Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, № 3(180). С. 376–388

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

# КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ И ТОЧКИ БИФУРКАЦИИ ВРАЩАЮЩИХСЯ НАМАГНИЧЕННЫХ НЬЮТОНОВСКИХ ПОЛИТРОП С ИНДЕКСОМ $1 \leqslant n \leqslant 1{,}6$

*С. А. Михеев, В. П. Цветков*

Тверской государственный университет, Тверь, Россия

В работе впервые показано наличие критических точек и точек бифуркации у вращающихся ньютоновских политроп с индексом $1 \leqslant n \leqslant 1{,}6$. Погрешность символьно-численных вычислений в метрике $L_2$ составила величину порядка $10^{-4}$. Построено приближенное аналитическое решение задачи с вышеуказанной степенью точности. Вычислено критическое значение индекса политропы $n = n_k = 1{,}51025$, выше которого точек бифуркации и критических точек нет. Значение $n_k$ соответствует бесконечно медленному вращению политропы. Кроме того, в данной работе предсказано наличие скачков периода в точке бифуркации $T_b$ и оценена относительная величина этого скачка $\Delta T_b/T_b \sim B_{0\,\mathrm{in}}^{4/3}$.

In this paper, the presence of critical points and bifurcation points of rotating Newtonian polytropic curves with an index of $1 \leqslant n \leqslant 1.6$ has been shown for the first time. The symbolic-numerical calculation error in metric $L_2$ has reached the size of $10^{-4}$ order. The approximate analytical solution of the problem to the above-mentioned accuracy has been set forth. The critical value of polytropic curve index $n = n_k = 1.51025$ has been calculated which is the highest one among the critical points and bifurcation points. Value $n_k$ corresponds to the infinitely slow polytropic curve rotation. Furthermore, in this paper, the presence of the period jump at the bifurcation point $T_b$ has been predicted and the relative value of this jump $\Delta T_b/T_b \sim B_{0\,\mathrm{in}}^{4/3}$ estimated.

PACS: 97.10.Kc; 02.60.Cb; 02.60.Nm; 02.70.Wz; 04.25.Nx

## ВВЕДЕНИЕ

Наблюдения за эволюцией вращающихся намагниченных нейтронных звезд (пульсаров) позволяют получить уникальные данные об уравнениях состояния сверхплотной ядерной материи. Такая возможность возникает за счет наличия критических точек в распределении плотности гравитирующих вращающихся намагниченных конфигураций при определенных значениях параметров их уравнений состояния. Вблизи этих точек возникают аномалии периода их вращения, что может быть зарегистрировано с помощью опыта.

Наибольшей популярностью пользуется задание уравнения состояния в виде политропы соответствующего индекса $n$.

В настоящее время распространена точка зрения в теории ньютоновских политроп, восходящая к работам Дж. Джинса [1] и Р. Джеймса [2], что точек бифуркации у них при $n > 0{,}83$ и $n > 0{,}808$ соответственно нет. Естественно, такое утверждение ничем не обосновано и является всего лишь предположением. Поэтому актуальна задача о исследовании точек бифуркации ньютоновских политроп со значением индекса порядка и больше единицы.

Использование новых математических подходов в теории вращающихся ньютоновских политроп, а именно символьно-численных вычислений, позволяет поднять ее на новый качественный уровень [3–5]. Так, в работе [4] в рамках данного подхода впервые доказано существование точек бифуркации ньютоновских вращающихся политроп в интервале значений их индекса $1 \leqslant n \leqslant 1{,}0795$, в которых ответвляются асимметричные относительно оси вращения решения, описывающие распределения плотностей. Причем в области значений индекса политропы, близких к значению $1{,}0795$, значение параметра сплюснутости конфигурации $e$ в точке бифуркации уже достаточно близко к единице, а параметр быстроты вращения $\varepsilon$ может принимать сколь угодно малые значения. Особенностью работы [4] является использование полиномов наилучшего приближения в $L_2$ по степеням координат при расчете симметричных относительно оси вращения параметров конфигурации, а при расчете асимметричных параметров отбрасываются все степени координат выше шестой. Недостаток работы — использование полинома всего лишь второй степени ($N = 2$) при аппроксимации вклада давления в уравнении гидростатического равновесия. Такой подход, как будет нами показано, повлиял на точность результатов расчетов асимметричных параметров.

Цель нашей работы — расчет как симметричных, так и асимметричных параметров вращающейся ньютоновской политропы с индексом $1 \leqslant n \leqslant 1{,}6$ с единым использованием полиномов наилучшего приближения в $L_2$ по степеням координат конфигурации. При этом мы возьмем значение $N = 4$, что больше чем на порядок уменьшает погрешность используемой аппроксимации.

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

В основу нашей математической модели вращающихся намагниченных политроп, как и в [4], положим уравнение

$$\frac{1}{2\pi a_1^2}\int\limits_D \tilde{\rho}(\mathbf{r}')\left(\frac{1}{|\mathbf{r}'|}-\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dV' - (1+n)K_0(1-\tilde{\rho}^{1/n}) - \varepsilon\frac{\mathbf{r}_\perp^2}{a_1^2} = \Pi_{(m)}(\mathbf{r}), \qquad (1)$$

где $\Pi_{(m)}$ — вклад магнитных натяжений потенциального характера; $\tilde{\rho} = \rho/\rho_0$, $\rho$ — плотность конфигурации, $\rho_0$ — плотность политропы в центре; $a_1, a_3$ — полуоси сфероида, аппроксимирующего поверхность конфигурации; $K_0 = P_0/(2\pi G\rho_0^2 a_1^2)$, $P_0$ — центральное значение давления, $G$ — гравитационная постоянная; $\varepsilon = \omega^2/(4\pi G\rho_0)$, $\omega$ — угловая скорость вращения конфигурации; $\mathbf{r}_\perp = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, $x_1 = x/a_1$, $x_2 = y/a_1$, $x_3 = z/a_3$; $D$ — область $R^3$, в которой $\tilde{\rho} \geqslant 0$.

