

МЯГКИЙ КУБИТ

*Д. А. Славнов*¹

Физический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова,
Москва

Предлагается модель софт-кубита — системы, которая воспроизводит информационные свойства квантового объекта, несущего кубит информации. Одновременно с этим софт-кубит допускает реализацию в виде компьютерной программы.

The model of a soft-qubit is offered. It is a system which reproduces information properties of the quantum object bearing a qubit of information. Simultaneously the soft-qubit can be realised in the form of a computer program.

PACS: 03.65.Ud

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время интенсивно развивается новое научное направление, лежащее на стыке квантовой физики и теории информации, — физика квантовой информации (см., например, [1]).

В классической теории информации в качестве элементарной единицы принят бит. Это информация, имеющаяся в любой классической системе, которая может находиться в двух взаимоисключающих состояниях: да–нет, 0–1, включен–выключен и т. п.

Элементарная единица в квантовой теории информации называется кубитом. Считается, что носителем кубита является квантовая система, имеющая наблюдаемую, которая может принимать два значения. Например, частица со спином $1/2$ может находиться в состояниях, в которых проекция спина на выделенную ось равна либо $+1/2$, либо $-1/2$. Фотон может иметь спиральность, равную либо $+1$, либо -1 и т. п.

Одновременно с этим считается, что, в отличие от классической системы, квантовая система может находиться в суперпозиции этих состояний. Поэтому кубит потенциально может содержать гораздо больший объем информации, чем бит. Именно с этим свойством квантовых систем связывают очень большие надежды на их практическое использование в области хранения, обработки и передачи информации.

С точки зрения теории информации физическая реализация носителя информации совершенно несущественна. Поэтому в дальнейшем терминами бит и кубит мы будем называть не только единицы информации, но и носители соответствующей информации.

¹E-mail: slavnov@goa.bog.msu.ru

Потенциально кубит, вроде бы, имеет большие преимущества перед битом. Однако на современном уровне развития техники практически с кубитами очень трудно работать. В частности, очень остро стоит проблема декогеренции.

В предлагаемой работе предпринята попытка заменить кубит так называемым мягким кубитом (софт-кубитом), или более коротко скубитом. С одной стороны, скубит должен нести ту же наблюдаемую информацию, что и «железный» кубит, а с другой стороны, скубит должен допускать реализацию в виде компьютерной программы. В отличие от состояния «железного» кубита компьютерная программа может храниться практически бесконечно долго и передаваться без искажения на любые расстояния.

Технически работать со скубитом несравненно проще, чем с кубитом. Поэтому скубит гораздо более удобный объект для проведения экспериментов. Конечно, имеется опасность, что в скубите мы воспроизвели не все наблюдаемые свойства кубита. Поэтому окончательное слово остается за экспериментами с кубитами. Однако эксперименты со скубитами могут быть очень хорошими эскизами для экспериментов с кубитами. Кроме того, такие эксперименты могут поставить под сомнение многие стереотипы, которые в большом количестве сложились в квантовой физике.

1. ОДИНОЧНЫЙ СКУБИТ

В физике квантовой информации считается, что состояние (чистое) кубита описывается вектором одночастичного гильбертова пространства. Однако с результатами эксперимента этот вектор связан очень опосредованным образом. Именно считается, что математическое ожидание определенного самосопряженного линейного оператора на этом векторе равняется полученному в серии экспериментов среднему значению соответствующей наблюдаемой.

Из экспериментальных данных это среднее значение вычисляется по законам стандартной классической теории вероятностей. Это значит, что в рамках колмогоровского подхода [2,3] каждый результат единичного эксперимента соответствует элементарному событию. Однако считается, что в квантовой физике колмогоровская теория вероятностей неприменима. Действительно, стандартный математический аппарат квантовой механики не содержит ингредиента, который обладает свойствами элементарного события. С другой стороны, элементарное событие — это базовое понятие колмогоровской теории вероятностей.

В цикле работ [4–6] автора настоящей статьи развит новый подход к квантовой механике, который является специальным вариантом алгебраического подхода (см., например, [7,8]). Основа алгебраического подхода — представление о том, что наблюдаемым соответствуют элементы C^* -алгебры [9]. Именно они являются базовыми понятиями подхода, в то время как гильбертово пространство и линейные операторы в этом пространстве — лишь вторичные понятия.

В предложенном варианте алгебраического подхода вводится новое понятие «элементарное состояние». С одной стороны, это состояние связано с более полным описанием квантовой системы, чем квантовое состояние. С другой стороны, оно обладает свойствами элементарного события колмогоровской теории вероятностей.

Соответственно, мы будем считать, что одиночный скубит следует характеризовать не квантовым состоянием, а более детально, элементарным состоянием. Это позволит работать со скубитами, используя колмогоровскую теорию вероятностей.

Так же как обычный кубит, скубит может быть реализован различными способами. Мы воспользуемся способом, предложенным в статье [10]. В этом варианте скубит имеет вид многослойной серо-раскрашенной сферы единичного радиуса. Каждый слой раскрашен следующим образом. Положительный полюс — черный (+1), отрицательный полюс — белый (−1). Промежуточные области имеют серую окраску, насыщенность которой черным цветом меняется по закону

$$\rho_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) = (\mathbf{r}\mathbf{R}),$$

где \mathbf{r} — единичный радиус-вектор, проведенный в текущую серую точку, а \mathbf{R} — единичный радиус-вектор, проведенный в положительный полюс. Разные слои могут иметь разную ориентацию. Кроме того, с каждым слоем, имеющим номер k , связана функция $\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})$, которая для всех \mathbf{r} , во-первых, удовлетворяет условиям

$$-1/2 < \varepsilon^{(k)}(\mathbf{r}) < +1/2, \quad \varepsilon^{(k)}(-\mathbf{r}) = -\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

во-вторых, одному из условий

$$|\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r} + \varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})| > 1/2 \quad (2)$$

или

$$|\mathbf{R}^{(k)}\mathbf{r} + \varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})| \leq 1/2. \quad (3)$$

Слой, для которого выполняется условие (2), назовем активным, а для которого выполняется условие (3) — пассивным. Функция $\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})$ использовалась в [11], но там не вводились слои и понятия активного и пассивного слоя.

При взгляде на функцию $\rho_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})$ сразу же возникает ассоциация с функцией распределения среднего значения проекции спина на направление \mathbf{r} для частицы со спином $1/2$, находящейся в фиксированном квантовом состоянии. Это вполне естественно. Если мы хотим, чтобы скубит моделировал свойства кубита, то эти свойства каким-то образом следует заложить в определение скубита. Крайне желательно, чтобы это определение (в частности, функция $\rho_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})$) было единым для всех процессов, которые мы собираемся описывать с помощью скубитов. В противном случае мы будем иметь дело не с моделированием кубита, а с моделированием отдельного квантового процесса, что нам представляется гораздо менее интересной задачей.

