Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, № 4(181). С. 486–500

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

ЛИНЕЙНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ НА КОСМОЛОГИЧЕСКОМ ФОНЕ В РТГ. II. ПРИЛОЖЕНИЕ

К. А. Модестов [1], *Ю. В. Чугреев* [2]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Найдено решение общих уравнений, полученных в части I [1] и описывающих развитие гравитационной неустойчивости на фоне осциллирующей однородной и изотропной Вселенной в РТГ с массивным гравитоном. Приведены полные решения и их коротко- и длинноволновые асимптотики для наиболее характерных этапов эволюции Вселенной — вблизи точек поворота, соответствующих максимальной и минимальной плотностям, а также на радиационно-доминированной, нерелятивистской стадиях и квинтэссенции. В каждом из этих случаев, кроме точек поворота, для скалярных и векторных возмущений найдены калибровочные векторы, позволившие исключить волновые решения, имеющие фазовую скорость, равную скорости света. Сделан вывод о принципиальной возможности образования наблюдаемой структуры во Вселенной за достаточно большое число ее циклов.

One has obtained the part I [1] general equations, describing evolution of gravitational instability on the background of oscillating homogeneous and isotropic Universe in the framework of RTG with massive gravitons. Both complete solutions and their short and long wave asymptotes have been calculated for the most typical stages of Universe evolution in the vicinity of return points corresponding to minimal and to maximal matter densities, and also in radiation-dominated and nonrelativistic stages. It was shown that for all these stages gauge vectors exist, allowing one to exclude wave solutions with speed of light phase velocity. There exists a principal opportunity to form the observed structure of Universe during sufficiently big number of its cycles.

PACS: 04.50.Kd; 95.30.Sf

1. НУЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Настоящая работа является окончанием цикла публикаций [1, 2] и частью II статьи [1], в которой содержатся все предшествующие формулы и введенные обозначения.

Космологическая задача в нулевом приближении в рамках РТГ была рассмотрена в [3, 4]. Там было показано, что $\alpha(\eta)$ осциллирует между некоторыми значениями $\alpha_{\min}$ и $\alpha_{\max}$ с периодом, определяемым массой гравитона m и параметром квинтэссенции w.

[1]E-mail: modestov@goa.bog.msu.ru
[2]E-mail: chugreev@goa.bog.msu.ru

Вследствие уравнения (1.3) [1] $\varepsilon \sim 1/\alpha^{3(1+w)}$, как и в ОТО [5–8], поэтому малым α соответствуют большие плотности. По всей видимости, в районе точки $\alpha_{\min}$ плотность и температура должны быть достаточно высокими, чтобы обеспечить распад тяжелых элементов и установление термодинамического равновесия между реликтовым излучением и веществом, поэтому будем считать, что $\alpha_{\max}/\alpha_{\min} \gg 1$. Кроме того, принцип причинности ((30) [4]) накладывает ограничение снизу на константу β в (39) [4]: $\beta \geqslant a_{\max}$. Эта константа ограничена также и сверху требованием положительности правой части уравнения (1.2) [1], причем чем ближе β к верхнему пределу, тем меньше амплитуда изменения $\alpha(\eta)$; при $\beta = \beta_{\max}\, \alpha(\eta) = \mathrm{const}$. Так как нам необходимо большое отношение $\alpha_{\max}$ к $\alpha_{\min}$, положим, как и в [4], $\beta = a_{\max}$. Также, следуя [4], будем считать, что $\alpha_{\max} \gg 1$. При таких предположениях эволюцию Вселенной от $\alpha_{\min}$ до $\alpha_{\max}$ можно представить как последовательность пяти этапов, описываемых соответствующими формулами.

I этап. При $\alpha \sim \alpha_{\min}$ плотность излучения превосходит плотность вещества, поэтому в уравнении состояния вещества $w = 1/3$. Масштабный фактор можно приближенно описать соотношением $\alpha = \alpha_{\min}(1+a\eta^2)$, где $a\eta^2 \ll 1$; из уравнения (1.2) [1] следует, что

$$\frac{\kappa}{3}\varepsilon_{\max} \approx \frac{m^2}{12}\frac{\alpha_{\max}^4}{\alpha_{\min}^6}, \quad a \approx \frac{m^2}{24}\frac{\alpha_{\max}^4}{\alpha_{\min}^4}.$$

II этап. Пока плотность достаточно высока, имеет место радиационно-доминированная стадия эволюции Вселенной и $w = 1/3$. При $\alpha \gg \alpha_{\min}$ массой в уравнении (1.2) [1] можно пренебречь, и масштабный фактор будет вести себя так же, как и в стандартном фридмановском сценарии в ОТО:

$$\alpha \sim \eta, \quad \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{1}{\eta}, \quad \varepsilon \sim \frac{1}{\eta^4}.$$

III этап. При дальнейшем расширении наступает пылевая стадия эволюции Вселенной, когда $w = 0$. Массой в (1.2) [1] можно пренебречь, и $\alpha(\eta)$ снова ведет себя, как в ОТО:

$$\alpha \sim \eta^2, \quad \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{2}{\eta}, \quad \varepsilon \sim \frac{1}{\eta^6}.$$

IV этап. Для объяснения наблюдаемого ускоренного расширения Вселенной [9–11] в стандартный космологический сценарий нами была добавлена стадия доминирования квинтэссенции с произвольным $-1 < w < 0$. Опять пренебрегая массой в (1.2) [1], получим

$$\alpha \sim \eta^{\frac{\beta+1}{2}}, \quad \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta+1}{2}\frac{1}{\eta}, \quad \varepsilon \sim \frac{1}{\eta^{\beta+3}}.$$

V этап. Наконец, при $\alpha \sim \alpha_{\max}$ происходит остановка расширения. В этом случае w такое же, как на предыдущем этапе, а масштабный фактор можно приближенно выразить как $\alpha = \alpha_{\max}(1 - b\eta^2)$, где $b\eta^2 \ll 1$. Из уравнения (1.2) [1] следует, что

$$\frac{2\kappa}{m^2}\varepsilon_{\min} = 1 - \frac{1}{\alpha_{\max}^2}, \quad b = \frac{w+1}{8}m^2\alpha_{\max}^2.$$

Эволюция Вселенной от $\alpha_{\max}$ до $\alpha_{\min}$ представляет собой последовательность тех же пяти этапов в обратном порядке с очевидной заменой $\eta \to -\eta$ в формулах (зависимость $\alpha(\eta)$ симметрична относительно точек $\alpha_{\min}$ и $\alpha_{\max}$, причем $\alpha(\eta) = \alpha(-\eta)$).

Уравнения для малых возмущений гравитационного поля на соответствующих этапах расширения и сжатия Вселенной совпадают, поэтому будут совпадать и их решения, только вследствие упомянутой замены η направлению от прошлого к будущему будет соответствовать не увеличение $|\eta|$, а уменьшение.

