

ВЛИЯНИЕ КРИТЕРИЯ НЕХОРОШЕВА НА ДИНАМИЧЕСКУЮ АПЕРТУРУ КОЛЬЦЕВЫХ НАКОПИТЕЛЕЙ С СИСТЕМОЙ ОКТУПОЛЬНЫХ ЛИНЗ

П. Р. Зенкевич, А. В. Бархударян

Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

Советский математик Н. Н. Нехорошев показал, что при выполнении определенных условий для невозмущенного гамильтониана (критерий Нехорошева) динамическая система, описывающая одиночный нелинейный резонанс, устойчива (устойчивость по Нехорошеву). Задачей настоящей работы является проверка влияния критерия Нехорошева на динамическую апертуру (ДА) кольца, включающего два семейства октупольных линз для увеличения разброса по бетатронным частотам и подавления поперечных когерентных неустойчивостей. Были спроектированы две структуры: одна с сильной модуляцией бета-функции, что позволяет выполнить критерий Нехорошева, и вторая структура, в которой этот критерий не выполнен. Для обеих структур рассчитана зависимость ДА от силы тока в октупольных обмотках при наличии систематических и случайных ошибок магнитного поля. Результаты расчетов показали, что в обеих структурах ДА уменьшается при включении семейств октупольных линз, хотя без учета флуктуаций в первой из структур (в которой критерий Нехорошева выполнен) это уменьшение несколько слабее.

Soviet mathematician N. Nekhoroshev has shown that if the Hamiltonian of a system satisfies definite conditions (Nekhoroshev's criterion) then this system is stable (in Nekhoroshev's sense). This paper is devoted to study of Nekhoroshev's criterion influence on dynamical aperture (DA) of the ring including two families of octupole lenses for increase of betatron tunes spread and suppressing of transverse coherent instabilities. Two lattices have been designed: one lattice with strong modulation of beta-functions (which allows us to satisfy Nekhoroshev's criterion for octupole families) and the second lattice where this criterion is not satisfied. For both lattices the dependence of DA on octupole families current was calculated with account of systematic and random errors of magnetic field. The calculations have shown that for both lattices the DA is decreased with increase of the current; for the first lattice (where Nekhoroshev's criterion is satisfied) this effect is weaker than for the second one.

PACS: 29.20.-c

ВВЕДЕНИЕ

Октупольные линзы включаются в структуру кольцевых накопителей для создания зависимости частот поперечных колебаний частиц от амплитуды колебаний. Это необходимо для стабилизации поперечных когерентных неустойчивостей (см., например, [1]); однако, как показали последние исследования [2], динамическая апертура (ДА) магнитного кольца при этом уменьшается.

Ю. Сеневич высказал предположение [3], что ДА может быть улучшена при соблюдении критерия Нехорошева [4]. Н. Нехорошев исследовал устойчивость динамической

системы с гамильтонианом в переменных действие–фаза (I, φ) :

$$H(I) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi) \quad (1)$$

для случая малых возмущений ($\varepsilon \ll 1$). Нехорошев сформулировал критерий устойчивости динамической системы следующим образом. Система уравнений

$$\begin{cases} \sum_i k_i \frac{\partial H_0(I)}{\partial I_i} = 0, \\ \sum_{i,j} k_i k_j \frac{\partial^2 H_0(I)}{\partial I_i \partial I_j} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

не должна иметь корней k_i ($k = k_1, k_2, \dots, k_s$) в области действительных чисел (за исключением тривиального решения $k = 0$). Рассмотрим квадратичный двумерный гамильтониан:

$$H_0(I) = \varsigma_x I_x^2 + 2\varsigma_{xy} I_x I_y + \varsigma_y I_y^2. \quad (3)$$

Тогда второе уравнение системы (2) принимает вид

$$\varsigma_x k_x^2 + \varsigma_{xy} k_x k_y + \varsigma_y k_y^2 = 0. \quad (4)$$

Эта квадратичная форма не имеет действительных корней ($k \neq 0$) при условии

$$\varsigma_{xy}^2 - 4\varsigma_x \varsigma_y = 0. \quad (5)$$

В стандартных обозначениях MADX $2\varsigma_x = \frac{\partial Q_x}{\partial I_x}$, $2\varsigma_y = \frac{\partial Q_y}{\partial I_y}$, $\varsigma_{xy} = \frac{\partial Q_x}{\partial I_y} = \frac{\partial Q_y}{\partial I_x}$ ($Q_{x,y}$ — бегатронные числа поперечных колебаний).