Далее для скубита используется терминология, которая применяется для кубита, реализуемого в виде квантовой частицы со спином $1/2$. Элементарное состояние скубита фиксируется однозначно, если заданы $\mathbf{R}^{(k)}$ и $\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})$ для всех k и \mathbf{r} . Для этого требуется бесконечный объем информации. Поэтому может показаться, что само понятие элементарного состояния в достаточной мере бесполезно. В действительности это не так из-за специфического характера квантовых измерений. Как мы увидим далее, в большинстве случаев для получения численного значения исследуемой наблюдаемой достаточно знать характеристики небольшого числа внешних слоев. Кроме того, так как в каждом отдельном измерении можно измерить проекцию спина $S(\mathbf{r})$ только на одно направление \mathbf{r} , то для фиксирования результата измерения достаточно зафиксировать значения функций $\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})$ только для этого направления \mathbf{r} .

Статистический характер измерений легко наглядно представить, предположив наличие некоего «хозяина элементарного события», который олицетворяет все неконтролируемые воздействия на исследуемый объект. Этот хозяин выбирает из всех допустимых

элементарных событий одно конкретное. В случае скубита он выбирает $\mathbf{R}^{(k)}$ и $\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})$, удерживая \mathbf{r} фиксированным. В компьютерной реализации скубита в качестве такого хозяина выступает генератор случайных чисел.

Будем считать, что прибор, измеряющий проекцию спина $S(\mathbf{r})$, реагирует только на активный слой. Если $\mathbf{R}^{(k')}\mathbf{r} > 0$, то $S(\mathbf{r}) = +1/2$, если $\mathbf{R}^{(k')}\mathbf{r} < 0$, то $S(\mathbf{r}) = -1/2$. Таким образом, результат конкретного измерения зависит от одного контролируемого параметра \mathbf{r} (контролируется измерительным прибором) и двух неконтролируемых параметров: номера активного слоя (k') и полюса активного слоя $\mathbf{R}^{(k')}$. Эти два параметра определяются параметрами $\mathbf{R}^{(k)}$ и $\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})$, которые выбираются хозяином.

В колмогоровской теории вероятностей элементарному событию (в нашем случае элементарному состоянию), в общем случае, нельзя приписать никакой вероятностной меры. Такие меры можно приписать только некоторым подмножествам множества элементарных событий. Эти подмножества должны образовывать так называемую σ -алгебру (см., например, [2,3]). Отличительной особенностью квантовых систем является то, что для них нельзя построить общую σ -алгебру, которая позволяла бы описывать вероятности событий, содержащих определенные значения несовместимых наблюдаемых (см. [4,6]). Для каждой группы совместимых наблюдаемых следует строить свою σ -алгебру. Для скубитов в качестве образующих таких σ -алгебр можно взять (см. [10]) множества элементарных состояний, для которых $\mathbf{R}^{(k)}$ лежат внутри малых телесных углов $d\mathbf{R}^{(k)}$, а $\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})$ внутри малых интервалов $d\varepsilon$. Для каждого значения \mathbf{r} следует построить свою σ -алгебру и, соответственно, свои вероятностные меры. В многочисленных «доказательствах» утверждения, что в рамках колмогоровской теории вероятностей нельзя воспроизвести квантовые распределения, регулярно забывают, во-первых, о необходимости зафиксировать σ -алгебру, а во-вторых, что ее нельзя зафиксировать для несовместимых наблюдаемых. Например, в доказательствах различных вариантов неравенств Белла автору настоящей статьи ни разу не встретилось даже упоминание о σ -алгебре, хотя σ -алгебра является базовым понятием колмогоровской теории вероятностей.

Теперь опишем воздействие на скубит прибора, который является аналогом прибора, называющегося в оптике поляризационным светоделителем PBS. В оптике этот прибор разделяет неполяризованный луч света на два луча, поляризованных в двух ортогональных направлениях. В нашем случае будем считать, что геометрия прибора выделяет некоторое направление \mathbf{n} (единичный вектор) и разделяет ансамбль скубитов на два подансамбля $\Psi_{\mathbf{n}}^+$ и $\Psi_{\mathbf{n}}^-$. Для каждого отдельного скубита результат измерения определяется действиями хозяина элементарного события (генератора случайных чисел). Хозяин генерирует значения $\mathbf{R}^{(1)}$ и $\varepsilon^{(1)}(\mathbf{n})$ для первого слоя скубита. Если $\mathbf{R}^{(1)}\mathbf{n} + \varepsilon^{(1)}(\mathbf{n}) > 1/2$, то PBS регистрирует значение $S(\mathbf{n}) = +1/2$ и направляет скубит в подансамбль $\Psi_{\mathbf{n}}^+$. Если $\mathbf{R}^{(1)}\mathbf{n} + \varepsilon^{(1)}(\mathbf{n}) < -1/2$, то PBS регистрирует значение $S(\mathbf{n}) = -1/2$ и направляет скубит в подансамбль $\Psi_{\mathbf{n}}^-$. Если $|\mathbf{R}^{(1)}\mathbf{n} + \varepsilon^{(1)}(\mathbf{n})| \leq 1/2$, то PBS не регистрирует никакого значения, а делает вторую попытку, переходя на второй слой и повторяя всю процедуру. С физической точки зрения хозяин должен сначала сгенерировать большое количество слоев, а только затем следовало бы проверять эти слои на активность. Однако, с точки зрения компьютера, такая последовательность сопряжена с бесполезной тратой ресурсов. Обратим внимание на то, что параметры второго слоя $\mathbf{R}^{(2)}$ и $\varepsilon^{(2)}(\mathbf{n})$ не зависят от значений параметров первого слоя. Процесс продолжается до тех пор, пока для исследуемого скубита не будет зарегистрировано определенное значение $S(\mathbf{n})$.

Теоретически для этого может понадобиться бесконечное число попыток. Но практически вероятность события с большим количеством шагов оказывается чрезвычайно малой.

На первый взгляд кажется, что подансамбли $\Psi_{\mathbf{n}}^+$ и $\Psi_{\mathbf{n}}^-$ соответствуют квантовым состояниям с определенными значениями $S(\mathbf{n}) = +1/2$ и $S(\mathbf{n}) = -1/2$ соответственно. Однако дело обстоит сложнее. Дело в том, что, действительно, для каждого из подансамблей зарегистрировано определенное значение $S(\mathbf{n})$, но этого мало. Для квантового состояния характерно вполне определенное распределение вероятностей для значений проекций спина на другие направления \mathbf{r} .

