

ДВУХСТУПЕНЧАТАЯ ПРОЦЕДУРА АНАЛИЗА ФРАКТАЛОВ

*Т. Г. Дедович*¹, *М. В. Токарев*²

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В работе предложена двухступенчатая процедура фрактального анализа различных типов фракталов для PaC- и SePaC-методов. Показано преимущество двухступенчатой процедуры PaC- и SePaC-методов над базовыми и модифицированными PaC- и SePaC-методами. Приведены результаты сравнительного анализа единого блока данных различными методами (BC и двухступенчатыми процедурами PaC- и SePaC-методов). Показано, что двухступенчатая процедура SePaC-метода наиболее эффективна в реконструкции общего блока данных.

A two-step procedure of fractal analysis for PaC and SePaC methods is suggested. The advantage of the procedure over the base and modified PaC and SePaC methods is demonstrated. The results of the analysis of the set of fractals by various methods (BC and two-stage procedure for PaC and SePaC methods) are presented. It is shown that the two-step procedure for SePaC method is most effective in the reconstruction of the set of fractals.

PACS: M89.75.Da, M89.75.Fb

ВВЕДЕНИЕ

Для описания взаимодействий частиц и ядер при высоких энергиях предполагается, что процессы развития ливня и адронизации обладают иерархической фрактальной структурой. В работах [1–3] представлены сценарии развития партонного ливня и процесса адронизации, приводящие к образованию различных типов фракталов. Одной из основных характеристик фрактала, отражающих динамику его образования, является размерность D_F . Фракталы характеризуются различными размерностями: Хаусдорфа–Безиковича, Минковского (клеточная), подобия и др. [4]. Размерность Хаусдорфа–Безиковича называется фрактальной и определяется как значение δ , при котором мера M_δ множества имеет конечное значение [5]:

$$M_\delta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_K \sum_{i=1}^N l_i^\delta. \quad (1)$$

Здесь оператор \inf означает минимальное из всех возможных покрытий K рассматриваемого множества; $\{l_i\}$ — диаметры шаров покрытия, не превышающие значения ϵ .

¹E-mail: dedovich@yandex.ru

²E-mail: tokarev@jinr.ru

Величина ϵ^{-1} называется разрешением. Размерность Хаусдорфа–Безиковича является инвариантом метрических пространств. Размерность Минковского (клеточная размерность) D_b определяется по формуле

$$D_b = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta}. \quad (2)$$

Здесь $N(\delta)$ — количество пробников размером δ , покрывающих объект. Для некоторых типов фракталов клеточная размерность совпадает с размерностью Хаусдорфа–Безиковича ($D_b = D_F$), а для некоторых они различны ($D_F < D_b$). Клеточная размерность является более грубой характеристикой, так как не учитывает некоторые особенности фракталов, например разную длину частей фрактала на одном уровне. Размерность D_b имеет простой алгоритм реализации и удобна для использования в прикладных задачах.

Для определения фрактальной размерности множеств и процессов используются методы подсчета клеток (ВС) [6, 7], регуляризации [8], R/S нормированного размаха [4], максимумов модулей вейвлет-преобразования [9]. В работах [10, 11] предложены новые методы фрактального анализа: метод P -адических покрытий (PaC) и метод систем уравнений P -адических покрытий (SePaC). Эти методы используют покрытия с основанием P , которое может быть как простым, так и составным числом. ВС- и PaC-методы основаны на определении клеточной размерности, а SePaC-метод — фрактальной. В работах [1–3] отмечены особенности ВС-, PaC- и SePaC-методов, проявляемые при анализе различных типов фракталов. Установлено, что для ВС-метода существует единый диапазон значений параметра алгоритма χ_{lim}^2 , который обеспечивает наибольшие эффективности восстановления фрактальной размерности, количества уровней и основания образования различных типов фракталов. В этих работах показано, что для получения наибольших эффективностей анализа различных типов фракталов PaC-методом необходимы неперекрывающиеся диапазоны значений параметра алгоритма χ_{lim}^2 . Отмечается, что PaC- и SePaC-методы имеют преимущество для анализа фракталов с независимым делением частей, а характеристики фракталов с зависимым делением точнее восстанавливаются SePaC-методом. Модифицированный SePaC-метод [3] позволяет наилучшим образом восстанавливать фракталы с комбинированным делением. Результаты, полученные в работах [1–3], показали, что для единого анализа широкого класса фракталов необходима более гибкая процедура, учитывающая особенности разработанных методов.

В настоящей работе предложена двухступенчатая процедура единого анализа различных типов фракталов для PaC- и SePaC-методов. В разд. 1 представлено краткое описание ВС-метода, базовых и модифицированных PaC- и SePaC-методов, а также двухступенчатой процедуры. В разд. 2 показано, что двухступенчатая процедура SePaC-метода, применяемая для анализа общего блока данных (774 фрактала с независимым, 437 — с зависимым и 646 — с комбинированным делением), имеет преимущество перед базовым и модифицированным SePaC-методами. Преимущество двухступенчатой процедуры PaC-метода перед базовым и модифицированным PaC-методами показано в разд. 3. В разд. 4 обсуждаются результаты сравнительного анализа единого блока данных различными методами. Основные выводы сформулированы в заключении.

1. МЕТОДЫ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА

В данном разделе приведено краткое описание методов фрактального анализа, используемых в этой статье, а также описана двухступенчатая процедура, применяемая для РаС- и SeРаС-методов. Для полноты характеристики тестового набора фракталов, получаемых методами независимого, зависимого и комбинированного деления, в приложении приведено краткое описание процедуры формирования типичных представителей каждого типа.

