

## ЦИФРОВЫЕ МЕТОДЫ ДИАГНОСТИКИ ПРОДОЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ СГУСТКОВ В СИНХРОТРОНАХ

*В. М. Жабницкий*<sup>1</sup>

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обсуждаются методы обработки цифрового сигнала, пропорционального продольной интенсивности сгустков в процессе их ускорения в синхротроне, с целью получения следующих зависимостей от времени: фазы сгустка относительно фазы ускоряющего напряжения, среднеквадратичного продольного размера сгустка, интенсивностей сгустка и пучка как совокупности циркулирующих сгустков. Приводятся примеры получающихся зависимостей для пучка в нуклотроне ОИЯИ.

Methods of processing of the digital signal, proportional to longitudinal intensity of bunches during their acceleration in synchrotrons, are discussed for the purpose of identification of the following dependences on time: phases of a bunch relative to a phase of accelerating voltage, root-mean-square longitudinal dimensions of a bunch, intensities of a bunch and a beam as sets of circulating bunches. Examples of obtained dependences for a beam in the Nuclotron (JINR) are presented.

PACS: 29.20.-c; 29.27.-a

### ВВЕДЕНИЕ

Для диагностики параметров сгустка в синхротронах используются различные измерительные датчики. Наиболее простым и широко распространенным устройством является многоэлектродный датчик для измерения положения центра тяжести сгустка. Суммарный сигнал с электродов такого устройства зависит от числа частиц в сгустке. Он используется для выявления продольного профиля интенсивности сгустка, т. е. для идентификации зависимости  $n(t)$  — числа частиц в последовательных по времени пролета датчика сечениях сгустка. Измеряемый аналоговый сигнал обычно преобразуется в последовательность цифровых отсчетов  $n[i]$ , соответствующих моментам времени  $t_i = i \cdot T_{\text{clk}}$  с постоянным периодом дискретизации  $T_{\text{clk}}$ . В настоящей работе приведены методы обработки цифрового сигнала  $n[i]$  в процессе ускорения сгустка с целью получения следующих зависимостей от времени: фазы сгустка относительно фазы ускоряющего напряжения, среднеквадратичного продольного размера (длины) сгустка, интенсивностей сгустка и пучка как совокупности циркулирующих сгустков. Приводятся примеры получающихся зависимостей, обусловленных эволюцией измеряемых продольных параметров сгустков при ускорении.

---

<sup>1</sup>E-mail: V.Zhabitsky@jinr.ru

## ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Пусть измерительный датчик обеспечивает идентификацию аналогового сигнала  $n(t)$ , пропорционального мгновенному числу заряженных частиц в последовательных по времени пролета датчика сечениях сгустка. На рис. 1 приведен пример осциллограммы сигнала пучка на нуклотроне [1], где кратность ускорения  $h = 5$ . Среди многообразия сигналов выбран указанный выше исключительно для того, чтобы продемонстрировать возможности излагаемого метода, в том числе в случае, когда сгустки разнятся по числу частиц. Длительность процесса соответствует периоду обращения частиц  $T_{\text{rev}}[k]$ , а моменты времени  $t_j[k]$  примерно совпадают с минимальными значениями  $n(t)$  во временных интервалах между сгустками ( $1 \leq j \leq h$ ) на обороте с номером  $k$ . Величина отрицательного смещения  $n_{\text{min}}[j, k] < 0$  каждого сгустка относительно нулевого уровня обусловлена индукционным характером сигнала, наведенного на пластинах измерительного датчика, и зависит от номеров сгустка и оборота.

