Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, № 3(180). С. 321–325

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

ПРОВЕРКА КОРРЕКТНОСТИ МЕТОДА ЭРИКСЕНА ТОЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФОЛДИ–ВАУТХОЙЗЕНА

А. Я. Силенко [1]

Научно-исследовательское учреждение Институт ядерных проблем Белорусского государственного университета, Минск

Доказано, что для случая, когда выполняется ранее найденное достаточное условие точного перехода к представлению Фолди–Ваутхойзена (ФВ), метод Эриксена дает правильный и точный результат. Таким образом, подтверждена корректность метода Эриксена. Это дает возможность установления границ применимости приближенных методов «шаг за шагом» путем сравнения полученных с их помощью релятивистских формул для оператора Гамильтона в представлении ФВ с известным выражением для найденных методом Эриксена первых членов ряда, определяющего разложение этого оператора по степеням v/c.

It is proved that the Eriksen method gives the correct and exact result in the case that the previously found sufficient condition of the exact transformation to the Foldy–Wouthuysen (FW) representation is satisfied. Thus, the validity of the Eriksen method is confirmed. This gives a possibility to determine limits of validity of approximate «step-by-step» methods by comparison of relativistic formulas for the Hamilton operator in the FW representation obtained using them with the known expression for first terms of the series found by the Eriksen method and defining an expansion of this operator in v/c powers.

PACS: 03.65.Pm; 11.10.Ef

Переход к представлению ФВ (преобразование ФВ), выполненный в знаменитой работе [1], является унитарным преобразованием, приводящим оператор Гамильтона к четному виду, характеризующему представление ФВ. Оператор Гамильтона в данном представлении блок-диагонален, т. е. диагонален по двум спинорам или их аналогам для частиц со спинами $S \neq 1/2$. Представление ФВ обладает уникальными свойствами, благодаря которым оно занимает особое место в квантовой механике. В этом представлении квантово-механические операторы для релятивистских частиц во внешнем поле имеют такой же вид, как и в нерелятивистской квантовой теории. Соотношения между операторами аналогичны соотношениям между соответствующими классическими величинами. Указанные свойства представления ФВ устраняют возможность появления неоднозначностей при его использовании для перехода к квазиклассическому приближению и классическому пределу релятивистской квантовой механики [1, 2].

[1] E-mail: silenko@inp.minsk.by

Тем не менее сравнительно давно было замечено, что блок-диагонализация гамильтониана отнюдь не тождественна переходу к представлению ФВ (см. [3] и приведенные там ссылки). Более того, даже метод, разработанный Фолди и Ваутхойзеном [1], строго говоря, не ведет к этому представлению [4]. Он принадлежит к методам «шаг за шагом». При использовании таких методов переход к блок-диагональному виду гамильтониана достигается путем последовательных итераций, в результате каждой из которых удаляются нечетные (недиагональные) слагаемые наибольшего порядка. Однако оператор точного преобразования ФВ U_{FW} $(\Psi_{\mathrm{FW}} = U_{\mathrm{FW}}\Psi)$ для частиц со спином $1/2$ должен удовлетворять условию Эриксена [5]

$$\beta U_{\mathrm{FW}} = U_{\mathrm{FW}}^{\dagger}\beta, \tag{1}$$

где β — матрица Дирака. При представлении оператора U_{FW} в экспоненциальной форме

$$U_{\mathrm{FW}} = \exp\,(iS) \tag{2}$$

условие (1) эквивалентно требованию, чтобы показатель экспоненты S был эрмитовским и нечетным оператором [4]. В силу теоремы Хаусдорфа [6] методы «шаг за шагом», как показано в [4], условию нечетности оператора S не удовлетворяют. Следовательно, они могут обеспечить только приближенный переход к представлению ФВ.

Исходный гамильтониан для частиц со спином $1/2$ может быть представлен в следующем общем виде:

$$\mathcal{H}_D = \beta m + \mathcal{E} + \mathcal{O}, \quad \beta\mathcal{E} = \mathcal{E}\beta, \quad \beta\mathcal{O} = -\mathcal{O}\beta, \tag{3}$$

где $\mathcal{E}$ и $\mathcal{O}$ — четный и нечетный операторы соответственно.

Общий вид оператора точного преобразования ФВ был найден Эриксеном [5]:

$$U_{\mathrm{FW}} = \frac{1}{2}(1+\beta\lambda)\left[1+\frac{1}{4}(\beta\lambda+\lambda\beta-2)\right]^{-1/2}, \quad \lambda = \frac{\mathcal{H}_D}{\sqrt{\mathcal{H}_D^2}}, \tag{4}$$

где $\lambda = +1$ и -1 для решений с положительной и отрицательной энергией соответственно. Важно, что [5]

$$\lambda^2 = 1, \quad [\beta\lambda, \lambda\beta] = 0 \tag{5}$$

и оператор $\beta\lambda + \lambda\beta$ — четный:

$$[\beta, (\beta\lambda + \lambda\beta)] = 0. \tag{6}$$

Четные операторы блок-диагональны и не смешивают верхние и нижние спиноры. Формула (4) может быть также представлена в виде [3]

$$U_{\mathrm{FW}} = \frac{1+\beta\lambda}{\sqrt{(1+\beta\lambda)^{\dagger}(1+\beta\lambda)}}. \tag{7}$$

Два операторных множителя под знаком квадратного корня коммутируют.