1.1. Методы подсчета клеток и P -адических покрытий. ВС- и РаС-методы основаны на определении клеточной размерности. В обоих методах [10] размерность D_F определяется как параметр наклона зависимости $N \sim M^{D_F}$ в дважды логарифмическом масштабе. Здесь M и N — количество бинов и ненулевых бинов в наборе распределений исследуемой величины. В распределениях набора количество бинов $\{M_i\}$ изменяется по степенному закону ($M_i = (P)^i, i = 0, 1, 2 \dots$), т. е. набор является P -адическим покрытием. В ВС-методе, как правило, используется покрытие с основанием $P = 2$, а в РаС-методе — различные покрытия с $P = 2, \dots, P_{\max}$. В случае если χ^2 линейной аппроксимации зависимости $\ln N$ от $\ln M$ меньше заданного значения параметра χ_{\lim}^2 , то набор рассматриваемых точек считается фракталом с основанием P и размерностью D_F . Количество уровней фрактала определяется по условию насыщения $N(\text{lev}, P) = N(\text{lev} + 1, P)$. Отметим, что ВС-метод имеет один свободный параметр χ_{\lim}^2 , а РаС — два параметра: значение основания максимального P -адического покрытия P_{\max} и χ_{\lim}^2 .

Фракталы с независимым делением [1], в случае правильного выбора основания, имеют одно и то же значение клеточной размерности при анализе разного количества уровней. Зависимость $N \sim M^{D_F}$ в дважды логарифмическом масштабе является идеальной прямой, и поэтому значение χ_{\lim}^2 может быть сколь угодно малым, например $10^{-13} - 10^{-5}$. В этом случае ограничения на степенную зависимость количества ненулевых бинов от уровня фрактала (базовый РаС-метод) позволяют однозначно определить основание фрактала, необходимое для точного вычисления клеточной размерности. При анализе фракталов с зависимым [2] и комбинированным [3] делением частей точки зависимости $N \sim M^{D_F}$ в дважды логарифмическом масштабе не образуют идеальную прямую. Размерность таких фракталов зависит от количества анализируемых уровней и определяется на основе приближенного описания. Последнее сводится к снятию ограничений на степенную зависимость числа ненулевых бинов от уровня фрактала и выбору χ_{\lim}^2 из диапазона 0,01–1,5. Эти особенности учтены в модифицированном РаС-методе.

1.2. Метод систем уравнений P -адических покрытий (SeРаС). SeРаС-метод [11] основан на определении фрактальной размерности D_F . Он включает: рассмотрение различных P -адических покрытий множества с основанием $P = 3, \dots, P_{\max}$, исследование гипотез формирования фракталов (с зависимым и независимым делением частей) и нахождение решения D_F^{lev} системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{Nd_{\text{lev}}} (d_{i \text{ lev}})^{D_F^{\text{lev}}} = 1. \quad (3)$$

Здесь Nd_{lev} и $d_{i \text{ lev}}$ — количество и длина допустимых диапазонов для каждого уровня соответственно. Если относительные отклонения от среднего значения $\langle D_F^{\text{lev}} \rangle$ для каждого уровня меньше заданного значения параметра Dev , то набор рассматриваемых

точек считается фракталом с основанием P и размерностью $\langle D_F^{\text{lev}} \rangle$. Количество уровней фрактала определяется условием насыщения $N(\text{lev}, P) = N(\text{lev} + 1, P)$. SePaC-метод имеет два параметра: основание максимального P -адического покрытия P_{max} и предельное относительное отклонение Dev фрактальных размерностей различных уровней от их среднего.

Фракталы с независимым [1] и зависимым [2] делением имеют разделенные в пространстве части, рассматриваемые как допустимые диапазоны. Поэтому ограничения на степенную зависимость числа допустимых диапазонов от уровня фрактала (базовый SePaC-метод [11]) позволяют однозначно определить основание фрактала и длины диапазонов, необходимых для точного вычисления фрактальной размерности. Фракталы с комбинированным делением [3] имеют соприкасающиеся в пространстве допустимые диапазоны. Это приводит к невозможности точного определения длины диапазонов и основания фрактала. Размерность таких фракталов определяется на основе приближенного описания. Последнее сводится к снятию ограничений на степенную зависимость числа ненулевых бинов и допустимых диапазонов от уровня фрактала. Эти особенности учтены в модифицированном SePaC-методе.

1.3. Двухступенчатая процедура анализа. Применение базовых и модифицированных методов (PaC и SePaC) для различных типов фракталов является основанием для введения двухступенчатой процедуры анализа. Процедура состоит из следующих шагов.

1. Общий блок данных анализируется базовым методом:

а) определяется значение параметра P_{max} как начало плато функции $\Delta D_{\text{ext}}(P_{\text{max}})$, полученной для всех значений второго параметра алгоритма Paг2 (Dev для SePaC и χ_{lim}^2 для PaC):

$$\Delta D_{\text{ext}} = \Delta D_{D_F} + \Delta D_{N_{\text{lev}}} + \Delta D_P. \quad (4)$$

Здесь ΔD_{D_F} , $\Delta D_{N_{\text{lev}}}$ и ΔD_P — разность распределений по величинам D_F , N_{lev} и P соответственно;

б) определяется значение параметра Paг2 алгоритма на основе анализа функции $\Delta D_{\text{ext}}(\text{Paг2})$, полученной при оптимальном значении P_{max} ;

в) анализируются данные базовым методом с выбранными значениями параметров (определяются характеристики восстановленных фракталов, и формируется новый блок, состоящий из нереконструированных фракталов).