Таким образом, критерий Нехорошева (кН) для поперечных колебаний в магнитном кольце можно записать в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial Q_x}{\partial I_y} \right)^2 - \frac{\partial Q_x}{\partial I_x} \frac{\partial Q_y}{\partial I_y} = 0. \quad (6)$$

1. СЕМЕЙСТВА ОКТУПОЛЕЙ

Рассмотрим два симметричных семейства октуполей (одно в горизонтальной плоскости, другое в вертикальной). Число октуполей равно $N_1 = N_2$, силы октуполей — $K_3^1 = K_3^2$, значения β -функций на месте положения октуполей — $\beta_x^1 = \beta_y^2$, $\beta_y^1 = \beta_x^2$. В этом случае получаем

$$\frac{\partial Q_x}{\partial I_x} = A [N_1 K_3^1 (\beta_x^1)^2 + N_2 K_3^2 (\beta_x^2)^2], \quad \frac{\partial Q_y}{\partial I_y} = A [N_1 K_3^1 (\beta_y^1)^2 + N_2 K_3^2 (\beta_y^2)^2], \quad (7)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial I_y} = \frac{\partial Q_y}{\partial I_x} = -2A [N_1 K_3^1 \beta_x^1 \beta_y^1 + N_2 K_3^2 \beta_x^2 \beta_y^2]. \quad (8)$$

Отсюда следует, что кН выполняется, если

$$16(\beta_x^1)^2 - (\beta_y^1)^2 \leq [(\beta_x^1)^2 - (\beta_y^1)^2]^2. \quad (9)$$

Решением неравенства (9) является условие $(\beta_x)_1 / (\beta_y)_1 > 3,732$.

2. СТРУКТУРА МАГНИТНЫХ КОЛЕЦ

Мы рассмотрели две кольцевые структуры: в первой будет соблюдаться условие (9), а во второй нет. Для объективности сравнения динамической апертуры длина колец и бетатронные частоты были заданы равными. Параметры структуры магнитных колец заданы в табл. 1.

Таблица 1.

Параметры	Первое кольцо	Второе кольцо
Энергия протонов, ГэВ	10	10
Магнитная индукция, Тл	1,8	1,8
Длина кольца, м	534	534
Критическая энергия, ГэВ	4,88	5,25
Бетатронная частота Q	11,41	11,41
Схема ячейки	ФОДО	ФОДО
Число периодов	36	72
Набег фазы на ячейку, °	114,1	57,0
Длина квадрупольной линзы, м	0,5	0,5
K_1 линзы Φ , м ⁻²	0,4342	0,5125
K_1 линзы D , м ⁻²	-0,4605	-0,5298
Число диполей в ячейке	2	2
Длина диполя, м	1,618	0,808
Промежутки, м	0,683	0,2
$(\beta_x)_{\max}$, М	27,023	12,560
$(\beta_x)_{\min}$, М	2,699	4,723
$(\beta_x)_{\max}/(\beta_x)_{\min}$	10,0	2,66
$(\beta_y)_{\max}$, М	28,709	12,695
$(\beta_y)_{\min}$, М	2,715	4,740
$(\beta_y)_{\max}/(\beta_y)_{\min}$	10,6	2,68

Периоды, в которых включены октуполи, чередуются с теми, в которых октуполей нет. В первом кольце октуполи включены в трех периодах, а во втором в шести. Таким образом, соблюдена равномерность расположения октуполей.

Вычисления ангармонических коэффициентов с помощью программы MADX показывают выполнение критерия Нехорошева в первом кольце (сильная модуляция β -функций) (рис. 1). При $N \cdot K_3 = -1200 \text{ м}^{-4}$:

$$\Delta Q_x \approx -1740 \text{ м}^{-1} \cdot I_x + 1200 \text{ м}^{-1} \cdot I_y, \quad \Delta Q_y \approx 1200 \text{ м}^{-1} \cdot I_x - 1910 \text{ м}^{-1} \cdot I_y. \quad (10)$$

Отсюда найдем: $\frac{\partial Q_x}{\partial I_x} \frac{\partial Q_y}{\partial I_y} - \left(\frac{\partial Q_x}{\partial I_y} \right)^2 \approx 1,9 \cdot 10^6 \text{ м}^{-2}$.