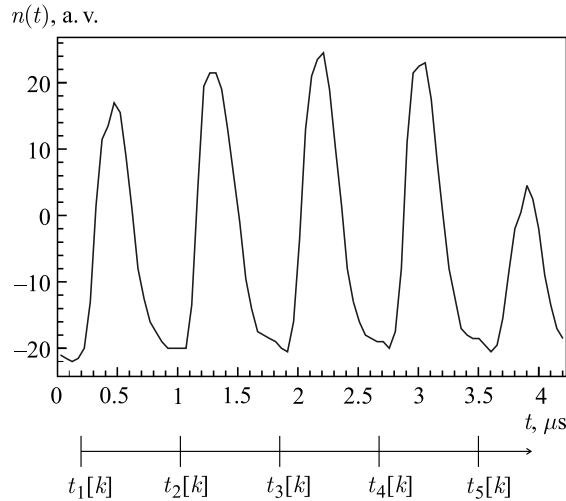


Рис. 1. График зависимости  $n(t)$

Сигнал  $n(t)$  формируется заряженными частицами в сгустке. Его форма зависит от фазовых колебаний частиц относительно фазы ускоряющего напряжения. Вынужденные продольные колебания заряженных частиц в сгустке являются устойчивыми при выполнении условий Векслера [2]. Равновесная (синхронная) частица движется синхронно с ускоряющим полем. Фазовые траектории частиц, имеющих небольшие отклонения от синхронной, при выполнении условий автофазировки являются замкнутыми и окружают устойчивую равновесную точку  $\varphi = \varphi_s$ . На рис. 2 приведены конфигурации сепаратрисы и фазовых траекторий частиц при энергии ниже критической и величине синхронной фазы  $\varphi_s = 14,9^\circ$  на фазовой плоскости  $(\varphi, \dot{\varphi}/\Omega_s)$ , где  $\Omega_s$  — циклическая частота малых синхротронных колебаний [3]. Область продольной устойчивости ограничена сепаратрисой (сплошная линия), а приведенные на рисунке фазовые траектории частиц соответствуют следующим максимальным отклонениям  $\phi_m$  фазы частицы от синхрон-

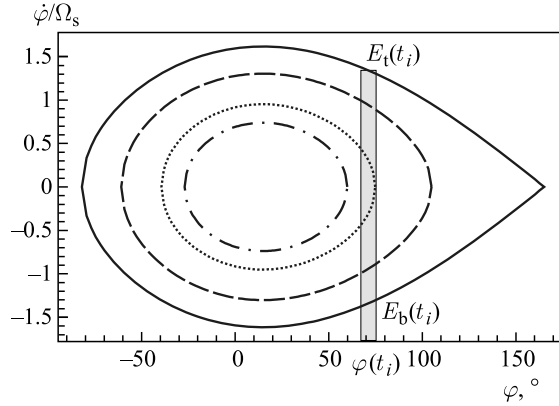


Рис. 2. Конфигурации сепаратрисы и фазовых траекторий

ной:  $|\phi_m| = \pi/2$  (штриховая линия),  $|\phi_m| = \pi/3$  (пунктирная),  $|\phi_m| = \pi/4$  (штрих-пунктирная).

Будем считать, что измеряемый сигнал отвечает стационарной в широком смысле [4] функции продольного распределения заряженных частиц в сгустке. Это означает, что такая функция зависит только от отклонений частиц по фазе  $\varphi - \varphi_c$  и энергии  $E - E_c$  от их стационарных значений  $\varphi_c$  и  $E_c$ . Если продольные когерентные колебания сгустка отсутствуют, то  $\varphi_c$  и  $E_c$  отвечают синхронной частице:  $\varphi_c = \varphi_s$  и  $E_c = E_s$ .

Будем следовать общепринятым правилам перехода от мгновенных величин сигнала к цифровым значениям [4]. Пусть  $f(\varphi - \varphi_c, E - E_c)$  есть одномерная плотность вероятности пребывания заряженных частиц в пределах сгустка в элементе  $d\varphi dE$ . Тогда наблюдаемая величина  $\langle n(t_i) \rangle$  для среднего значения интенсивности частиц во временном интервале  $(t_i, t_i + dt)$  для сгустка с номером  $j$  на обороте  $k$  есть проекция двумерной функции распределения  $f(\varphi - \varphi_c, E - E_c)$  на ось времени с отрицательным смещением  $n_{\min}[j, k] < 0$ :

$$\langle n(t_i) \rangle = \int_{\varphi(t_i)}^{\varphi(t_i+dt)} \int_{E_b(t_i)}^{E_t(t_i)} f(\varphi - \varphi_c, E - E_c) d\varphi dE + n_{\min}[j, k], \quad t_i \in (t_j[k], t_{j+1}[k]).$$

