

НАКАЧКА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ ПОСРЕДСТВОМ МНОГОКРАТНОГО ПОЛНОГО ВНУТРЕННЕГО ОТРАЖЕНИЯ ОТ АКТИВНЫХ СРЕД

Ф. В. Игнатович^а, В. К. Игнатович^б

^а Люметрикс инк., Рочестер, Нью-Йорк, США

^б Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Предлагается эксперимент по проверке возможности мощного усиления энергии световой волны при полном внутреннем отражении от активных газовых сред.

An experiment for strong light amplification at multiple total reflections from active gaseous media is proposed.

PACS: 42.25.Bs; 88.80.H-; 42.70.Ln; 42.25.Gy; 78.20.Ci

ВВЕДЕНИЕ

Отражение света от границы раздела двух сред определяется волновыми уравнениями внутри сред и граничными условиями, следующими из уравнений Максвелла. Волновые уравнения для электрического (\mathbf{E}) и магнитного (\mathbf{H}) полей в однородной среде с постоянными параметрами μ и ϵ имеют вид

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \Delta \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t). \quad (1)$$

Оба уравнения имеют решения в виде плоских волн

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{H} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t), \quad (2)$$

где $k^2 = \epsilon\mu k_0^2$, $k_0 = \omega/c$, а c — скорость света в вакууме. Поля \mathbf{E} и \mathbf{H} не являются независимыми. Они связаны друг с другом соотношениями

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\mu\omega} [\mathbf{k} \times \mathcal{E}], \quad \mathcal{E} = -\frac{1}{\epsilon\omega} [\mathbf{k} \times \mathcal{H}], \quad (3)$$

и если $|\mathcal{E}| = 1$, то длина вектора \mathcal{H} равна $|\mathcal{H}| = \sqrt{\epsilon/\mu} = 1/Z$, где $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$ называется волновым импедансом.

Если среда состоит из двух частей с разными $\epsilon_{1,2}$ и $\mu_{1,2}$, то волновые уравнения (1) и их решения необходимо сшивать на границе раздела, что приводит к явлению отражения и преломления волн. Условия сшивки задаются уравнениями Максвелла, из которых

следует требование непрерывности компонент $\mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{H}_{\parallel}(\mathbf{r}, t)$ электрического и магнитного поля, параллельных границе раздела, и компонент $\epsilon(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t))$, $\mu(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t))$ электрической и магнитной индукции, перпендикулярных границе раздела, где \mathbf{n} — вектор нормали к границе раздела:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \Theta(z < 0) \left(e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \psi_1 + e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \psi_r \rho \right) + \Theta(z > 0) e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \psi_2 \tau. \quad (4)$$

Здесь слагаемое $\exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \psi_1$ соответствует падающей из среды 1 плоской волне с волновым вектором \mathbf{k}_1 , множители $\psi_i = \mathcal{E}_i + \mathcal{H}_i$ ($i = 1, r, 2$) обозначают сумму электрического и магнитного векторов поляризации, слагаемые $\exp(i\mathbf{k}_{r,2} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \psi_r$ соответствуют отраженной и преломленной волнам с волновыми векторами $\mathbf{k}_{r,2}$, ρ , τ — амплитуды отражения и преломления (пропускания границы раздела) соответственно, а $\Theta(z)$ — ступенчатая функция, равная единице, когда неравенство в ее аргументе выполнено, и нулю в ином случае.

Волновые векторы $\mathbf{k}_{r,2}$ полностью определяются вектором \mathbf{k}_1 падающей волны, электромагнитными постоянными ϵ_i и μ_i сред, а также тем фактом, что $k_0 = \omega/c$ и компоненты \mathbf{k}_{\parallel} волновых векторов должны быть одинаковыми для всех волн. В дальнейшем мы будем считать, что в среде 1 отсутствуют потери и потому величина $\epsilon_1 \mu_1$ является чисто вещественной, следовательно, вещественными являются и все компоненты векторов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_r .