Теперь перейдем к исследованию решений уравнений для скалярных возмущений на всех пяти этапах.

2. ВОЗМУЩЕНИЯ С ИЗМЕНЕНИЕМ ПЛОТНОСТИ МАТЕРИИ (СКАЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ)

Решение уравнений калибровочных преобразований ((2.3) [1]) имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega &= \eta^{\beta/2+1}\{D_1 J_{\beta/2}(n\eta) + D_2 N_{\beta/2}(n\eta)\}, \\ a &= \eta^{-\beta/2}\{D_3 J_{\beta/2}(n\eta) + D_4 N_{\beta/2}(n\eta)\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Общее решение уравнения ((3.4) [1])

$$\lambda = \eta^{-\beta/2}\{C_5 J_{\beta/2}(n\eta) + C_6 N_{\beta/2}(n\eta)\}. \tag{2.2}$$

Из (3.3) [1] видно, что λ может быть полностью уничтожено калибровочными преобразованиями.

Зная два решения уравнения (3.6) [1], даваемые калибровочными преобразованиями, упростим это уравнение, введя вспомогательную переменную

$$y = \widetilde{\mu}'' + \frac{1-\beta}{\eta}\widetilde{\mu}' + n^2\widetilde{\mu}. \tag{2.3}$$

Легко проверить, что для калибровочного решения $\xi^0 \neq 0$, для которого $\widetilde{\mu}$ определяется соотношениями (3.2), (3.3) [1], y будет равняться нулю, т. е. оно не дает вклада в y. В терминах y первое из уравнений (3.6) [1] примет вид

$$y'' + \frac{\beta+3}{\eta}y' + wn^2 y = 0. \tag{2.4}$$

Его решение

$$y = \eta^{-(\beta/2+1)}[C_3 J_{\beta/2+1}(\sqrt{w}n\eta) + C_4 N_{\beta/2+1}(\sqrt{w}n\eta)], \tag{2.5}$$

а для нерелятивистского случая $\beta = 3$

$$y = C_3 + C_4\eta^{-5}. \tag{2.6}$$

Отсюда получаем в квадратурах

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu} = \eta^{\beta/2}\Big\{ & C_1 J_{\beta/2}(n\eta) + C_2 N_{\beta/2}(n\eta) - \\ & - J_{\beta/2}(n\eta)\int N_{\beta/2}(n\eta)[C_3 J_{\beta/2+1}(\sqrt{w}n\eta) + C_4 N_{\beta/2+1}(\sqrt{w}n\eta)]\eta^{-\beta}d\eta + \\ & + N_{\beta/2}(n\eta)\int J_{\beta/2}(n\eta)[C_3 J_{\beta/2+1}(\sqrt{w}n\eta) + C_4 N_{\beta/2+1}(\sqrt{w}n\eta)]\eta^{-\beta}d\eta\Big\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Для ω получаем из (3.5) [1]

$$\omega = \eta^{\beta/2}\Bigg\{C_1\left(-\frac{2}{3(\beta+1)}n\eta J_{\beta/2+1}(n\eta)+J_{\beta/2}(n\eta)\right)+$$
$$+C_2\left(-\frac{2}{3(\beta+1)}n\eta N_{\beta/2+1}(n\eta)+N_{\beta/2}(n\eta)\right)-$$
$$-\left(-\frac{2}{3(\beta+1)}n\eta J_{\beta/2+1}(n\eta)+J_{\beta/2}(n\eta)\right)\times$$
$$\times\int N_{\beta/2}(n\eta)[C_3J_{\beta/2+1}(\sqrt{w}n\eta)+C_4N_{\beta/2+1}(\sqrt{w}n\eta)]\eta^{-\beta}d\eta+$$
$$+\left(-\frac{2}{3(\beta+1)}n\eta N_{\beta/2+1}(n\eta)+N_{\beta/2}(n\eta)\right)\times$$
$$\times\int J_{\beta/2}(n\eta)[C_3J_{\beta/2+1}(\sqrt{w}n\eta)+C_4N_{\beta/2+1}(\sqrt{w}n\eta)]\eta^{-\beta}d\eta-$$
$$-\frac{\sqrt{w}}{\pi\beta n}\left[C_3J_{\beta/2+1}(\sqrt{w}n\eta)+C_4N_{\beta/2+1}(\sqrt{w}n\eta)\right]\eta^{-\beta}\Bigg\}. \quad (2.8)$$

Случай $\beta=3$ строится аналогично по тем же математическим формулам.

Случай длинноволновых возмущений $n\eta \ll 1$ получаем разложением в ряд решения или приближенным решением исходных уравнений (на радиационно-доминирующей стадии приведенные формулы неприменимы, см. далее)

$$\lambda = C_5'\left[1-\frac{1}{2(\beta+2)}n^2\eta^2\right]+C_6'\eta^{-\beta}\left[1+\frac{1}{2(\beta-2)}n^2\eta^2\right], \quad (2.9)$$

$$\omega = C_1'\eta^\beta\left[1-\frac{3\beta+7}{6(\beta+1)(\beta+2)}n^2\eta^2\right]+C_2'\frac{w+1}{2}\left[1+\frac{\beta+7}{2(\beta-2)(\beta+3)}n^2\eta^2\right]+$$
$$+C_3'\frac{\beta^2-4}{\beta}\left[1+\frac{1}{2(\beta-2)}n^2\eta^2\right]+C_4'\eta^{-\beta}\left[-\frac{2}{3(\beta^2-1)(\beta-2)}n^2\eta^2\right], \quad (2.10)$$

$$\widetilde{\mu} = C_1'\eta^\beta\left[1-\frac{1}{2(\beta+2)}n^2\eta^2\right]+C_2'\left[1+\frac{1}{2(\beta-2)}n^2\eta^2\right]+$$
$$+C_3'[n^2\eta^2]+C_4'\eta^{-\beta}\left[1-\frac{\beta^2+3}{6(\beta^2-1)(\beta-2)}n^2\eta^2\right], \quad (2.11)$$

$$\mu = \widetilde{\mu}-\lambda = C_1'\eta^\beta\left[1-\frac{1}{2(\beta+2)}n^2\eta^2\right]+C_2'\left[1+\frac{1}{2(\beta-2)}n^2\eta^2\right]+$$
$$+C_3'[n^2\eta^2]+C_4'\eta^{-\beta}\left[1-\frac{\beta^2+3}{6(\beta^2-1)(\beta-2)}n^2\eta^2\right]-$$
$$-C_5'\left[1-\frac{1}{2(\beta+2)}n^2\eta^2\right]-C_6'\eta^{-\beta}\left[1+\frac{1}{2(\beta-2)}n^2\eta^2\right], \quad (2.12)$$