Пределы интегрирования по энергиям частиц  $E_b(t_i) \leq E \leq E_t(t_i)$  и их фазам  $\varphi(t_i) \leq \varphi \leq \varphi(t_i + dt)$  в заданный момент времени  $t_i$  определяются в соответствии с конфигурацией сепаратрисы сгустка (см. рис. 2). Здесь считается, что можно пренебречь смещением частицы вдоль фазовой траектории за время пролета короткого измерительного датчика. Поскольку частота синхротронных колебаний в сотни и более раз ниже частоты обращения частиц, то такое приближение является вполне оправданным.

Пусть наблюдаемая величина  $\langle n(t_i) \rangle$  подвергается дискретизации по времени с периодичностью  $T_{\text{clk}}$  и квантованию по уровню сигнала, т.е. представляется в цифровой форме в виде последовательности отсчетов  $n[i]$ , которым соответствуют моменты времени  $t_i = i \cdot T_{\text{clk}}$ . Поскольку дискретный сигнал эквивалентен аналоговому при выполнении условий теоремы Котельникова [4], можно использовать приближение о равенстве не-

прерывных и дискретных величин:  $\langle n(t_i) \rangle = n[i]$ . Тогда функция

$$dN(t) = f(t_i(j, k)) dt = f[i, j, k] = n[i] - n_{\min}[j, k], \quad t_i \in (t_j[k], t_{j+1}[k]), \quad (1)$$

характеризует дифференциальный закон распределения частиц по дискретным отсчетам  $i$ , которым соответствуют конкретные моменты времени  $t_i(j, k)$  в пределах сгустка с номером  $j$  на заданном обороте  $k$ . Для построенной таким образом дифференциальной цифровой функции распределения может быть использован общепринятый в статистической физике [4, 5] метод моментов. Так, число частиц в сгустке есть

$$N_j(k) = \int_{t(i_l)}^{t(i_r)} f(t) dt \approx \sum_{i=i_l}^{i_r} f[i, j, k], \quad (2)$$

где индексы  $i_l$  и  $i_r$  соответствуют левой и правой границам сгустка с номером  $j$  на обороте  $k$  и, следовательно, отвечают отсчетам в моменты времени  $t(i_l)$  и  $t(i_r)$ . Поскольку цифровые отсчеты в общем случае не совпадают с минимальными значениями непрерывной функции  $n(t)$  для интенсивности выбранного сгустка, то в качестве конкретного значения для  $n_{\min}[j, k]$  можно выбрать минимальное значение  $n[i]$  в заданном интервале  $t(i_l) \leq t \leq t(i_r)$ . Поэтому точность представленного метода зависит от шага квантования измеряемого сигнала по амплитуде и периода его дискретизации  $T_{\text{clk}}$ .

Первый момент функции распределения позволяет рассчитать положение продольного центра тяжести сгустка:

$$\langle t_j(k) \rangle = \frac{1}{N_j(k)} \int_{t(i_l)}^{t(i_r)} t f(t) dt \approx \frac{T_{\text{clk}}}{N_j(k)} \sum_{i=i_l}^{i_r} i \cdot f[i, j, k] = \langle t_c[j, k] \rangle. \quad (3)$$

Среднеквадратичный размер (длина) сгустка есть второй момент функции распределения:

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \langle (t_j(k) - \langle t_j(k) \rangle)^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{N_j(k)} \int_{t(i_l)}^{t(i_r)} (t - \langle t \rangle)^2 f(t) dt \approx \frac{1}{N_j(k)} \sum_{i=i_l}^{i_r} (i T_{\text{clk}} - \langle t_c[j, k] \rangle)^2 f[i, j, k]. \end{aligned} \quad (4)$$