Нормальная компонента $k_{2\perp}$ преломленной волны равна

$$k_{2\perp} = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2 k_0^2 - \mathbf{k}_{\parallel}^2} = \sqrt{k_{1\perp}^2 - (\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2) k_0^2}, \quad (5)$$

и ее можно представить в виде

$$k_{2\perp} = \sqrt{\epsilon k_1^2 - \mathbf{k}_{\parallel}^2} = \sqrt{n^2 k_1^2 - \mathbf{k}_{\parallel}^2}, \quad (6)$$

где $n = \sqrt{\epsilon}$ — коэффициент преломления, и мы ввели относительную диэлектрическую проницаемость $\epsilon = \epsilon_2 \mu_2 / \epsilon_1 \mu_1$.

Амплитуды ρ и τ хорошо известны (см., например, [1]). Они легко рассчитываются для ТЕ-волн с поляризацией электрического поля (будем ее обозначать \mathcal{E}_e), параллельной границе раздела, и для ТМ-волн с поляризацией магнитного поля (будем ее обозначать \mathcal{H}_m), параллельной границе раздела. Во втором случае вектор поляризации \mathcal{E}_m электрического поля находится в плоскости падения. Соответствующие амплитуды отражения даются формулами Френеля

$$\rho_e = \frac{\mu_2 k_{1\perp} - \mu_1 k_{2\perp}}{\mu_2 k_{1\perp} + \mu_1 k_{2\perp}}, \quad \rho_m = \frac{\epsilon_2 k_{1\perp} - \epsilon_1 k_{2\perp}}{\epsilon_2 k_{1\perp} + \epsilon_1 k_{2\perp}}, \quad (7)$$

а амплитуды пропускания равны $\tau_{e,m} = 1 + \rho_{e,m}$. В дальнейшем простоты ради мы примем $\mu_{1,2} = 1$, и тогда эта постоянная выпадет из наших формул.

Из (6) следует, что при отсутствии потерь, когда $0 < \epsilon < 1$, падающая волна, для которой \mathbf{k}_{\parallel} удовлетворяет неравенству $n k_1 \leq |\mathbf{k}_{\parallel}| \leq k_1$, полностью отражается от границы раздела, потому что нормальная компонента волнового вектора преломленной волны становится мнимой:

$$k_{2\perp} = iK'_{2\perp} \equiv i\sqrt{k_{\parallel}^2 - \epsilon k_1^2}. \quad (8)$$

Преломленная волна оказывается экспоненциально затухающей:

$$\exp(ik_{2\perp}z) = \exp(-K''_{2\perp}z),$$

падающая энергия внутрь второй среды не проникает и по закону сохранения энергии должна полностью отражаться внутрь среды 1.

Если вторая среда содержит потери или является активной, то постоянная ϵ оказывается комплексной величиной ($\epsilon = \epsilon' \pm i\epsilon''$) с положительными ϵ' и ϵ'' . В этом случае вне области полного отражения (ОПО) ($|\mathbf{k}_{\parallel}|^2 \ll \epsilon'k_1^2$) имеем $k_{2\perp} = k'_{2\perp} \pm ik''_{2\perp}$, где при малых ϵ'' ($\epsilon''k_1^2 \ll \epsilon'k_1^2 - |\mathbf{k}_{\parallel}|^2$)

$$k'_{2\perp} \approx \sqrt{\epsilon'k_1^2 - |\mathbf{k}_{\parallel}|^2}, \quad k''_{2\perp} \approx \epsilon'' \frac{k_1^2}{2k'_{2\perp}}. \quad (9)$$

В ОПО величина $k'_{2\perp}$ в (9) становится мнимой $iK''_{2\perp}$, где $K''_{2\perp} \approx \sqrt{|\mathbf{k}_{\parallel}|^2 - \epsilon'k_1^2}$, а величина $ik''_{2\perp}$ — действительной:

$$ik''_{2\perp} \rightarrow K'_{2\perp} = \epsilon'' \frac{k_1^2}{2K''_{2\perp}}. \quad (10)$$

