqrt{2}G_F M_Z^4 \left[ \frac{(e_1 e_2)(e_3 e_4)}{s - M_H^2} + \frac{(e_1 e_3)(e_2 e_4)}{t - M_H^2} + \frac{(e_1 e_4)(e_2 e_3)}{u - M_H^2} \right] \approx \\ &\approx \sqrt{2}G_F \left[ \frac{s^2}{s - M_H^2} + \frac{t^2}{t - M_H^2} + \frac{u^2}{u - M_H^2} \right] = \\ &= \sqrt{2}G_F M_H^2 \left[ \frac{s}{s - M_H^2} + \frac{t}{t - M_H^2} + \frac{u}{u - M_H^2} \right] \approx 3\sqrt{2}G_F M_H^2, \quad (139) \end{aligned}$$

где мы использовали соотношение  $s + t + u = 4M_Z^2 \approx 0$ , и последнее равенство предполагает, что мы не рассматриваем рассеяние на малые углы.

Дифференциальное сечение рассеяния следующим образом выражается через квадрат модуля амплитуды:

$$d\sigma = \frac{|M|^2}{64\pi^2 s} dO = |f|^2 dO, \quad (140)$$

где мы ввели амплитуду рассеяния  $f$ , имеющую размерность длины. Амплитуда  $f$  описывает рассеяние частиц с определенными спиральностями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , падающими вдоль направления  $\bar{n}$  и разлетающимися вдоль направления  $\bar{n}'$ , причем спиральности разлетающихся частиц равны  $\lambda_3$  и  $\lambda_4$ . Направляя ось  $z$  по  $\bar{n}$ , найдем, что  $f$  следующим образом раскладывается по амплитудам рассеяния в состояниях с фиксированным полным моментом  $J$ :

$$\langle n', \lambda' | f | n, \lambda \rangle = \sum_J (2J+1) D_{\Lambda'\Lambda}^J(n') \langle \lambda' | f^J | \lambda \rangle, \quad (141)$$

где  $\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ ,  $\Lambda' = \lambda_3 - \lambda_4$ , а  $D_{\Lambda'\Lambda}^J$  — матрица конечных вращений (Берестецкий, Лифшиц, Питаевский). Условие унитарности  $S$ -матрицы для парциальных амплитуд дает

$$\text{Im } f^J = |\bar{p}| [(\text{Re } f^J)^2 + (\text{Im } f^J)^2 + \dots], \quad (142)$$

где многоточием обозначен вклад неупругих каналов,  $\bar{p}$  — импульс частиц в с. ц. и. Для вещественной части амплитуды рассеяния с фиксированным  $J$  получаем ограничение сверху:  $(\text{Re } f^J)^2 < (1/(2|\bar{p}|))^2$ . В случае продольных  $Z$ -бозонов  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$  и  $D_{00}^J = P_J(\cos \theta)$ ; (141) сводится к разложению по полиномам Лежандра<sup>1</sup>. Разложение (141) обобщает обычное разложение амплитуды рассеяния по парциальным амплитудам для случая бесспиновых частиц. Амплитуда (139) не зависит от угла рассеяния — значит, рассеяние идет в состоянии с  $J = 0$ , и, учитывая связь  $M$  и  $f$ , получим  $(\text{Re } M)^2 < (8\pi)^2$ .

Так как древесные графики дают вещественную амплитуду, то полученное ограничение применимо к  $s$ -волновой амплитуде (139):

$$3\sqrt{2}G_F M_H^2 < 8\pi, \quad M_H < \left( \frac{4\sqrt{2}\pi}{3G_F} \right)^{1/2} = 730 \text{ ГэВ}. \quad (143)$$

Если масса хиггса превышает полученное верхнее ограничение, то вычисление амплитуды  $Z_L Z_L$ -рассеяния в рамках теории возмущений неверно — велика роль промежуточных многочастичных состояний, и рассеяние векторных бозонов при ТЭВ-ной энергии похоже на рассеяние адронов при ГэВ-ных энергиях.

Велтман называет массу хиггса вторым порогом электрослабой теории (первый порог — массы  $W$  и  $Z$ , конечность которых обуславливает унитарность четырехфермионного рассеяния).

Протон-протонный коллайдер ЛНС имеет достаточные энергию и светимость для обнаружения бозона Хиггса во всем разрешенном интервале масс:

$$114 \text{ ГэВ} < M_H < 1 \text{ ТэВ}. \quad (144)$$

<sup>1</sup> В рассматриваемом в первой лекции  $\nu_e e$ -рассеянии также  $\Lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ ,  $\Lambda' = \lambda_3 - \lambda_4 = 0$ , и мы имеем рассеяние с  $J = 0$ .

Рассмотрим рождение  $H$  в  $pp$ -столкновениях. Константа взаимодействия бозона Хиггса с входящими в состав протона легкими кварками пропорциональна  $m_q/\eta$ , где  $m_q$  — лагранжевы массы легких кварков. Вклад данного механизма в рождение  $H$  ничтожен ( $m_q/\eta < 10 \text{ МэВ}/250 \text{ ГэВ} = 4 \cdot 10^{-5}$ ). Значительно большее сечение рождения обусловлено аннигиляцией входящих в состав протонов глюонов,  $gg \rightarrow H$ . Дублет хиггсов синглетен по цвету, поэтому глюоны не взаимодействуют с бозоном Хиггса на древесном уровне. Связь возникает за счет петлевых диаграмм, в которых в петле распространяются взаимодействующие как с глюонами, так и с хиггсом, кварки. Простейшая треугольная диаграмма показана на рис. 8. Если в петле распространяется кварк, масса которого  $m_q$  много меньше  $M_H$ , то  $m_q$  можно пренебречь в кварковых пропагаторах, и зависимость от  $m_q$  останется только в вершине  $\bar{q}qH$ , содержащей  $m_q/\eta$ . Если  $M_H$  — порядка 1 ТэВ, то доминировать в его рождении будет  $t$ -кварковая петля.

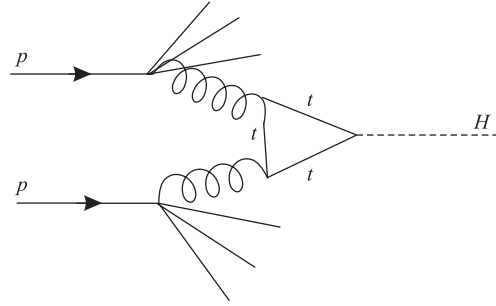


Рис. 8. Рождение хиггса в  $pp$ -столкновениях

В противоположном пределе  $M_H \ll 2m_t$  в  $t$ -кварковых пропагаторах можно пренебречь внешними импульсами. Сделать это надо аккуратно, выделив предварительно импульсы глюонов, которым диаграмма пропорциональна в силу калибровочной инвариантности ( $M \sim HG_{\mu\nu}^2$ ). Из размерных соображений ясно, что оставшийся интеграл обратно пропорционален  $m_t$ . Учитывая пропорциональность вершины  $\bar{t}tH$  массе  $t$ -кварка, окончательно получим, что в пределе  $M_H \ll 2m_t$  амплитуда изображенного на рис. 8 процесса не зависит от  $m_t$ . Треугольники с более легкими кварками по-прежнему подавлены как  $m_q/\eta$ . Итак, при всех  $M_H$  из разрешенного интервала (144)  $t$ -кварковый треугольник доминирует в рождении хиггса.

Вклад  $t$ -кварка в амплитуду для произвольного отношения  $M_H/2m_t$  определяется вычислением треугольной диаграммы. Однако в пределе  $M_H/2m_t \ll 1$  он может быть выписан сразу, если воспользоваться формулой, описывающей вклад  $t$ -кварка в бег константы сильного взаимодействия:

$$\alpha_s^t(\Lambda^2) = \frac{\alpha_s(m_t^2)}{1 - \frac{\alpha_s(m_t^2)}{6\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m_t^2}}, \quad (145)$$

где индекс « $t$ » подчеркивает, что учтен только вклад  $t$ -кварка, дающий рост константы  $\alpha_s$  с ростом импульса<sup>1</sup>. Эффективный низкоэнергетический глюонный лагранжиан имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}_{\text{эф}} = -\frac{1}{4g_s^2(\Lambda^2)} G_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{4g_s^2(m_t^2)} \left[ 1 - \frac{\alpha_s(m_t^2)}{6\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m_t^2} \right] G_{\mu\nu}^2, \quad (146)$$

<sup>1</sup>Известный из квантовой электродинамики коэффициент  $1/3$  заменяется на  $1/6$  в силу неабелевости теории:  $\text{tr } T_a T_b = (1/2)\delta_{ab}$ .



где глюонные поля нормированы так, что коммутаторный член в тензоре глюонного поля не содержит заряда  $g_s$ . Возвращаясь к стандартной нормировке глюонных полей, найдем дополнительный член в эффективном лагранжиане:

$$\delta\mathcal{L}_{\text{эф}} = \frac{\alpha_s(m_t^2)}{24\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_t^2}\right) G_{\mu\nu}^2. \quad (147)$$

Знание зависимости от имеющей хиггсовское происхождение массы  $t$ -кварка немедленно позволяет найти зависимость от поля  $H$ . Для этого надо сделать следующую замену:

$$m_t \rightarrow m_t \left(1 + \frac{H}{\eta}\right), \quad (148)$$

так как только в такой комбинации массы, имеющие хиггсовское происхождение, входят в лагранжиан стандартной модели. В линейном по  $H$  приближении получим

$$\delta\mathcal{L}_{\text{эф}} = \frac{\alpha_s}{12\pi\eta} H G_{\mu\nu}^2. \quad (149)$$

Наконец, для амплитуды перехода в пределе  $M_H \ll 2m_t$  найдем

$$M_{gg} = \frac{\alpha_s}{6\pi} G_{\mu\nu}^{a1} G_{\mu\nu}^{a2} \frac{H}{\eta}. \quad (150)$$

Так как параметром, от которого зависит треугольная амплитуда, является  $(M_H/2m_t)^2$ , точность выражения (150) достаточно высока для хиггсовского бозона СМ, масса которого меньше 200 ГэВ.

Для нахождения сечения рождения  $H$  в  $pp$ -столкновениях сечение аннигиляции  $gg \rightarrow H$  следует домножить на функции распределения глюонов в протонах и проинтегрировать по этим распределениям. Перейдем к распадам  $H$ . Амплитуда распада на пару фермион–антифермион получается из массового члена в лагранжиане с помощью преобразования (148):

$$\delta\mathcal{L} = m_f \bar{f} f \implies \frac{m_f}{\eta} H \bar{f} f. \quad (151)$$

Рис. 9. Распад хигса на пару  $b\bar{b}$

Доминирует распад на пару  $b\bar{b}$ . Соответствующая диаграмма Фейнмана приведена на рис. 9.