## РАЗБИЕНИЕ ЦИФРОВОГО СИГНАЛА НА СГУСТКИ И ОБОРОТЫ

Для того чтобы использовать изложенный выше метод, необходимо перейти от одномерной последовательности цифровых отсчетов  $n[i]$  для измеряемого сигнала интенсивности сгустков к трехмерной последовательности  $f[i, j, k]$ , характеризующей дифференциальный закон распределения частиц по отсчетам  $i$  в пределах сгустка с номером  $j$  на обороте  $k$ . С этой целью можно использовать сигнал ускоряющего напряжения  $V(t)$ , который однозначно синхронизован со сгустками (рис. 3). Измеряемый сигнал ускоряющего напряжения с амплитудой  $V_a$  и начальной фазой  $\phi_0$  в общем случае соответствует гармоническому закону  $V(t) = V_0 + V_a \sin(\phi_0 + 2\pi t/T_{\text{rf}}(t))$  с нулевым уровнем  $V_0$  и периодом  $T_{\text{rf}}$ , зависящим от времени. При энергиях ниже критической в отсутствие ускорения

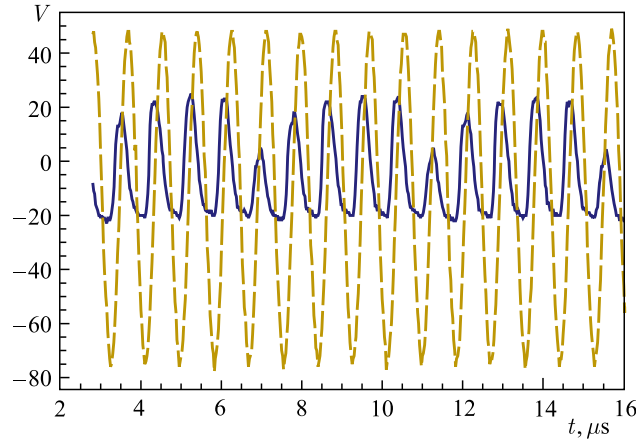


Рис. 3. Сигналы пучка (сплошная линия) и ускоряющего напряжения (штриховая линия)

синхронной частице соответствует фаза  $\varphi_s = 0$ , совпадающая с нулевым уровнем  $V_0$  и положительным наклоном кривой  $V(t)$ . Размер сепаратрисы зависит от конкретной величины  $\varphi_s$  и максимален при  $\varphi_s = 0$ . Область допустимых фаз в пределах сгустка есть  $\varphi \in (-\pi, \pi)$ . Поэтому за левую границу точки разбиения цифрового сигнала  $n[i]$  удобно выбирать фазу, отвечающую левой границе сепаратрисы. В этом случае точке  $\varphi = -\pi$  для сгустка с номером  $j$  на обороте  $k$  соответствует  $t_i(\varphi_j[k] = -\pi)$  — момент времени пересечения гармонической кривой ускоряющего напряжения  $V(t)$  с нулевым уровнем  $V_0$  и отрицательным наклоном кривой  $V(t)$ . На рис. 3 для сигнала с амплитудой  $V_a = 61,03$  такие точки примерно соответствуют нулевому уровню  $V_0 = -13,27$  и моментам времени 2,8, 7,1, 11,4, 15,7 мкс.