Поэтому в ОПО $k_{2\perp} = \pm K'_{2\perp} + iK''_{2\perp}$, где

$$K'_{2\perp} = \epsilon'' \frac{k_1^2}{2K''_{2\perp}}, \quad K''_{2\perp} \approx \sqrt{|\mathbf{k}_{\parallel}|^2 - \epsilon'k_1^2}. \quad (11)$$

Знак «+» перед мнимой частью $iK''_{2\perp}$ выбран потому, что преломленная волна должна экспоненциально затухать при удалении от границы раздела в обоих случаях: как при наличии потерь во второй среде, так и в случае активной второй среды. Действительная же часть $K'_{2\perp}$ имеет противоположные знаки в этих двух случаях.

Амплитуды отражения (7) в ОПО выглядят следующим образом:

$$\rho_e = \frac{k_{1\perp} - iK''_{2\perp} \mp K'_{2\perp}}{k_{1\perp} + iK''_{2\perp} \pm K'_{2\perp}}, \quad (12)$$

$$\rho_m = \frac{\epsilon_2 k_{1\perp} - \epsilon_1 (iK''_{2\perp} \pm K'_{2\perp})}{\epsilon_2 k_{1\perp} + \epsilon_1 (iK''_{2\perp} \pm K'_{2\perp})}. \quad (13)$$

Положительная величина $K'_{2\perp}$ в случае потерь означает, что в ОПО часть энергии, пропорциональная $K'_{2\perp}$, вытекает внутрь второй среды и там поглощается. Поэтому коэффициент отражения меньше единицы. Отрицательная величина $K'_{2\perp}$ в случае активной второй среды означает, что в ОПО часть энергии, пропорциональная $K'_{2\perp}$, вытекает из второй среды и добавляется к полностью отраженной энергии. Поэтому коэффициент отражения в этом случае больше единицы.

В [2] утверждается (критику см., например, в [3]), что и в случае отражения от активной среды коэффициент отражения меньше единицы, так как часть энергии уходит в активную среду и создает там поле, экспоненциально возрастающее при удалении от границы раздела. Однако легко видеть, что экспоненциальный рост в таком случае не зависит от величины ϵ'' , характеризующей активность среды, и, если было бы правильно

утверждение [2], поле внутри второй среды, даже при бесконечно малой ее активности, росло бы пропорционально $\exp(K''_{2\perp} z)$. Тогда при длине волны $\lambda \sim 1000$ нм падающего излучения интенсивность поля в среде на расстоянии 1 мм от границы раздела была бы в $e^{2000} \approx 10^{860}$ раз больше интенсивности в падающей волне, что превосходит все мыслимые астрофизические масштабы. Это доказывает, что утверждение, высказанное в [2], о том, что коэффициент отражения от активной среды в ОПО меньше единицы, не может быть верным.

При правильном выборе знака $k_{2\perp} = -K'_{2\perp} + iK''_{2\perp}$ коэффициент отражения от активной среды в ОПО больше единицы. Фотоны, индуцированные падающей волной во второй среде, не могут распространяться в ней так же, как не может распространяться падающий фотон. Они могут только подбарьерно, туннельным образом, выйти из второй среды в первую, и вышедшие фотоны делают коэффициент отражения от активной среды большим единицы. Чем более активна среда, тем больше коэффициент отражения. Происходит накачка падающей волны энергией активной среды, причем даже если плотность энергии в падающей волне больше плотности энергии активной среды, то все равно энергия перекачивается от меньшей плотности в волну с большей плотностью энергии.

ВОЗМОЖНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ПРОВЕРКЕ ПЕРЕКАЧКИ ЭНЕРГИИ ИЗ АКТИВНОЙ СРЕДЫ

Перекачка энергии из активной среды в возрастающую энергию световой волны может быть проверена экспериментально. Представим себе стеклянную сферу с отростком P , как показано на рисунке. Сфера может иметь тонкие стенки, а может быть и сплошной. Если сфера погружена в возбужденный газ или иную активную среду, то световой луч, показанный на рисунке тонкой линией, прошедший внутрь сферы через отросток, может многократно испытать полное отражение. При каждом отражении его энергия возрастает, и в конце концов она либо достигнет такой величины, что стекло начнет плавиться, либо после многих отражений усиленный луч, показанный на рисунке жирной линией, выйдет обратно через отросток. Можно представить себе и такую геометрию стекла, при которой луч не сможет выйти. Усиление зависит от числа отражений и от активности активной среды. Число отражений чувствительно к углу падения первичного луча. Если общее усиление луча велико, то тонкостенная стеклянная сфера превратится в жидкий пузырь с тонкими стенками, заполненными фотонами. Благодаря силам электрострикции такое образование может быть устойчивым, и оно походит на модель шаровой молнии, описанной в [4].

Чтобы оценить усиление в предлагаемом эксперименте, примем, что диэлектрическая проницаемость активной среды равна $\epsilon_2 \approx 1 - i\alpha$, а ϵ_1 стекла имеет вещественное значение. Полное отражение ТЕ-моды согласно (12) и (11)

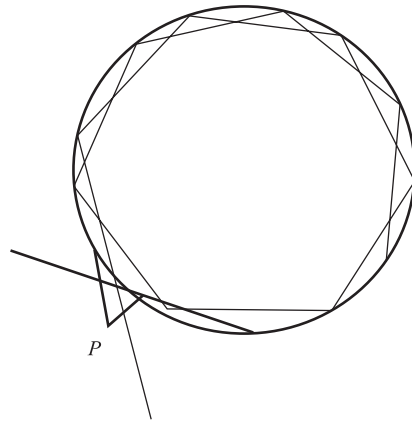


Схема эксперимента по накачке электромагнитной волны энергией при полном отражении от активной среды

представляется в виде

$$\rho_e \approx \frac{k_{1\perp} - iK_{2\perp} + \alpha k_0^2/2K_{2\perp}}{k_{1\perp} + iK_{2\perp} - \alpha k_0^2/2K_{2\perp}}, \quad (14)$$

где $K_{2\perp} = \sqrt{(\epsilon_1 - 1)k_0^2 - k_{1\perp}^2}$, и полученная формула справедлива при малых α . Аналогичное выражение получается и для ρ_m ТМ-моды. Из выражения (14) видно, что чем меньше $K_{2\perp}$, т. е. чем ближе угол падения к критическому, тем больше усиление. Тем не менее для оценки мы положим, что усиление обоих типов волн при одном отражении описывается величиной $1 + 2\alpha$. Усиление после N отражений равно $\propto (1 + 2\alpha)^N \approx \exp(2N\alpha)$. Число N можно представить через время t как t/t_1 , где $t_1 = 2R \cos \theta \sqrt{\epsilon_1}/c$ — интервал времени между двумя последовательными соударениями, θ — угол падения, а R — радиус сферы. Поэтому интенсивность волны I через время t равна $I = I_0 \exp(t/\tau)$, где $\tau = t_1/2\alpha = R \sin \theta \sqrt{\epsilon_1}/c$, а I_0 — начальная интенсивность волны. Для $R = 10$ см, $\theta = 0,1$ и $\alpha = 10^{-7}$ мы получаем $1/\tau \approx 3 \cdot 10^3$ с $^{-1}$. Отсюда следует, что при $I_0 = 10^{-19}$ Дж (~ 1 эВ) энергия I через 20 мс достигает величины ~ 10 МДж.