2. Сформированный блок анализируется модифицированным методом по п. а–в.

3. Совместно рассматриваются результаты реконструкции фракталов после двух ступеней анализа.

2. ДВУХСТУПЕНЧАТЫЙ АНАЛИЗ ФРАКТАЛОВ SePaC-МЕТОДОМ

В данном разделе представлены результаты обработки тестового набора фракталов двухступенчатой процедурой SePaC-метода.

2.1. Анализ фракталов базовым SePaC-методом. Параметр P_{max} является максимальным основанием в рассматриваемых P -адических покрытиях. Выбор оптимального значения P_{max} проводился в диапазоне от 3 до 19. На рис. 1, а представлена зависимость функции $\Delta D_{\text{ext}}(P_{\text{max}})$, полученная для всех значений параметра Dev (от 10^{-6} до 0,9). Начало плато $P_{\text{max}} = 8$ определяет оптимальное значение P_{max} и соответствует максимальному значению основания P формирования фракталов в блоке данных.

Параметр Dev является предельным относительным отклонением фрактальных размерностей различных уровней от их среднего и определяет: является ли набор данных фракталом? Соответствие между номером N_{Dev} и значением Dev приведено в табл. 1. На рис. 1, б показана зависимость ΔD_{ext} от номера N_{Dev} при оптимальном значении P_{max} . Из рисунка видно, что функция $\Delta D_{ext}(N_{Dev})$ постоянна при всех значениях Dev . Поэтому значение Dev можно выбрать произвольно из указанного диапазона. Для дальнейшего анализа выбираем $Dev = 0,01$. Это означает, что фрактальные размерности, определенные для различных уровней, отличаются от их среднего не больше чем на 1%. Свобода в выборе значения этого параметра подтверждается независимостью эффективностей восстановления Eff_{frac} , Eff_{D_F} , $Eff_{N_{lev}}$ и Eff_P от номера N_{Dev} (рис. 1, в). Эффективность восстановления фрактала Eff_{frac} определяется выражением

$$Eff_{frac} = N_{frac}/N_{test}, \tag{5}$$

где N_{test} и N_{frac} — количество рассматриваемых и восстановленных фракталов. Эффективность Eff_V нахождения величины $V = D_F, N_{lev}, P$ зависит от ошибки ее восстановле-

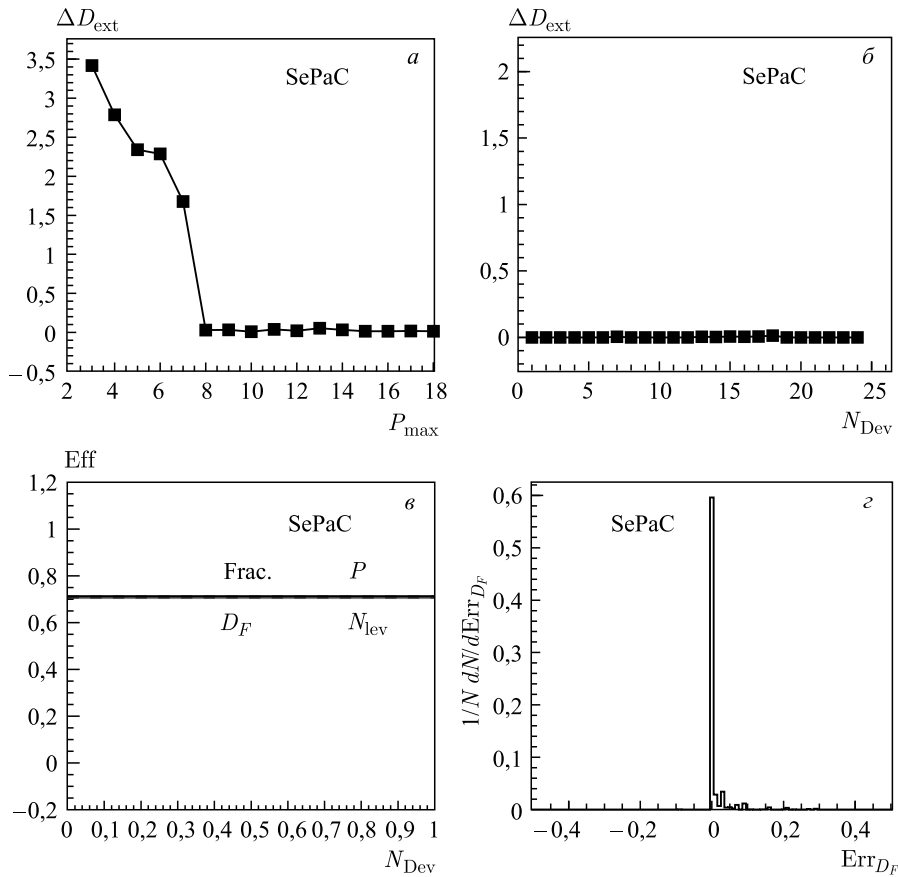


Рис. 1. Анализ базовым SePaC-методом: зависимости функции ΔD_{ext} от параметра P_{max} (а) и от номера N_{Dev} (б); зависимости эффективностей восстановления характеристик фракталов от номера N_{Dev} (в); нормированное распределение ошибок Err_{D_F} (z)