Кроме того, в результате взаимодействия кубита (скубита) с измерительным прибором его элементарное состояние может измениться. Здесь возможны три варианта. Во-первых, элементарное состояние может измениться неконтролируемым образом. В этом случае говорить о каком-то квантовом состоянии не приходится. Во-вторых, элементарное состояние может не измениться. Это происходит в так называемых косвенных измерениях, в которых измерение происходит без физического контакта измеряемой частицы с измерительным прибором. Это возможно, если заранее известно, что элементарные состояния двух удаленных друг от друга частиц скоррелированы. Тогда, измеряя характеристики одной из частиц, мы получаем сведения о характеристиках другой. В этом случае ответ на вопрос о квантовом состоянии зависит от характеристик ансамбля до измерения.

Наконец, возможен третий вариант, когда измерительный прибор приготавливает квантовое состояние. Это происходит в том случае, когда прибор меняет элементарное состояние вполне определенным образом. В нашем случае, когда после измерения $\mathbf{R}^{(k)}$ ($k = k'$) случайным образом (равномерно) распределены по верхней полусфере $\mathfrak{R}_{\mathbf{n}}^+$ с центральным вектором \mathbf{n} , а для пассивных слоев $\mathbf{R}^{(k)}$ ($k \neq k'$) равномерно распределены по всей сфере \mathfrak{R} . Функции $\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})$ для всех k равномерно распределены по интервалу $(-1/2, +1/2)$. Для $S(\mathbf{n}) = -1/2$ вектор $\mathbf{R}^{(k')}$ должен быть равномерно распределен по полусфере $\mathfrak{R}_{\mathbf{n}}^-$ с центральным вектором $-\mathbf{n}$.

Рассмотрим событие (подмножество элементарных состояний), в котором \mathbf{r} и $d\varepsilon$ фиксированы, $\mathbf{R}^{(k')} \in \mathfrak{R}_{\mathbf{n}}^+$, $\mathbf{R}^{(k)} \in \mathfrak{R}$ ($k \neq k'$), $\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r}) \in d\varepsilon$ или $-\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r}) \in d\varepsilon$.

Начнем с первого слоя, т.е. положим $k = 1$. Вероятность реализации неравенства (2) с дополнительным условием $\mathbf{R}^{(k)} \mathbf{r} > 0$ ($j = +1$) или с дополнительным условием $\mathbf{R}^{(k)} \mathbf{r} < 0$ ($j = -1$) описывается выражением

$$P_{\mathbf{n}}^{(1)}(\mathbf{r}, \varepsilon, j) d\varepsilon = d\varepsilon \frac{N}{2} \int d\mathbf{R} \Theta(\mathbf{R}\mathbf{n}) \left[\Theta \left[j(\mathbf{R}\mathbf{r} + \varepsilon) - \frac{1}{2} \right] + \Theta \left[j(\mathbf{R}\mathbf{r} - \varepsilon) - \frac{1}{2} \right] \right]. \quad (4)$$

Здесь N — нормировочный множитель; $d\mathbf{R} = d\varphi d\vartheta \sin \vartheta$, $\Theta(x)$ — пороговая функция Хевисайда. Из (4) следует

$$P_{\mathbf{n}}^{(1)}(\mathbf{r}, \varepsilon) \equiv \sum_{j=\pm 1} P_{\mathbf{n}}^{(1)}(\mathbf{r}, \varepsilon, j) = N\pi. \quad (5)$$

Вероятность реализации неравенства (3) описывается выражением

$$\tilde{P}_{\mathbf{n}}^{(1)}(\mathbf{r}, \varepsilon) d\varepsilon = d\varepsilon \frac{N}{2} \int d\mathbf{R} \left[\Theta \left[\frac{1}{2} + \mathbf{R}\mathbf{r} + \varepsilon \right] \Theta \left[\frac{1}{2} - \mathbf{R}\mathbf{r} - \varepsilon \right] + \right. \\ \left. + \Theta \left[\frac{1}{2} + \mathbf{R}\mathbf{r} - \varepsilon \right] \Theta \left[\frac{1}{2} - \mathbf{R}\mathbf{r} + \varepsilon \right] \right] = 2N\pi d\varepsilon. \quad (6)$$

Из формул (5) и (6) получаем $N = (3\pi)^{-1}$ и

$$\tilde{P}_{\mathbf{n}}^{(1)}(\mathbf{r}, \varepsilon) = 2/3. \quad (7)$$

Для второго слоя ($k = 2$) можно повторить те же рассуждения. Надо только учесть, что благодаря формуле (7) со вторым слоем нам придется иметь дело с вероятностью $2/3$. Продолжая этот процесс, мы получим, что при фиксированных \mathbf{r} , $d\varepsilon$ и j вероятность активному слою иметь номер k' с дополнительным условием $j\mathbf{R}^{(k')}\mathbf{r} > 0$ равна

$$P_{\mathbf{n}}^{(k')}(\mathbf{r}, \varepsilon, j) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{3}\right)^{k'} \int d\mathbf{R} \Theta(j\mathbf{R}\mathbf{n}) \left[\Theta \left[\mathbf{R}\mathbf{r} + \varepsilon - \frac{1}{2} \right] + \Theta \left[\mathbf{R}\mathbf{r} - \varepsilon - \frac{1}{2} \right] \right], \quad (8)$$

а вероятность обнаружить у активного слоя номер, бóльший k , равна

$$\tilde{P}_{\mathbf{n}}^{(k)}(\mathbf{r}, \varepsilon) = \left(\frac{2}{3}\right)^k. \quad (9)$$

Эта вероятность быстро убывает с ростом k . Поэтому для получения окончательного результата практически придется сгенерировать характеристики лишь небольшого числа слоев.