Для оценки величины α заметим, что усиление луча в лазере на пути l оценивается величиной $\exp(2k''l)$, где k'' — мнимая часть волнового числа в среде, а $g = 2k''$ называется коэффициентом усиления. В среде с $\epsilon = 1 - i\alpha$ коэффициент усиления равен $g \approx \alpha k = 2\pi\alpha/\lambda$, где λ — длина волны излучения. У N_2 , CO_2 газового лазера коэффициент усиления приблизительно равен 10^{-2} см $^{-1}$ [5]. При $\lambda/2\pi \simeq 10^{-4}$ см мы получаем $\alpha = 10^{-6}$.

В литературе имеются описания экспериментов с микросферами радиусом ~ 1 мкм (см., например, [6–9] и указанную в них литературу). Они играют роль резонаторов для света в моде шепчущей галереи (РМШГ), который попадает в сферу посредством нарушенного полного внутреннего отражения. Показывается, что эти резонаторы обладают большой добротностью Q вплоть до $Q \sim 10^{10}$ [6]. Это означает, что свет в них испытывает огромное число $N \sim Q$ полных внутренних отражений. В сферах большего радиуса, помещенных в активную среду с $\alpha \sim 10^{-7}$, добротность может быть еще выше. Поэтому накопленная энергия может быть очень велика. Фотоны, захваченные в такой сфере, могут расплавить резонатор, но силы электрострикции не позволят ему распасться. В такой системе можно надеяться увидеть множество интересных нелинейных эффектов.

ВОЗМОЖНОСТИ АНАЛИЗА С ПОМОЩЬЮ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

В работах [6–9] и многих других, посвященных РМШГ, теоретический анализ производится методом сферических гармоник. Это означает, что ТЕ- и ТМ-поля представляются с помощью функций вида

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \exp(-i\omega t) Y_{l,m}(\theta, \phi) F_l(r), \quad (15)$$

где $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ — обычные сферические гармоники, а радиальные функции $F_l(r)$ выражаются через сферические функции Бесселя, $j_l(kr)$, и Ханкеля, $h_l^{(1)}(k'r)$:

$$F_l(r) = \Theta(r < R) \frac{j_l(nk_0 r)}{j_l(nk_0 R)} + \Theta(r > R) \frac{h_l^{(1)}(n'k_0 r)}{h_l^{(1)}(n'k_0 R)}. \quad (16)$$

Здесь n, n' — коэффициенты преломления внутри и вне сферы, $k_0 = \omega/c$, и сферические функции выбраны с множителями, обеспечивающими непрерывность функции $F_l(r)$ на границе раздела $r = R$. Второе граничное условие, требующее непрерывности производной, приводит к ограничениям на величину k_0 .

Однако в нашем случае такой анализ не годится, поскольку внешняя функция для моды шепчущей галереи должна быть экспоненциально затухающей, тогда как функции Ханкеля этого не обеспечивают. Для описания света, захваченного в моду шепчущей галереи и сосредоточенного в узком слое вблизи радиуса сферы R , в случае $Rk_0 \gg 1$ характерны угловые моменты $l \gg 1$, для которых можно воспользоваться разложением [8]

$$\frac{l^2}{r^2} \approx \frac{l^2}{R^2} - 2(r - R) \frac{l^2}{R^3} \quad (17)$$

и принять линейное слагаемое в качестве возмущения. Тогда в простейшем приближении радиальное уравнение принимает вид

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \epsilon k^2 - \frac{l^2}{R^2} \right) F_l(r) = 0. \quad (18)$$

Его решением служит функция

$$F_l(r) = \Theta(r < R) \frac{\sin(k_r r)}{\sin(k_r R)} + \Theta(r > R) e^{-K_r(r-R)}, \quad (19)$$

где $k_r \approx \sqrt{\epsilon k_0^2 - l^2/R^2}$, $K_r = \sqrt{(\epsilon - \epsilon')k_0^2 - k_r^2}$. Мода шепчущей галереи может возникнуть только при $\epsilon' < \epsilon$ и достаточно больших l , чтобы аргументы обоих корней были положительны.