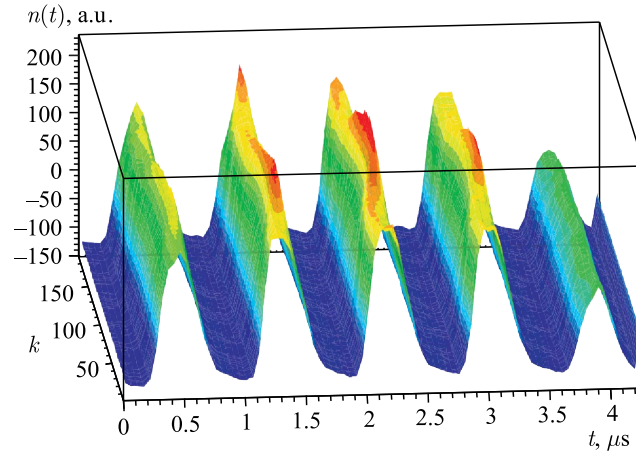
Поскольку измеряемое напряжение  $V(t_i = i \cdot T_{\text{clk}})$  в точках дискретизации  $t_i$  имеет ошибки по амплитуде и времени, то для расчета моментов времени  $t_i(\varphi_j[k] = -\pi)$  необходимо использовать статистические методы обработки сигналов, например метод наименьших квадратов [5], для выявления отрицательного наклона кривой  $V(t)$  в окрестности точки  $t_i(\varphi_j[k] = -\pi)$  и, следовательно, конкретного значения ее пересечения с линией  $V(t) = V_0$ , параллельной оси времени. В результате вычислений получаем

$$t_i(\varphi_j[k] = -\pi) = i_j[k] \cdot T_{\text{clk}} - \delta t_j[k].$$

Целочисленные величины  $i_j[k]$  образуют массив точек разбиения цифрового сигнала  $n[i]$  по сгусткам (по  $j$ ) и оборотам (по  $k$ ). Поправки  $\delta t_j[k] < T_{\text{clk}}$  позволяют уточнить положение точек разбиения по времени и должны учитываться при расчетах временных интервалов. Так, период обращения частицы для сгустка с номером  $j$  есть

$$T_{\text{rev}}[k] = (i_j[k + 1] - i_j[k]) T_{\text{clk}} + \delta t_j[k] - \delta t_j[k + 1]. \quad (5)$$

Пример трехмерного графика зависимости  $n(t)$  с учетом разбиения на обороты и сгустки представлен на рис. 4. Измеряемый сигнал длительностью около 0,8 мс состоит из 32768 отсчетов (период дискретизации  $T_{\text{clk}} = 25$  нс). В результате разбиения исходного сигнала образуется массив данных для  $k \leq 190$  оборотов. Величина начальной периодичности следования сгустков есть  $T_{\text{rf}} = 0,86$  мкс, т. е.  $T_{\text{rev}}[0] = 4,3$  мкс. Видно,

Рис. 4. График сигнала пучка  $n(t)$  по оборотам  $k$ 

что ступки синхронизованы с ускоряющим полем (отсутствуют или крайне невелики когерентные продольные колебания ступка как целого, поскольку колебания ступков по основанию незаметны), однако отчетливо проявляются колебания формы ступка (изменения в верхней части импульса по амплитуде и длительности).

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

После выполнения процедуры разбиения зарегистрированного сигнала для  $n(t)$  на ступки и обороты нетрудно провести вычисления для числа частиц в ступке в соответствии с формулой (2). Левая граница ступка и, следовательно, номер отсчета  $i_l$  лежит между точкой  $t_i(\varphi_j[k] = -\pi)$  и максимальным значением для  $n[i]$  в пределах ступка. Для определения номера отсчета  $i_r$  для правой границы ступка необходимо найти минимум функции  $n[i]$  справа от максимального значения. При этом следует учитывать, что положение этого минимума может лежать за пределами границы выбранного ступка с номером  $j$ , т. е.  $t(i_r) > t_i(\varphi_{j+1}[k] = -\pi) = t_i(\varphi_j[k] = -\pi) + T_{rf}[j, k]$ . Это может быть обусловлено как погрешностями синхронизации сигнала ускоряющего напряжения  $V(t)$  относительно сигнала пучка  $n(t)$ , так и уменьшением крутизны заднего фронта импульса для ступка с учетом реальных параметров измерительной радиотехнической цепи (ее постоянной интегрирования). В реализованном методе обработка сигнала проводится с учетом данных для массива  $n[i]$ . Вычислительная процедура для ступка стартует с левой границы точки разбиения  $i_j[k]$ . Затем необходимо найти положение минимума для  $n[i]$ , следующего за этой точкой разбиения в пределах смещения  $L = 0,50T_{rf}[j, k]/T_{clk}$ . Далее находим положение максимума для  $n[i]$ , отстоящего от точки разбиения  $i_j[k]$  на смещение  $2L$ . И, наконец, определяем положение следующего минимума, отстоящего от максимума на смещение  $L$ . При этом следует контролировать положение всех значений для  $i_r$  с тем, чтобы не выйти за пределы длины массива  $n[i]$  (это может случиться для ступка, идентифицированного как последний после разбиения сигнала на ступки и обороты).