Уравнение (1) представляет собой интегральное уравнение с подвижной границей в $R^3$. Эту границу $\delta D$ будем искать в виде возмущенной эллипсоидальной поверхности [6]:

$$\delta D\colon\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \sum_{ijk}^{L} Z_{ijk}\, x_1^i\, x_2^j\, x_3^k = 1. \qquad (2)$$

Полуоси аппроксимирующего сфероида $a_1, a_3$ и коэффициенты $Z_{ijk}$ находятся из условия минимизации функционала $\Lambda$ [3]:

$$\Lambda = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\delta D} \tilde{\rho}^2 d\Omega, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial Z_{ijk}} = 0, \quad a_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial a_1} = 0, \quad a_3 \frac{\partial \Lambda}{\partial a_3} = 0. \tag{3a}$$

Система уравнений (1)–(3) замкнута и из нее находятся параметры конфигурации $a_1$, $a_3$, $Z_{ijk}$, $\tilde{\rho}$.

Плотность конфигурации $\tilde{\rho}$ приблизим полиномом степени $P$:

$$\tilde{\rho} \cong \sum_{a,b,c}^{P} \rho_{abc}\, x_1^a\, x_2^b\, x_3^c. \tag{4}$$

Согласно теореме Стоуна–Вейерштрасса, выражение (4) аппроксимирует $\tilde{\rho}$ с любой степенью точности. Достаточно выбрать $P$ большим.

Коэффициенты $\rho_{abc}$ и $Z_{ijk}$, определяющие структуру конфигурации, разобьем на симметричные $\rho_{(ab)c}$, $Z_{(ij)k}$ и антисимметричные $\rho_{[ab]c}$, $Z_{[ij]k}$ части относительно оси вращения и будем искать в виде разложения по малому параметру асимметрии $X$, подлежащему в дальнейшем определению:

$$\begin{gathered}
\rho_{abc} = \frac{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)!}{\left(\dfrac{a}{2}\right)!\left(\dfrac{b}{2}\right)!} \rho_{a+b,c} + \rho_{1[ab]c} X + \rho_{2(ab)c} X^2, \\
Z_{ijk} = \frac{\left(\dfrac{i+j}{2}\right)!}{\left(\dfrac{i}{2}\right)!\left(\dfrac{j}{2}\right)!} Z_{i+j,k} + Z_{1[ij]k} X + Z_{2(ij)k} X^2.
\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь и далее $a, b, c$ и $i, j, k$ являются четными, и имеют место соотношения симметризации: $\rho_{2(ab)c} = \rho_{2(ba)c}$, $\rho_{1[ab]c} = -\rho_{1[ba]c}$, $Z_{2(ij)k} = Z_{2(ji)k}$, $Z_{1[ij]k} = -Z_{1[ji]k}$.

Имеющиеся к настоящему времени оценки внешнего магнитного поля пульсаров $B_{0\,\mathrm{out}}$ по замедлению периода дают $B_{0\,\mathrm{out}} \sim 10^{10}$–$10^{12}$ Гс. Если внутреннее магнитное поле $B_{0\,\mathrm{in}}$ на два порядка больше внешнего поля $B_{0\,\mathrm{out}}$, то в этом случае $|\Pi_{(m)}| \sim 10^{-12}$–$10^{-9}$ при $\rho_0 = 4 \cdot 10^{14}$ г/см$^3$. Поэтому мы будем учитывать влияние $\Pi_{(m)}$ только на асимметричные относительно оси вращения коэффициенты.

Представим $\Pi_{(m)}$, как и в (4), полиномом степени $P$:

$$\Pi_{(m)} = \sum_{a,b,c}^{P} (\Pi_{(m)(ab)c} + \Pi_{(m)[ab]c})\, x_1^a\, x_2^b\, x_3^c. \tag{6}$$

Причем $\Pi_{(m)(ab)c} = \Pi_{(m)(ba)c}$ и $\Pi_{(m)[ab]c} = -\Pi_{(m)[ba]c}$.

На основании сделанных оценок положим $\Pi_{(m)(ab)c} = 0$, а $\Pi_{(m)[ab]c}$ выберем в самом простом виде, а именно будем считать отличными от нуля только коэффициенты $\Pi_{(m)[20]0} = -\Pi_{(m)[02]0} = -k\eta_m$. Здесь $k$ — показатель скорости убывания магнитного поля от магнитной оси, а $\eta_m = B_{0\,\mathrm{in}}^2 \sin^2\alpha/(32\pi^2 G\rho_0^2 a_1^2)$ ($B_{0\,\mathrm{in}}$ — характерное значение магнитной индукции в центре конфигурации, $\alpha$ — угол наклона магнитной оси к оси вращения).

При произвольных значениях индекса политропы $n$ уравнение (1) будет весьма сложным для решения. Упростим его, аппроксимировав $\tilde{\rho}^{1/n}$ полиномом степени $N$:

$$\tilde{\rho}^{1/n} = \sum_{k=1}^{N} \delta_k(n)\tilde{\rho}^k + \Delta_N(n). \tag{7}$$

Для нахождения коэффициентов $\delta_k$ в системе символьной математики MAPLE нами составлена программа. Она позволяет получить аналитические представления $\delta_n$ и $\Delta_N(n)$ в метрике $L_2$ для любых значений $N$.