Квадрируя амплитуду, получим

$$\begin{aligned} |M|^2 &= N_c \left(\frac{m_f}{\eta}\right)^2 \text{Sp}(\hat{p}_1 + m)(\hat{p}_2 - m) = \\ &= N_c \left(\frac{m_f}{\eta}\right)^2 2(M_H^2 - 4m^2) = N_c \left(\frac{m_f}{\eta}\right)^2 2M_H^2 v^2, \end{aligned} \quad (152)$$

где  $N_c = 1$  для распада на лептоны и  $N_c = 3$  для распада на кварки, а  $v$  — скорость фермиона в системе покоя  $H$ . Амплитуда распада пропорциональна скорости — это

означает, что он идет в  $p$ -волне. В  $s$ -волне распад не идет, что можно понять из сохранения  $P$ -четности ( $P$ -четность пары фермион–антифермион в  $s$ -волне отрицательна, так как  $P$ -четности фермиона и антифермиона противоположны, В. Б. Берестецкий, 1948).

Окончательно для ширины распада получим

$$\Gamma_{f\bar{f}} = \frac{|M|^2 v}{2M_H 8\pi} = \frac{N_c}{8\pi} \left( \frac{m_f}{\eta} \right)^2 v^3 M_H. \quad (153)$$

Перейдем к распадам  $H$  на  $W$  и  $Z$ . Действуя описанным выше способом, найдем константы взаимодействия  $H$  с массивными векторными бозонами:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= M_W^2 |W|^2 + \frac{1}{2} M_Z^2 Z^2 \implies \frac{2H}{\eta} M_W^2 |W|^2 + \frac{H}{\eta} M_Z^2 Z^2 = \\ &= g M_W H |W|^2 + \frac{1}{2} \bar{g} M_Z H Z^2. \end{aligned} \quad (154)$$

По стандартным правилам найдем

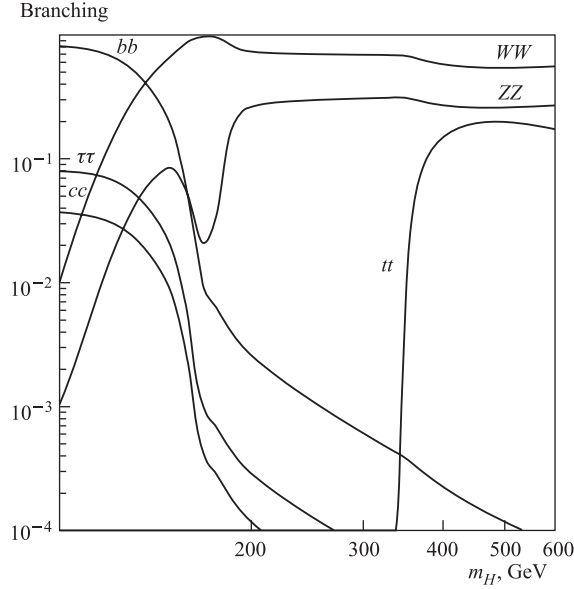
$$\Gamma_{H \rightarrow W^+ W^-} = \frac{\alpha M_H^3}{16s^2 M_W^2} \left[ 1 - \left( \frac{2M_W}{M_H} \right)^2 + 12 \left( \frac{M_W}{M_H} \right)^4 \right] \sqrt{1 - \frac{4M_W^2}{M_H^2}}. \quad (155)$$

Отметим, что в пределе  $M_H \gg M_W$  доминирует распад на продольно-поляризованные  $W$ , обязанные своим происхождением голдстоуновским полям  $H^\pm$ . Поэтому лидирующий член в (155) равен ширине распада хиггса на безмассовые голдстоуны  $H^0 \rightarrow H^+ H^-$  (одно из проявлений теоремы эквивалентности голдстоуновского бозона и состояния продольной поляризации «съевшего» его калибровочного бозона: в пределе  $E \gg M_V$  амплитуды рассеяния векторных бозонов совпадают с амплитудами рассеяния голдстоуновских бозонов, что и гарантирует перенормируемость калибровочной теории с хиггсовским механизмом генерации масс векторных частиц). При  $M_H \approx 4\sqrt{\pi} M_W / g$  ширина хиггсовского бозона достигает четверти его массы — ТэВ-ный хиггс ведет к сильному взаимодействию. Физика  $W$ ,  $H$  и  $Z$  на ТэВ-ной шкале должна напоминать физику адронов на ГэВ-ной шкале: резонансы, множественное рождение и т. д.

Ширина распада на пару  $Z$ -бозонов получается из (155) при учете того, что: а) при нахождении матричного элемента по лагранжиану фактор  $1/2$  сокращается, так как каждый оператор  $Z$  может родить любой из двух  $Z$ -бозонов; б) в фазовом объеме двух тождественных  $Z$  стоит множитель  $1/2!$ ; в) следует сделать замену  $\alpha$ ,  $M_W \rightarrow \alpha/c^2$ ,  $M_Z$ :

$$\Gamma_{H \rightarrow ZZ} = \frac{\alpha M_H^3}{32s^2 c^2 M_Z^2} \left[ 1 - \left( \frac{2M_Z}{M_H} \right)^2 + 12 \left( \frac{M_Z}{M_H} \right)^4 \right] \sqrt{1 - \frac{4M_Z^2}{M_H^2}}. \quad (156)$$

При  $M_H \approx 1$  ТэВ ширина хиггса становится порядка его массы; приближаются к унитарному пределу амплитуды рассеяния  $W$  и  $Z$  (см. выше). Результаты, полученные в рамках теории возмущений по константе связи, теряют достоверность — поправки к древесным амплитудам не малы. Тем самым на ТэВ-ных энергиях мы приходим к сильным взаимодействиям  $W$ ,  $Z$  и  $H$ , причиной чему является большая константа хиггсовского самодействия  $\lambda$  (ее близость к полюсу Ландау). На рис. 10 показана зависимость относительных вероятностей распадов по различным каналам от массы бозона Хиггса в

Рис. 10. Относительные вероятности распадов  $H$ 

стандартной модели. При  $M_H > 130$  ГэВ легче всего обнаружить хиггс по распадам на пару  $W$  или  $Z$ , один из которых может быть виртуальным. При меньших  $M_H$  доминирует распад  $H \rightarrow b\bar{b}$ , однако поиск таких распадов на адронном коллайдере затруднен большим фоном. Поэтому наиболее трудным для обнаружения на ЛНС является легкий бозон Хиггса, масса которого близка к нижней границе разрешенного интервала (144). Стратегия поиска легкого хиггса основана на его рождении вместе с  $W$ - или  $Z$ -бозоном с последующим распадом на пару  $b\bar{b}$ . В этой области масс перспективен распад на два фотона,  $H \rightarrow \gamma\gamma$ , малая относительная вероятность которого (частично) компенсируется яркой сигнатурой. Будучи нейтральным, хиггс взаимодействует с фотонами через петли, в которых распространяются заряженные частицы: лептоны, кварки и  $W$ -бозоны. Та же аргументация, что приводилась для треугольника, описывающего переход  $gg \rightarrow H$ , показывает, что в фермионных вкладах доминирует треугольник с  $t$ -кварком. В пределе  $M_H \ll 2M_W, 2m_t$  амплитуда распада  $H \rightarrow \gamma\gamma$  вычисляется аналогично амплитуде рождения  $gg \rightarrow H$ , только вместо эффективного глюонного надо рассмотреть эффективный фотонный лагранжиан и учесть бег постоянной тонкой структуры  $\alpha$  за счет вклада  $t$ -кварков и  $W$ -бозонов. Действуя описанным образом, вместо (150) получим

$$M_{\gamma\gamma} = \frac{\alpha}{4\pi} F_{\mu\nu}^1 F_{\mu\nu}^2 \frac{H}{\eta} \left[ \frac{4}{3} N_c Q_t^2 - 7 \right], \quad (157)$$

где первый член в квадратных скобках описывает вклад  $t$ -кварка ( $N_c = 3, Q_t = 2/3$ ), второй член — вклад  $W$ -бозона. Первый член получается из вклада дираковского фермиона в коэффициент функции Гелл-Манна–Лоу КЭД ( $-4/3$ ) с учетом заряда  $t$ -кварка и трех цветовых состояний, в которых он может пребывать. Второй член есть вклад  $W$ -бозона в функцию Гелл-Манна–Лоу. Его знак отвечает асимптотической свободе; впервые этот член был вычислен в работе В. С. Ваяшина и М. В. Терентьева 1965 г., посвященной электродинамике заряженных векторных бозонов.

Для вероятности распада найдем

$$\Gamma_{H \rightarrow \gamma\gamma} = \left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^2 \left(7 - \frac{16}{9}\right)^2 \frac{M_H^3}{16\pi\eta^2}, \quad (158)$$

и область применимости полученной формулы — достаточно легкий бозон Хиггса:  $(M_H/2m_t)^2 \ll 1$ ,  $(M_H/2M_W)^2 \ll 1$ . Как уже говорилось, первое неравенство справедливо во всей разрешенной в стандартной модели области масс  $114 < M_H < 200$  ГэВ: точная формула дает мало отличающееся значение для амплитуды с промежуточным  $t$ -кварком даже для  $M_H = 200$  ГэВ. Вклад  $W$ -бозона в случае  $M_H = 200$  ГэВ сильно отличается от полученного нами, что неудивительно. Однако в наиболее важной для этого распада области  $M_H < 130$  ГэВ вклад  $W$ -бозона мало отличается от асимптотического результата, и формула (158) достаточно точна.

**Задача 4.** Получить выражения для вероятностей распадов  $H \rightarrow W^+W^-$ ,  $H \rightarrow ZZ$ ,  $H \rightarrow \gamma\gamma$ . Изучить предел  $M_W, M_Z \rightarrow 0$ .

**Задача 5.** В то время как вероятности распадов заряженных лептонов ( $\mu, \tau$ ) и адронов ( $\pi^\pm, K, \dots$ ) пропорциональны  $G_F^2$ , вероятности распадов  $W^\pm, Z$  и  $H$  пропорциональны  $G_F$ . В этом смысле говорят, что эти частицы распадаются по «полуслабому» взаимодействию. Большая масса  $t$ -кварка ( $m_t \approx 175$  ГэВ) приводит к тому, что он также распадается полуслабо; доминирует распад  $t \rightarrow Wb$ . Найти время жизни  $t$ -кварка. Изучить предел  $M_W \rightarrow 0$  и связать полученный результат с теоремой эквивалентности.

Измерение  $M_H$  на ЛНС даст ответ на вопрос, является ли электрослабая теория теорией с малыми константами связи (легкий хиггс), или же выход за рамки теории возмущений необходим для ее описания (ТЭВ-ный хиггс).

#### ЛЕКЦИЯ 4. РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ В ЭЛЕКТРОСЛАБОЙ ТЕОРИИ, ФИТ СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ И МАССА БОЗОНА ХИГГСА

Необходимость учета радиационных поправок в электрослабой теории,  $\alpha(m_Z^2) \equiv \bar{\alpha}$ , формулы для  $\bar{\alpha}$ ,  $G_\mu$  и  $m_Z^2$  через затравочные параметры, формулы для физических наблюдаемых  $m_W, g_A$  и  $g_V$  через  $\bar{\alpha}, G_\mu$  и  $m_Z^2$  с учетом радиационных поправок, вычисление поправок  $\sim \alpha_W(m_t/m_Z)^2$  в поляризационных операторах векторных бозонов, размерная регуляризация, поправки  $\sim \alpha_W(m_t/m_Z)^2$  к  $m_W, g_A$  и  $g_V/g_A$ .