Корректность преобразования Эриксена была аргументирована в [7]. Оператор U_{FW} превращает в нуль или нижний, или верхний спинор любой собственной функции дираковского гамильтониана. Это преобразование совершается в один шаг. Однако эффективно использовать метод Эриксена для нахождения релятивистских формул для частиц во внешнем поле не удается, поскольку общая формула (4) очень громоздка и содержит квадратные корни из дираковских матриц. Выражение для оператора Гамильтона в представлении ФВ было найдено [7] только в виде ряда релятивистских поправок по степеням $\mathcal{E}/m$, $\mathcal{O}/m$. Таким образом, метод Эриксена не обеспечивает решение задачи нахождения компактных релятивистских выражений для оператора Гамильтона в данном представлении.

Некоторые из методов «шаг за шагом» дают искомые релятивистские выражения [8–15]. Отметим, что разработанный в [11] метод применим для частиц с любым спином. Поскольку все указанные методы являются приближенными, то необходимо определить границы их применимости. Очевидно, что наиболее простой и надежный способ такого определения — это сравнение релятивистских гамильтонианов в представлении ФВ, получаемых методами «шаг за шагом», с точным разложением в ряд, приведенным в [7].

Однако прежде необходимо произвести максимально возможную проверку формулы Эриксена (4) или эквивалентной формулы (7), поскольку приведенное в [4] обоснование нечетности экспоненциального оператора S, входящего в формулу (2), не является строгим математическим доказательством. Тот факт, что формула Эриксена дает правильный результат для случая свободных частиц [5], также является недостаточным для доказательства ее правильности.

В 2003 г. в [10] было найдено достаточное условие точного преобразования ФВ. Данное преобразование является точным, если внешнее поле стационарно и операторы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{O}$ коммутируют:

$$[\mathcal{E}, \mathcal{O}] = 0. \tag{8}$$

В этом случае

$$\mathcal{H}_{\rm FW} = \beta\epsilon + \mathcal{E}, \quad \epsilon = \sqrt{m^2 + \mathcal{O}^2}. \tag{9}$$

В настоящей работе мы определяем, согласуется ли формула Эриксена с этим точным преобразованием.

Следует указать, что при определении квадратного корня из операторов очевидное условие $(\sqrt{A})^2 = A$ должно быть дополнено условием равенства квадратного корня из единичной матрицы единичной матрице [10]. Так, для свободных частиц $\mathcal{E} = 0$, $\mathcal{O} = \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}$ и $\lambda = (\beta m + \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})/\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$.

С учетом этого обстоятельства и коммутации операторов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{O}$ квадратный корень может быть представлен в виде

$$\sqrt{\mathcal{H}_D^2} = \epsilon + \frac{(\beta m + \mathcal{O})\mathcal{E}}{\epsilon} = \epsilon\left[1 + \frac{(\beta m + \mathcal{O})\mathcal{E}}{\epsilon^2}\right]. \tag{10}$$

Поскольку справедливо равенство

$$\mathcal{H}_D = (\beta m + \mathcal{O})\left[1 + \frac{(\beta m + \mathcal{O})\mathcal{E}}{\epsilon^2}\right],$$

знаковый оператор λ приобретает вид

$$\lambda = \frac{\beta m + \mathcal{O}}{\epsilon}. \tag{11}$$

Весьма важно, что в рассматриваемом случае он не зависит от $\mathcal{E}$.

Оператор точного преобразования ФВ имеет вид

$$U_{\mathrm{FW}} = \frac{\epsilon + m + \beta\mathcal{O}}{\sqrt{2\epsilon(\epsilon + m)}}. \tag{12}$$

Формула (12) имеет такой же вид, как и соответствующая формула, найденная в [10]. Естественно, и выражение для оператора Гамильтона в представлении ФВ, полученное методом Эриксена, совпадает с результатом в [10] при выполнении условия (8)

$$\mathcal{H}_{\mathrm{FW}} = \beta\epsilon + \mathcal{E}. \tag{13}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае метод Эриксена дает правильный и точный результат. Естественно, исходный дираковский гамильтониан (3) при дополнительном условии (8) имеет гораздо более общий вид, чем гамильтониан для свободных частиц, и описывает целый ряд практически важных случаев (см. [11, 16]). Поэтому данное подтверждение правильности метода Эриксена существенно улучшает ситуацию с его обоснованием.