Для случая $N = 4$ график $\Delta_N(n)$ представлен на рис. 1.

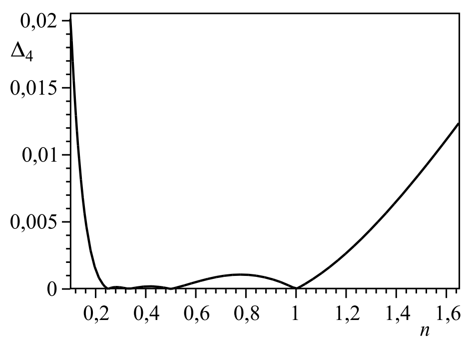


Рис. 1. График функции $\Delta_N(n)$ при $N = 4$

С учетом (7) уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{1}{2\pi a_1^2}\int\limits_D \tilde{\rho}(\mathbf{r}')\left(\frac{1}{|\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dV' + (1+n)K_0\left(\sum_{k=1}^{N}\delta_k(n)\tilde{\rho}^k - 1\right) - \\ - \varepsilon(x_1^2 + x_2^2) + \eta_m(x_1^2 - x_2^2) = 0. \tag{8}$$

В (8) для определенности взяли $k = 1$.

Очевидно, уравнение (8) можно использовать для реалистических уравнений состояния гравитирующей материи, выбирая надлежащим способом коэффициенты $\delta_k$ и степень полинома $N$.

## 2. РЕШЕНИЕ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

При решении (8) нам будет удобно считать все параметры модели функциями сплюснутости конфигурации $e$:

$$\rho_{abc} = \rho_{abc}(e), \quad Z_{ijk} = Z_{ijk}(e), \quad K_0 = K_0(e), \quad \varepsilon = \varepsilon(e). \tag{9}$$

Для аналитического вычисления интегралов в левой части (8) нами в системе MAPLE составлена и реализована программа [7]. Она позволяет представить уравнение (8) в виде полинома по степеням координат $x_1, x_2, x_3$:

$$\sum_{p+q+r=2}^{p+q+r=S} F_{pqr}(\rho_{abs}(e), Z_{ijk}(e), K_0(e), \varepsilon(e), \eta_m, X)\, x_1^p x_2^q x_3^r = 0. \tag{10}$$

Степень многочлена левой части (10) $S$ находится из условия $S = \max\{P + s(L-2)+2, NP\}$, где $s = 0, 1, 2\ldots$, и определяет вычисленный нами наивысший член ряда Бурмана–Лагранжа, используемого в программе.

Для решения (10) используем моментный метод:

$$M_{abc} = \sum_{p+q+r=2}^{p+q+r=S} F_{pqr} \int\limits_D x_1^{p+a} x_2^{q+b} x_3^{r+c}\, dV' = 0. \tag{11}$$

Наша программа позволяет также провести аналитическое вычисление $M_{abc}$.

В первом приближении положим $X = 0$ и найдем значения $\rho_{ab}$, $Z_{ij}$, $K_0$, $\varepsilon$, соответствующие фигуре вращения. Двумерные массивы неизвестных переведем в одномерные $y_m$, $m = 1, 2, \ldots, N_1$. Легко находим

$$N_1 = \frac{1}{8}(P+2)(P+4) + \frac{1}{8}(L+2)(L+4). \tag{12}$$

Дальнейшие вычисления будем проводить в приближении $P = 6$, $L = 2$, $s = 1$. Тогда имеем $N_1 = 13$.

В этом случае уравнения (11) и (3а) представляют собой систему из 13 алгебраических уравнений и могут быть записаны в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}, e, n) = 0, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_{13}). \tag{13}$$

Для ряда интересующих нас значений $n$ и $e$ матрица Якоби $\mathbf{f}'(\mathbf{y}, e, n)$ плохо обусловлена. Поэтому для решения (12) мы будем использовать регуляризованный аналог метода Ньютона [8] с параметром регуляризации $\alpha = 10^{-6}$. В результате имеем следующую итерационную схему:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(k+1)}(e,n) = \mathbf{y}^{(k)}(e,n) - \tau_k[\alpha\mathbf{f}^2(\mathbf{y}^{(k)}, e, n) + \\ + \widetilde{\mathbf{f}}'(\mathbf{y}^{(k)}, e, n)\mathbf{f}'(\mathbf{y}^{(k)}, e, n)]^{-1}\widetilde{\mathbf{f}}'(\mathbf{y}^{(k)}, e, n)\mathbf{f}(\mathbf{y}^{(k)}, e, n), \end{aligned} \tag{14}$$

где $k$ — номер итерации; $\tau_k$ $(\Theta_0 \ll \tau_n \ll 1)$ — итерационный параметр; $\mathbf{f}'(\mathbf{y}^{(k)}, e, n)$ — матрица Якоби; $\widetilde{\mathbf{f}}'(\mathbf{y}^{(k)}, e, n)$ — транспонированная матрица Якоби.

Величина $\sqrt{\mathbf{f}^2(\mathbf{y}^{(k)}, e, n)}$ представляет собой невязку и определяет точность решения системы уравнений (13).