Вычисление поправок  $\sim \alpha_W \ln(m_H/m_Z)^2$  в поляризационных операторах векторных бозонов, поправки  $\sim \alpha_W \ln(m_H/m_Z)^2$  к  $m_W, g_A$  и  $g_V/g_A$ , фит экспериментальных данных в стандартной модели, новая физика.

Экспериментальная точность, с которой измерены параметры  $Z$ -бозона и масса  $W$ -бозона, составляет приблизительно 0,1%. Для вклада в эти величины электрослабых радиационных поправок должна работать следующая простая оценка:  $\delta \sim g^2/16\pi^2 = \alpha_W/4\pi = \alpha/4\pi \sin^2\theta \approx 0,2\%$ . Ясно, что для анализа экспериментальных данных учет поправок необходим. В этой лекции будет описана общая схема анализа электрослабых радиационных поправок и вычислены параметрически усиленные вклады.

Кратко напомним схему учета радиационных поправок в квантовой электродинамике. Лагранжиан теории содержит два параметра: константу связи электронов с фотоном  $e_0$  и массу электрона  $m_0$ . Радиационные поправки к затравочным значениям  $e_0$  и  $m_0$  расходятся и пропорциональны  $\alpha \ln(\Lambda/m_e)^2$ , где  $\Lambda$  — параметр ультрафиолетового обрезания. Взаимодействие перенормирует параметры затравочного лагранжиана. Экспериментально измеренные с очень высокой точностью масса электрона и постоянная тонкой структуры  $\alpha = e^2/4\pi$  накладывают следующие связи на параметры исходного лагранжиана:

$$e = e_0 \left[ 1 + c_e \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m_e^2} \right], \quad m = m_0 \left[ 1 + c_m \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m_e^2} \right], \quad (159)$$

где числа  $c_e$  и  $c_m$  определяются вычислением соответствующих фейнмановских диаграмм. В силу (159)  $e_0$  и  $m_0$  являются функциями  $\Lambda$ :  $e_0 \equiv e_0(\Lambda)$ ,  $m_0 \equiv m_0(\Lambda)$ . При вычислении амплитуды любого физического процесса (например, комптоновского рассеяния) мы получаем выражение следующего вида:  $A = A_0(e_0, m_0) + A_1(e_0, m_0, \Lambda)$ , где  $A_0$  — древесная амплитуда, а  $A_1$  — петлевая поправка, зависящая от затравочных параметров, ультрафиолетового обрезания  $\Lambda$ , а также от кинематических переменных. Перенормируемость теории гарантирует, что, подставляя в  $A_0$  выражения для  $e_0$  и  $m_0$  через  $e$ ,  $m$  и  $\Lambda$ , получаемые из (159), мы найдем конечное выражение для  $A$  через  $e$ ,  $m$  и различные кинематические переменные. Эта программа может быть проведена в любом порядке теории возмущений.

Аналогичный подход к вычислению радиационных поправок возможен и в  $SU(2) \times U(1)$  электрослабой калибровочной теории. Однако имеются существенные отличия от квантовой электродинамики. Заряды  $g$  и  $g'$  не измеряются на опыте непосредственно, и их (зависящие от определения) численные значения известны со сравнительно плохой точностью. Массы же калибровочных бозонов вообще не являются параметрами исходного лагранжиана. Поэтому физически более наглядным и наиболее быстро ведущим к искомым результатам является несколько иной подход (Высоцкий, Новиков, Окунь, Розанов). Для трех физических величин, известных с наилучшей точностью ( $G_\mu$ ,  $m_Z$  и  $\alpha$ ), выписываются выражения через затравочные параметры теории ( $g_0$ ,  $\bar{g}_0$  и  $\eta_0$ ) с учетом радиационных поправок, вносящих зависимость от параметра обрезания  $\Lambda$ . Соответствующие алгебраические уравнения обращаются, и находятся выражения для затравочных параметров теории через наиболее точно измеренные величины и параметр ультрафиолетового обрезания  $\Lambda$ :  $g_0 = g_0(G_\mu, m_Z, \alpha; \Lambda)$ ;  $\bar{g}_0 = \bar{g}_0(G_\mu, m_Z, \alpha; \Lambda)$ ;  $\eta_0 = \eta_0(G_\mu, m_Z, \alpha; \Lambda)$ . При этом используется формальная теория возмущений по затравочным (бесконечным при  $\Lambda \rightarrow \infty$ ) зарядам. На следующем этапе выписываются выражения для физических величин (скажем,  $m_W$ ) через затравочные параметры с учетом радиационных поправок  $m_W = m_W(g_0, \bar{g}_0, \eta_0; \Lambda)$ , и в эти выражения подставляются выражения для затравочных величин через наиболее точно измеренные величины:  $m_W = m_W[g_0(G_\mu, m_Z, \alpha; \Lambda), \bar{g}_0(G_\mu, m_Z, \alpha; \Lambda), \eta_0(G_\mu, m_Z, \alpha; \Lambda); \Lambda]$ . Благодаря перенормируемости теории зависимость от ультрафиолетового обрезания в полученных выражениях сокращается, и мы приходим к конечным выражениям для интересующих нас амплитуд через  $G_\mu$ ,  $m_Z$  и  $\alpha$ , в которых учтены (конечные) электрослабые радиационные поправки. В этой программе мы избегаем введения конечных электрослабых зарядов  $g$  и  $g'$  — для физики промежуточных бозонов эти параметры являются вторичными. Отметим, что для регуляризации фейнмановских интегралов в электрослабой теории удобно использовать метод размерной регуляризации, не противоречащий требованию локальной

калибровочной инвариантности. Вместо нарушающего локальную калибровочную инвариантность ультрафиолетового обрезания  $\Lambda$  промежуточные выражения содержат полюс  $1/\varepsilon$ , где  $D = 4 - 2\varepsilon$  — число размерностей пространства-времени, и зависят от параметра размерности массы  $\mu$ , вводимого для поддержания первоначальной размерности интегралов. В окончательных выражениях зависимость от  $\varepsilon$  и  $\mu$  исчезает.

Перейдем к выписыванию уравнений для наиболее точно измеренных величин и начнем с постоянной тонкой структуры  $\alpha$ , которая описывает поглощение реального фотона с бесконечно малой энергией покоящимся электроном. В случае КЭД сумма радиационных поправок к вершине и внешним фермионным линиям в этой кинематике равна нулю, и для вклада графиков (рис. 11, а и б) имеем

$$\alpha \equiv \alpha(q^2 = 0) = \frac{e_0^2}{4\pi} [1 - \Pi'_\gamma(0)], \quad (160)$$

где  $\Pi'_\gamma(0) = \left( \frac{d\Pi_\gamma(q^2)}{dq^2} \right)_{q^2=0}$ , а  $\Pi_\gamma(q^2)$  — коэффициент при  $g_{\mu\nu}$  в поляризованном операторе фотона  $\Pi_{\mu\nu}^\gamma(q^2)$ ; фейнмановской диаграмме отвечает выражение  $-i\Pi_{\mu\nu}$ .

Переход к уравнению для  $\alpha$  сокращает характеризующий внешнюю ногу коэффициент  $1/2$  в поправке. В электрослабой теории появляется дополнительный график (рис. 11, в).

Вклад фермионов в  $\Pi_{\gamma Z}$  пропорционален  $q^2$ , а вклад  $W^+W^-$ -петли зависит от калибровки. В унитарной калибровке  $\Pi_{\gamma Z}(0) = 0$ , но, не фиксируя калибровку заранее, мы обязаны удерживать это слагаемое (в частности, радиационная поправка к электрическому заряду нейтрино в  $R_\xi$ -калибровках зануляется только при учете  $\Pi_{\gamma Z}(0)$ ). Для левых электронов необходимо учитывать также вершинную диаграмму с обменом  $W$ -бозоном, поэтому мы рассматриваем взаимодействие фотона с правым электроном.

Легко убедиться, что диаграмма 11, в следующим образом изменяет уравнение (160):

$$\alpha = \frac{e_0^2}{4\pi} \left[ 1 - \Pi'_\gamma(0) - 2 \frac{s}{c} \frac{\Pi_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} \right], \quad (161)$$

где мы учли, что взаимодействие  $Z$ -бозона с  $e_R$  пропорционально  $-Qs^2\bar{g} = -Q\frac{s}{c}e$ , тогда как взаимодействие фотона пропорционально  $Qe$  ( $e \equiv \sqrt{4\pi\alpha}$ ).

Мы можем строить теорию радиационных поправок, исходя из уравнения (161). При этом древесные выражения для физических наблюдаемых будут зависеть от постоянной тонкой структуры  $\alpha$ , а петлевые поправки будут содержать  $\Pi'_\gamma(0) \sim \alpha \ln(\Lambda^2/m_{e,q}^2)$ , где  $m_e, m_q$  — массы лептонов и кварков. Как уже было сказано, ультрафиолетовые расходимости в окончательных выражениях исчезнут и останутся логарифмически усиленные поправки  $\sim \alpha \ln(M_Z^2/m_{e,q}^2)$ . Физический смысл этих поправок прост — они отвечают изменению (бегу, перенормировке) постоянной тонкой структуры от  $q^2 = 0$  до  $q^2 = M_Z^2$  — масштабу, характерному для электрослабой физики. Удобно учесть эти поправки с самого начала, отделяя чисто электродинамический эффект бега  $\alpha$  от собственно слабых

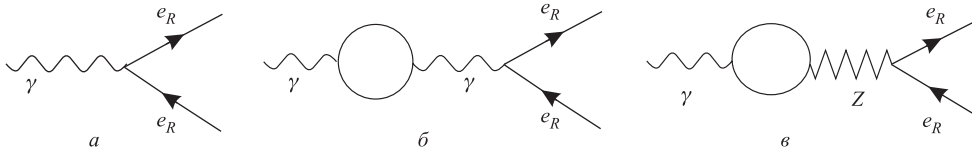


Рис. 11. Графики, перенормирующие затравочный заряд правого электрона

радиационных поправок. С этой целью определим электрослабую константу на масштабе  $M_Z$  с помощью следующего уравнения:

$$\bar{\alpha} \equiv \alpha(M_Z) = \frac{e_0^2}{4\pi} \left[ 1 - \frac{\Pi_\gamma(M_Z^2)}{M_Z^2} - 2 \frac{s}{c} \frac{\Pi_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} \right], \quad (162)$$

которое будет служить нам для выражения затравочных параметров модели через  $\bar{\alpha}$  (напомним, что  $e_0^2 = g_0^2(1 - g_0^2/\bar{g}_0^2)$ ).