Таблица 1. Соответствие номера N_{Dev} и величины Dev

N_{Dev}	1	2	3	4	5	6	7	8
Dev	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}	$2 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
N_{Dev}	9	10	11	12	13	14	15	16
Dev	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
N_{Dev}	17	18	19	20	21	22	23	24
Dev	0,09	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7

ния $Err_V = (V - V_{test})/V_{test}$ (истинное значение величины V равно V_{test}) и определяется формулой

$$\begin{aligned}
 Eff_V &= 1 - |Err_V|, & \text{если } |Err_V| \leq 1, \\
 Eff_V &= 0, & \text{если } |Err_V| > 1.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Значение эффективности восстановления фракталов Eff_{frac} совпадает со значениями Eff_{D_F} , $Eff_{N_{lev}}$ и Eff_P (рис.1, *б*). Из этого следует, что для тестовых объектов, восстановленных как фракталы, эффективности восстановления фрактальной размерности, основания и количества уровней близки к 100%. Выбранные оптимальные значения параметров $P_{max} = 8$ и $Dev = 0,01$ были использованы для анализа данных (1857 фракталов) базовым SePaC-методом. В результате: восстановлены 1322 фрактала и определены их характеристики, а также сформирован новый блок данных, состоящий из 535 нереконструированных фракталов. Нормированное распределение ошибок определения фрактальной размерности приведено на рис. 1, *г*. Для большинства фракталов размерность восстанавливается точно. Это соответствует пику распределения. Установлено, что фракталы с большим значением Err_{D_F} («хвост» распределения) имеют малое количество уровней ($N_{lev} = 3$). Отметим, что при моделировании тестовых фракталов заполнялся не весь допустимый диапазон, а выбиралось только одно значение из диапазона. Поэтому некоторые фракталы, имеющие малое количество уровней, восстанавливались как фракталы с меньшим значением основания.

2.2. Анализ модифицированным SePaC-методом. Здесь сформированный на первом шаге процедуры блок данных проанализирован модифицированным SePaC-методом. Зависимость $\Delta D_{ext}(P_{max})$, полученная для всех значений параметра Dev , показана на рис. 2, *а*. Начало плато соответствует значению $P_{max} = 7$. Отметим, что среди невосстановленных фракталов доля фракталов с основанием $P = 8$ составляет 7,5%, а с основанием $P = 7$ — 59,8%. Поскольку доля фракталов с основанием $P = 8$ мала, оказалось, что функция $\Delta D_{ext}(P_{max})$ нечувствительна к этому основанию. Поэтому для дальнейшего анализа значение параметра P_{max} выбираем как наибольшее из полученных на первом и втором шагах ($P_{max} = 8$).

На рис. 2, *б* приведена зависимость ΔD_{ext} от номера N_{Dev} при оптимальном значении P_{max} . В работе [3] было показано, что если функция $\Delta D_{ext}(N_{Dev})$ имеет два пика и плато, то для определения фрактальной размерности D_F выбирают значение второго пика ($N_{Dev} = 18$, $Dev = 0,2$), а для определения количества уровней N_{lev} и основания

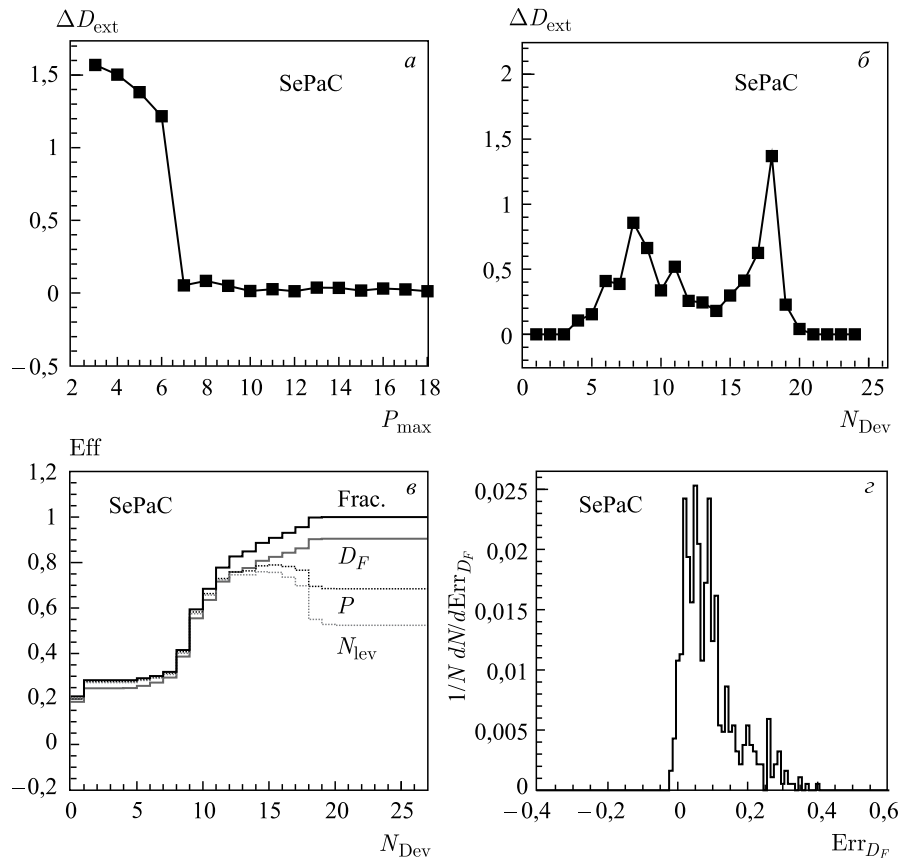


Рис. 2. Анализ модифицированным SePaC-методом: зависимости функции ΔD_{ext} от параметра P_{max} (а) и от номера N_{Dev} (б); зависимости эффективностей восстановления характеристик фракталов от номера N_{Dev} (в); нормированное распределение ошибок Err_{D_F} (г)