Второе граничное условие накладывает ограничение (квантование) на k_0^2 . Если среда снаружи активна, то ϵ' содержит отрицательную мнимую часть $-i\epsilon''$, и второе граничное условие приведет к тому, что k_0^2 , а значит, и ω должны быть комплексными числами с положительной мнимой частью $i\omega''$. Из этого немедленно следует, что множитель $\exp(-i\omega t)$ в (15) приобретает экспоненциально растущую часть $\sim \exp(\omega'' t)$, соответствующую накачке волны из внешней среды.

Мы не следовали этим путем в своем анализе, потому что приближение (18) эквивалентно представлению отражения в каждой точке в плоской геометрии. Кроме того, представление волновой функции в виде (15) подразумевает периодичность поля в сфере, т. е. замкнутость всех лучевых траекторий, что, вообще говоря, может и не выполняться. Поэтому при $Rk_0 \gg 1$ описание света, захваченного в моду шепчущей галереи, с помощью сферических гармоник не является адекватным задаче.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы напомнили известный факт, что полное внутреннее отражение от активных сред описывается коэффициентом отражения, большим единицы, и показали, что это эквивалентно перекачке энергии из среды в падающую волну. Для проверки этого утверждения предлагается эксперимент по значительному усилению света, захваченного внутри стеклянной сферы в моду шепчущей галереи, когда сфера помещена в газовую среду с

возбужденными атомами, резонансными частоте захваченного света. Мы говорили здесь о сфере, но, конечно же, стеклянный объект для хранения света может иметь и другую форму. Это может быть либо эллипсоид, либо тороид, либо что-нибудь иное, лишь бы захваченный свет достаточно долго не выходил из режима полного отражения. Мы понимаем, что оценка величины накопленной энергии 10 МДж является несколько нереалистичной, однако даже если накопленная энергия окажется в 1000 раз меньше, эксперимент представляет интерес как для фундаментальной физики, так и для прикладной, поскольку позволяет надеяться на создание двигателя совершенно нового типа.

Благодарности. Авторы выражают искреннюю благодарность профессору Г. Мицельмахеру из Института физики и астрономии университета Флориды, профессору Л. Новотному и доктору С. Лукишовой из Оптического института Рочестерского университета, а также профессору В. Г. Кадышевскому из ОИЯИ за их интерес, советы и поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Landau L.D., Lifshitz E.M., Pitaevskii L.P.* Electrodynamics of Continuous Media. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2004.
2. *Siegman A.E.* Fresnel Reflection, Lenserf Reflection and Evanescent Gain // *OPN*. 2010. V. 21. P. 38–45.
3. *Ignatovich F.V., Ignatovich V.K.* On Fresnel Reflection and Evanescent Gain // *Ibid*. P. 6.
4. *Ignatovich V.K.* The Ball Lightning // *Laser Phys*. 1992. V. 2. P. 991–996.
5. *Applied Atomic Collision Physics / Eds. E.W. McDaniel, W.L. Higham.* Acad. Press, 1982. V. 3, Ch. 8, F. 2.
6. *Fürst J.U. et al.* Naturally Phase-Matched Second-Harmonic Generation in a Whispering-Gallery-Mode Resonator // *Phys. Rev. Lett*. 2010. V. 104. P. 153901.
7. *Buck J.R., Kimble H.J.* Optimal Sizes of Dielectric Microspheres for Cavity QED with Strong Coupling // *Phys. Rev. A*. 2003. V. 67. P. 033806.
8. *Ilchenko V.S. et al.* Dispersion Compensation in Whispering-Gallery Modes // *J. Opt. Soc. Am. A*. 2003. V. 20. P. 157.
9. *Городецкий М.Л.* Оптические микрорезонаторы с гигантской добротностью. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 416 с.

Получено 29 марта 2011 г.