Перед тем как переходить к уравнениям для  $G_\mu$  и  $m_Z$ , обсудим численное значение  $\bar{\alpha}$ . Деля (162) на (161), получим

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{1 - \delta\alpha}, \quad \delta\alpha = \Pi'_\gamma(0) - \frac{\Pi_\gamma(M_Z^2)}{M_Z^2}. \quad (163)$$

Отправление  $\delta\alpha$  в знаменатель отвечает суммированию лидирующих поправок  $\sim (\alpha \ln M_Z^2/m_{e,q}^2)^n$ , происходящих от итерации однопетлевой диаграммы рис. 11, б. Вычислим вклад электронов в  $\delta\alpha$ . Для поляризационного оператора фотона имеем

$$-i\Pi_{\mu\nu}^\gamma(q^2) = -4\pi\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Sp} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{k} - m} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{k} - \hat{q} - m}, \quad (164)$$

где знак «минус» перед интегралом обусловлен тем, что в петле распространяются фермионы. Вычислить логарифмически усиленную поправку к  $\alpha$  совсем просто. Пренебрежем массой электрона и разложим член  $(\hat{k} - \hat{q})^{-1}$  до приводящего к логарифмическому интегралу слагаемого:

$$\frac{1}{\hat{k} - \hat{q}} = \frac{1}{\hat{k}} + \frac{1}{\hat{k}} \hat{q} \frac{1}{\hat{k}} + \frac{1}{\hat{k}} \hat{q} \frac{1}{\hat{k}} \hat{q} \frac{1}{\hat{k}} + \dots \quad (165)$$

Удерживая последний член, получим

$$\Pi_{\mu\nu}^\gamma \approx -i4\pi\alpha \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Sp} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{k}} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{k}} \hat{q} \frac{1}{\hat{k}} \hat{q} \frac{1}{\hat{k}}. \quad (166)$$

Нетрудно убедиться, что  $\Pi_{\mu\nu}$  поперечен,  $\Pi_{\mu\nu} \sim q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu$  (причем не только в главном логарифмическом приближении, но и в общем виде при сохраняющей калибровочную инвариантность регуляризации).

**Задача 6.** Проверить поперечность  $\Pi_{\mu\nu}^\gamma$  в главном логарифмическом приближении (ГЛП).

Сворачивая индексы  $\mu$  и  $\nu$ , получим

$$\begin{aligned} \Pi_\gamma(q^2) &\approx \frac{-i4\pi\alpha}{3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-2)}{k^6} \text{Sp} \hat{k} \hat{q} \hat{k} \hat{q} = -i \frac{16\pi\alpha}{3} q^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 k^4} = \\ &= \frac{\alpha}{3\pi} q^2 \ln \frac{\Lambda^2}{\max[q^2, m_e^2]}, \end{aligned} \quad (167)$$

где мы обрезали интеграл наверху на  $\Lambda^2$ , а внизу он обрезается  $q^2$  при  $q^2 \gg m_e^2$  и  $m_e^2$  при  $m_e^2 \gg q^2$ . Наконец, с помощью (163) получим

$$\delta\alpha = \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left( \frac{M_Z^2}{m_e^2} \right). \quad (168)$$

Мы получили знаменитую формулу, описывающую рост электромагнитного заряда с увеличением импульса или с уменьшением расстояния. Это явление было в 50-х годах названо ноль-зарядом: требование конечности заряда на малых расстояниях приводит к полной экранировке его на больших расстояниях. Более аккуратное вычисление с учетом постоянного члена дает

$$\delta\alpha_l = \frac{\alpha}{3\pi} \sum_l \left[ \ln \frac{M_Z^2}{m_l^2} - \frac{5}{3} \right] = 0,0314, \quad (169)$$

где мы учли вклад  $e$ ,  $\mu$  и  $\tau$ . Теоретически вычислить вклад адронов в  $\delta\alpha$  не позволяет неумение работать с КХД в области малых энергий. Поэтому для его вычисления поступают следующим образом: записывается дисперсионный интеграл для вклада адронов в  $\Pi$ ; мнимая часть этого вклада пропорциональна сечению  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны. Для этого сечения используются экспериментальные данные при низких энергиях, а при высоких энергиях — партонная модель. В результате было найдено

$$\delta\alpha_h = 0,0276(4), \quad (170)$$

где неопределенность обусловлена экспериментальной ошибкой в измерении сечения. Заметим, что в  $\delta\alpha_h$  принято учитывать вклад пяти кварковых флэйворов; вклад  $t$ -кварка численно мал, и его относят к собственно электрослабым поправкам. Аналогично поступают с (маленьким) вкладом  $W$ -бозона.

Используя (169) и (170), из (163) получим

$$\alpha(M_Z) \equiv \bar{\alpha} = [128,95(5)]^{-1}. \quad (171)$$

Ошибка в  $\bar{\alpha}$  порядка  $10^{-3}$  делает эту величину наименее точно измеренной из наиболее точно измеренной тройки  $(\bar{\alpha}, M_Z$  и  $G_\mu)$ .

Закончим обсуждение электромагнитной константы формулой для  $\bar{\alpha}$  через затравочные параметры электрослабой модели

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{4\pi} g_0^2 \left( 1 - \frac{g_0^2}{\bar{g}_0^2} \right) \left[ 1 - \frac{\Pi_\gamma(M_Z^2)}{M_Z^2} - 2 \frac{s}{c} \frac{\Pi_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} \right]. \quad (172)$$

Перейдем к уравнению для массы  $Z$ -бозона.

Суммируя графики рис. 12 и учитывая, что петлевой диаграмме отвечает выражение  $-i\Pi_{\mu\nu}$ , получим

$$G_{\mu\nu}^Z = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 - M_{Z_0}^2 + \Pi_Z(k^2)} + \dots, \quad (173)$$



Рис. 12. Одевание затравочного пропагатора  $Z$ -бозона



где многоточием обозначена не интересующая нас продольная часть пропагатора  $Z$ -бозона. Массе  $Z$ -бозона отвечает полюс пропагатора:

$$M_Z^2 = M_{Z_0}^2 - \Pi_Z(M_Z^2), \quad M_{Z_0} = \frac{\bar{g}_0 \eta_0}{2}. \quad (174)$$

В древесном приближении амплитуда распада мюона изображена на рис. 1. Радиационные поправки к ней удобно разделить на две части: аналогичное рис. 12 одевание пропагатора  $W$ -бозона, описываемое величиной  $\Pi_W(0)$  (вклад продольной части  $\Pi_{\mu\nu}(W)$  подавлен как  $m_\mu m_e / m_W^2$  и может быть опущен), и вершинные поправки и квадраты, обозначаемые буквой  $D$ ,

$$\frac{G_\mu}{\sqrt{2}} = \frac{g_0^2}{8m_{W_0}^2} \left[ 1 + \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} + D \right] = \frac{1}{2\eta_0^2} \left[ 1 + \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} + D \right]. \quad (175)$$

Может встать вопрос, не возникает ли усиленных логарифмических поправок, отвечающих бегу слабого заряда от  $q^2 \approx m_\mu^2$  до  $q^2 \approx M_W^2$  в формуле (175), аналогично тому, как это происходит в формуле (160), где производная поляризационного оператора фотона  $\Pi'_\gamma(0)$  содержит  $\ln(\Lambda^2/m_e^2)$ . Поляризационный оператор  $W$ -бозона  $\Pi_W(q^2)$  содержит аналогичный логарифм,  $\Pi_W(q^2) \sim q^2 \ln \frac{\Lambda^2}{\max(q^2, m_e^2)}$ , но ненулевая масса  $W$ -бозона приводит к отсутствию логарифмической перенормировки слабого заряда от  $q^2 \sim m_\mu^2$  до  $q^2 \sim M_W^2$ . Мы видим, что логарифмическая перенормировка заряда происходит при импульсах, больших не только масс виртуальных частиц в петлях, но и массы соответствующего векторного бозона. Поэтому в физике  $W$ - и  $Z$ -бозонов большой логарифм имеется только в беге  $\alpha$ , и формула (172) уже избавлена от него. Работая с  $\bar{\alpha}$ , мы учитываем бег  $\alpha$  с самого начала.

Выпишем полученную нами систему уравнений:

$$G_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\eta_0^2} \left[ 1 + \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} + D \right], \quad (176)$$

$$M_Z^2 = \frac{1}{4}\bar{g}_0^2\eta_0^2 - \Pi_Z(M_Z^2), \quad (177)$$

$$4\pi\bar{\alpha} = g_0^2 \left( 1 - \frac{g_0^2}{\bar{g}_0^2} \right) \left[ 1 - \frac{\Pi_\gamma(M_Z^2)}{M_Z^2} - 2\frac{s}{c} \frac{\Pi_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} \right], \quad (178)$$

и найдем выражения для затравочных параметров. Из (176)

$$\eta_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}G_\mu} \left[ 1 + \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} + D \right]. \quad (179)$$

Подставляя выражение для  $\eta_0$  в (177), найдем  $\bar{g}_0$

$$\bar{g}_0^2 = 4\sqrt{2}G_\mu M_Z^2 \left[ 1 + \frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} - D \right]. \quad (180)$$

Наконец, из выражения (178) найдем  $g_0$ . Поделим для этого правую и левую части (178) на  $\bar{g}_0$  и подставим в левую часть выражение для  $\bar{g}_0$  из (180). После простых преобразований получим

$$\frac{g_0^2}{\bar{g}_0^2} \left( 1 - \frac{g_0^2}{\bar{g}_0^2} \right) = \frac{\pi\bar{\alpha}}{\sqrt{2}G_\mu M_Z^2} \left( 1 + \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} - \frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} + \frac{\Pi_\gamma(M_Z^2)}{M_Z^2} + 2\frac{s}{c} \frac{\Pi_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} + D \right). \quad (181)$$

Вводя электрослабый угол смешивания  $\theta$  согласно формуле

$$\sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{\pi\bar{\alpha}}{\sqrt{2}G_\mu M_Z^2}, \quad \sin^2 \theta = 0,2310(1) \quad (182)$$

(сравни формулу (83) и замечания после формулы (122)) и обозначая  $s \equiv \sin \theta$ ,  $c \equiv \cos \theta$ , из уравнения (181) мы получим

$$\frac{g_0}{\bar{g}_0} = c \left[ 1 + \frac{s^2}{2(c^2 - s^2)} \left( \frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} - \frac{\Pi_\gamma(M_Z^2)}{M_Z^2} - 2\frac{s}{c} \frac{\Pi_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} - D \right) \right]. \quad (183)$$

Пропорциональность поправки  $s^2$  естественна: если бы  $U(1)$ -заряд  $g'_0$  был равен нулю, то  $s^2 = 0$  и  $g_0 = \bar{g}_0$ . Формулы (179), (180) и (183) решают поставленную задачу, выражая затравочные параметры теории через  $\bar{\alpha}$ ,  $M_Z$ ,  $G_\mu$  и радиационные поправки, содержащие ультрафиолетовые расходимости.