Из равенства (8) получаем

$$P_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, j) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} d\varepsilon P_{\mathbf{n}}^{(k)}(\mathbf{r}, \varepsilon, j) = \frac{1}{\pi} \int d\mathbf{R} \Theta[j\mathbf{R}\mathbf{n}] (\mathbf{R}\mathbf{r}) \Theta[\mathbf{R}\mathbf{r}]. \quad (10)$$

Так как

$$\sum_j P_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, j) = 1, \quad \sum_j j P_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, j) = (\mathbf{r}\mathbf{n}), \quad (11)$$

то

$$P_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, j) = \frac{1}{2}(1 + j(\mathbf{r}\mathbf{n})). \quad (12)$$

Эта формула правильно описывает распределение значений проекций спина на направление \mathbf{r} в квантовом состоянии, в котором $S(\mathbf{n}) = +1/2$. Тот же окончательный результат получается в том случае, когда в подансамбль $\Psi_{\mathbf{n}}^+$ включаются скубиты, у которых для всех слоев $\mathbf{R}^{(k)} \in \mathfrak{R}_{\mathbf{n}}^+$. Это означает, что такая выборка является вполне репрезентативной для квантового состояния с $S(\mathbf{n}) = +1/2$. Отметим, что квантовое состояние возникает *после момента измерения*.

Из (12) получается, что среднее значение проекции спина на направление \mathbf{r} задается формулой

$$\langle S(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2}(\mathbf{r}\mathbf{n}). \quad (13)$$

Принципиальная схема компьютерной программы, которая позволяет прийти к результату (13), выглядит следующим образом.

1. Фиксируются два единичных вектора \mathbf{n} и \mathbf{r} .
2. Генератор случайных чисел генерирует единичный вектор $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}_n^+$ и $\varepsilon(\mathbf{r}) \in (-1/2, +1/2)$.
3. Вычисляется $|\mathbf{R}\mathbf{r} + \varepsilon(\mathbf{r})|$.
4. Если выполняется неравенство (2), то вычисляется $\mathbf{R}\mathbf{r}$. Если $\mathbf{R}\mathbf{r} > 0$, то число 1 добавляется в память M^+ , если $\mathbf{R}\mathbf{r} < 0$, то число 1 добавляется в память M^- . На этом эксперимент с данным кубитом считается завершённым.
5. Если в пункте 3 выполняется неравенство (3), то программа возвращается к пункту 2 и т. д.
6. После того как цикл оборвется (или будет искусственно оборван ограничителем), программа переходит к исследованию следующего кубита.
7. После обработки достаточного числа кубитов вычисляется среднее значение проекции спина по формуле

$$\langle S(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \frac{M_+ - M_-}{M_+ + M_-}.$$

Здесь символы M_{\pm} обозначают числа, скопившиеся в соответствующей памяти.

В этой схеме вектор \mathbf{n} следует рассматривать не как характеристику отдельного кубита, а как характеристику подансамбля Ψ_n^+ всех кубитов, для которых $\mathbf{R} \in \mathfrak{R}_n^+$, так как для отдельного кубита нельзя вычислить среднее значение $\langle S(\mathbf{r}) \rangle$. Таким образом, в качестве представителя квантового состояния здесь рассматривается не вектор гильбертова пространства, а подансамбль Ψ_n^+ .

Фактическая реализация этой программы описана в статье [12].

На первый взгляд кажется, что подансамбль Ψ_n^+ не имеет ничего общего с вектором гильбертова пространства, с помощью которого описывается квантовое состояние в стандартном математическом аппарате квантовой механики. Однако каноническая конструкция Гельфанда–Наймарка–Сигала (ГНС) дает такую связь. В том случае, когда наблюдаемые являются элементами C^* -алгебры и на этой алгебре задан линейный положительный нормированный функционал, конструкция ГНС позволяет построить гильбертово пространство (см., например, [7, 13]), в котором наблюдаемым однозначно соответствуют самосопряженные операторы, а линейные функционалы представляются в виде математических ожиданий операторов на векторах этого пространства.

В нашем случае эти линейные функционалы задаются формулой (13). В правой части вектор \mathbf{n} отличает один функционал от другого, а вектор \mathbf{r} является аргументом такого функционала. Так как по построению функционалы (13) имеют смысл средних значений наблюдаемых по соответствующим подансамблям кубитов, то отпадает необходимость в аксиоме Борна. В стандартном математическом аппарате квантовой механики первичным понятием является гильбертово пространство, а средние значения наблюдаемых вторичны. В нашей схеме первичными являются значения наблюдаемых, а гильбертово пространство через конструкцию ГНС является вторичным элементом. В то время как значения наблюдаемых имеют наглядный физический смысл, ни гильбертово пространство, ни правило Борна наглядного физического смысла не имеют.

Обратим внимание на то, что при вычислении среднего значения $\langle S(\mathbf{r}) \rangle$ мы проверяли неравенства (2) и (3), в которых фигурирует вектор \mathbf{r} . Это означает, что для одного

и того же множества векторов \mathbf{R} ($\mathbf{R} \in \mathfrak{R}_n^+$) схема вычисления средних значений для разных $S(\mathbf{r})$ будет разной. В терминах теории вероятностей это означает, что множество элементарных событий одно и то же, а вероятностные меры разные. Напомним, что в колмогоровской теории вероятностные меры зависят не только от множества элементарных событий, но и от σ -алгебры, которой оснащено это множество. В нашем случае наблюдаемые, описывающие проекции спина на разные направления \mathbf{r} , несовместимы, и для таких наблюдаемых нельзя построить общую σ -алгебру.

2. СИНГЛЕТНОЕ СОСТОЯНИЕ ДВУХ СКУБИТОВ

Характерным свойством синглетного состояния двух частиц является то, что при измерении проекций спина первой и второй частиц $S_1(\mathbf{n})$ и $S_2(\mathbf{n})$ на любое направление \mathbf{n} всегда выполняется равенство

$$S_1(\mathbf{n}) + S_2(\mathbf{n}) \equiv S(\mathbf{n}) = 0. \quad (14)$$

В рассматриваемом подходе равенство (14) предполагает жесткую корреляцию между элементарными состояниями кубитов 1 и 2. Эту корреляцию можно реализовать, потребовав выполнения равенств

$$\mathbf{R}_1^{(k)} + \mathbf{R}_2^{(k)} = 0, \quad \varepsilon_1^{(k)}(\mathbf{r}) = \varepsilon_2^{(k)}(-\mathbf{r}). \quad (15)$$

Здесь $\mathbf{R}_1^{(k)}$ и $\mathbf{R}_2^{(k)}$ — векторы ориентации k -го слоя для первого и второго кубитов; $\varepsilon_i^{(k)}(\mathbf{r})$ ($i = 1, 2$) — функции $\varepsilon^{(k)}(\mathbf{r})$ для этих кубитов. Из равенств (15) сразу же следует, что номера активных слоев для первого и второго кубитов совпадают и для любого направления \mathbf{n} выполняется соотношение (14) вне зависимости от расстояния между кубитами в момент измерения. Иными словами, реализуется ситуация парадокса Эйнштейна–Подольского–Розена [14]. Корреляция (14) возникает не в момент измерения проекций спина, а в момент приготовления синглетного двухкубитного состояния. Частицы с такой корреляцией часто называют ЭПР-парой.