Рассмотренное выше преобразование, эквивалентное операторному извлечению квадратного корня, в принципе может быть произведено в общем случае. Если операторы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{O}$ не коммутируют, то в приближении слабого поля $(|\mathcal{E}| \ll m)$ и при учете только одинарных и двойных коммутаторов

$$\sqrt{\mathcal{H}_D^2} = \epsilon + \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{\epsilon}, \{(\beta m + \mathcal{O}), \mathcal{E}\}\right\} - \frac{1}{8}\left\{\frac{\beta m + \mathcal{O}}{\epsilon}, [\epsilon, [\epsilon, \mathcal{E}]]\right\}. \tag{14}$$

Даже в указанном случае последующие вычисления становятся очень громоздкими, хотя они могут быть проведены аналитически для некоторых конкретных задач. При отказе от приближения слабого поля весьма громоздким становится уже само выражение для $\sqrt{\mathcal{H}_D^2}$.

Важным достоинством методов «шаг за шагом» является то, что они требуют значительно меньшего количества вычислений. Как следствие, эти методы успешно использовались для преобразования ФВ при описании взаимодействия релятивистских частиц с внешними полями (см. [10, 17] и приведенные там ссылки). Получение в настоящей работе правильного и точного выражения для оператора Гамильтона при помощи метода Эриксена в случае выполнения условия (8) дает серьезные основания для рассмотрения полученных с его помощью результатов [7] в качестве точных и, таким образом, открывает возможность установления границ применимости методов «шаг за шагом». Такое установление может быть проведено путем сравнения релятивистских формул для оператора Гамильтона в представлении ФВ, полученных методами «шаг за шагом», с выражением для первых членов ряда, определяющего разложение этого оператора по степеням v/c, выведенным в [7] методом Эриксена.

Работа поддержана грантом Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований № Ф12Д-002.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Foldy L. L., Wouthuysen S. A.* On the Dirac Theory of Spin $1/2$ Particles and Its Non-Relativistic Limit // Phys. Rev. 1950. V. 78, No. 1. P. 29–36.

2. *Costella J. P., McKellar B. H. J.* The Foldy–Wouthuysen Transformation // Am. J. Phys. 1995. V. 63, Iss. 12. P. 1119–1121.
3. *Neznamov V. P., Silenko A. J.* Foldy–Wouthuysen Wave Functions and Conditions of Transformation between Dirac and Foldy–Wouthuysen Representations // J. Math. Phys. 2009. V. 50, No. 12. P. 122302.
4. *Eriksen E., Korlsrud M.* Canonical Transformations of Dirac's Equation to Even Forms. Expansion in Terms of the External Fields // Nuovo Cim. Suppl. 1960. V. 18, No. 1. P. 1–39.
5. *Eriksen E.* Foldy–Wouthuysen Transformation. Exact Solution with Generalization to the Two-Particle Problem // Phys. Rev. 1958. V. 111, No. 3. P. 1011–1016.
6. *Hausdorff F.* Die Symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie // Ber. Verh. Saechs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl. 1906. V. 58. P. 19–48.
7. *De Vries E., Jonker J. E.* Non-Relativistic Approximations of the Dirac Hamiltonian // Nucl. Phys. B. 1968. V. 6, Iss. 3. P. 213–225.
8. *Blount E. I.* Extension of the Foldy–Wouthuysen Transformation // Phys. Rev. 1962. V. 128, Iss. 5. P. 2454–2458.
9. *Силенко А. Я.* Уравнение Дирака в представлении Фолди–Ваутхаузена, описывающее взаимодействие релятивистских частиц со спином $1/2$ с электромагнитным полем // ТМФ. 1995. Т. 105, № 1. С. 46–54.
10. *Silenko A. J.* Foldy–Wouthuysen Transformation for Relativistic Particles in External Fields // J. Math. Phys. 2003. V. 44, No. 7. P. 2952–2966.
11. *Silenko A. J.* Foldy–Wouthyusen Transformation and Semiclassical Limit for Relativistic Particles in Strong External Fields // Phys. Rev. A. 2008. V. 77, Iss. 1. P. 012116.
12. *Gosselin P., Berard A., Mohrbach H.* Semiclassical Diagonalization of Quantum Hamiltonian and Equations of Motion with Berry Phase Corrections // Eur. Phys. J. B. 2007. V. 58, No. 2. P. 137–148.
13. *Gosselin P., Berard A., Mohrbach H.* Semiclassical Dynamics of Dirac Particles Interacting with a Static Gravitational Field // Phys. Lett. A. 2007. V. 368, Iss. 5. P. 356–361.
14. *Gosselin P., Hanssen J., Mohrbach H.* Recursive Diagonalization of Quantum Hamiltonians to All Orders in $\hbar$ // Phys. Rev. D. 2008. V. 77, Iss. 8. P. 085008.
15. *Gosselin P., Mohrbach H.* Diagonal Representation for a Generic Matrix Valued Quantum Hamiltonian // Eur. Phys. J. C. 2009. V. 64, No. 3. P. 495–527.
16. *Silenko A. J., Teryaev O. V.* Equivalence Principle and Experimental Tests of Gravitational Spin Effects // Phys. Rev. D. 2007. V. 76, Iss. 6. P. 061101.
17. *Obukhov Yu. N., Silenko A. J., Teryaev O. V.* Dirac Fermions in Strong Gravitational Fields // Phys. Rev. D. 2011. V. 84, Iss. 2. P. 024025.

Получено 4 сентября 2012 г.