Теперь мы переходим к получению и анализу формул для физических наблюдаемых. Начнем с массы  $W$ -бозона. Аналогично (174) имеем

$$M_W^2 = M_{W_0}^2 - \Pi_W(M_W^2), \quad M_{W_0} = \frac{g_0 \eta_0}{2}. \quad (184)$$

Деля (184) на (174), получим

$$\frac{M_W}{M_Z} = \frac{g_0}{\bar{g}_0} \left[ 1 + \frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{2M_Z^2} - \frac{\Pi_W(M_W^2)}{2M_W^2} \right]. \quad (185)$$

Подставляя в (185) отношение затравочных зарядов из (183), окончательно получим

$$\frac{M_W}{M_Z} = c + \frac{c^3}{2(c^2 - s^2)} \left( \frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(M_W^2)}{M_W^2} \right) + \frac{cs^2}{2(c^2 - s^2)} \left( \frac{\Pi_W(M_W^2)}{M_W^2} - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} - \frac{\Pi_\gamma(M_Z^2)}{M_Z^2} - 2\frac{s}{c} \frac{\Pi_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} - D \right). \quad (186)$$

Непосредственным вычислением проверяется сокращение ультрафиолетовых расходимостей в полученной формуле.

Перейдем к распаду  $Z$ -бозона на пару заряженных лептонов. Вспоминая, что  $Z$ -бозон взаимодействует с фермионами в соответствии с формулой (67), в древесном приближении для амплитуды распада получим

$$A_0 = \frac{\bar{g}_0}{2} \bar{e} \left[ -\frac{1}{2} \gamma_\alpha \gamma_5 - \left( \frac{1}{2} - 2s_0^2 \right) \gamma_\alpha \right] e Z_\alpha, \quad (187)$$

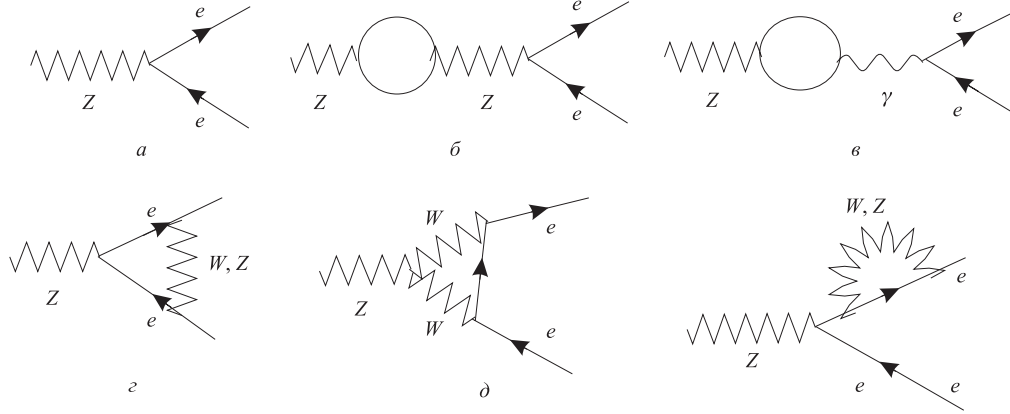


Рис. 13. Амплитуда распада  $Z \rightarrow e^+e^-$  с учетом петлевых поправок

где  $s_0^2 \equiv 1 - g_0^2/\bar{g}_0^2$ . Для учета радиационных поправок в (187) следует подставить выражения (180) и (183) для  $\bar{g}_0$  и  $g_0/\bar{g}_0$ , а также учесть петлевые поправки к древесной диаграмме, изображенные на рис. 13.

В результате имеем

$$A = \sqrt{\sqrt{2}G_\mu M_Z^2} \left[ 1 + \frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{2M_Z^2} - \frac{\Pi_W(0)}{2M_W^2} - \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}\Pi'_Z(M_Z^2) \right] \times \\ \times \left\{ \left( -\frac{1}{2} + F_A \right) \bar{e}\gamma_\alpha\gamma_5 e + \left[ 2s^2 - \frac{1}{2} + F_V + 2cs \frac{\Pi_{Z\gamma}(M_Z^2)}{M_Z^2} + \frac{2s^2c^2}{c^2 - s^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} - \frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} + \frac{\Pi_\gamma(M_Z^2)}{M_Z^2} + 2\frac{s}{c} \frac{\Pi_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} + D \right) \right] \bar{e}\gamma_\alpha e \right\}, \quad (188)$$

где множитель  $\Pi'_Z(M_Z^2)$  происходит от диаграммы рис. 13, б, а функции  $F_A$  и  $F_V$  отвечают вкладам диаграмм рис. 13, з-е без учета обмена фотоном. Фотонные обмены и излучение реального фотона удобно отделить от амплитуды  $A$  и добавить к вероятности распада  $Z \rightarrow e^+e^-$  (+ излучение фотона). Выражение (188) свободно от ультрафиолетовых расходимостей.

Запишем амплитуду распада  $Z \rightarrow e^+e^-$  в виде (ср. (115))

$$A = \sqrt{\sqrt{2}G_\mu M_Z^2} \bar{e}[g_A\gamma_\alpha\gamma_5 + g_V\gamma_\alpha]eZ_\alpha. \quad (189)$$

Уравнение (188) определяет значения феноменологических параметров  $g_V$  и  $g_A$  с учетом радиационных поправок.

Таким образом, получены выражения для величин, подверженных влиянию сильного взаимодействия лишь на уровне двух петель (глюонные поправки). Поэтому мы вправе рассчитывать на хорошую точность теоретических формул, учитывающих электрослабые радиационные поправки.

В поляризационные операторы промежуточных векторных бозонов в одной петле дают вклад все фундаментальные частицы стандартной модели: кварки, лептоны, бозон Хиггса, векторные бозоны. Единственное исключение — глюоны, их вклад появляется

на двухпетлевом уровне. Из всех этих вкладов параметрически усилен вклад третьего поколения кварков из-за большого нарушения  $SU(2)_V$ -симметрии разницей масс  $t$ - и  $b$ -кварков. Это нарушение приводит к усилению отличия  $\Pi_W$  от  $\Pi_Z$ ,  $\Pi_Z - \Pi_W \sim \alpha_W (m_t)^2$ . Нетрудно проверить, что именно эта разность входит в формулы (186), (188).

Последняя не открытая на сегодняшний день частица (в рамках СМ) — бозон Хиггса. Нижнее ограничение на его массу  $M_H > 114$  ГэВ на 95 %-м уровне достоверности следует из того, что на ускорителе LEP II при максимальной энергии  $e^+e^-$ -пары  $\sqrt{s} = 210$  ГэВ не наблюдалась реакция  $e^+e^- \rightarrow Z^* \rightarrow ZH$  с последующим распадом  $H \rightarrow b\bar{b}$ . Верхнее ограничение на  $M_H$  дают точные вычисления  $M_W$  и параметров  $Z$ -бозона, обсуждением которых мы занимаемся.

В оставшейся части этой лекции мы вычислим усиленные вклады в поляризационные операторы, пропорциональные  $m_t^2$  и  $\ln m_H^2$ . Начнем с вклада дублета  $(b, t)$ . Вклад  $t$ -кварка в  $\Pi_\gamma(q^2)$  при  $m_t^2 \gg q^2$  подавлен как  $q^4/m_t^2$ , то же относится к  $\Pi_{\gamma Z}(q^2)$ . Это подавление связано с сохранением диагональных векторных токов, в силу которого для фермионных вкладов имеем:  $\Pi_\gamma(q^2), \Pi_{\gamma Z}(q^2) \sim [g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu] \Pi(q^2/m_t^2)$ . Также ясно, что  $t$ -кварк не дает вклада ни в  $D$ , ни в  $F_i$ . В пределе  $m_t^2 \gg m_W^2, m_Z^2$  имеем:  $\Pi(m_V^2) = \Pi(0)$ . Поэтому окончательно получим

$$\frac{M_W}{M_Z} = c + \frac{c^3}{2(c^2 - s^2)} \left( \frac{\Pi_Z(0)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} \right), \quad (190)$$

$$g_A = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \left( \frac{\Pi_Z(0)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} \right), \quad (191)$$

$$\frac{g_V}{g_A} = 1 - 4s^2 + \frac{4c^2 s^2}{c^2 - s^2} \left( \frac{\Pi_Z(0)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} \right). \quad (192)$$

Интересующая нас разность поляризационных операторов может быть вычислена немедленно, мы же используем эту возможность для несколько более подробного обсуждения.

Интегралы, отвечающие фермионным вкладам в поляризационные операторы, расходятся при больших импульсах виртуальных частиц. Для их регуляризации мы используем метод продолжения по размерности.

Проведем вычисление диаграммы рис. 14 для случая векторных и аксиальных токов:

$$-i\Pi_{\mu\nu}^\psi(q^2) = - \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D \mu^{D-4}} \frac{\text{Sp} \gamma_\mu(\gamma_5)(\hat{k} + m_1)\gamma_\nu(\gamma_5)(\hat{k} + \hat{q} + m_2)}{(k^2 - m_1^2)((k+q)^2 - m_2^2)}, \quad (193)$$

где верхний индекс « $\psi$ » символизирует вклад фермионов. Знак « $-$ » перед интегралом обусловлен фермионами, распространяющимися в петле, и мы опустили константы связи.

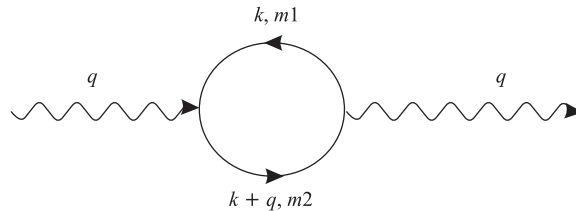


Рис. 14. Вклад фермионной петли в поляризационный оператор векторных бозонов

Множитель  $\mu^{D-4}$  вводится для того, чтобы размерность поляризационного оператора не зависела от числа измерений. Матрицы  $\gamma_5$  появляются в случае аксиальных токов. Пользуясь формулой

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[ax + b(1-x)]^2}, \quad (194)$$

объединяем пропагаторы и делаем сдвигку переменной интегрирования  $k \rightarrow k - qx$  (что допустимо, так как при  $D < 2$  интеграл сходится):

$$i\Pi_{\mu\nu}^{\psi}(q^2) = \int \frac{d^D k dx \text{Sp } \gamma_{\mu}(\gamma_5)(\hat{k} - x\hat{q} + m_1)\gamma_{\nu}(\gamma_5)(\hat{k} + \hat{q} - x\hat{q} + m_2)}{(2\pi)^D \mu^{D-4} [k^2 + q^2 x(1-x) - m_2^2 x - m_1^2(1-x)]^2}. \quad (195)$$

Перейдем к вычислению шпура  $\gamma$ -матриц. Матрица  $\gamma_5$  является с точки зрения изменения размерностей пространства-времени плохим объектом; тем не менее для вычисления поляризационных операторов в теориях с киральными фермионами достаточно использовать формальное определение матрицы  $\gamma_5$  как матрицы, антикоммутирующей с матрицами  $\gamma_{\mu}$  при всех  $\mu$ , квадрат которой равен единице. Пользуясь этим определением и стандартными правилами для вычисления шпуров, получим

$$i\Pi_{\mu\nu}^{\psi}(q^2) = \int \frac{4dx d^D k}{(2\pi)^D (\mu)^{D-4}} \times \frac{[2k_{\mu}k_{\nu} - k^2 g_{\mu\nu} + x(x-1)(2q_{\mu}q_{\nu} - g_{\mu\nu}q^2) \pm m_1 m_2 g_{\mu\nu}]}{[k^2 + x(1-x)q^2 - m_2^2 x - (1-x)m_1^2]^2}, \quad (196)$$