$$\rho = \frac{(\omega-\mu)'}{2n} = -\frac{n\eta}{3(\beta+1)}\left(C_1'\eta^\beta\left[1-\frac{1}{2(\beta+2)}n^2\eta^2\right] + C_2'\left[1+\frac{1}{2(\beta-2)}n^2\eta^2\right]\right) + $$
$$+ C_3'\left[-\frac{\beta-2}{2\beta}n\eta\right] + C_4'\frac{\beta}{2n\eta}\eta^{-\beta}\left[1-\frac{1}{6\beta}n^2\eta^2\right] +$$
$$+ C_5'\left[-\frac{1}{2(\beta+2)}n\eta\right] + C_6'\left(-\frac{\beta}{2n\eta}\right)\eta^{-\beta}\left[1+\frac{1}{2\beta}n^2\eta^2\right], \quad (2.13)$$

$$v = \frac{n\eta}{3(\beta+1)}\left(C_1'\eta^\beta\left[1-\frac{1}{2(\beta+2)}n^2\eta^2\right] + C_2'\left[1+\frac{1}{2(\beta-2)}n^2\eta^2\right] + \right.$$
$$+C_3'\frac{2(\beta^2-4)}{(w+1)\beta}\left[1+\frac{3\beta^2+\beta+6}{6(\beta^2-4)(\beta+1)}n^2\eta^2\right] +$$
$$\left. +C_4'\eta^{-\beta}\frac{2\beta}{\beta+3}\left[1-\frac{\beta^2-2\beta+9}{6(\beta-2)(\beta^2-1)}n^2\eta^2\right]\right), \quad (2.14)$$

$$\delta = C_1'\left(-\frac{w+1}{2}\right)\eta^\beta\left[1-\frac{1}{2(\beta+2)}n^2\eta^2\right] + C_2'\left(-\frac{w+1}{2}\right)\left[1+\frac{1}{2(\beta-2)}n^2\eta^2\right] +$$
$$+C_3'\left(-\frac{\beta^2-4}{\beta}\right)\left[1+\frac{3\beta-1}{6(\beta+1)(\beta-2)}n^2\eta^2\right] + C_4'\eta^{-\beta}\left[\frac{2(2\beta^2-\beta+3)}{9(\beta-2)(\beta-1)(\beta+1)^2}n^2\eta^2\right]. \quad (2.15)$$

Постоянные $C_1', C_2', C_3', C_4', C_5', C_6'$ отличаются от постоянных $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ числовыми множителями, которые для простоты мы здесь не приводим.

Теперь рассмотрим высокочастотную асимптотику $n\eta \gg 1$. Подставляя асимптотики цилиндрических функций, получим с точностью до числового множителя для $\widetilde{\mu}$ функции при постоянных C_1, C_2, C_3 и C_4 соответственно

$$\eta^{\frac{\beta-1}{2}}\cos\left(n\eta - \frac{(\beta+1)\pi}{4}\right), \quad \eta^{\frac{\beta-1}{2}}\sin\left(n\eta - \frac{(\beta+1)\pi}{4}\right),$$
$$\eta^{-\frac{\beta+3}{2}}\sin\left(\sqrt{w}n\eta - \frac{(\beta+1)\pi}{4}\right), \quad \eta^{-\frac{\beta+3}{2}}\cos\left(\sqrt{w}n\eta - \frac{(\beta+1)\pi}{4}\right). \quad (2.16)$$

Для ω, v и δ аналогичные функции имеют вид

$$-\frac{2}{3(\beta+1)}n\eta^{\frac{\beta+1}{2}}\sin\left(n\eta - \frac{(\beta+1)\pi}{4}\right), \quad \frac{2}{3(\beta+1)}n\eta^{\frac{\beta+1}{2}}\cos\left(n\eta - \frac{(\beta+1)\pi}{4}\right),$$
$$-\frac{1}{\beta}\eta^{-\frac{\beta+3}{2}}\sin\left(\sqrt{w}n\eta - \frac{(\beta+1)\pi}{4}\right), \quad -\frac{1}{\beta}\eta^{-\frac{\beta+3}{2}}\cos\left(\sqrt{w}n\eta - \frac{(\beta+1)\pi}{4}\right), \quad (2.17)$$

$$\frac{1}{3(\beta+1)}n\eta^{\frac{\beta+1}{2}}\cos\left(n\eta - \frac{(\beta+1)\pi}{4}\right), \quad \frac{1}{3(\beta+1)}n\eta^{\frac{\beta+1}{2}}\sin\left(n\eta - \frac{(\beta+1)\pi}{4}\right),$$
$$-\frac{2\sqrt{w}}{3(\beta+1)(\beta+3)}n^2\eta^{\frac{1-\beta}{2}}\cos\left(\sqrt{w}n\eta - \frac{(\beta+1)\pi}{4}\right), \quad (2.18)$$
$$\frac{2\sqrt{w}}{3(\beta+1)(\beta+3)}n^2\eta^{\frac{1-\beta}{2}}\sin\left(\sqrt{w}n\eta - \frac{(\beta+1)\pi}{4}\right)$$

и

$$-\frac{w+1}{2}\eta^{\frac{\beta-1}{2}}\cos\left(n\eta-\frac{(\beta+1)\pi}{4}\right), \quad -\frac{w+1}{2}\eta^{\frac{\beta-1}{2}}\sin\left(n\eta-\frac{(\beta+1)\pi}{4}\right),$$
$$\frac{4}{9(\beta+1)^2}n^2\eta^{\frac{1-\beta}{2}}\sin\left(\sqrt{w}n\eta-\frac{(\beta+1)\pi}{4}\right), \tag{2.19}$$
$$\frac{4}{9(\beta+1)^2}n^2\eta^{\frac{1-\beta}{2}}\cos\left(\sqrt{w}n\eta-\frac{(\beta+1)\pi}{4}\right).$$

Для λ функции при постоянных C_5 и C_6 соответственно

$$\eta^{-\frac{\beta+1}{2}}\cos\left(n\eta-\frac{(\beta+1)\pi}{4}\right), \quad \eta^{-\frac{\beta+1}{2}}\sin\left(n\eta-\frac{(\beta+1)\pi}{4}\right). \tag{2.20}$$

Для радиационно-доминирующей стадии эти функции можно получить подстановкой $\beta = 1$, $w = 1/3$. Для нерелятивистской стадии $\beta = 3$, однако w обращается в нуль, поэтому функции при постоянных C_3 и C_4 будут иметь теперь другой вид:

$$\begin{gathered}
1 \quad \text{и} \quad \eta^{-5} \quad \text{для} \quad \widetilde{\mu}, \\
-\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad -\frac{1}{3}\eta^{-5} \quad \text{для} \quad \omega, \\
-\frac{1}{18}n\eta \quad \text{и} \quad \frac{1}{12}n\eta^{-4} \quad \text{для} \quad v, \\
\frac{1}{36}n^2\eta^2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{36}n^2\eta^{-3} \quad \text{для} \quad \delta.
\end{gathered} \tag{2.21}$$