Интересующие нас интервалы значений параметров $e$ и $n$ разобьем на участки с шагами $h_e$ и $h_n$ соответственно:

$$\begin{aligned} e \to e_\mu = 1 - \mu h_e, \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{0{,}5}{h_e}\right], \\ n \to n_\nu = 1{,}6 - \nu h_n, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{0{,}6}{h_n}\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Мы использовали для расчетов следующие значения: $h_e = 0{,}02$, $h_n = 0{,}025$.

Составленная и реализованная нами программа в системе MAPLE позволила найти массив численных решений $y_m(e_\mu, n_\nu)$. Погрешность решения уравнения (8) оказалась порядка $10^{-3}$ в метрике $L_2$.

Далее мы воспользовались пакетом CurveFitting системы MAPLE для аппроксимации полученных численных решений $y_m(e_\mu, n_\nu)$ полиномами от $e$ и $n$ восьмой степени по обоим параметрам. Погрешность этой аппроксимации составила $10^{-5}$ в $C$-метрике, что на два порядка меньше, чем погрешность численного решения уравнения (8), вычисленная в $L_2$-метрике.

Разработанный нами метод позволил найти приближенное аналитическое решение уравнения (8).

В явном виде представляющие функции $\rho_{ab}$, $Z_{ij}$, $K_0$, $\varepsilon$ полиномы ввиду их громоздкости мы приводить не будем, а дадим их графики на рис. 2–8.

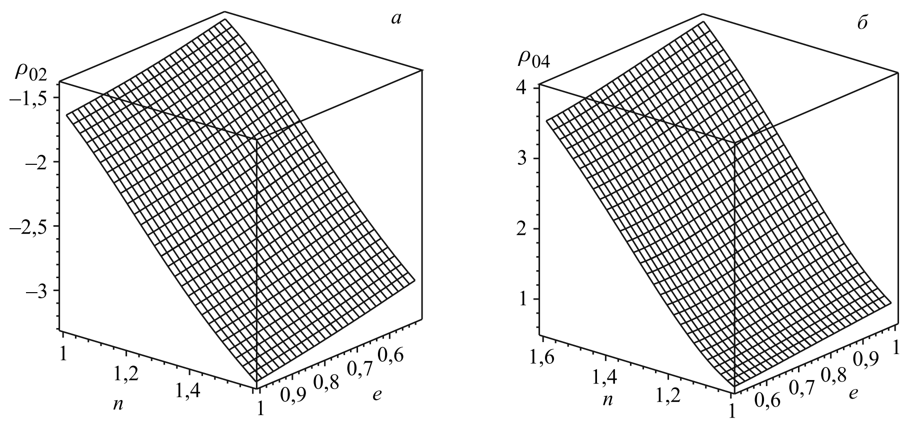


Рис. 2. Графики функций $\rho_{02}(e, n)$ (*а*) и $\rho_{04}(e, n)$ (*б*)

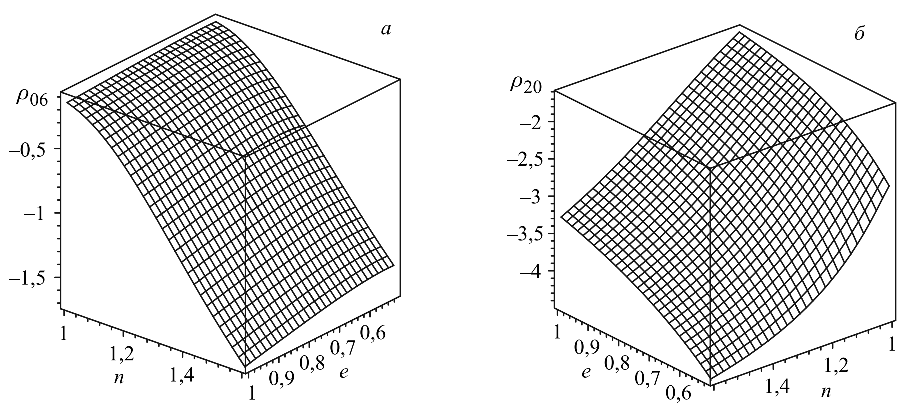


Рис. 3. Графики функций $\rho_{06}(e, n)$ (*а*) и $\rho_{20}(e, n)$ (*б*)

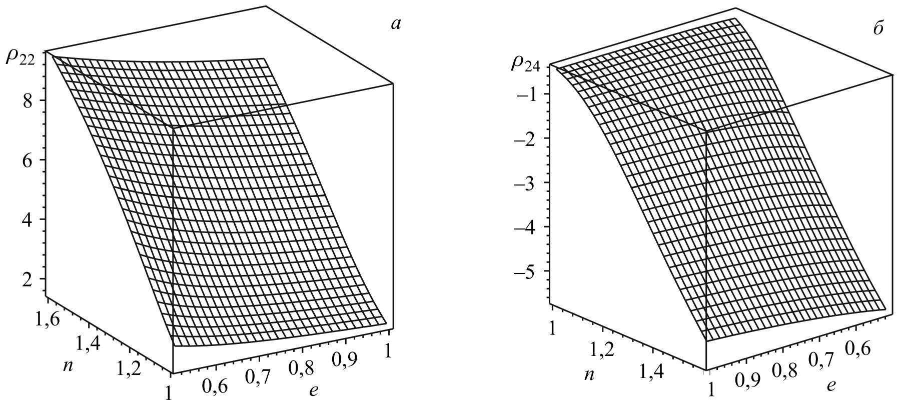


Рис. 4. Графики функций $\rho_{22}(e,n)$ (*а*) и $\rho_{24}(e,n)$ (*б*)