Посмотрим, к каким корреляциям это приводит для проекций $S_1(\mathbf{r}_1)$, $S_2(\mathbf{r}_2)$ спинов кубитов на направления \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 соответственно. Так же как для однокубитной системы, элементарному состоянию двухкубитной системы нельзя приписать никакой вероятностной меры. Поэтому рассмотрим событие, в котором \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 и $d\varepsilon$ фиксированы, а $\mathbf{R}_1^{(k)} \in \mathfrak{R}$, $\varepsilon_1^{(k)}(\mathbf{r}_1) \in d\varepsilon$ или $-\varepsilon_1^{(k)}(\mathbf{r}_1) \in d\varepsilon$. Введем также два параметра j_1 и j_2 : $j_1 = +1$, если $\mathbf{R}_1^{k'} \mathbf{r}_1 > 0$; $j_1 = -1$, если $\mathbf{R}_1^{k'} \mathbf{r}_1 < 0$; $j_2 = +1$, если $\mathbf{R}_2^{k'} \mathbf{r}_2 > 0$; $j_2 = -1$, если $\mathbf{R}_2^{k'} \mathbf{r}_2 < 0$. У обоих кубитов номер активного слоя k' один и тот же.

Пусть фиксированы \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , $d\varepsilon$, j_1 и j_2 . Пусть $k = 1$. Тогда вероятность реализации неравенства (2) для кубита 1 описывается выражением

$$\begin{aligned} P^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon, j_1, j_2) d\varepsilon = \\ = d\varepsilon \frac{N}{2} \int d\mathbf{R} \Theta[-j_2 \mathbf{R} \mathbf{r}_2] \left[\Theta \left[j_1 (\mathbf{R} \mathbf{r}_1 + \varepsilon) - \frac{1}{2} \right] + \Theta \left[j_1 (\mathbf{R} \mathbf{r}_1 - \varepsilon) - \frac{1}{2} \right] \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$P^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon) = \sum_{j_1, j_2} P^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon, j_1, j_2) = N2\pi. \quad (17)$$

Вероятность реализации неравенства (3) описывается выражением

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon) d\varepsilon = d\varepsilon \frac{N}{2} \int d\mathbf{R} & \left[\Theta \left[\frac{1}{2} + \mathbf{R}\mathbf{r}_1 + \varepsilon \right] \Theta \left[\frac{1}{2} - \mathbf{R}\mathbf{r}_1 - \varepsilon \right] + \right. \\ & \left. + \Theta \left[\frac{1}{2} + \mathbf{R}\mathbf{r}_1 - \varepsilon \right] \Theta \left[\frac{1}{2} - \mathbf{R}\mathbf{r}_1 + \varepsilon \right] \right] = N2\pi d\varepsilon. \quad (18) \end{aligned}$$

Из (17) и (18) получаем

$$N = (4\pi)^{-1}, \quad \tilde{P}^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon) = 1/2.$$

Повторяя выкладки для однокубитной системы, получим, что при фиксированных \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , $d\varepsilon$, j_1 , j_2 вероятность у активного слоя иметь номер $k = k'$ описывается формулой

$$\begin{aligned} P^{(k')}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon, j_1, j_2) = \\ = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{2^{k'}} \int d\mathbf{R} \Theta[-j_1 j_2 \mathbf{R}\mathbf{r}_2] \left[\Theta \left[\mathbf{R}\mathbf{r}_1 + \varepsilon - \frac{1}{2} \right] + \Theta \left[\mathbf{R}\mathbf{r}_1 - \varepsilon - \frac{1}{2} \right] \right], \quad (19) \end{aligned}$$

а вероятность обнаружить у активного слоя номер, больший k , описывается формулой

$$\tilde{P}^{(k)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \varepsilon) = 2^{-k}.$$

Далее, следуя процедуре, аналогичной той, которая привела к формулам (10), (11) и (12), получим

$$P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, j_1, j_2) = \frac{1}{4}(1 - j_1 j_2(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)). \quad (20)$$

Это выражение описывает вероятность обнаружить у первого кубита по направлению \mathbf{r}_1 проекцию спина, равную $j_1/2$, а у второго кубита по направлению \mathbf{r}_2 обнаружить проекцию спина, равную $j_2/2$.

Вероятность (20) совпадает с той, которая получается в стандартном подходе к квантовой механике. Как и следовало ожидать, формула (20) симметрична относительно кубитов 1 и 2, хотя исходная формула (16) несимметрична. Это объясняется тем, что при фиксировании вероятностной меры мы должны как-то объединить элементарные события (элементарные состояния) в события, которым можно приписать вероятностную меру. В формуле (16) это объединение произведено по признакам $\mathbf{R}_1^{(k)} \in \mathfrak{R}$, $\pm \varepsilon_1^{(k)} \in d\varepsilon$. Благодаря равенствам (15) фиксировать $\mathbf{R}_2^{(k)}$ и $\varepsilon_2^{(k)}$ уже не следует. Заметим, что каждая из функций $\varepsilon_i^{(k)}$ ($i = 1, 2$) должна удовлетворять неравенствам (1)–(3). Кроме того, функции $\varepsilon_i^{(k)}$ нужны только для выделения активного слоя, а их конкретные значения интереса не представляют. При объединении по признаку $\pm \varepsilon_1^{(k)} \in d\varepsilon$ мы объединяли элементарные события по признаку распределения активных слоев у кубита 1. Автоматически такое же распределение будет и у кубита 2. С другой стороны, чтобы по

этому распределению восстановить распределение значений функций $\varepsilon_2^{(k)}(\mathbf{r}_2)$, следовало бы задать явный вид всех функций $\varepsilon_i^{(k)}(\mathbf{r})$, что является очень трудной задачей, при этом никакого практического интереса не представляющей.

Из формулы (20) для корреляционной функции получаем выражение

$$E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{4} \sum_{j_1, j_2} j_1 j_2 P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, j_1, j_2) = -\frac{1}{4}(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2), \quad (21)$$

которое нарушает неравенство Белла.

Корреляция (21) имеет нелокальный характер, так как связывает между собой измеряемые значения проекций спинов кубитов, которые в момент измерения могут находиться на любых расстояниях. Но эта корреляция не возникает каким-то чудодейственным образом в момент измерения. Она возникла в момент приготовления синглетного состояния.