Во втором кольце (слабая модуляция β -функций) (рис. 2) критерий Нехорошева не выполняется. При $N \cdot K_3 = 2400 \text{ м}^{-4}$:

$$\Delta Q_x \approx 1100 \text{ м}^{-1} \cdot I_x - 1730 \text{ м}^{-1} \cdot I_y, \quad \Delta Q_y \approx -1730 \text{ м}^{-1} \cdot I_x + 1100 \text{ м}^{-1} \cdot I_y. \quad (11)$$

Соответственно, $\frac{\partial Q_x}{\partial I_x} \frac{\partial Q_y}{\partial I_y} - \left(\frac{\partial Q_x}{\partial I_y} \right)^2 \approx -1,8 \cdot 10^6 \text{ м}^{-2}$.

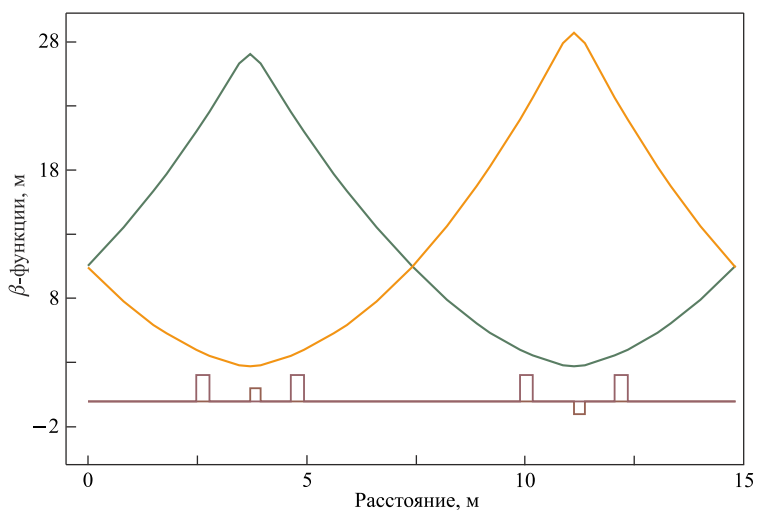


Рис. 1. Структура ячейки, октополи и β -функции в периоде структуры первого кольца

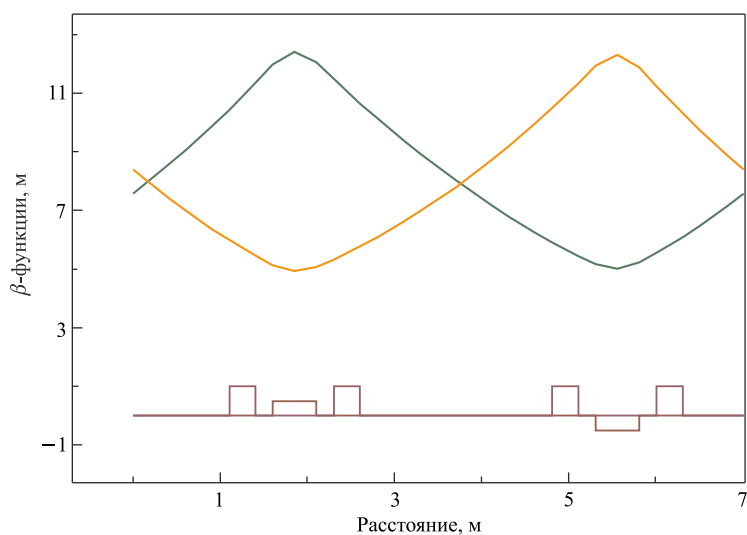


Рис. 2. Структура ячейки, октополи и β -функции в периоде структуры второго кольца

3. ДИНАМИЧЕСКАЯ АПЕРТУРА КОЛЕЦ

Расчеты ДА проведены при наличии регулярной нелинейности в магнитной структуре кольца с помощью программы MADX. Коэффициенты нелинейности заданы такие же, как в проекте SIS100 (табл. 2): K_2, K_4, K_6 для дипольных магнитов, K_5, K_9 для квадрупольных линз.

Результаты численного моделирования приведены на рис. 3, 4.

Таблица 2.