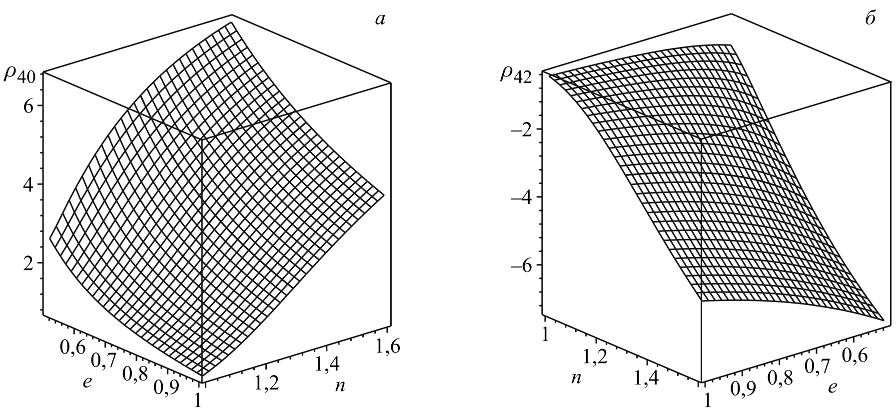


Рис. 5. Графики функций $\rho_{40}(e,n)$ (*а*) и $\rho_{42}(e,n)$ (*б*)

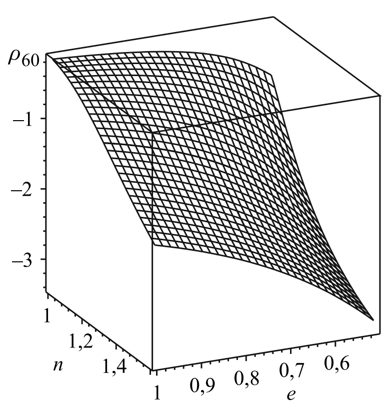


Рис. 6. График функции $\rho_{60}(e,n)$

В следующем линейном по $X$ приближении трехмерные массивы неизвестных $\rho_{1[ab]c}$ и $Z_{1[ij]k}$ переведем в одномерные $x_k$ $(k = 1, 2, \ldots, N_2)$, а также положим $x_1 = \rho_{1[20]0} = 1$.

В случае $P = 6$, $L = 2$ имеем $N_2 = 8$.

В линейном по $X$ приближении система уравнений для $X_k$ следует из (11) и имеет вид

$$X \sum_{k=1}^{N_2=2} A_i^k(y_m(e,n), e, n) x_k = -\eta_m \delta_i, \qquad (16)$$

где $\delta_i$ определяется через интегралы

$$\int\limits_D (x_1^2 - x_2^2)\ x_1^a\ x_2^b\ x_3^c\ dV. \qquad (17)$$

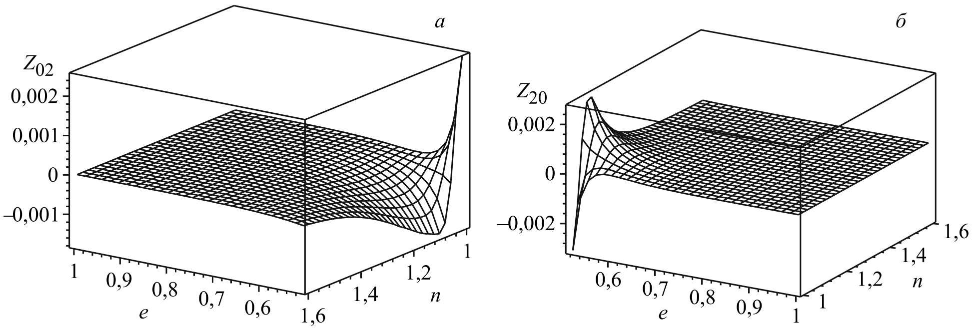


Рис. 7. Графики функций $Z_{02}(e, n)$ (*а*) и $Z_{20}(e, n)$ (*б*)

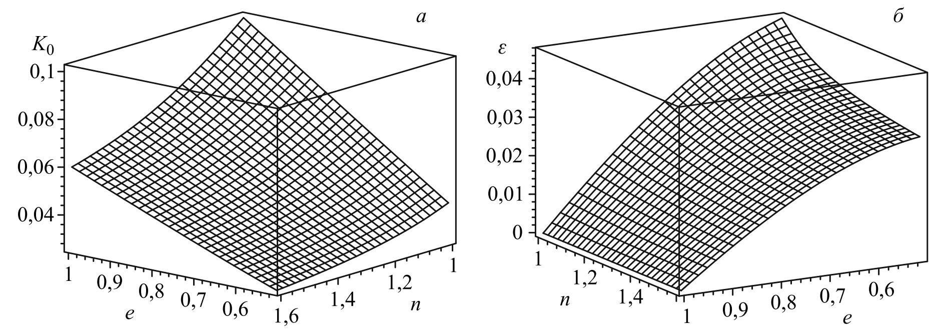


Рис. 8. Графики функций $K_0(e, n)$ (*а*) и $\varepsilon(e, n)$ (*б*)