где знак « $\pm$ » перед членом  $m_1 m_2$  появляется в случае аксиальных токов. Используя формулу усреднения по направлениям

$$k_{\mu}k_{\nu} = \frac{1}{D} g_{\mu\nu} k^2 \quad (197)$$

и делая виковский поворот ( $k_0 \rightarrow ik_D$ ), получим интеграл по евклидову пространству

$$\Pi_{\mu\nu}^{\psi}(q^2) = \int \frac{4dx d^D k}{(2\pi)^D (\mu)^{D-4}} \times \frac{(1-2/D)k^2 g_{\mu\nu} + x(x-1)(2q_{\mu}q_{\nu} - g_{\mu\nu}q^2) + (-)m_1 m_2 g_{\mu\nu}}{[k^2 - q^2 x(1-x) + m_2^2 x + m_1^2(1-x)]^2}. \quad (198)$$

Для вычисления интеграла по импульсам в методе размерной регуляризации требуется знание одного табличного интеграла:

$$\int \frac{d^D k (k^2)^s}{(k^2 + m^2)^{\alpha}} = \frac{\pi^{D/2} \Gamma(D/2 + s) \Gamma(\alpha - D/2 - s)}{\Gamma(D/2) \Gamma(\alpha)} (m^2)^{\frac{D}{2} - \alpha + s}, \quad (199)$$

где  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  — гамма-функция Эйлера, имеющая простые полюса при целых неположительных значениях аргумента, которые сигнализируют об ультрафиолетовой расходимости исходного интеграла ( $D = 4$ ,  $\alpha - s = 2$  — логарифмическая расходимость,  $\alpha - s = 1$  — квадратичная расходимость). К квадратичной расходимости при  $D = 4$

приводит первый член в числителе (198). Ей отвечает полюс  $\Gamma$ -функции при  $D = 2$ . Этот полюс компенсируется множителем  $1 - 2/D$ , уничтожающим «квадратичную расходимость» в методе размерной регуляризации. Используя интеграл (199), после простых преобразований имеем

$$\Pi_{\mu\nu}^{\psi} = \frac{\Gamma(2 - D/2)}{2^{D-2} \mu^{D-4} \pi^{D/2}} \int_0^1 dx [m_1^2(1-x) + m_2^2 x - q^2 x(1-x)]^{\frac{D}{2}-2} \{2x(1-x) \times \\ \times (q^2 g_{\mu\nu} - q_{\mu} q_{\nu}) + g_{\mu\nu}((-)m_1 m_2 - m_1^2(1-x) - m_2^2 x)\}. \quad (200)$$

Диагональный векторный ток сохраняется, поэтому в пределе  $m_1 = m_2$  поляризационный оператор векторных токов должен быть поперечным. Очевидно, что в методе размерной регуляризации последнее требование автоматически выполняется — коэффициент при  $g_{\mu\nu}$  во втором члене в фигурных скобках тождественно равен нулю.

**Задача 7.** В лекции 2 говорилось, что в безмассовой электродинамике в двумерном пространстве-времени (модель Швингера) фотон становится массивным. а) Проверить это утверждение, используя (200) и учитывая, что константа связи в  $D = 2$  имеет размерность массы. б) Найти кулоновский потенциал в  $D = 2$  в древесном приближении и с учетом поляризационного оператора фотона для безмассовых фермионов. в) Найти поляризационный оператор для массивных фермионов и вычислить кулоновский потенциал, подобрав интерполяционную формулу для поляризационного оператора. г) Рассмотреть пределы  $m \ll g$  и  $m \gg g$ .

Интересуясь значением поляризационного оператора при  $D = 4$ , положим  $D = 4 - 2\varepsilon$  и устремим  $\varepsilon$  к нулю. Используя формулу

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \Gamma(1 + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon), \quad \gamma = -\Gamma'(1) = 0,577 \dots \text{ — постоянная Эйлера,} \quad (201)$$

и отбрасывая зануляющиеся при  $\varepsilon \rightarrow 0$  члены, получим

$$\Pi_{\mu\nu}^{\psi} = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \left( \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi \right) \left[ \frac{1}{3} (q^2 g_{\mu\nu} - q_{\mu} q_{\nu}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (m_1^2 + m_2^2 - (+) 2m_1 m_2) \right] + \right. \\ \left. + \int_0^1 dx [2x(x-1)(q^2 g_{\mu\nu} - q_{\mu} q_{\nu}) + g_{\mu\nu} (m_1^2(1-x) + m_2^2 x - (+) m_1 m_2)] \times \right. \\ \left. \times \ln \left( \frac{m_1^2(1-x) + m_2^2 x - q^2 x(1-x)}{\mu^2} \right) \right\}. \quad (202)$$

При  $m_1 = m_2$  результат интегрирования выражается через элементарные функции.

От общего рассмотрения перейдем к интересующему нас вкладу дублета  $(t, b)$  в разность  $\Delta\Pi$  (рис. 15):

$$\Delta\Pi^{\psi} \equiv \frac{\Pi_Z^{\psi}(0)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W^{\psi}(0)}{M_W^2}. \quad (203)$$

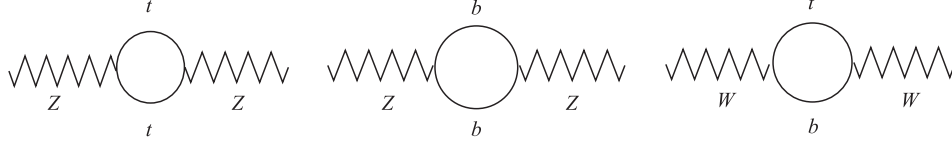


Рис. 15. Графики, приводящие к усиленному как  $(m_t/m_Z)^2$  вкладу в электрослабые радиационные поправки

Взаимодействие  $Z$ -бозона диагонально и пропорционально  $T_3 - Qs^2$ . Пропорциональные вклады  $Q^2s^4$  и  $Qs^2$  даются корреляторами векторных токов и зануляются при  $q^2 = 0$ . Ненулевой вклад дает коррелятор аксиальных токов. В случае  $W$ -бозона надо учитывать вклады и векторных, и аксиальных корреляторов (равные в пределе  $m_b = 0$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\Pi_Z^\psi(0)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W^\psi(0)}{M_W^2} &= \frac{\bar{g}^2 \Pi_A^\psi(m_t, m_t)}{16 M_Z^2} - \frac{g^2 \Pi_A^\psi(m_t, 0) + \Pi_V^\psi(m_t, 0)}{8 M_W^2} = \\ &= \frac{\bar{g}^2 \cdot 3}{64\pi^2 M_Z^2} \int_0^1 dx \left[ 2m_t^2 \ln \left( \frac{m_t^2}{\mu^2} \right) \right] - \frac{g^2 \cdot 3}{32\pi^2 M_W^2} \int_0^1 dx \left[ 2m_t^2(1-x) \ln \left( \frac{m_t^2(1-x)}{\mu^2} \right) \right] = \\ &= -\frac{g^2 \cdot 2m_t^2 \cdot 3}{32\pi^2 M_W^2} \int_0^1 (1-x) \ln(1-x) dx = \frac{3g^2 m_t^2}{64\pi^2 M_W^2} = \frac{3\bar{\alpha}}{16\pi c^2 s^2} \left( \frac{m_t}{M_Z} \right)^2, \quad (204) \end{aligned}$$

где дополнительный фактор 3 возникает от суммирования по трем цветам кварков.

Перейдем к вычислению поправок, зависящих от  $M_H$ . Диаграммы, в которых бозон Хиггса испускается фермионами, подавлены как  $m_f/\eta$ , поэтому их учитывать не нужно. Как и в случае  $t$ -кварка, остаются лишь поляризионные операторы векторных бозонов. Удобно проводить вычисления в унитарной калибровке, так как в ней отсутствуют нефизические степени свободы (поля  $H^\pm$  и  $\text{Im}H^0$ ). В одной петле нейтральный физический бозон Хиггса  $H^0$  не взаимодействует с фотоном, поэтому нас будут интересовать только поправки к  $\Pi_Z$  и  $\Pi_W$ , отвечающие диаграммам рис. 16. Соответствующие константы связи определяются частью лагранжиана (57), описывающей кинетическую энергию хиггсовского поля, с заменой производной на ковариантную. Тот же результат можно получить, заменяя в массовых членах векторных полей вакуумное

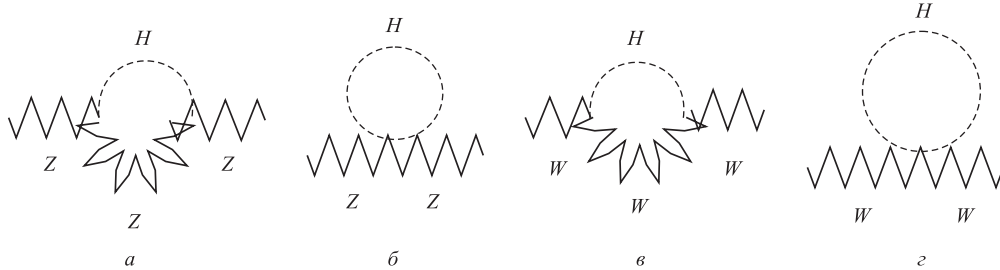


Рис. 16. Вклад хиггсовского бозона в поляризионные операторы векторных бозонов

среднее  $\eta$  на  $\eta + H^0$ :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{g\eta}{2}\right)^2 |W|^2 + \left(\frac{\bar{g}\eta}{2\sqrt{2}}\right)^2 Z^2 &\rightarrow \left(\frac{g(\eta + H^0)}{2}\right)^2 |W|^2 + \left(\frac{\bar{g}(\eta + H^0)}{2\sqrt{2}}\right)^2 Z^2 = \\
 &= \left(\frac{g\eta}{2}\right)^2 |W|^2 + \left(\frac{\bar{g}\eta}{2\sqrt{2}}\right)^2 Z^2 + \frac{1}{2}g^2\eta H^0 |W|^2 + \frac{g^2}{4}H^{0^2}|W|^2 + \\
 &+ \frac{1}{4}\bar{g}^2\eta H^0 Z^2 + \frac{1}{8}\bar{g}^2 H^{0^2} Z^2 = M_W^2 |W|^2 + gM_W H^0 |W|^2 + \\
 &+ \frac{1}{4}g^2 H^{0^2} |W|^2 + \frac{1}{2}M_Z^2 Z^2 + \frac{1}{2}\bar{g}M_Z H^0 Z^2 + \frac{1}{8}\bar{g}^2 H^{0^2} Z^2. \quad (205)
 \end{aligned}$$

Вычислим поправки к  $\Pi_W$ ; поправки к  $\Pi_Z$  даются теми же формулами с заменой  $M_W$  на  $M_Z$  и  $g$  на  $\bar{g}$ . Лишние факторы  $1/2$  в вершинах взаимодействия  $H^0$  и  $Z$  сокращаются увеличением числа спариваний для нейтральных полей  $Z$ .