P — минимальное значение перед вторым пиком ($N_{\text{Dev}} = 14$, $\text{Dev} = 0,07$). Сформулированные в [3] правила выбора подтверждаются зависимостью эффективностей восстановления характеристик фракталов от номера N_{Dev} (рис. 2, в). Эффективности восстановления фрактальной размерности Eff_{D_F} , а также количества уровней $\text{Eff}_{N_{\text{lev}}}$ и основания Eff_P максимальны при $N_{\text{Dev}} = 18$ и $N_{\text{Dev}} = 14$ соответственно. Отметим, что доля реконструированных фракталов максимальна при $N_{\text{Dev}} = 18$. Выбранные значения параметров были использованы для анализа блока нереконструированных фракталов модифицированным SePaC-методом. Нормированное распределение ошибок определения фрактальной размерности приведено на рис. 2, г. Отметим, что в отличие от базового метода (рис. 1, г) распределение ошибок модифицированного метода более широкое.

2.3. Эффективности восстановления характеристик фракталов. В этом подразделе представлены результаты сравнения эффективностей восстановления характеристик фракталов, полученные базовым (Basic) и модифицированным (Modified) SePaC-методом, а также двухступенчатой (Two-step) процедурой SePaC-метода. Результаты приведены для фракталов с независимым (Indep), зависимым (Dep), комбинированным (Comb) делением

частей, а также для общего (All) блока данных. Значения эффективностей восстановления фракталов Eff_{frac} и фрактальной размерности Eff_{D_F} , а также основания фрактала Eff_P и количества уровней $Eff_{N_{lev}}$ показаны в табл. 2 и 3 соответственно. Из табл. 2 видно, что базовый метод восстанавливает небольшое количество фракталов с комбинированным делением (24,5%). Модифицированный метод и двухступенчатая процедура реконструируют почти все фракталы. Установлено, что эффективности восстановления фрактальной размерности, основания и количества уровней для всех типов фракталов и общего блока данных больше для двухступенчатой процедуры.

Таблица 2. Эффективности восстановления фракталов и фрактальной размерности, полученные различными версиями SePaC-метода

SePaC	$Eff_{frac}, \%$				$Eff_{D_F}, \%$			
	Indep	Dep	Comb	All	Indep	Dep	Comb	All
Basic	100	90,6	24,5	71,2	99,4	90,5	23,3	70,5
Modified	100	100	99,4	99,9	99,1	90,1	92,7	92,2
Two-step	100	100	100	100	99,4	97,2	92,7	96,6

Таблица 3. Эффективности восстановления основания и количества уровней, полученные различными версиями SePaC-метода

SePaC	$Eff_P, \%$				$Eff_{N_{lev}}, \%$			
	Indep	Dep	Comb	All	Indep	Dep	Comb	All
Basic	99,3	90,5	24,4	70,8	100	90,5	24,5	71,2
Modified	98,4	88,1	85,9	90,3	98,7	87,7	84,3	90,2
Two-step	99,3	92,0	87,7	93,5	100	91,4	87,1	93,5

Таким образом, анализ эффективностей показывает, что двухступенчатая процедура SePaC-метода имеет преимущества по сравнению с базовым и модифицированным SePaC-методами.

3. ДВУХСТУПЕНЧАТЫЙ АНАЛИЗ ФРАКТАЛОВ PaC-МЕТОДОМ

В данном разделе представлены результаты обработки данных двухступенчатой процедурой PaC-метода.

3.1. Анализ фракталов базовым PaC-методом. Параметр P_{max} является максимальным основанием в рассматриваемых P -адических покрытиях. Выбор оптимального значения P_{max} проводился в диапазоне от 3 до 19. Зависимость функции $\Delta D_{ext}(P_{max})$, полученная для всех значений параметра χ_{lim}^2 (от 10^{-13} до 2,5), представлена на рис. 3, а. Начало плато $P_{max} = 8$ определяет оптимальное значение P_{max} и соответствует максимальному значению основания P формирования фракталов в блоке данных. Пара-