Система уравнений (16) достаточно хорошо описывает асимметричную часть конфигурации вдали от критических точек по параметру $e_k$ ($\varepsilon_k$), где определитель матрицы $A_i^k$ существенно отличен от нуля. В этой области (16) легко сводится к одному уравнению

$$A(e, n)X = -\eta_m. \tag{18}$$

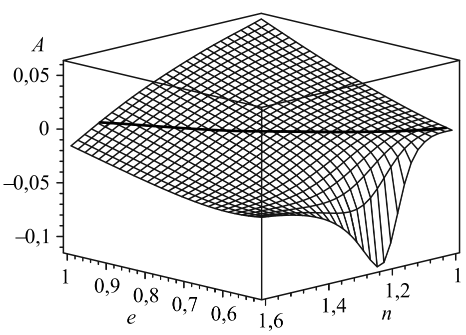


Рис. 9. График функции $A(e, n)$. Жирной линией изображена критическая кривая $A(e_k, n) = 0$

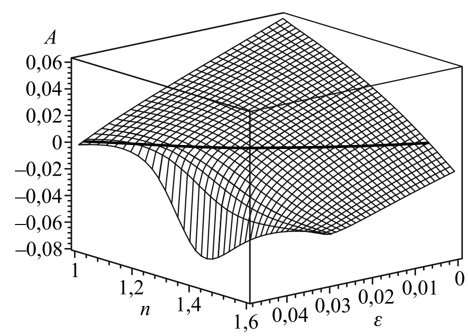


Рис. 10. График функции $A(\varepsilon, n)$. Жирной линией изображена критическая кривая $A(\varepsilon_k, n) = 0$

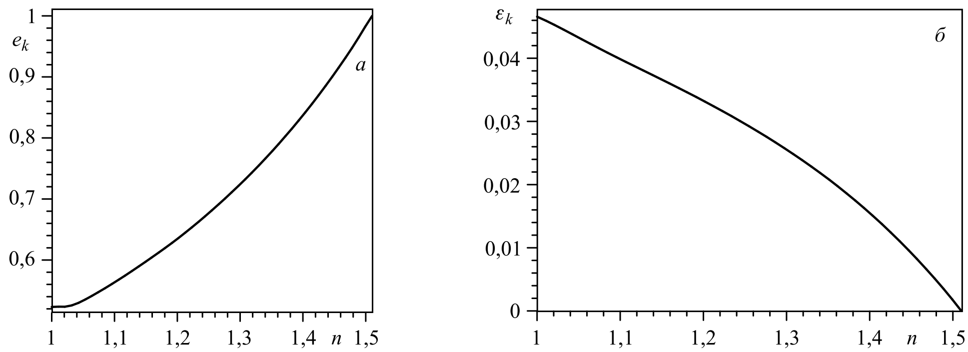


Рис. 11. Графики функций $e_k(n)$ (*а*) и $\varepsilon_k(n)$ (*б*)

Из (18) получается уравнение для критических значений $e_k$:

$$A(e_k, n) = 0. \tag{19}$$

Множество точек $e_k$ образует критическую кривую $e_k = e_k(n)$.

Аналитический вид функции $A(e, n)$ сложен, и мы ограничимся ее графиком на рис. 9.

Если использовать вместо $e$ физический параметр быстроты вращения $\varepsilon$, то график зависимости $A(\varepsilon, n)$ дан на рис. 10.

Из (19) находим зависимости $e_k(n)$ и $\varepsilon_k(n)$ от индекса политропы в интервале $1 \leqslant n \leqslant 1{,}6$. Графики этих зависимостей представлены на рис. 11.

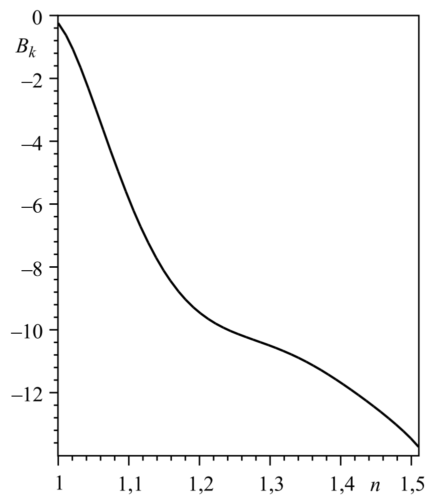


Рис. 12. График функции $B_k(n)$

Вблизи критических точек нужно учитывать уже члены порядка $X^3$. Тогда будем иметь уравнение

$$A(e, n)X + B_k(n)X^3 = -\eta_m. \tag{20}$$

График $B_k(n)$ приводится на рис. 12.

Уравнение (20) можно упростить заменой:

$$X = \sqrt[3]{\frac{-\eta_m}{B_k}}\xi(\lambda), \quad \lambda = -\frac{A(e, n)}{B_k^{1/3}(n)\eta_m^{2/3}}.$$

Тогда (20) приобретает вид

$$\xi^2 - \frac{1}{\xi} = \lambda. \tag{21}$$

Корни (21) соответственно равны

$$
\begin{gathered}
\xi_1 = 2\sqrt{-\frac{\lambda}{3}}\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{3}\ln\left(\sqrt{-\frac{27}{4\lambda^3}}+\sqrt{1-\frac{27}{4\lambda^3}}\right)\right), \quad \lambda < 0,\\
\xi_1 = 2\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\mathrm{ch}\left(\frac{1}{3}\ln\left(\sqrt{\frac{27}{4\lambda^3}}+\sqrt{\frac{27}{4\lambda^3}-1}\right)\right), \quad 0 < \lambda < \sqrt[3]{\frac{27}{4}},\\
\xi_{1,2,3} = 2\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\cos\left(3d_{1,2,3}\right)\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\sqrt{\frac{27}{4\lambda^3}}+d_{1,2,3}\right), \quad \lambda > \sqrt[3]{\frac{27}{4}},\\
d_1 = 0, \quad d_{2,3} = \mp\frac{\pi}{3}.
\end{gathered}
\tag{22}
$$