Графики для интенсивностей пяти ступков  $N(t)$  и пучка как совокупности циркулирующих ступков  $N_b(t)$  представлены на рис. 5. Все величины для  $N(t)$  для ступков и

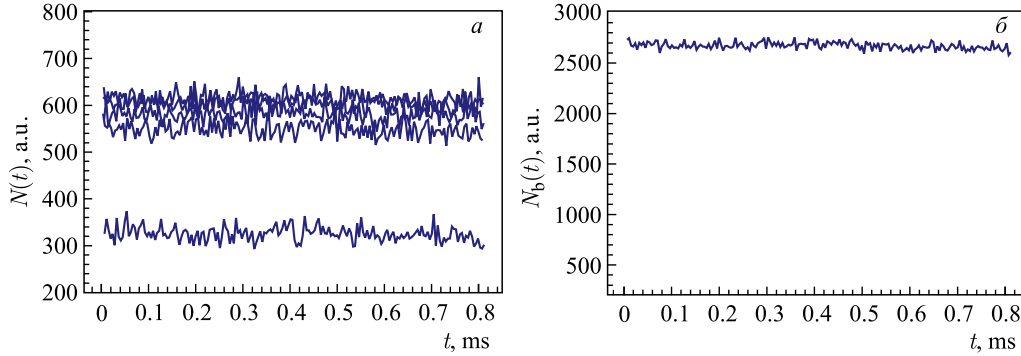


Рис. 5. Интенсивности пяти сгустков (а) и пучка как совокупности циркулирующих сгустков (б)

для  $N_b(t)$  для пучка представлены в масштабе, соответствующем масштабу для  $n(t)$ . Данные для  $N_b(t)$  могут быть прокалиброваны при их сопоставлении с данными измерений стандартного датчика интенсивности пучка.

С учетом данных для  $N_b(t)$  нетрудно рассчитать величину ускоряемого тока частиц  $qN_b(t)/T_{\text{rev}}[k]$ , где  $q$  — заряд частицы. Эта характеристика может оказаться особенно полезной в синхротронах, где энергия инжектируемых частиц невелика и скорость частицы при ускорении заметно увеличивается.

Описанная выше процедура вычислений для  $N(t)$  может быть применена для расчета положения продольного центра тяжести сгустка в соответствии с формулой (3). При этом удобно использовать фазовые переменные  $\varphi_c = 2\pi\langle t_c[j, k] \rangle / T_{\text{rf}}[j, k]$ . В результате получаем смещение центра тяжести сгустка относительно точки разбиения  $i_j[k]$ . Поскольку точка разбиения смещена влево на  $\pi$  радиан относительно нулевой фазы, то фаза сгустка пучка есть

$$\varphi_s(t) = \varphi_s[j, k] = 2\pi\langle t_c[j, k] \rangle / T_{\text{rf}}[j, k] - \pi.$$

График для фазы сгустка  $\varphi_s(t)$  относительно нулевой фазы ускоряющего напряжения представлен на рис. 6. Следует заметить, что погрешности синхронизации сигнала