3. ТЕЛЕПОРТАЦИЯ

Коротко напомним основные положения стандартного описания квантовой телепортации. Это явление связывается с запутанными квантовыми состояниями. В качестве таковых чаще всего используются так называемые состояния Белла

$$\begin{aligned} |\Psi^{(-)}\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2], \\ |\Psi^{(+)}\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_1 |-\rangle_2 + |-\rangle_1 |+\rangle_2], \\ |\Phi^{(-)}\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_1 |+\rangle_2 - |-\rangle_1 |-\rangle_2], \\ |\Phi^{(+)}\rangle_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|+\rangle_1 |+\rangle_2 + |-\rangle_1 |-\rangle_2]. \end{aligned} \quad (22)$$

Эти состояния образуют ортонормированный базис в двухчастичном гильбертовом пространстве. Строятся они из одночастичных состояний $|\pm\rangle_i$ ($i = 1, 2$). Состояние $|\Psi^{(-)}\rangle_{12}$ — синглетное, состояния $|\Psi^{(+)}\rangle_{12}$, $|\Phi^{(-)}\rangle_{12}$, $|\Phi^{(+)}\rangle_{12}$ — триплетные.

Физическая реализация этих состояний может быть разной. В теоретических рассуждениях в качестве $|\pm\rangle_i$ обычно рассматривают спиновые состояния частицы со спином $1/2$. В экспериментах обычно используют фотоны с различной поляризацией. Мы будем использовать спиновую терминологию.

На рисунке изображена принципиальная схема квантовой телепортации: S — источник начального состояния; EPR — источник ЭПР-пар; A — анализатор состояний Белла (Алиса); B — унитарный преобразователь (Боб); {C} — канал классической связи; {1} — носитель начального телепортируемого состояния; {2}–{3} — ЭПР-пара; {4} — носитель конечного телепортированного состояния.

Стандартное описание схемы телепортации выглядит следующим образом. Источник S испускает частицу {1} в квантовом состоянии $|\Psi\rangle_1 = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$, где α и β — комплексные числа ($|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$). Частица {1} направляется Алисе. Источник EPR испускает ЭПР-пару {2} и {3} в синглетном состоянии $|\Psi^{(-)}\rangle_{23}$. Одна частица ({2}) пары направляется Алисе, другая частица ({3}) направляется Бобу.

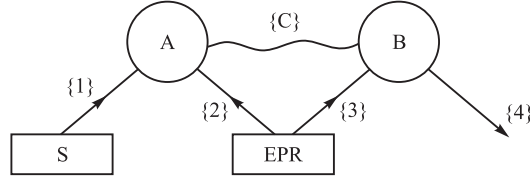


Схема квантовой телепортации

По правилам квантовой механики состояние системы из трех частиц $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ описывается вектором $|\Psi\rangle_{123} = |\Psi\rangle_1 \otimes |\Psi^{(-)}\rangle_{23}$. Этот вектор может быть разложен по состояниям Белла (22) частиц $\{1\}$ и $\{2\}$:

$$|\Psi\rangle_{123} = \frac{1}{2} \left\{ |\Psi^{(-)}\rangle_{12} (-\alpha|+\rangle_3 - \beta|-\rangle_3) + |\Psi^{(+)}\rangle_{12} (-\alpha|+\rangle_3 + \beta|-\rangle_3) + |\Phi^{(-)}\rangle_{12} (\alpha|-\rangle_3 + \beta|+\rangle_3) + |\Phi^{(+)}\rangle_{12} (\alpha|-\rangle_3 - \beta|+\rangle_3) \right\}. \quad (23)$$

Алиса определяет, в каком из четырех состояний (22) находятся частицы $\{1\}$ и $\{2\}$. Экспериментально это сравнительно легко сделать для состояния $|\Psi^{(-)}\rangle_{12}$. Поэтому другие состояния обычно просто отбрасывают. Это снижает эффективность телепортации в четыре раза, но с этим мирятся. Алиса сообщает результат своего наблюдения Бобу по каналу $\{C\}$.

Если Алиса зарегистрировала такой результат, то, согласно проекционному принципу, трехчастичная система коллапсирует в состояние $|\Psi'\rangle_{123} = |\Psi^{(-)}\rangle_{12} (-\alpha|+\rangle_3 - \beta|-\rangle_3)$. В этом случае частица $\{3\}$ уже находится в состоянии, совпадающем с состоянием частицы $\{1\}$ (см. (22)), и Бобу ничего делать не надо. Если Алиса зарегистрировала одно из триплетных состояний, то Бобу придется совершить некоторые унитарные преобразования состояния частицы $\{3\}$ (поменять некоторые знаки у коэффициентов α и β), чтобы получить состояние (частицы $\{4\}$), совпадающее с состоянием частицы $\{1\}$. В реальных экспериментах в качестве анализатора двухчастичных состояний частиц $\{1\}$ и $\{2\}$ обычно используется простой светоделитель BS. Он выделяет синглетное состояние, но триплетные состояния отличить друг от друга не может.

Теперь посмотрим, как это явление можно реализовать с помощью скубитов. Сначала опишем программу, которая будет исполнять роль прибора BS. Эту программу также назовем BS. Геометрия прибора BS выделяет в пространстве некоторую декартову систему координат с направляющими векторами x , y , z . Потребуем, чтобы прибор BS мог различать между собой синглетное и три триплетных состояния. Эти состояния можно охарактеризовать произведениями проекций спинов для первой и второй частиц. Эти наблюдаемые совместимы. Комбинация $[S_1(x)S_2(x) < 0, S_1(z)S_2(z) < 0]$ характерна для синглетного состояния. Комбинации $[S_1(x)S_2(x) > 0, S_1(z)S_2(z) > 0]$, $[S_1(x)S_2(x) > 0, S_1(z)S_2(z) < 0]$, $[S_1(x)S_2(x) < 0, S_1(z)S_2(z) > 0]$ характерны для трех триплетных состояний.

Пусть скубиты $\{1\}$ и $\{2\}$ попадают в прибор BS. Будем считать, что прибор BS реагирует на активные слои скубитов $\{1\}$, $\{2\}$ и измеряет знаки $S_1(x)S_2(x)$, $S_1(z)S_2(z)$. Таким образом, наш прибор BS различает все четыре ортогональных двухчастичных состояния. Поэтому с его помощью можно добиться стопроцентной эффективности телепортации.