Наибольший интерес для нас представляют медленно вращающиеся политропы с $\varepsilon$ меньше или порядка $10^{-4}$ ($T$ больше или порядка $10^{-2}$ с), $1-e \ll 1$. Для их исследования найдем значение индекса политропы $n_k$ такое, что $\varepsilon_k = 0$, $e_k = 1$. Из уравнения $A(e=1, n_k) = 0$ получаем $n_k = 1{,}51025$. Это значение оказалось очень близким к значению $n = 1{,}5$, что соответствует уравнению состояния вырожденного нерелятивистского ферми-газа. Новое значение $n_k = 1{,}51025$ можно объяснить использованием приближения политропы полиномом четвертой степени вместо второй в [4] и новым методом расчета, более точным по сравнению с [4], асимметричных параметров конфигурации.

Для медленно вращающихся политроп имеем

$$
\begin{gathered}
e_k = 1 - 1{,}71367(1{,}51025 - n), \quad \varepsilon_k = 0{,}16859(1{,}51025 - n),\\
A(e,n) = 0{,}86034(1{,}51025 - n) - 0{,}05720(1-e), \quad B_k = -13{,}72356,\\
\lambda = -0{,}41801r + 0{,}07047p, \quad r = \frac{\varepsilon}{\eta_m^{2/3}}, \quad p = \frac{1{,}51025 - n}{\eta_m^{2/3}},\\
X(r,p,\eta_m) = -0{,}41768\eta_m^{1/3}\xi(\lambda(r,p)).
\end{gathered}
\tag{23}
$$

Если $|\lambda| \ll 1$, то

$$
\xi(\lambda) \cong 1 + \frac{1}{3}\lambda. \tag{24}
$$

При $\lambda \gg 1$

$$
\xi_{1,3}(\lambda) \cong \pm\sqrt{\lambda}, \quad \xi_2(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}.
$$

График зависимости $\xi = \xi(r,p)$ представлен на рис. 13.

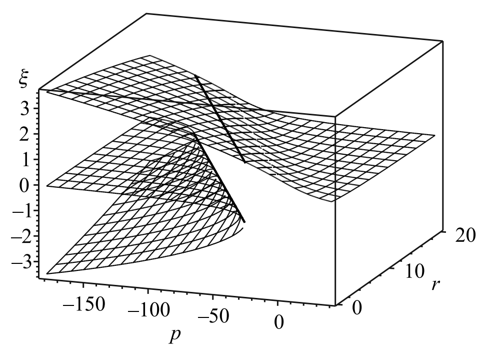


Рис. 13. График функции $\xi(r,p)$. Жирной линией изображена бифуркационная кривая

Из формул (23) следует, что при $n = n_k = 1{,}51025$ значение $\varepsilon_k = 0$, т. е. сколь угодно медленно вращающаяся ньютоновская политропа может иметь точку бифуркации при $\varepsilon_b = (0{,}16858p - 4{,}52112)\eta_m^{2/3}$. При $p = 40$, $\eta_m = 10^{-9}$ и $\rho_0 = 4\cdot 10^{14}$ г/см$^3$ имеем $\varepsilon_b \sim 10^{-6}$ ($T_b \sim 2{,}30\cdot 10^{-1}$ с).

Для дальнейшего рассмотрения характера эволюции намагниченной вращающейся политропы удобно ввести момент $M_{0m}$ по формуле

$$M_{0m}^2 = 2\pi G\rho_0 J^2 \eta_m^{2/3}, \tag{25}$$

где $J$ — момент инерции конфигурации. Для медленно вращающейся конфигурации значение $J$ постоянно. Тогда зависимость $\lambda$ от момента конфигурации будет иметь вид

$$\lambda = 0{,}07047p - 0{,}41801\left(\frac{M}{M_{0m}}\right)^2. \tag{26}$$

В процессе эволюции момент $M$ постоянно уменьшается за счет потерь на электромагнитное и гравитационное излучение. Для двойных систем к этим потерям добавляется влияние аккреции вещества. При этом $\lambda(M)$ будет расти, и при $M = M_b$ параметр $\lambda$ достигнет значения $\lambda = \lambda_b = \sqrt[3]{27/4}$ ($M_b = M_{0m}(1{,}16858p - 4{,}52112)^{1/2}$). Пусть при $t = 0$ значение $M(t = 0) = M_0 > M_b$. Тогда $\lambda(M_0) < \lambda_b$ и через определенное время он достигнет точки $\lambda_b$. За это время эволюция идет по ветви $X_1 = 0{,}41768\eta_m^{1/3}\xi_1(\lambda)$, и в точке $\lambda_b$ параметр $X_1$ достигает значения $X_1 = 0{,}663026\eta_m^{1/3}$. В этой точке $X_{2,3} = -0{,}33151\eta_m^{1/3}$. Возникает возможность перескока конфигурации с ветви $X_1$ на ветви $X_2$ и $X_3$. Для оценки такой возможности будем использовать энергетический подход. С этой целью вычислим полную энергию $E$ медленно вращающейся намагниченной ньютоновской политропы при фиксированной массе $m$, угловом моменте $M$ и индексе $n_k$:

$$E = 2\pi G\rho_0^2 a_1^5 \left(\varepsilon \int\limits_D \tilde\rho(x_1^2 + x_2^2)\, d^3x + \frac{1}{2}\int\limits_D \tilde\rho\Phi\, d^3x + {} \right.$$
$$\left. {} + n_k K_0 \int\limits_D \tilde\rho^{1+1/n_k}\, d^3x\right) + \frac{a_1^3}{8\pi}\int\limits_D B_{\mathrm{in}}^2\, d^3x. \tag{27}$$