Радиационно-доминирующая стадия

$$\begin{aligned}
J_{\beta/2}(n\eta) &= J_{1/2}(n\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi n\eta}}\sin n\eta, \\
N_{\beta/2}(n\eta) &= N_{1/2}(n\eta) = -\sqrt{\frac{2}{\pi n\eta}}\cos n\eta.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

После взятия интегралов, входящих в (2.7),

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu} = C_1\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sin n\eta - C_2\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\cos n\eta - \\
- C_3\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}\pi^{3/2}\sqrt{n}}\Big\{\sin n\eta\left(Si\left[\left(1+1/\sqrt{3}\right)n\eta\right] - Si\left[\left(1-1/\sqrt{3}\right)n\eta\right]\right) + \\
+ \cos n\eta\left(Ci\left[\left(1+1/\sqrt{3}\right)n\eta\right] - Ci\left[\left(1-1/\sqrt{3}\right)n\eta\right]\right) - \frac{3}{n\eta}\sin\frac{n\eta}{\sqrt{3}}\Big\} + \\
+ C_4\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}\pi^{3/2}\sqrt{n}}\Big\{\sin n\eta\left(Ci\left[\left(1+1/\sqrt{3}\right)n\eta\right] + Ci\left[\left(1-1/\sqrt{3}\right)n\eta\right]\right) - \\
- \cos n\eta\left(Si\left[\left(1+1/\sqrt{3}\right)n\eta\right] + Si\left[\left(1-1/\sqrt{3}\right)n\eta\right]\right) - \frac{3}{n\eta}\cos\frac{n\eta}{\sqrt{3}}\Big\}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Случай $n\eta \ll 1$:

$$\lambda = C_5'\left[1-\frac{1}{6}n^2\eta^2\right] + C_6'\eta^{-1}\left[1-\frac{1}{2}n^2\eta^2\right], \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}\omega = C_1'\eta\left[1-\frac{5}{18}n^2\eta^2\right] + C_2'\frac{2}{3}\left[1-n^2\eta^2\right] + \\ + C_3'(-3)\left[1-\frac{1}{2}n^2\eta^2\right] + C_4'\eta^{-1}\left[-\frac{1}{3}n^2\eta^2\ln\left(n^2\eta^2\right)\right],\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu} = C_1'\eta\left[1-\frac{1}{6}n^2\eta^2\right] + C_2'\left[1-\frac{1}{2}n^2\eta^2\right] + \\ + C_3'\left[n^2\eta^2\right] + C_4'\eta^{-1}\left[1-\frac{1}{3}n^2\eta^2\left(\ln\left(n^2\eta^2\right)-\frac{1}{2}\right)\right],\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}\mu = \widetilde{\mu} - \lambda = C_1'\eta\left[1-\frac{1}{6}n^2\eta^2\right] + C_2'\left[1-\frac{1}{2}n^2\eta^2\right] + \\ + C_3'\left[n^2\eta^2\right] + C_4'\eta^{-1}\left[1-\frac{1}{3}n^2\eta^2\left(\ln\left(n^2\eta^2\right)-\frac{1}{2}\right)\right] - \\ - C_5'\left[1-\frac{1}{6}n^2\eta^2\right] - C_6'\eta^{-1}\left[1-\frac{1}{2}n^2\eta^2\right],\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}\rho = \frac{(\omega-\mu)'}{2n} = -\frac{n\eta}{6}\left(C_1'\eta\left[1-\frac{1}{6}n^2\eta^2\right] + C_2'\left[1-\frac{1}{2}n^2\eta^2\right]\right) + \\ + C_3'\left[\frac{1}{2}n\eta\right] + C_4'\frac{1}{2n\eta}\eta^{-1}\left[1-\frac{1}{6}n^2\eta^2\right] + \\ + C_5'\left[-\frac{1}{6}n\eta\right] + C_6'\left(-\frac{1}{2n\eta}\right)\eta^{-1}\left[1+\frac{1}{2}n^2\eta^2\right],\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}v = \frac{n\eta}{6}\left(C_1'\eta\left[1-\frac{1}{6}n^2\eta^2\right] + C_2'\left[1-\frac{1}{2}n^2\eta^2\right]\right) + \\ + C_3'\left(-\frac{3}{4}\right)n\eta\left[1-\frac{5}{18}n^2\eta^2\right] + C_4'\eta^{-1}\frac{1}{12}n\eta\left[1-\frac{2}{3}n^2\eta^2\ln\left(n^2\eta^2\right)\right],\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}\delta = C_1'\left(-\frac{2}{3}\right)\eta\left[1-\frac{1}{6}n^2\eta^2\right] + C_2'\left(-\frac{2}{3}\right)\left[1-\frac{1}{2}n^2\eta^2\right] + \\ + C_3'3\left[1-\frac{1}{6}n^2\eta^2\right] + C_4'\eta^{-1}\left[\frac{2}{9}n^2\eta^2\left(\ln\left(n^2\eta^2\right)-\frac{1}{2}\right)\right].\end{aligned} \tag{2.30}$$

Нерелятивистская стадия

$$J_{\beta/2}(n\eta) = J_{3/2}(n\eta) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{n\eta\cos n\eta - \sin n\eta}{(n\eta)^{3/2}},$$
$$N_{\beta/2}(n\eta) = N_{3/2}(n\eta) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{n\eta\sin n\eta + \cos n\eta}{(n\eta)^{3/2}}. \tag{2.31}$$

После взятия интегралов, входящих в (2.7),

$$\widetilde{\mu} = -C_1\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{n\eta\cos n\eta - \sin n\eta}{n^{3/2}} - C_2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{n\eta\sin n\eta + \cos n\eta}{n^{3/2}} + C_3\frac{2}{n^2\pi} +$$
$$+ C_4\frac{1}{72\pi\eta^3}\left\{8 - 2n^2\eta^2 + \sqrt{\pi/2}(n\eta)^{9/2}\left[J_{3/2}(n\eta)Ci(n\eta) + N_{3/2}(n\eta)Si(n\eta)\right]\right\}. \tag{2.32}$$