Начнем с диаграммы рис. 16, в:

$$-i\Pi_{\mu\nu}^H = -g^2 M_W^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D \mu^{D-4}} \frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / M_W^2}{k^2 - M_W^2} \frac{1}{(k-q)^2 - M_H^2}, \quad (206)$$

где верхний индекс « $H$ » показывает, что вычисляется вклад, зависящий от массы хиггсовского бозона; знак « $-$ » в правой части формулы возник из-за произведения факторов  $i$  от пропагаторов и вершин (напомним, что пропагатор  $W$ -бозона содержит фактор  $-i$ ). Объединяя пропагаторы и сдвигая переменную интегрирования  $k \rightarrow k + xq$ , получим

$$i\Pi_{\mu\nu}^H = g^2 M_W^2 \int \frac{d^D k dx}{(2\pi)^D \mu^{D-4}} \frac{g_{\mu\nu} - \frac{(k+xq)_\mu (k+xq)_\nu}{M_W^2}}{[k^2 + (x-x^2)q^2 - xM_H^2 - (1-x)M_W^2]^2}. \quad (207)$$

Интегрирование по направлениям вектора  $k$  приводит к занулению линейных по  $k$  членов и замене  $k_\mu k_\nu = (1/D)g_{\mu\nu}k^2$ . Отбрасывая пропорциональную  $q_\mu q_\nu$  продольную часть и делая виковский поворот, получим

$$\Pi^H = g^2 M_W^2 \int \frac{d^D k dx}{(2\pi)^D \mu^{D-4}} \frac{1 + k^2/D M_W^2}{[k^2 + (x^2 - x)q^2 + xM_H^2 + (1-x)M_W^2]^2}. \quad (208)$$

Интеграл по  $d^D k$  возьмем с помощью формулы (199):

$$\begin{aligned}
 \Pi^H &= \frac{g^2 M_W^2}{(2\pi)^D} \int \frac{dx}{\mu^{D-4}} \pi^{D/2} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) [(1-x)M_W^2 + xM_H^2 + x^2q^2 - xq^2]^{\frac{D}{2}-2} + \\
 &+ \frac{g^2}{2(2\pi)^D} \int \frac{dx}{\mu^{D-4}} \pi^{D/2} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) [(1-x)M_W^2 + xM_H^2 + x^2q^2 - xq^2]^{\frac{D}{2}-1}. \quad (209)
 \end{aligned}$$



Вклад диаграммы рис. 16, *z*

$$\begin{aligned}
 -i\Pi_{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D \mu^{D-4}} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - M_H^2}, \\
 \Pi &= -\frac{g^2}{4} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D \mu^{D-4}} \frac{1}{k^2 + M_H^2} = -\frac{g^2 \pi^{D/2} \Gamma(D/2) \Gamma(1 - D/2)}{4(2\pi)^D \mu^{D-4} \Gamma(D/2)} (M_H^2)^{\frac{D}{2}-1} = \\
 &= -\frac{g^2}{4} \frac{\pi^{D/2}}{\mu^{D-4} (2\pi)^D} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (M_H^2)^{\frac{D}{2}-1} \quad (210)
 \end{aligned}$$

следует прибавить к (209). При подстановке  $D = 4 - 2\varepsilon$  пропорциональный  $M_H^2$  член при  $1/\varepsilon$  в (210) компенсирует такой же член в (209).

В формулы для физических величин (186) и (188) входят следующие комбинации поляризационных операторов:

$$\frac{\Pi_W(M_W^2)}{M_W^2} - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2}, \quad \frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(M_W^2)}{M_W^2} \text{ и } \Pi'_Z(M_Z^2). \quad (211)$$

Очевидно, что добавка (210) в этих формулах сокращается, и мы остаемся с выражением (209). Положим в нем  $D = 4 - 2\varepsilon$  и, отбрасывая зануляющиеся при  $\varepsilon \rightarrow 0$  члены, получим

$$\begin{aligned}
 \Pi^H &= \frac{g^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma\right) \left[\frac{3}{4}M_W^2 - \frac{1}{4}M_H^2 + \frac{1}{12}q^2\right] + \frac{g^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ M_W^2 (2 \ln 2 + \ln \pi) - \right. \\
 &\quad - \left. ((1-x)M_W^2 + xM_H^2 + q^2(x^2 - x)) \left( \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{(1-x)M_W^2 + xM_H^2 + q^2(x^2 - x)}{\mu^2} \right] \right\} \times \\
 &\quad \times \left[ -(1+x)M_W^2 + xM_H^2 + (x^2 - x)q^2 \right]. \quad (212)
 \end{aligned}$$

При подстановке  $\Pi^H$  в формулы для физических наблюдаемых расходящиеся члены  $\sim 1/\varepsilon$  не сокращаются, однако зависящая от массы бозона Хиггса часть  $\sim (1/\varepsilon)M_H^2$  сокращается. Компенсация оставшейся не зависящей от  $M_H$  части требует учета вкладов векторных бозонов. Вторая строка в (212) также не дает зависящих от  $M_H$  вкладов. Таким образом, мы приходим к следующему выражению, содержащему всю зависимость от  $M_H$ :

$$\begin{aligned}
 \Pi^H &= \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left[ \frac{(1-x)M_W^2 + xM_H^2 + (x^2 - x)q^2}{\mu^2} \right] \times \\
 &\quad \times \left[ -(1+x)M_W^2 + xM_H^2 + (x^2 - x)q^2 \right]. \quad (213)
 \end{aligned}$$

Анализ экспериментальных данных проводится с использованием точной зависимости  $\Pi^H$  от  $M_H$ , полученной выше. Мы же изучим асимптотику  $M_H^2 \gg M_{W,Z}^2$ . Напомним, что хотя сильное неравенство, скорее всего, не выполняется, тем не менее на сегодняшний день  $M_H > 114 \text{ ГэВ} > M_{W,Z}$ , поэтому разлагать выражения по отношению  $M_Z/M_H$  оправдано. Перепишем (213), выделяя ведущие при больших  $M_H$  члены:

$$\begin{aligned} \Pi^H = \frac{g^2}{32\pi^2} \left\{ \int_0^1 dx x M_H^2 \left[ \ln \left( \frac{x M_H^2}{\mu^2} \right) + \ln \left( 1 + \frac{(1-x)M_W^2 + (x^2-x)q^2}{x M_H^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \int_0^1 dx ((x^2-x)q^2 - (1+x)M_W^2) \times \right. \\ \left. \times \left[ \ln \left( \frac{x M_H^2}{\mu^2} \right) + \ln \left( 1 + \frac{(1-x)M_W^2 + (x^2-x)q^2}{x M_H^2} \right) \right] \right\}. \quad (214) \end{aligned}$$

Лидирующая асимптотика вклада хиггсовского бозона в  $\Pi^H \sim M_H^2 \ln M_H^2$  сокращается в комбинациях поляризационных операторов (211); лидирующий вклад бозона Хигса в физические наблюдаемые дается первым членом в квадратной скобке второй строки формулы (214):

$$\begin{aligned} \Delta \Pi_H = \frac{g^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx ((x^2-x)q^2 - (1+x)M_W^2) \ln \left( \frac{M_H^2}{\mu^2} \right) = \\ = -\frac{g^2}{32\pi^2} \left( \frac{3}{2} M_W^2 + \frac{1}{6} q^2 \right) \ln \left( \frac{M_H^2}{\mu^2} \right). \quad (215) \end{aligned}$$

Вследствие перенормируемости теории учет вклада петель векторных бозонов приведет к замене  $\mu$  под знаком логарифма на  $M_W$  или  $M_Z$ ; в нашем приближении положим  $\mu = M_Z$ .

Для трех комбинаций поляризационных операторов из формулы (211) получим

$$\begin{aligned} \frac{\Pi_W(M_W^2)}{M_W^2} - \frac{\Pi_W(0)}{M_W^2} &= -\frac{g^2}{32\pi^2} \frac{1}{6} \ln \left( \frac{M_H^2}{M_Z^2} \right), \\ \frac{\Pi_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Pi_W(M_W^2)}{M_W^2} &= -\frac{\bar{g}^2}{32\pi^2} s^2 \frac{5}{3} \ln \left( \frac{M_H^2}{M_Z^2} \right) + \frac{3\bar{g}^2}{64\pi^2} \left( \frac{m_t}{M_Z} \right)^2, \\ \Pi'_Z(M_Z^2) &= -\frac{\bar{g}^2}{32\pi^2} \frac{1}{6} \ln \left( \frac{M_H^2}{M_Z^2} \right), \end{aligned} \quad (216)$$

где мы учли лидирующие вклады от дублета  $(t, b)$  и хиггсовского бозона.

Используя формулы (216), для физических наблюдаемых получим

$$\begin{aligned}\frac{M_W}{M_Z} &= c + \frac{3\bar{\alpha}c}{32\pi s^2(c^2 - s^2)} \left[ \left( \frac{m_t}{M_Z} \right)^2 - \frac{11}{9}s^2 \ln \left( \frac{M_H}{M_Z} \right)^2 \right], \\ g_A &= -\frac{1}{2} - \frac{3\bar{\alpha}}{64\pi c^2 s^2} \left[ \left( \frac{m_t}{M_Z} \right)^2 - s^2 \ln \left( \frac{M_H}{M_Z} \right)^2 \right], \\ \frac{g_V}{g_A} &= 1 - 4s^2 + \frac{3\bar{\alpha}}{4\pi(c^2 - s^2)} \left[ \left( \frac{m_t}{M_Z} \right)^2 - \left( s^2 + \frac{1}{9} \right) \ln \left( \frac{M_H}{M_Z} \right)^2 \right].\end{aligned}\quad (217)$$

Полученные формулы решают задачу о нахождении лидирующих вкладов в радиационные поправки к наблюдаемым, свободным от сильных взаимодействий в древесном приближении. Подставляя измеренное на тэватроне значение  $m_t = (172,6 \pm 1,4)$  ГэВ, мы можем определить значение  $M_H$ . Оказывается, что для сравнения теоретических формул с экспериментально измеренными значениями параметров  $Z$ - и  $W$ -бозонов необходим выход за рамки лидирующего приближения — постоянные члены не малы (что неудивительно, так как  $\ln(M_H/M_Z)^2$  никогда не бывает значительно больше единицы).

Действуя описанным в предыдущей лекции методом, можно получить формулы для физических наблюдаемых, зависящие от четырех параметров: бегущей постоянной тонкой структуры  $\bar{\alpha} \equiv \alpha(M_Z)$ , постоянной сильного взаимодействия  $\hat{\alpha}_s \equiv \hat{\alpha}_s(M_Z)$ , массы  $t$ -кварка  $m_t$  и массы бозона Хиггса  $M_H$ . При фитировании экспериментальных данных используются точные однопетлевые выражения, дополненные лидирующими двухпетлевыми вкладами по электрослабым взаимодействиям, плюс различные поправки по сильным взаимодействиям (такие как глюонные поправки к поляризованным операторам векторных бозонов, поправки на реальные и виртуальные глюоны в адронной ширине  $Z$ -бозона и т. д.). При этом в квадратных скобках в (217) стоят функции  $V_m$ ,  $V_A$  и  $V_R$ , а приведенные выражения показывают поведение  $V_i$  при больших  $m_t$  и  $M_H$ .