Проведенный нами расчет дает

$$E = 2\pi G\rho_0^2 a_1^5 \left(5{,}81851\left(\frac{M}{M_0}\right)^2 - 0{,}02285 + 0{,}00986X^2 + 1{,}05879\eta_m X\right). \tag{28}$$

Из (28) следует, что минимум $E$ при фиксированном моменте достигается при отрицательных максимально больших по модулю значениях $X$ в области порядка $\eta_m^{1/3}$. Поэтому в точке бифуркации $\lambda_b$ должен возникнуть скачок с ветви $X_1$ на ветвь $X_3$. При этом скачке относительный период вращения изменится как

$$\frac{\Delta T}{T} = -2{,}16403\eta_m^{2/3}. \tag{29}$$

Формула (29) указывает на ускорение вращения намагниченной политропы в точке бифуркации $\lambda_b$. Природа скачка обусловлена наличием магнитных натяжений, ось симметрии которых наклонена к оси вращения. Если положить в (29) $\eta_m = 10^{-9}$–$10^{-13}$, то имеет место оценка:

$$\frac{\Delta T}{T} = -2{,}16403\cdot(10^{-9}–10^{-6}). \tag{30}$$

Проведенная нами оценка дает наблюдаемый порядок скачка периодов пульсаров. Так, относительное изменение периода $\Delta T/T$ во время скачка составляет $3 \cdot 10^{-9}$ лет PSR $0531 + 21$ в Крабовидной туманности и $2 \cdot 10^{-6}$ лет PSR $0833 - 45$ в созвездии Парусов [9].

Проведенные нами оценки скачков периодов пульсаров согласуются со значениями внутреннего магнитного поля $B_{0\,\mathrm{in}}$ порядка $10^{-14}$–$10^{-12}$ Гс, что примерно на два порядка больше характерных значений внешних магнитных полей пульсаров $B_{0\,\mathrm{out}}$. Данное соотношение примерно соответствует отношению полоидального и тороидального полей в модели магнитного динамо. Эти оценки имеют место, если механизм этих скачков связан с достижением фигур пульсаров точки бифуркации $\varepsilon_b$. Данный эффект несомненно может быть использован для получения оценки внутренних магнитных полей пульсаров.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты данной работы убедительно доказывают наличие критических точек и точек бифуркации намагниченных ньютоновских политроп с индексом $1 \leqslant n \leqslant 1{,}6$. Это противоречит установившемуся мнению [2], что при $n > 0{,}808$ точек бифуркации нет, и указывает на сложный характер зависимости решения уравнения (1) от индекса политропы для различных интервалов его значений, т. е. параметров уравнения состояния. Получено численное значение критического индекса политропы $n_k = 1{,}51025$, выше которого нет точек бифуркации и критических точек в рассмотренном интервале значений $1 \leqslant n \leqslant 1{,}6$ в случае использования аппроксимации функции $\tilde{\rho}^{1/n}$ полиномом четвертой степени $N = 4$.

Показано, что вблизи $n_k$ у медленно вращающихся ньютоновских политроп существуют точки бифуркации.

Предложен новый механизм скачка периода пульсара, обусловленный прохождением точки бифуркации его фигуры в процессе эволюции и сменой знака параметра асимметрии $X$ распределения вещества относительно оси вращения. При этом величина скачка может быть использована для оценки внутреннего магнитного поля пульсаров.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Jeans J. H.* Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics. Adams Prize Essay for 1917. Cambridge: Univ. Press, 1919. 293 p.
2. *James R. A.* The Structure and Stability of Rotating Gas Masses // Astrophys. J. 1964. V. 140. P. 552–582.
3. *Беспалько Е. В. и др.* Гравитирующая быстровращающаяся сверхплотная конфигурация с реалистическими уравнениями состояния // Мат. моделирование. 2006. Т. 118, № 3. С. 103–119.
4. *Михеев С. А., Цветков В. П.* Точки бифуркации вращающихся намагниченных ньютоновских политроп с показателем, близким к единице // Письма в ЭЧАЯ. 2008. Т. 5, № 4(146). С. 675–687.
5. *Михеев С. А., Пузынин И. В., Цветков В. П.* Конфигурации вращающихся намагниченных ньютоновских политроп с малым индексом // Вестн. ТвГУ. Сер. «Прикладная математика». 2010. Вып. 1(16). С. 75–86.

6. *Цветков В. П., Масюков В. В.* Метод рядов Бурмана–Лагранжа в задаче об аналитическом представлении ньютоновского потенциала возмущенных эллипсоидальных конфигураций // Докл. АН СССР. 1990. Т. 3, № 5. С. 1099–1102.
7. *Беспалько Е. В. и др.* Ньютоновский потенциал гравитирующей конфигурации с поверхностью, близкой к сфероиду. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011616808. Зарегистрирована в реестре программ 1 сентября 2011 г.
8. *Ермаков В. В., Калиткин Н. Н.* Оптимальный шаг и регуляризация метода Ньютона // Журн. вычисл. и мат. физ. 1981. Т. 21, № 2. С. 491–497.
9. *Taylor J. H., Manchester R. N., Lyne A. G.* Catalog of 558 Pulsars // Astrophys. J. Suppl. Ser. 1993. V. 88, No. 2. P. 529–568.

Получено 12 июля 2012 г.