Дипольные магниты	$K_2 = \frac{1}{B\rho} \int_L \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} ds, m^{-2}$	-0,081834
	$K_4 = \frac{1}{B\rho} \int_L \frac{\partial^4 B}{\partial x^4} ds, m^{-4}$	33,288
	$K_6 = \frac{1}{B\rho} \int_L \frac{\partial^6 B}{\partial x^6} ds, m^{-6}$	$2,8507 \cdot 10^6$
Квадрупольные линзы	$K_5 = \frac{1}{B\rho} \int_L \frac{\partial^5 B}{\partial x^5} ds, m^{-5}$	-741,7
	$K_9 = \frac{1}{B\rho} \int_L \frac{\partial^9 B}{\partial x^9} ds, m^{-9}$	$-1,4561 \cdot 10^{13}$

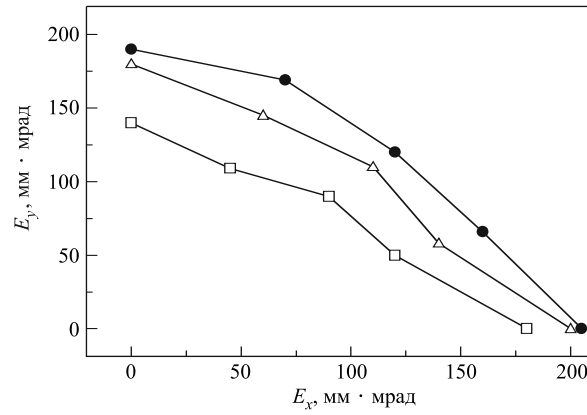


Рис. 3. Динамическая апертура первого кольца. ● — $NK_3 = 0$; △ — $NK_3 = 600 \text{ м}^{-4}$; □ — $NK_3 = 1200 \text{ м}^{-4}$; $N = N_1 = N_2 = 36$

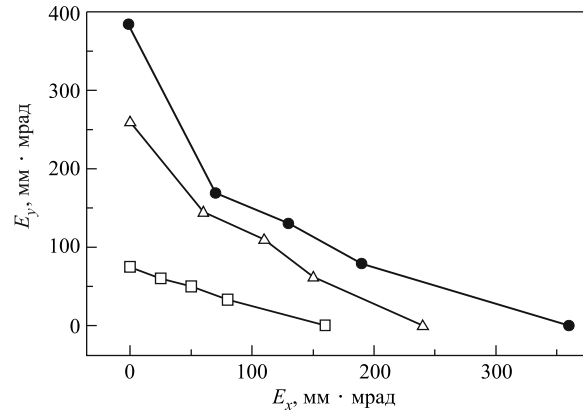


Рис. 4. Динамическая апертура второго кольца. ● — $NK_3 = 0$; △ — $NK_3 = 600 \text{ м}^{-4}$; □ — $NK_3 = 1200 \text{ м}^{-4}$; $N = N_1 = N_2 = 72$

Вычисления динамической апертуры колец проводились по следующей методике. Для каждого значения E_x, E_y выбирались в интервале $(0, 2\pi)$ генератором случайных чисел фазы ψ_x, ψ_y . По этим величинам определялись начальные значения x, p_x, y, p_y для трекинга частиц в кольце. Границей динамической апертуры принимались значения E_x, E_y , при которых частицы были потеряны до 10000 оборотов в кольце.

В первом кольце (сильная модуляция β -функций) при $NK_3 = 1200 \text{ м}^{-4}$ мы имеем для $E_x = E_y = 50 \text{ мм} \cdot \text{мрад}$ $\Delta Q_x = \Delta Q_y = 0,03$. Включение цепочки октупольных линз уменьшает динамическую апертуру колец. Данные вычислений (рис. 3) показывают, что в первом кольце, где критерий Нехоросева выполняется, это уменьшение составляет 25%. Во втором кольце критерий Нехоросева не выполняется и при $NK_3 = 1200 \text{ м}^{-4}$ уменьшение динамической апертуры составляет 60% (рис. 4).