Случай $n\eta \ll 1$:

$$\lambda = C'_5\left[1 - \frac{1}{10}n^2\eta^2\right] + C'_6\eta^{-3}\left[1 + \frac{1}{2}n^2\eta^2\right], \tag{2.33}$$

$$\omega = C'_1\eta^3\left[1 - \frac{2}{15}n^2\eta^2\right] + C'_2\frac{1}{2}\left[1 + \frac{5}{6}n^2\eta^2\right] + C'_3\frac{5}{3}\left[1 + \frac{1}{2}n^2\eta^2\right] + C'_4\eta^{-3}\left[-\frac{1}{12}n^2\eta^2\right], \tag{2.34}$$

$$\widetilde{\mu} = C'_1\eta^3\left[1 - \frac{1}{10}n^2\eta^2\right] + C'_2\left[1 + \frac{1}{2}n^2\eta^2\right] + C'_3\left[n^2\eta^2\right] + C'_4\eta^{-3}\left[1 - \frac{1}{4}n^2\eta^2\right], \tag{2.35}$$

$$\mu = \widetilde{\mu} - \lambda = C'_1\eta^3\left[1 - \frac{1}{10}n^2\eta^2\right] + C'_2\left[1 + \frac{1}{2}n^2\eta^2\right] +$$
$$+ C'_3\left[n^2\eta^2\right] + C'_4\eta^{-3}\left[1 - \frac{1}{4}n^2\eta^2\right] - C'_5\left[1 - \frac{1}{10}n^2\eta^2\right] - C'_6\eta^{-3}\left[1 + \frac{1}{2}n^2\eta^2\right], \tag{2.36}$$

$$\rho = \frac{(\omega - \mu)'}{2n} = -\frac{n\eta}{12}\left(C'_1\eta^3\left[1 - \frac{1}{10}n^2\eta^2\right] + C'_2\left[1 + \frac{1}{2}n^2\eta^2\right]\right) + C'_3\left[-\frac{1}{6}n\eta\right] +$$
$$+ C'_4\frac{3}{2n\eta}\eta^{-3}\left[1 - \frac{1}{18}n^2\eta^2\right] + C'_5\left[-\frac{1}{10}n\eta\right] + C'_6\left(-\frac{3}{2n\eta}\right)\eta^{-3}\left[1 + \frac{1}{6}n^2\eta^2\right], \tag{2.37}$$

$$v = \frac{n\eta}{12}\left(C'_1\eta^3\left[1 - \frac{1}{10}n^2\eta^2\right] + C'_2\left[1 + \frac{1}{2}n^2\eta^2\right]\right) +$$
$$+ C'_3\frac{5}{18}n\eta\left[1 + \frac{3}{10}n^2\eta^2\right] + C'_4\eta^{-1}\frac{1}{12}n\eta\left[1 - \frac{1}{4}n^2\eta^2\right], \tag{2.38}$$

$$\delta = C'_1\left(-\frac{1}{2}\right)\eta^3\left[1 - \frac{1}{10}n^2\eta^2\right] + C'_2\left(-\frac{1}{2}\right)\left[1 + \frac{1}{2}n^2\eta^2\right] +$$
$$+ C'_3\left(-\frac{5}{3}\right)\left[1 + \frac{1}{3}n^2\eta^2\right] + C'_4\eta^{-3}\left[\frac{1}{8}n^2\eta^2\right]. \tag{2.39}$$

3. ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ (ВЕКТОРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ)

Решение уравнений (2.3) [1] имеет вид

$$A(\eta) = \eta^{-\beta/2}\{D_3 J_{\beta/2}(n\eta) + D_4 N_{\beta/2}(n\eta)\}. \tag{3.1}$$

Общее решение уравнения (4.4) [1]

$$\sigma(\eta) = \eta^{-\beta/2}\{C_1 J_{\beta/2}(n\eta) + C_2 N_{\beta/2}(n\eta)\}. \tag{3.2}$$

Видно, что σ может быть полностью уничтожено калибровочными преобразованиями.

Выражения для цилиндрических функций на отдельных стадиях эволюции, а также их асимптотики даны в предыдущем разделе.

Из (4.5) [1] находим P

$$P(\eta) = \eta^{-\beta/2}\{C_1 J_{\beta/2+1}(n\eta) + C_2 N_{\beta/2+1}(n\eta)\} + C_3\eta^{-(\beta+1)}. \tag{3.3}$$

Видно, что только осциллирующие члены в P могут быть уничтожены калибровочными преобразованиями, чисто степенной член остается.

Согласно (4.6) [1]

$$V(\eta) = \frac{n^2\eta^2 C_3 \eta^{-(\beta+1)}}{(\beta+1)(\beta+3)}, \tag{3.4}$$

т. е.

$$V(\eta) \sim \eta^{1-\beta}, \tag{3.5}$$

что находится в полном соответствии с уравнением (1.17) [1], которое для вращательных возмущений имеет такой же вид, как и в случае возмущений, не зависящих от пространственных координат.

4. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ (ТЕНЗОРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ)

Общее решение уравнения (5.3) [1]

$$\upsilon(\eta) = \eta^{-\beta/2}\{C_1 J_{\beta/2}(n\eta) + C_2 N_{\beta/2}(n\eta)\}. \tag{4.1}$$

Выражения для цилиндрических функций на отдельных стадиях эволюции, а также их асимптотики даны ранее.

5. ЭВОЛЮЦИЯ МАЛЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ВБЛИЗИ ТОЧЕК ПОВОРОТА

Точное аналитическое решение на протяжении всей стадии найти не удается, поэтому ограничимся разложением в ряд Тейлора вблизи точек поворота. Для первой точки поворота точная зависимость масштабного фактора от конформного времени имеет вид

$$\alpha^2 = \alpha^2_{\min} + \frac{m^2\alpha^4_{\max}}{12\alpha^2_{\min}}\eta^2. \tag{5.1}$$

Для $\lambda, \omega, \mu, \delta$ получим разложение

$$\lambda = C_5\left(1 - \frac{1}{2}n^2\eta^2 + \frac{1}{6}\frac{n^2\eta^4}{a^2} + \frac{1}{24}n^4\eta^4\right) + \\ + C_6\eta\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\eta^2}{a^2} + \frac{1}{5}\frac{\eta^4}{a^4} - \frac{1}{6}n^2\eta^2 + \frac{1}{15}\frac{n^2\eta^4}{a^2} + \frac{1}{120}n^4\eta^4\right),$$

$$\omega = C_1\left(1 - \frac{1}{2}n^2\eta^2 + \frac{1}{24}n^4\eta^4\right) + C_2\left(-\frac{1}{3}n^2\eta^2 + \frac{1}{27}n^4\eta^4\right) + \\ + C_3\eta\left(1 - \frac{1}{6}n^2\eta^2 - \frac{1}{90}\frac{n^2\eta^4}{a^2} + \frac{1}{120}n^4\eta^4\right) + C_4\eta\left(-\frac{1}{9}n^2\eta^2 + \frac{1}{90}\frac{n^2\eta^4}{a^2} + \frac{1}{135}n^4\eta^4\right),$$