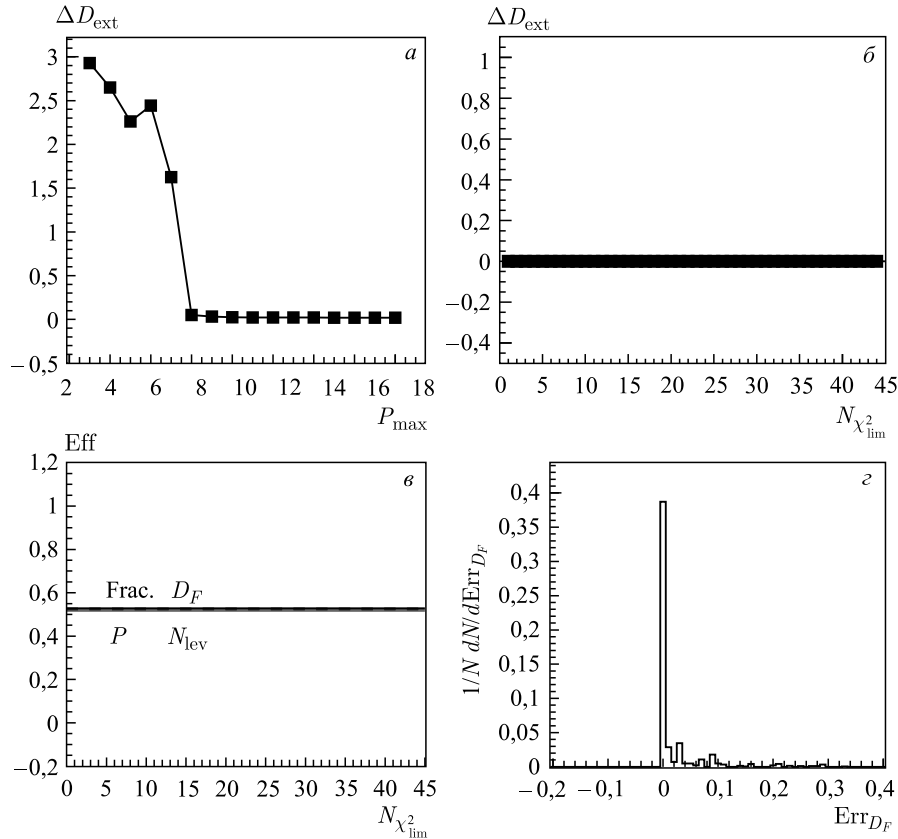


Рис. 3. Анализ базовым PaC-методом: зависимости функции ΔD_{ext} от параметра P_{max} (а) и от номера $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$ (б); зависимости эффективностей восстановления характеристик фракталов от номера $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$ (в); нормированное распределение ошибок Err_{D_F} (г)

метр χ_{lim}^2 определяет: является ли набор данных фракталом? На рис. 3, б показана зависимость ΔD_{ext} от номера $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$ при оптимальном значении P_{max} . Соответствие между номером $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$ и значением параметра χ_{lim}^2 приведено в табл. 4. Из рис. 3, б видно, что функция $\Delta D_{\text{ext}}(N_{\chi_{\text{lim}}^2})$ постоянна при всех значениях $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$. Поэтому для первой ступени анализа значение $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$ выбираем произвольно из указанного диапазона: $N_{\chi_{\text{lim}}^2} = 8$ ($\chi_{\text{lim}}^2 = 10^{-6}$). Это свидетельствует о том, что зависимость $N \sim M^{D_F}$ в дважды логарифмическом масштабе близка к идеальной прямой и выбранное основание точно описывает исследуемый фрактал. На рис. 3, в показаны зависимости эффективностей Eff_{frac} , Eff_{D_F} , $\text{Eff}_{N_{\text{lev}}}$, Eff_P от номера $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$. Значения эффективностей постоянны при всех значениях $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$. Доля восстановленных фракталов Eff_{frac} составляет 53,2%. Эффективности восстановления Eff_{D_F} , $\text{Eff}_{N_{\text{lev}}}$ и Eff_P близки к значению Eff_{frac} . Таким образом, для реконструированных фракталов размерность, основание и количество уровней восстановления близки к 100%.

Выбранные оптимальные значения параметров $P_{\text{max}} = 8$ и $\chi_{\text{lim}}^2 = 10^{-6}$ были использованы для анализа данных (1857 фракталов) базовым PaC-методом. В результате

Таблица 4. Соответствие номера $N_{\chi_{lim}^2}$ и величины χ_{lim}^2

$N_{\chi_{lim}^2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
χ_{lim}^2	10^{-13}	10^{-12}	10^{-11}	10^{-10}	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}
$N_{\chi_{lim}^2}$	10	11	12	13	14	15	16	17	18
χ_{lim}^2	10^{-4}	10^{-3}	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
$N_{\chi_{lim}^2}$	19	20	21	22	23	24	25	26	27
χ_{lim}^2	0,08	0,09	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$N_{\chi_{lim}^2}$	28	29	30	31	32	33	34	35	36
χ_{lim}^2	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
$N_{\chi_{lim}^2}$	37	38	39	40	41	42	43	44	45
χ_{lim}^2	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5

восстановлены 980 фракталов и определены их характеристики, а также сформирован новый блок, состоящий из 877 нереконструированных фракталов. Нормированное распределение ошибок определения фрактальной размерности приведено на рис. 3, г. Для большинства фракталов размерность восстанавливается точно. Это соответствует пику распределения. Установлено, что фракталы с большим значением Err_{D_F} («хвост» распределения) имеют малое количество уровней ($N_{lev} = 3$).

3.2. Анализ фракталов модифицированным РаС-методом. Сформированный на первом шаге блок данных проанализирован модифицированным РаС-методом. Зависимость $\Delta D_{ext}(P_{max})$, полученная для всех значений параметра $N_{\chi_{lim}^2}$, показана на рис. 4, а. При $P_{max} \geq 10$ значение ΔD_{ext} постоянно. При анализе фракталов модифицированным РаС-методом значение выбранного алгоритмом основания ($P_{max} = 10$) может отличаться от максимального основания образования фрактала ($P = 8$). В этом случае выбранное значение P_{max} позволяет найти значение P , которое дает наиболее близкие значения фрактальных размерностей для установленного количества уровней фрактала. Поэтому для дальнейшего анализа значение параметра P_{max} выбираем как наибольшее ($P_{max} = 10$) из полученных на первом и втором шагах.