Обратим внимание на то, что мы используем проекции только на две оси, а не на все три. Дело вот в чем. Рассмотрим, например, синглетное состояние. В стандартном формализме квантовой механики ему соответствуют такие комбинации значений проекций спинов: $S_1(\mathbf{x})S_2(\mathbf{x}) < 0$, $S_1(\mathbf{z})S_2(\mathbf{z}) < 0$, $S_1(\mathbf{y})S_2(\mathbf{y}) < 0$, хотя для однозначной фиксации квантового состояния достаточно первых двух условий. Для двух кубитов помимо указанного набора возможен и такой: $S_1(\mathbf{x})S_2(\mathbf{x}) < 0$, $S_1(\mathbf{z})S_2(\mathbf{z}) < 0$, $S_1(\mathbf{y})S_2(\mathbf{y}) > 0$. Этот набор не соответствует никакому квантовому состоянию двухчастичной системы. Аналогичные рассуждения справедливы и для трех вариантов, соответствующих триплетному состоянию. Таким образом, мы не можем утверждать, что рассматриваемая пара находится в каком-то одном из квантовых состояний. Мы можем только констатировать, что эта пара принадлежит одному из четырех *предквантовых* состояний. Последнее означает, что прибор, который измеряет произведение проекций спинов только на два направления, выдает результат, характерный для соответствующего квантового состояния.

С другой стороны, BS может не только быть измеряющим прибором, но может и готовить синглетное квантовое состояние. В этом случае прибор BS, получив на входе элементарное состояние кубитов с набором $S_1(\mathbf{x})S_2(\mathbf{x}) < 0$, $S_1(\mathbf{z})S_2(\mathbf{z}) < 0$, на выходе должен давать элементарное состояние кубитов с набором $S_1(\mathbf{x})S_2(\mathbf{x}) < 0$, $S_1(\mathbf{z})S_2(\mathbf{z}) < 0$, $S_1(\mathbf{y})S_2(\mathbf{y}) < 0$. Это опять-таки свидетельствует о том, что показания измерительного прибора *определяются* элементарным состоянием кубитов непосредственно *перед моментом* измерения, а *определяют* квантовое состояние *после момента* измерения. Можно ожидать, что последнее справедливо не только для кубитов, но и для кубитов.

Как отмечено в разд. 2, если для активного слоя $\mathbf{R}_1^{(k')} \in \mathfrak{R}^+(\mathbf{x})$, то $S_1(\mathbf{x}) = +1/2$. Отсюда следует, что если $x_1 \equiv \mathbf{R}_1^{(k')} \mathbf{x} > 0$, то $S_1(\mathbf{x}) = +1/2$. Аналогично для второго кубита и для проекций на \mathbf{z} . Поэтому комбинация $[x_1x_2 < 0, z_1z_2 < 0]$ характерна для синглетного состояния, а комбинации $[x_1x_2 > 0, z_1z_2 > 0]$, $[x_1x_2 > 0, z_1z_2 < 0]$, $[x_1x_2 < 0, z_1z_2 > 0]$ характерны для триплетных состояний. Таким образом, мы можем считать, что прибор BS непосредственно сортирует кубиты не по проекциям спинов, а по проекциям x, z векторов \mathbf{R} , задающих ориентацию активных слоев кубитов. Для компьютерной реализации это значительно более удобно.

Теперь вернемся к рисунку. Источник S посылает Алисе пучок кубитов $\{1\}$, поляризованных по вектору \mathbf{n} . Пусть векторы \mathbf{R}_1 характеризуют ориентацию активных слоев кубитов $\{1\}$, а $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_1(\mathbf{n})$ — значения функций ε_1 для этих слоев. Тогда для посылаемых источником S кубитов справедливо неравенство

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{n} + \varepsilon_1 - 1/2 > 0. \quad (24)$$

Источник EPR испускает ЭПР-пары кубитов $\{2\}$ – $\{3\}$, векторы $\mathbf{R}_2 = -\mathbf{R}_3$ характеризуют ориентации активных слоев для этих кубитов, а $\varepsilon_2 = -\varepsilon_3$ — значения соответствующих функций ε для направления \mathbf{n} .

Воспроизводя условия реального эксперимента, будем считать, что прибор BS отбирает те пары кубитов $\{1\}$ – $\{2\}$, для которых он регистрирует синглетное предквантовое состояние. В нашем случае это пары, у которых для активных слоев $x_1x_2 < 0$ и $z_1z_2 < 0$. Это эквивалентно тому, что BS отбирает пары $\{1\}$ – $\{3\}$, у которых

$$x_1x_3 > 0, \quad z_1z_3 > 0. \quad (25)$$

Заметим, что прибор BS не контактирует со кубитами $\{3\}$. Поэтому он не изменяет их первоначальные элементарные состояния.

Для кубитов, для которых

$$\mathbf{R}_3 \mathbf{n} + \varepsilon_3 > \frac{1}{2}, \quad (26)$$

телепортация прошла успешно, а для кубитов, для которых

$$\mathbf{R}_3 \mathbf{n} + \varepsilon_3 < -\frac{1}{2}, \quad (27)$$

телепортация оказалась неуспешной.

Учитывая формулы (24)–(27), получаем, что число кубитов, для которых телепортация прошла успешно, задается формулой

$$N_+ = N \int d\mathbf{R}_1 \int d\mathbf{R}_3 \int d\varepsilon_1 \int d\varepsilon_3 \Theta \left(\mathbf{R}_1 \mathbf{n} + \varepsilon_1 - \frac{1}{2} \right) \Theta(\mathbf{R}_1 \mathbf{x} \cdot \mathbf{R}_3 \mathbf{x}) \times \\ \times \Theta(\mathbf{R}_1 \mathbf{z} \cdot \mathbf{R}_3 \mathbf{z}) \Theta \left(\mathbf{R}_3 \mathbf{n} + \varepsilon_3 - \frac{1}{2} \right), \quad (28)$$

а число кубитов, для которых телепортация кончилась неудачей, задается формулой

$$N_- = N \int d\mathbf{R}_1 \int d\mathbf{R}_3 \int d\varepsilon_1 \int d\varepsilon_3 \Theta \left(\mathbf{R}_1 \mathbf{n} + \varepsilon_1 - \frac{1}{2} \right) \Theta(\mathbf{R}_1 \mathbf{x} \cdot \mathbf{R}_3 \mathbf{x}) \times \\ \times \Theta(\mathbf{R}_1 \mathbf{z} \cdot \mathbf{R}_3 \mathbf{z}) \Theta \left(-\mathbf{R}_3 \mathbf{n} - \varepsilon_3 - \frac{1}{2} \right). \quad (29)$$

Здесь N — нормировочный множитель.

Качество телепортации оценивается числом $F = N_+(N_+ + N_-)^{-1}$, которое принято называть фиделити.