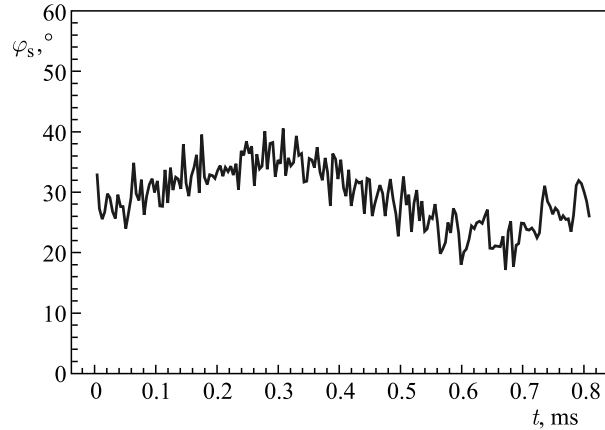


Рис. 6. Фаза сгустка  $\varphi_s(t)$  относительно нулевой фазы ускоряющего напряжения

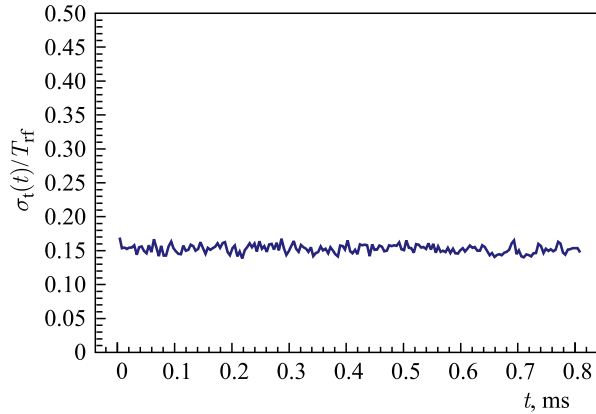


Рис. 7. Среднеквадратичная длина сгустка  $\sigma_t(t)$ , отнесенная к периоду ускоряющего напряжения  $T_{rf}(t)$

ускоряющего напряжения  $V(t)$  относительно сигнала пучка  $n(t)$  можно минимизировать, если провести измерения  $\varphi_s$  на плато магнитного поля: в отсутствие ускорения расчетные значения для  $\varphi_s$  должны быть нулевыми. Эта методика может быть использована для синхронизации сигналов  $V(t)$  и  $n(t)$ .

Среднеквадратичный размер (длина) сгустка  $\sigma_t(t)$  рассчитывается в соответствии с формулой (4) с учетом метода расчета, описанного выше для  $N(t)$  и  $\langle t_c[j, k] \rangle$ . График для среднеквадратичной длины сгустка  $\sigma_t(t)$ , отнесенной к периоду ускоряющего напряжения  $T_{rf}(t)$ , представлен на рис. 7. Видно, что  $6\sigma_t \approx T_{rf}$ , что соответствует применяемым оценкам [3] для продольного эмиттанса пучка (заполнение на 95 %).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложен метод построения дифференциальной цифровой функции распределения частиц в сгустке в согласии с цифровым сигналом с измерительного датчика продольной интенсивности пучка и с цифровым сигналом для ускоряющего напряжения. Метод моментов для цифровой функции распределения использован для вычисления фазы сгустка относительно фазы ускоряющего напряжения, среднеквадратичного продольного размера (длины) сгустка, интенсивностей сгустка и пучка как совокупности циркулирующих сгустков. Оценки точности вычисляемых характеристик не обсуждаются в данной работе. Однако вычисляемые характеристики сгустков в представленном методе позволяют выявлять важные закономерности их эволюции в процессе ускорения.

Автор благодарен О. И. Бровко (ОИЯИ) за предоставленные экспериментальные данные, полученные на нуклотроне.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sidorin A. et al.* Status of the Nuclotron // Proc. of XXIV Rus. Part. Accel. Conf. RuPAC-2014, Obninsk, Russia, Oct. 6–10, 2014. Inst. for Phys. and Power Engineering, 2014. P. 283–286.
2. *Лебедев А. Н., Шальнов А. В.* Основы физики и техники ускорителей. М.: Энергоатомиздат, 1991. 528 с.



3. Handbook of Accelerator Physics and Engineering / Ed. by A. Chao, M. Tinger. Singapore: World Sci., 1999. 740 p.
4. *Гоноровский И. С.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Сов. радио, 1977. 608 с.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978. 832 с.

Получено 9 июня 2015 г.