$$\widetilde{\mu} = C_1\left(-\frac{1}{6}\frac{n^2\eta^4}{a^2}\right) + C_2\left(1 - \frac{1}{6}n^2\eta^2 - \frac{1}{18}\frac{n^2\eta^4}{a^2} + \frac{1}{216}n^4\eta^4\right) + \\ + C_3\eta\left(\frac{1}{3}\frac{\eta^2}{a^2} - \frac{1}{5}\frac{\eta^4}{a^4} - \frac{1}{18}\frac{n^2\eta^4}{a^2}\right) + \\ + C_4\eta\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\eta^2}{a^2} - \frac{1}{18}n^2\eta^2 + \frac{1}{5}\frac{\eta^4}{a^4} - \frac{1}{90}\frac{n^2\eta^4}{a^2} + \frac{1}{1080}n^4\eta^4\right), \tag{5.2}$$

$$\delta = C_1\left(-1 + \frac{1}{6}n^2\eta^2\right) + C_2\left(\frac{1}{9}n^2a^2 + \frac{2}{9}n^2\eta^2 - \frac{1}{54}n^4\eta^2a^2\right) + \\ + C_3\eta\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{27}n^2\eta^2\right) + C_4\eta\left(\frac{1}{9}n^2a^2 + \frac{2}{27}n^2\eta^2 - \frac{1}{162}n^4\eta^2a^2\right).$$

Для второй точки поворота аналогичные зависимости имеют вид

$$\alpha_{\max} - \alpha \simeq \frac{w+1}{8}m^2\alpha_{\max}^3\eta^2 + \frac{(w+1)^2(w-4/3)}{128}m^4\alpha_{\max}^5\eta^4 \tag{5.3}$$

и

$$\lambda = C_5\left(1 - \frac{1}{2}n^2\eta^2\right) + C_6\eta\left(1 + \frac{w+1}{12}m^2\alpha_{\max}^2\eta^2 - \frac{1}{6}n^2\eta^2\right),$$

$$\omega = C_1\left(1 - \frac{1}{2}n^2\eta^2 - \frac{3(w+1)}{4}m^2\alpha_{\max}^2\eta^2\right) + C_2\left(-\frac{3w+1}{6}n^2\eta^2\right) + \\ + C_3\eta\left(1 - \frac{1}{6}n^2\eta^2 + \frac{(w+1)(3w-7)}{24}m^2\alpha_{\max}^2\eta^2\right) + C_4\eta\left(-\frac{3w+1}{18}n^2\eta^2\right),$$

$$\widetilde{\mu} = C_1\left(-\frac{3(w+1)}{4}m^2\alpha_{\max}^2\eta^2\right) + C_2\left(1 - \frac{w}{2}n^2\eta^2\right) + \\ + C_3\eta\left(\frac{(w+1)(w-3)}{8}m^2\alpha_{\max}^2\eta^2\right) + C_4\eta\left(1 - \frac{w}{6}n^2\eta^2 + \frac{w+1}{12}m^2\alpha_{\max}^2\eta^2\right), \tag{5.4}$$

$$\delta = C_1\left(\frac{3(w+1)^2}{8}m^2\alpha_{\max}^2\eta^2\right) + \\ + C_2\frac{n^2}{m^2\alpha_{\max}^2}\left(\frac{2}{3}+\frac{(w+1)(3w+1)}{12}m^2\alpha_{\max}^2\eta^2-\frac{w}{3}n^2\eta^2\right) + \\ + C_3\eta\left(-\frac{w+1}{2}-\frac{(w+1)^2(3w-7)}{48}m^2\alpha_{\max}^2\eta^2+\frac{w(w+1)}{12}n^2\eta^2\right) + \\ + C_4\frac{n^2}{m^2\alpha_{\max}^2}\eta\left(\frac{2}{3}-\frac{w}{9}n^2\eta^2+\frac{w+1}{18}m^2\alpha_{\max}^2\eta^2\right).$$

6. СРАВНЕНИЕ С ОТО

Для сравнения полученных нами результатов РТГ с результатами ОТО необходимо добавить в стандартную картину эволюции Вселенной в ОТО стадию квинтэссенции. По аналогии с [5, 6] для получения этих результатов будем использовать так называемое условие синхронности ($g_{00}=1, g_{0i}=0$).

Случай $n\eta \ll 1$:

$$\lambda = C_1'\eta^{-\frac{\beta+3}{2}}\left[-\frac{4}{3(\beta^2-1)}n^2\eta^2\right] - C_2' + \\ + C_3'\left[\frac{1}{6(\beta+2)}n^2\eta^2\right] + C_4'\eta^{-\beta}\left[1-\frac{1}{6(\beta-2)}n^2\eta^2\right], \quad (6.1)$$

$$\mu = C_1'\eta^{-\frac{\beta+3}{2}}\left[1+\frac{4}{3(\beta^2-1)}n^2\eta^2\right] + C_2' + C_3'\left[1-\frac{4}{3(\beta+1)(\beta+7)}n^2\eta^2\right] + \\ + C_4'\eta^{-\beta}\left[-\frac{8}{3(\beta-7)(\beta-2)(\beta+1)}n^2\eta^2\right], \quad (6.2)$$

$$\widetilde{\mu} \equiv \mu+\lambda = C_1'\eta^{-\frac{\beta+3}{2}} + C_3'\left[1+\frac{\beta^2-9}{6(\beta+1)(\beta+2)(\beta+7)}n^2\eta^2\right] + \\ + C_4'\eta^{-\beta}\left[1-\frac{(\beta-3)^2}{6(\beta-7)(\beta-2)(\beta+1)}n^2\eta^2\right], \quad (6.3)$$

$$v = \frac{n\eta}{3(\beta+1)}\left(-C_1'\eta^{-\frac{\beta+3}{2}} + C_3'\left[\frac{2(\beta-3)}{3(\beta+1)(\beta+2)(\beta+7)}n^2\eta^2\right] - \\ - C_4'\eta^{-\beta}\frac{2\beta}{\beta+3}\left[1-\frac{(\beta-3)^2}{6\beta(\beta-7)(\beta+1)}n^2\eta^2\right]\right), \quad (6.4)$$

$$\delta = C_1'\left(-\frac{w+1}{2}\right)\eta^{-\frac{\beta+3}{2}} + \frac{4}{9(\beta+1)^2}\left(C_3'\left[\frac{\beta+3}{\beta+7}n^2\eta^2\right] + C_4'\eta^{-\beta}\left[\frac{\beta-3}{\beta-7}n^2\eta^2\right]\right). \quad (6.5)$$

Здесь нефизическими, согласно идеологии ОТО [5–8], являются решения, соответствующие константам C_1, C_2. Напомним, что, согласно идеологии РТГ [2, 12], в пренебрежении массой гравитона нефизическими являются решения, соответствующие константам C_1, C_2, C_5, C_6 в (2.2), (2.7), (2.8). Различие в числе нефизических решений связано с различием в использовании дополнительного условия, накладываемого на метрику, призванного устранить произвол в выборе системы координат: в ОТО это условие синхронности нулевого порядка по производным, а в РТГ — условие гармоничности первого порядка. Этот вопрос подробно изложен в [2].