Стандартный математический формализм квантовой механики предсказывает для всех направлений \mathbf{n} фиделити $F = 1$. Реальный эксперимент [15] дал для фиделити значения $F_1 = 0,92 \pm 0,02$ при $\mathbf{n} = \mathbf{z}$, $F_1 = 0,90 \pm 0,03$ при $\mathbf{n} = \mathbf{x}$. Минимум фиделити $F_1 = 0,84 \pm 0,02$ достигался при $\mathbf{n} = 2^{-1/2}(\mathbf{z} + \mathbf{x})$. Относительное фиделити (отношение к максимальному значению) в минимуме имело значение $F_{1r} = 0,913$.

Более новый эксперимент [16], посвященный телепортации на большое расстояние, дал для фиделити следующие значения: $F_2 = 0,890 \pm 0,042$ при $\mathbf{n} = \mathbf{z}$, $F_2 = 0,865 \pm 0,046$ при $\mathbf{n} = \mathbf{x}$, $F_2 = 0,845 \pm 0,027$ при $\mathbf{n} = 2^{-1/2}(\mathbf{z} + \mathbf{x})$. Относительное фиделити при $\mathbf{n} = 2^{-1/2}(\mathbf{z} + \mathbf{x})$ равно $F_{2r} = 0,949$.

В нашем случае величины N_+ и N_- определяются формулами (28) и (29).

Сделаем в них замену

$$\Theta(\mathbf{R}_1 \mathbf{x} \cdot \mathbf{R}_3 \mathbf{x}) \rightarrow \Theta(\mathbf{R}_1 \mathbf{x}) \Theta(\mathbf{R}_3 \mathbf{x}) + \Theta(-\mathbf{R}_1 \mathbf{x}) \Theta(-\mathbf{R}_3 \mathbf{x})$$

и аналогичную замену при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{z}$. После этого фигурирующие в них интегралы, относящиеся к кубитам $\{1\}$ и $\{3\}$, факторизуются и легко вычисляются. В результате,

с точностью до общего множителя получается

$$\begin{aligned} N_-(\mathbf{n} = \mathbf{x}) &= N_-(\mathbf{n} = \mathbf{z}) = 0, \\ N_+\left(\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x} + \mathbf{z}}{\sqrt{2}}\right) &= 4 + 2(\sqrt{2} - 1)^2, \\ N_-\left(\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x} + \mathbf{z}}{\sqrt{2}}\right) &= 2(\sqrt{2} - 1)^2. \end{aligned}$$

Отсюда для фиделити получаем

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{z}) = 1, \quad F\left(\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x} + \mathbf{z}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2 + (\sqrt{2} - 1)^2}{2 + 2(\sqrt{2} - 1)^2} \approx 0,927.$$

Последний результат лежит посредине между F_{1r} и F_{2r} . С учетом ошибок эксперимента он хорошо согласуется со значениями для относительных фиделити в обоих экспериментах. Обратим внимание на то, что никаких подгоночных параметров мы не использовали.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная модель может рассматриваться как квантовая модель со скрытыми параметрами. Она, вроде бы, противоречит знаменитой теореме фон Неймана [17]. В действительности никакого противоречия нет. В своей теореме фон Нейман предполагал, что рассматриваемая квантовая система описывается векторами гильбертова пространства, а наблюдаемые описываются линейными операторами. В нашем случае векторы гильбертова пространства не являются атрибутами квантовой системы. Их можно связать только со специальным образом приготовленными ансамблями квантовых систем. Соответственно, от наблюдаемых нельзя требовать, чтобы они описывались линейными операторами. На наблюдаемые можно наложить лишь более слабое условие. Можно потребовать, чтобы они были элементами некоторой C^* -алгебры. При таких условиях доказательство фон Неймана не проходит.

Обратим внимание на то, что мы не делали никаких предположений о динамике рассматриваемой нами системы. Все рассмотренные нами квантовые эффекты являются чисто статистическими. При этом они не являются следствиями какой-то специальной квантовой теории вероятностей. Они вполне укладываются в стандартную колмогоровскую теорию вероятностей. Единственное, о чем только не надо забывать, это то, что вероятностное пространство должно быть оснащено σ -алгеброй. Здесь имеется принципиальное различие между классическими и квантовыми системами. В то время как для классической системы можно ввести единую σ -алгебру, которая может обслужить все наблюдаемые, характерные для системы, в квантовой системе для каждой группы совместимых наблюдаемых надо вводить свою σ -алгебру и, соответственно, свою систему вероятностных мер. В нашем случае в построении таких мер существенную роль играли функции $\varepsilon(\mathbf{r})$, значения которых зависят от \mathbf{r} . Напомним, что рассматриваемые нами наблюдаемые — проекции спина на направления \mathbf{r} — являются несовместимыми для разных \mathbf{r} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Физика квантовой информации / Под общ. ред. Д.Боумейстер, А.Экерт, А.Цайлингер. М.: Постмаркет, 2002.
2. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.
3. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
4. Славнов Д. А. Квантовые измерения и колмогоровская теория вероятностей // ТМФ. 2003. Т. 136, № 3. С. 436–443.
5. Славнов Д. А. О возможности согласования квантовой механики с классической теорией вероятностей // ТМФ. 2006. Т. 149, № 3. С. 457–472.
6. Славнов Д. А. Измерения и математический аппарат квантовой физики // ЭЧАЯ. 2007. Т. 38, № 2. С. 295–359.
7. Эмх Ж. Алгебраический подход в статистической механике и квантовой теории поля. М.: Мир, 1976.
8. Боголюбов Н. Н. и др. Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
9. Диксмье Ж. C^* -алгебры и их представления. М.: Наука, 1974.
10. Славнов Д. А. Проблема локальности в квантовых измерениях // ЭЧАЯ. 2010. Т. 41, № 1. С. 149–173.
11. Matzkin A. Local Hidden-Variables Can Account for EPR Quantum Correlations. arXiv:quant-ph/0703271.
12. Устинов А. В. Моделирование двухуровневых систем // ВМУ. 2012. Сер. 3, № 4. С. 24–29.
13. Наймарк М. А. Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
14. Эйнштейн А., Подольский Б., Розен Н. Можно ли считать, что квантово-механическое описание физической реальности является полным? // УФН. 1936. Т. 16, № 4. С. 440–446.
15. Jennewein T. et al. Experimental Nonlocality Proof of Quantum Teleportation and Entanglement Swapping // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88, No. 1. P. 017903.
16. Xiao-Song Ma et al. Quantum Teleportation over 143 Kilometres Using Active Feed-Forward // Nature. 2012. V. 489. P. 269–273.
17. Фон Нейман И. Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.

Получено 3 июня 2013 г.