Опишем результаты фита стандартной модели (Высоцкий, Новиков, Окунь, Розанов, 2009 г.). Всего имеется 18 наблюдаемых, разбитых в таблице на четыре группы. Первая, наиболее многочисленная, — параметры  $Z$ -бозона, измеренные на ускорителе LEP I. Вторая включает в себя три измеренных на ускорителе SLC параметра  $Z$ -бозона. В этих измерениях высокая точность достигнута благодаря поляризации начальных электронов. Масса  $W$ -бозона с наилучшей точностью измерена на тэватроне; приведенное значение учитывает также данные LEP II. Наконец, четвертая группа объединяет параметры, по которым делается фит: это измеренная на тэватроне масса  $t$ -кварка, извлекаемая из большого количества данных по  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны величина  $\bar{\alpha}$ , масса бозона Хиггса  $M_H$  и постоянная сильного взаимодействия  $\hat{\alpha}_s$ . Фит производится с помощью компьютерной программы, минимизирующей  $\chi^2$ :

$$\chi^2 \equiv \left[ \sum_{i=1}^{16} \left( \frac{A_i(\text{эксп.}) - A_i(\text{теор.})}{\sigma_i} \right)^2 \right]_{\min}, \quad (218)$$

где величины  $A_i(\text{эксп.})$  и ошибки  $\sigma_i$  приведены во втором столбце таблицы, а их теоретические значения зависят от четырех перечисленных выше параметров. Таким образом, имеется  $16 - 4 = 12$  степеней свободы, и качество фита характеризуется значением

## Фит в стандартной модели

Наблюдаемая	Экспериментальное значение	Результат фита	«Тяга»
$\Gamma_Z, \text{ ГэВ}$	2,4952(23)	2,4963(15)	-0,5
$\sigma_h, \text{ нб}$	41,540(37)	41,476(14)	1,8
$R_l$	20,771(25)	20,743(18)	1,1
$A_{\text{FB}}^l$	0,0171(10)	0,0164(2)	0,8
$A_\tau$	0,1439(43)	0,1480(11)	-0,9
$R_b$	0,2163(7)	0,2158(1)	0,7
$R_c$	0,172(3)	0,1722(1)	-0,0
$A_{\text{FB}}^b$	0,0992(16)	0,1037(7)	-2,8
$A_{\text{FB}}^c$	0,0707(35)	0,0741(6)	-1,0
$s_l^2 (Q_{\text{FB}})$	0,2324(12)	0,2314(1)	0,8
$A_{\text{LR}}$	0,1513(21)	0,1479(11)	1,6
$A_b$	0,923(20)	0,9349(1)	-0,6
$A_c$	0,670(27)	0,6682(5)	0,1
$M_W, \text{ ГэВ}$	80,398(25)	80,377(17)	0,9
$m_t, \text{ ГэВ}$	172,6(1,4)	172,7(1,4)	-0,1
$M_H, \text{ ГэВ}$		$84^{+32}_{-24}$	
$\hat{\alpha}_s$		0,1184(27)	
$1/\bar{\alpha}$	128,954(48)	128,940(46)	0,3
$\chi^2/n_{\text{dof}}$		18,1/12	

$\chi^2/n_{\text{dof}} = 18,1/12$ . По графику уровня достоверности для распределения  $\chi^2$  для 12 степеней свободы находим вероятность того, что СМ правильно описывает экспериментальные данные. Она близка к 10%, что неплохо. В третьем столбце таблицы приведены теоретические значения измеряемых величин при значениях параметров, отвечающих минимуму  $\chi^2$ . Наконец, последний столбец содержит «тяги» — разности экспериментальных и теоретических значений, деленные на экспериментальные ошибки ( $\chi^2$  есть сумма квадратов тяг). Наибольшее отклонение теории от эксперимента (на уровне трех стандартных отклонений) имеется в  $A_{\text{FB}}^b$  — асимметрии вперед-назад в рождении  $b\bar{b}$ -кварков в распаде  $Z$ -бозона.

Величина  $\hat{\alpha}_s(M_Z)$  определяется электрослабым фитом с рекордной точностью. Наиболее интересно значение массы бозона Хиггса. Центральное значение исключено прямым ограничением:

$$M_H^{\text{LEP II}} > 114 \text{ ГэВ}; \quad (219)$$

ошибка в величине  $M_H$  на уровне 30 ГэВ приводит к тому, что если стандартная модель правильно описывает обсуждаемую физику, то бозон Хиггса должен быть легким — весить меньше 200 ГэВ. Большой адронный коллайдер ЦЕРН (БАК, или LHC) благодаря большой энергии сталкивающихся протонов и большой светимости за первые годы своей работы должен обнаружить бозон Хиггса и измерить его массу, тем самым проверив СМ. Также на нем может быть существенно улучшена точность измерения массы  $W$ -бозона. Надежды на улучшение точности параметров  $Z$ -бозона связаны со следующим  $e^+e^-$ -коллайдером ILC на энергии сталкивающихся пучков 500 ГэВ–1 ТэВ, а именно на эксплуатацию этого коллайдера в резонансе  $Z$ .

То, что стандартная модель неплохо описывает измеренные с высокой точностью параметры промежуточных векторных бозонов, означает, что новая физика (если она существует) должна давать в эти параметры небольшие вклады, не ухудшающие существенным образом достигнутого уровня описания. Из большого разнообразия возможной новой физики удобно выделить подкласс моделей, изменяющих приведенные в таблице значения наблюдаемых только за счет новых вкладов в поляризационные операторы векторных бозонов. В литературе такие поправки называют неявными, или косвенными (*oblique corrections*). К новой физике, приводящей только к поправкам указанного выше типа, относятся дополнительные кварк-лептонные поколения (слабо смешанные с тремя известными), различные расширения хиггсовского сектора, суперсимметричное обобщение стандартной модели. Новые вклады в поляризационные операторы приведут к добавкам к функциям  $V_i$ , зависящим от параметров новой физики и, в частности, от масс новых частиц. При этом удобно классифицировать модели по поведению поправок в пределе масс новых частиц, много больших, чем массы  $W$ - и  $Z$ -бозонов. Если в этом пределе поправки зануляются, то говорят о декаплинге (*decoupling*), или отщеплении новой физики. Наиболее известный пример — суперсимметричное обобщение.

Калибровочные токи скалярных партнеров кварков и лептонов являются векторными, несохранение которых мало в пределе, когда универсальный массовый параметр стремится к бесконечности. Спинорные же партнеры калибровочных бозонов и двух хиггсовских дублетов объединяются в вектороподобные мультиплеты, обладающие тем же свойством. Прямые нижние ограничения на массы суперпартнеров, полученные на тэватроне и LEP II, приводят в силу декаплинга к поправкам к функциям  $V_i$ , значительно меньшим (как правило), чем вклады стандартной модели. Поэтому суперсимметричное расширение СМ с массами суперпартнеров масштаба нескольких сотен ГэВ не исключено результатами точных измерений. Более того, в таких моделях масса легчайшего нейтрального бозона Хигса оказывается малой, близкой к массе  $Z$ -бозона. Поэтому следующее из фита малое значение  $M_H$  может косвенно свидетельствовать в пользу суперсимметричного обобщения стандартной модели.

Пример новой физики без декаплинга — четвертое кварк-лептонное поколение. Вклады новых тяжелых кварков и лептонов в поляризационные операторы, как правило, велики, что позволяет исключить большие области масс новых частиц. Тем не менее существуют значения масс, при которых качество фита не уступает имеющемуся в СМ. Тогда предсказание малой массы бозона Хигса пропадает: в зависимости от величин масс новых частиц хигс может быть и легким, и тяжелым. Говоря о четвертом поколении, мы подразумеваем, что массы новых частиц превосходят нижние ограничения, следующие из прямых экспериментов по поиску таких частиц: массы верхнего и нижнего кварков ( $t'$  и  $b'$ ) больше 300 ГэВ (тэватрон), масса заряженного лептона ( $E$ ) больше 100 ГэВ (LEP II) и, наконец, масса нейтрального лептона ( $N$ ) больше 45 ГэВ (ширина  $Z$ -бозона). Ограничение сверху на массы частиц четвертого поколения следует из требования унитарности амплитуд их перерассеяния.

Важный урок: новая физика без декаплинга может привести к тому, что радиационные поправки потребуют большую массу хиггсовского бозона, порядка нескольких сотен ГэВ.

Сделаем замечание о литературе. В работах по радиационным поправкам к параметрам  $Z$  и  $W$  наряду с функциями  $V_i$  используются два набора других функций:  $\varepsilon_i$ , где  $i = 1, 2, 3$  (Альтарелли, Барбиери, Ядах), и  $S, T, U$  (Пескин, Такеучи).  $\varepsilon_i$  являются линейными комбинациями  $V_i$ , и в них, так же, как и в  $V_i$ , дает вклады и стандартная

модель, и новая физика. Что касается переменных  $S$ ,  $T$  и  $U$ , то в них учитывается только вклад новых частиц. Фит экспериментальных данных накладывает ограничения на вклады новой физики в  $V_i$ ,  $\varepsilon_i$  и на значения  $S$ ,  $T$  и  $U$ . Эти ограничения зависят от неизвестной на сегодня величины  $M_H$ .

Поясним в заключение, почему поправки к параметрам  $Z$  и  $W$  описываются тремя функциями (или  $V_i$ , или  $\varepsilon_i$ , или  $S$ ,  $T$  и  $U$ ). Формулы для наблюдаемых содержат комбинации шести величин:

$$\Pi_Z(M_Z^2), \Pi'_Z(M_Z^2), \Pi_W(0), \Pi_W(M_W^2), \Pi_\gamma(M_Z^2) + 2\frac{s}{c}\Pi_{\gamma Z}(0), \Pi_{Z\gamma}(M_Z^2). \quad (220)$$

С помощью этих шести величин фиксируются три параметра лагранжиана стандартной модели:  $g_0$ ,  $g'_0$  и  $\eta_0$ . Оставшиеся три комбинации представляют конечные поправки к параметрам  $Z$  и  $W$ .

Работа частично поддержана грантами РФФИ 08-02-00494, НШ-4172.2010.2 и контрактом Министерства образования и науки РФ 02.740.11.5158.

Я глубоко благодарен организаторам за гостеприимство и стимулирующую атмосферу Байкальской школы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1969.
2. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. Теоретическая физика: В 10 т. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. Т. 4.
3. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Квантовые поля. М.: Наука, 1980.
4. Бьёркен Дж., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория: Пер. с англ. М.: Мир, 1978.
5. Вайнберг С. Квантовая теория поля: Пер. с англ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. Т. 1, 2; М.: Фазис, 2002. Т. 3.
6. Пескин М., Шредер Д. Введение в квантовую теорию поля: Пер. с англ. М., 2001.
7. Окунь Л. Б. Лептоны и кварки. М.: Наука, 1990.
8. Amster C. et al. Particle Physics Booklet // Phys. Lett. B. 2008. V. 667. P. 1. <http://pdg.lbl.gov/>