На рис. 4, б приведена зависимость ΔD_{ext} от номера $N_{\chi_{lim}^2}$ при оптимальном значении P_{max} . В работах [2, 3] было показано, что в случае приближенного описания фракталов зависимость $\Delta D_{ext}(N_{\chi_{lim}^2})$ имела два явно выраженных пика.

Для определения количества фракталов и D_F выбирается значение $N_{\chi_{lim}^2} = 21$, соответствующее второму пику. Для определения P и N_{lev} выбирается $N_{\chi_{lim}^2} = 12$, соответствующее значению после первого пика. В рассматриваемом случае эта закономерность подтверждается зависимостью эффективностей восстановления от номера $N_{\chi_{lim}^2}$ (рис. 4, в).

Найденные оптимальные значения параметров были использованы для анализа блока нереконструированных фракталов модифицированным РаС-методом. Нормированное

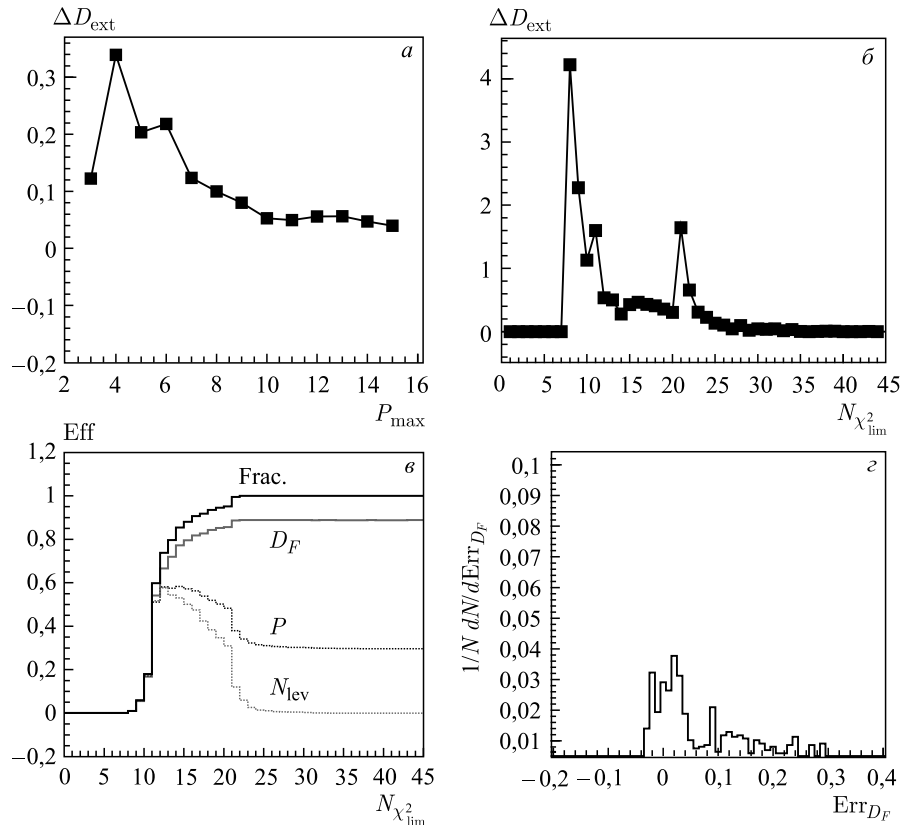


Рис. 4. Анализ модифицированным PaC-методом: зависимости функции ΔD_{ext} от параметра P_{max} (а) и от номера $N_{\chi^2_{lim}}$ (б); зависимости эффективностей восстановления характеристик фракталов от номера $N_{\chi^2_{lim}}$ (в); нормированное распределение ошибок Err_{D_F} (г)

распределение ошибок определения фрактальной размерности приведено на рис. 3, г. Отметим, что в отличие от базового метода (см. рис. 2, г) распределение ошибок модифицированного метода более широкое.

3.3. Эффективности восстановления характеристик фракталов. Здесь представлены результаты сравнения эффективностей восстановления характеристик фракталов, полученные базовым (Basic) и модифицированным (Modified) PaC-методами, а также двухступенчатой (Two-step) процедурой PaC-метода. Результаты приведены для фракталов с независимым (Indep), зависимым (Dep), комбинированным (Comb) делением частей, а также для полного (All) блока тестовых фракталов. Значения эффективностей восстановления фракталов Eff_{frac} и фрактальной размерности Eff_{D_F} , а также основания фрактала Eff_P и количества уровней $Eff_{N_{lev}}$ показаны в табл. 5 и 6 соответственно. Из табл. 5 видно, что базовый метод восстанавливает небольшое количество фракталов с зависимым (11%) и комбинированным делением (24%). Модифицированный метод и двухступенчатая процедура реконструируют все фракталы. Эффективности восстановления фрактальной размерности, основания и количества уровней для всех типов фракталов и общего блока данных выше для двухступенчатой процедуры.