Видно, что в ОТО главный член разложения в физических решениях отсутствует. Аналогично в РТГ можно другим выбором константы $C_2' = \widetilde{C_2'} - \dfrac{2(\beta^2-4)}{(w+1)\beta}C_3'$ занулить главный член разложения при C_3' в v и δ одновременно. Тогда функции, необходимые для сравнения с ОТО, примут вид

$$\lambda = C_5'\left[1 - \frac{1}{2(\beta+2)}n^2\eta^2\right] + C_6'\eta^{-\beta}\left[1 + \frac{1}{2(\beta-2)}n^2\eta^2\right], \tag{6.6}$$

$$\begin{gathered}\widetilde{\mu} = C_1'\eta^{\beta}\left[1 - \frac{1}{2(\beta+2)}n^2\eta^2\right] + \widetilde{C_2'}\left[1 + \frac{1}{2(\beta-2)}n^2\eta^2\right] + \\ + C_3'\left(-\frac{2(\beta^2-4)}{(w+1)\beta}\right)\left[1 - \frac{\beta^2+3\beta-2}{6(\beta^2-4)(\beta+1)}n^2\eta^2\right] + C_4'\eta^{-\beta}\left[1 - \frac{\beta^2+3}{6(\beta^2-1)(\beta-2)}n^2\eta^2\right],\end{gathered} \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned}\mu = \widetilde{\mu} - \lambda = C_1'\eta^{\beta}&\left[1 - \frac{1}{2(\beta+2)}n^2\eta^2\right] + \widetilde{C_2'}\left[1 + \frac{1}{2(\beta-2)}n^2\eta^2\right] + \\ &+ C_3'\left(-\frac{2(\beta^2-4)}{(w+1)\beta}\right)\left[1 - \frac{\beta^2+3\beta-2}{6(\beta^2-4)(\beta+1)}n^2\eta^2\right] + \\ &+ C_4'\eta^{-\beta}\left[1 - \frac{\beta^2+3}{6(\beta^2-1)(\beta-2)}n^2\eta^2\right] - \\ &- C_5'\left[1 - \frac{1}{2(\beta+2)}n^2\eta^2\right] - C_6'\eta^{-\beta}\left[1 + \frac{1}{2(\beta-2)}n^2\eta^2\right],\end{aligned} \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned}v = \frac{n\eta}{3(\beta+1)}&\left(C_1'\eta^{\beta}\left[1 - \frac{1}{2(\beta+2)}n^2\eta^2\right] + \widetilde{C_2'}\left[1 + \frac{1}{2(\beta-2)}n^2\eta^2\right] + \right. \\ &\left. + C_3'\left[-\frac{4}{\beta+3}n^2\eta^2\right] + C_4'\eta^{-\beta}\frac{2\beta}{\beta+3}\left[1 - \frac{\beta^2-2\beta+9}{6(\beta-2)(\beta^2-1)}n^2\eta^2\right]\right),\end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}\delta = C_1'\left(-\frac{w+1}{2}\right)\eta^{\beta}&\left[1 - \frac{1}{2(\beta+2)}n^2\eta^2\right] + \widetilde{C_2'}\left(-\frac{w+1}{2}\right)\left[1 + \frac{1}{2(\beta-2)}n^2\eta^2\right] + \\ &+ C_3'\left[\frac{2(\beta+2)}{3\beta(\beta+1)}n^2\eta^2\right] + C_4'\eta^{-\beta}\left[\frac{2(2\beta^2-\beta+3)}{9(\beta-2)(\beta-1)(\beta+1)^2}n^2\eta^2\right].\end{aligned} \tag{6.10}$$

Видно, что физические компоненты решений в РТГ в пренебрежении массой гравитона и в ОТО имеют одинаковые степени и отличаются только числовыми коэффициентами. Однако надо помнить, что за счет ненулевой массы гравитона на самом деле все шесть решений РТГ являются физическими. Как указано в [2], в этом случае нефизическими могут быть лишь решения, даваемые преобразованиями группы Пуанкаре. Однако, в отличие от случая пространственно независимых возмущений $n = 0$, в данном случае эти преобразования не дают никаких решений с конечным n.

Теперь рассмотрим в ОТО случай $n\eta \gg 1$. С точностью до числового множителя для λ функции при постоянных C_3 и C_4

$$\eta^{-\frac{\beta+3}{2}} \mathrm{e}^{i\sqrt{w}n\eta}. \tag{6.11}$$

Для μ, v и δ аналогичные функции имеют вид

$$-\frac{4}{\beta+1}\eta^{-\frac{\beta+3}{2}} \mathrm{e}^{i\sqrt{w}n\eta}, \tag{6.12}$$

$$-\frac{2iw\sqrt{w}}{(\beta+1)(\beta+3)} n^2 \eta^{\frac{1-\beta}{2}} \mathrm{e}^{i\sqrt{w}n\eta} \tag{6.13}$$

и

$$-\frac{4w}{3(\beta+1)^2} n^2 \eta^{\frac{1-\beta}{2}} \mathrm{e}^{i\sqrt{w}n\eta}. \tag{6.14}$$

Здесь для физических компонент результаты полностью совпадают с (2.16), (2.18), (2.19).

Для радиационно-доминирующей стадии эти функции можно получить подстановкой $\beta = 1, w = 1/3$. Для нерелятивистской стадии $\beta = 3$, однако w обращается в нуль, поэтому функции при постоянных C_3 и C_4 будут иметь теперь другой вид:

$$\begin{array}{rcl} \text{константа и} \quad \eta^{-3} & \text{— для} & \lambda, \\ \text{константа и} \quad \eta^{-3} & \text{— для} & \mu, \\ \text{решения отсутствуют} & \text{— для} & v, \\ \dfrac{1}{2}\eta^2 \quad \text{и} \quad \dfrac{1}{2}\eta^{-3} & \text{— для} & \delta. \end{array} \tag{6.15}$$

Теперь рассмотрим вращательные возмущения. Добавляя в ОТО стадию квинтэссенции, получим

$$\begin{gathered} \sigma(\eta) \sim \int \frac{d\eta}{\alpha^2} \sim \int \frac{d\eta}{\eta^{\beta+1}}, \\ V(\eta) = \frac{n\eta^2\sigma'}{(\beta+1)(\beta+3)} \sim \eta^{1-\beta}. \end{gathered} \tag{6.16}$$

Видно, что скорость полностью совпадает с (3.5).