Были проведены также и вычисления динамической апертуры колец при учете флуктуаций поля магнитов и линз. Флуктуации задавались с распределением Гаусса при сред-

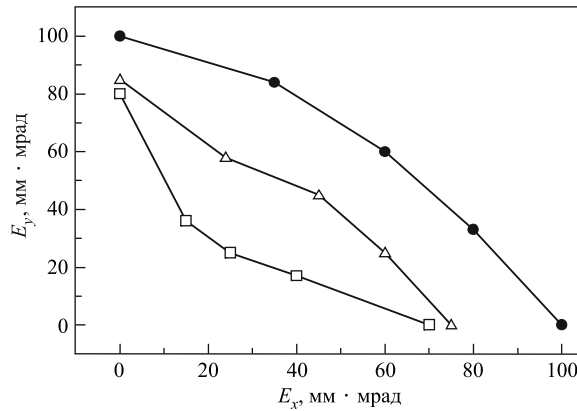


Рис. 5. Динамическая апертура первого кольца при наличии флуктуаций полей в дипольных магнитах и квадрупольных линзах. ● — $NK_3 = 0$; Δ — $NK_3 = 600 \text{ м}^{-4}$; \square — $NK_3 = 1200 \text{ м}^{-4}$; $N = N_1 = N_2 = 36$

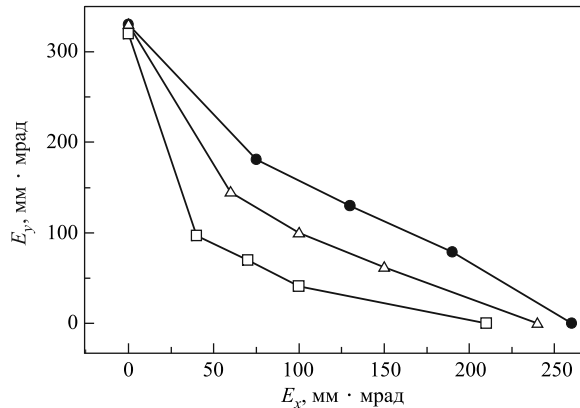


Рис. 6. Динамическая апертура второго кольца при наличии флуктуаций полей в дипольных магнитах и квадрупольных линзах. ● — $NK_3 = 0$; Δ — $NK_3 = 1200 \text{ м}^{-4}$; \square — $NK_3 = 2400 \text{ м}^{-4}$; $N = N_1 = N_2 = 72$

неквадратичном возмущении, составлявшем 30% от регулярной нелинейности. Данные вычислений представлены на рис. 5 и 6.

Отметим, что такие флуктуации магнитного поля колец приводят к возникновению шумовых нелинейных резонансов, сила которых пропорциональна $\beta_{x,y}^p$, где p — порядок резонанса. Таким образом, флуктуации магнитного поля сильнее влияют на ДА при более сильной модуляции амплитудных функций; вероятно, именно в связи с этим явлением при одинаковых значениях параметров октупольных линз динамическая апертура второго кольца (слабая модуляция β -функций) более чем в два раза превышает динамическую апертуру первого кольца (сильная модуляция β -функций).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ускоритель отличается от рассмотренной Н. Н. Нехорошевым простейшей динамической системы рядом особенностей:

1. Гамильтониан $H_0(I)$ для семейств октупольных линз не является точным: он получен с помощью метода усреднения в первом порядке по теории возмущений. Наряду с членами, включенными в квадратичный двумерный гамильтониан (ур-ние (3)), он содержит также октупольные гармоники.

2. Возмущение содержит широкий спектр гармоник и не сводится к члену $\varepsilon H_1(I, \varphi)$; в общем случае при пересечении резонансов возмущенный гамильтониан зависит также от продольной переменной s .

Вероятно, именно в силу этих особенностей октупольные семейства ухудшают ДА даже при выполнении критерия Нехорошева. Эти результаты, строго говоря, относятся только к рассмотренному примеру. Следует, однако, ожидать, что этот вывод справедлив и для колец с другой магнитной структурой (хотя количественные результаты, естественно, могут сильно зависеть от параметров колец).

Подчеркнем, что при выполнении критерия Нехорошева ДА спадает несколько медленнее, чем в противоположном случае.

Работа выполнена при финансовой поддержке госкорпорации РОСАТОМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ivanov P. M. et al.* Betatron Tune Spread Generation and Differential Chromaticity Control by Octupole Families at Tevatron // Proc. of 2005 Particle Accel. Conf. P. 2756.
2. *Kapin V.* Beam Dynamics Calculations with MADX for SIS100 Including «Frozen BB» Sp-Ch. GSI. 2009.
3. *Senichev Yu., Chechelin A.* The High Order Nonlinearities: The Structure Resonances and the Requirement to the Field Quality of the Optical Elements // Proc. of EPAC 2006. P. 2083.
4. *Нехорошев Н.* // УМН. 1977. Т. 32, вып. 6. С. 5.