И в заключение отметим, что для чисто гравитационных возмущений (гравитационных волн) уравнения малых флуктуаций, а следовательно, и их решения абсолютно идентичны.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Прежде всего проверим, удовлетворяют ли найденные нами решения принципу причинности [12]: любой изотропный в фоновом пространстве 4-вектор не должен быть времениподобным в римановом пространстве: если $\gamma_{ik}u^i u^k = 0$, то $g_{ik}u^i u^k \leqslant 0$.

В нашем случае ((2.3), (2.4) [2] в конформном времени)

$$ds^2 = \alpha^2(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) + h_{ik}dx^i dx^k,$$
$$d\sigma^2 = \frac{C}{\alpha^4}d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

и это условие принимает вид

$$\alpha^2(u^0)^2\left(1 - \frac{C}{\alpha^4}\right) + h_{ik}u^i u^k \leqslant 0, \tag{7.1}$$

где u^i — произвольный изотропный в фоновом пространстве 4-вектор. Первое слагаемое — величина нулевого порядка малости, а второе — первого порядка, поэтому член $\sim h_{ik}$ может влиять на знак всего выражения только если $C = \alpha^4$. Если сделать стандартный в РТГ выбор [12] $C = \alpha^4_{\max}$, то это равенство выполняется только в точке $\alpha = \alpha_{\max}$, поэтому принцип причинности может запретить некоторые комбинации решений на четвертом этапе эволюции Вселенной. Выяснить, какие это комбинации, довольно сложно, и мы не будем этого делать. Вместо этого заметим, что мы выбрали $C = \alpha^4_{\max}$ только потому, что хотели обеспечить максимальный размах колебаний $\alpha(\eta)$; никаких других соображений в пользу такого выбора у нас нет. Если же выбрать C немного больше, чем $\alpha^4_{\max}$, то описанная нами картина не изменится, а неравенство (7.1) будет строго выполняться всегда и принцип причинности не наложит совсем никаких ограничений на возмущения.

Как видно из уравнений (1.10)–(1.14) [1], РТГ предсказывает существование двух типов крупномасштабных возмущений в однородной и изотропной Вселенной: чисто гравитационные возмущения, при которых плотность и скорость вещества остаются неизменными, и возмущения характеристик вещества, при которых изменяется также и гравитационное поле. Возмущения первого типа представляют собой описанные в разд. 4 тензорные волны. Эти волны описываются одинаковыми уравнениями и ведут себя одинаково: их амплитуда и частота уменьшаются с ростом α, а скорость при достаточно больших волновых числах совпадает со скоростью света; средняя амплитуда может изменяться от одного цикла эволюции Вселенной к другому только у достаточно длинных волн. Возмущения второго типа, в свою очередь, состоят из двух частей: во-первых, это возмущения вихревой компоненты скорости вещества u^1_α, влекущие за собой изменение компоненты метрики h^0_α, во-вторых, возмущения тех же скалярных величин, которые являются «звуковыми» волнами на ультрарелятивистской стадии эволюции Вселенной (уравнение состояния вещества $p = (1/3)\varepsilon$), а на нерелятивистской стадии ($p = 0$) демонстрируют степенную зависимость от времени; при достаточно малых волновых числах ($n^2\eta^2 \ll 1$) эти моды в решениях растут даже на релятивистской стадии, поэтому можно говорить о том, что величина $(\alpha\sqrt{\varepsilon})^{-1}$ играет роль джинсовской длины волны для этих возмущений. Поведение этих последних возмущений на соответствующих этапах (втором, третьем и четвертом) похоже на поведение, предсказываемое обычно авторами, рассматривающими эту задачу в рамках общей теории относительности в синхронной калибровке.

Почти на всех этапах эволюции Вселенной, как при расширении, так и при сжатии, возмущения плотности вещества δ достаточно больших размеров могут расти. Поэтому можно сделать вывод, что, хотя полученная нами скорость роста возмущений такая же, как в ОТО (небольшая степень времени), и, следовательно, за один цикл колебаний Вселенной неоднородности не станут достаточно большими, они могут нарастать от цикла к циклу и в конце концов вырасти значительно. Интересно отметить, что, согласно гипотезе Р. Дикке [13], число таких циклов может составлять для осциллирующей Вселенной несколько сотен. При этом удается объяснить происхождение большой величины отношения числа фотонов реликтового излучения к числу барионов $N = 10^8$. Таким образом, РТГ не запрещает образование наблюдаемого распределения вещества в результате роста случайных флуктуаций в первоначально однородном распределении. Вопрос о механизме изотропизации Вселенной и ее ранней структуре выходит за рамки настоящей работы. Изучение этих вопросов, возможно, станет предметом дальнейших исследований.

Авторы выражают глубокую благодарность А. А. Логунову и М. А. Мествиришвили за постоянный интерес к работе и многочисленные обсуждения.

Один из авторов (К. А. Модестов) выражает благодарность начальнику НУСОБ «Бронницы» МГСУ В. П. Шумило за создание благоприятных условий для плодотворной работы над статьей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Модестов К. А., Чугреев Ю. В.* Линейные возмущения на космологическом фоне в РТГ. I. Теория // Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, вып. 4(181).
2. *Модестов К. А., Чугреев Ю. В.* Вопрос устойчивости однородной и изотропной Вселенной в РТГ // Письма в ЭЧАЯ. 2009. Т. 6, вып. 4. С. 449–471.
3. *Мествиришвили М. А., Чугреев Ю. В.* Фридмановская модель эволюции Вселенной в релятивистской теории гравитации // ТМФ. 1989. Т. 80, № 2. С. 305–312.
4. *Герштейн С. С. и др.* Эволюция Вселенной в полевой теории гравитации // ЭЧАЯ. 2005. Т. 36, вып. 5. С. 1003–1050.
5. *Лифшиц Е. М.* О гравитационной устойчивости расширяющегося мира // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 587–602.
6. *Лифшиц Е. М., Халатников И. М.* Проблемы релятивистской космологии // УФН. 1963. Т. LXXX, вып. 3. С. 391–438.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 2: Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.
8. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. М.: Мир, 1975. 696 с.;
   Weinberg S. Gravitation and Cosmology. N. Y.: Wiley, 1972.
9. *Ries A. G. et al.* Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant // Astron. J. 1988. V. 116. P. 1009–1038.
10. *Perlmutter S. et al.* Discovery of a Supernova Explosion at Half the Age of the Universe // Nature. 1998. V. 391. P. 51–54; Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae // Astrophys. J. 1999. V. 517. P. 565–586.
11. *Bennett C. L. et al.* Four Year COBE DMR Cosmic Microwave Background Observations Maps and Basic Results // Astrophys. J. 1996. V. 64. P. L1–L4.
12. *Логунов А. А.* Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 2006. 253 с.
13. *Peebles P. J. E.* Principles of Physical Cosmology. Princeton, New-Jersey: Princeton Univ. Press, 1993.

Получено 17 октября 2012 г.