Таблица 5. Эффективности восстановления фракталов и фрактальной размерности, полученные различными версиями PaC-метода

PaC	Eff _{frac} , %				Eff _{D_F} , %			
	Indep	Dep	Comb	All	Indep	Dep	Comb	All
Basic	100	11,0	24,0	52,8	99,4	9,4	22,9	51,7
Modified	100	100	100	100	99,4	85,0	92,7	93,0
Two-step	100	100	100	100	99,4	85,0	92,7	93,0

Таблица 6. Эффективности восстановления основания и количества уровней, полученные различными версиями PaC-метода

PaC	Eff _P , %				Eff _{N_{lev}} , %			
	Indep	Dep	Comb	All	Indep	Dep	Comb	All
Basic	99,3	10,9	24,0	52,4	100	11,0	24,0	52,8
Modified	99,3	61,4	70,0	76,4	100	64,5	68,2	76,8
Two-step	99,3	63,3	75,6	82,8	100	67,5	74,9	84,1

Таким образом, анализ эффективностей показывает, что двухступенчатая процедура PaC-метода имеет преимущества при анализе общего блока данных по сравнению с базовым и модифицированным PaC-методами.

4. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОБЩЕГО БЛОКА ДАННЫХ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

В данном разделе представлены результаты сравнения эффективностей восстановления характеристик фракталов, полученные двухступенчатой процедурой SePaC- и PaC-методами, а также ВС-методом. Результаты приведены для фракталов с независимым (Indep), зависимым (Dep), комбинированным (Comb) делением частей, а также для полного (All) набора тестовых фракталов. Значения эффективностей восстановления фракталов Eff_{frac} и фрактальной размерности Eff_{D_F}, а также основания фрактала Eff_P и количества уровней Eff_{N_{lev}} показаны в табл. 7 и 8 соответственно. Как видно из таблиц, эффективности восстановления фрактальной размерности, основания и количества уровней для всех типов фракталов и полного набора выше для двухступенчатой процедуры SePaC-метода.

Далее рассмотрим ошибки восстановления характеристик фракталов в полном наборе. На рис. 5 показаны нормированные на общее количество фракталов распределения ошибок восстановления фрактальной размерности Eff_{D_F}, полученные методами ВС (а), PaC (б) и SePaC (в). Считаем, что любая характеристика фрактала восстанавливается точно, если ее ошибка меньше 0,5%. Установлено, что ВС-метод точно восстанавливает D_F только для 5% фракталов, а PaC- и SePaC-методы — для 39 и 61% соответственно. Фракталы с независимым делением частей при восстановлении ВС-методом имеют отрицательное смещение ошибок [1]. Положительное смещение ошибок наблю-

Таблица 7. Эффективности восстановления фракталов и фрактальной размерности, полученные различными методами

Метод	Eff _{frac} , %				Eff _{D_F} , %			
	Indep	Dep	Comb	All	Indep	Dep	Comb	All
SePaC	100	100	100	100	99,4	97,2	92,7	96,6
PaC	100	100	100	100	99,4	85,0	92,8	93,0
BC	94,1	95,2	99,4	97,9	90,1	85,4	91,3	90,4

Таблица 8. Эффективности восстановления основания и количества уровней, полученные различными методами

Метод	Eff _P , %				Eff _{N_{lev}} , %			
	Indep	Dep	Comb	All	Indep	Dep	Comb	All
SePaC	99,3	92,0	87,7	93,5	100	91,4	87,1	93,5
PaC	99,3	63,3	75,6	82,8	100	67,5	74,9	84,1
BC	28,1	21,4	30,4	29,1	0	0	0	0

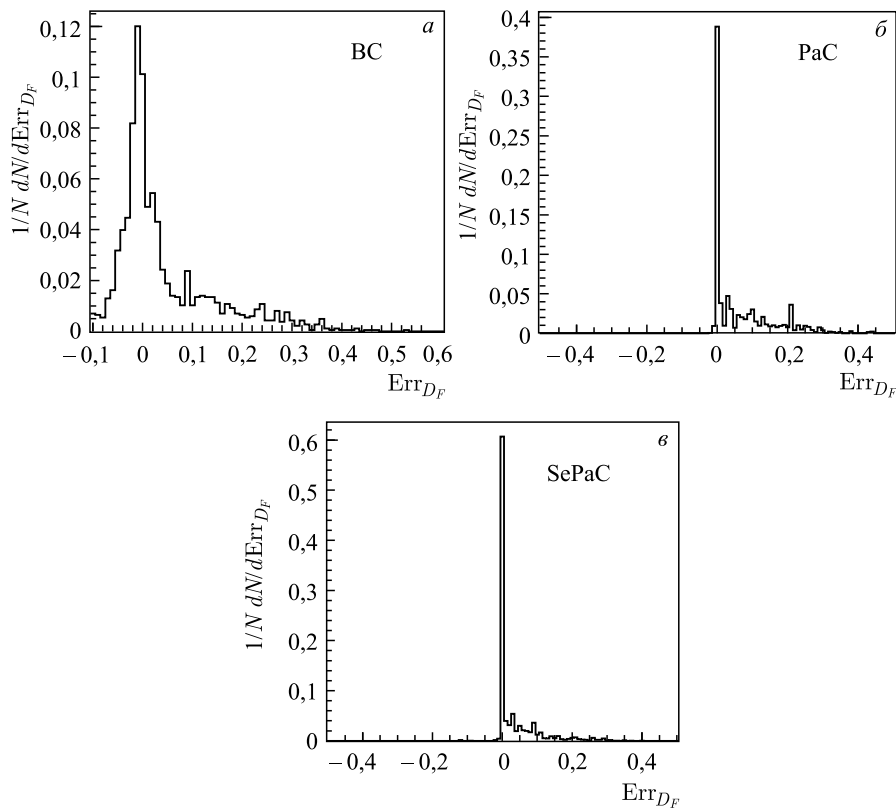


Рис. 5. Нормированные распределения ошибок восстановления фрактальной размерности Err_{D_F}, полученные методами BC (а), PaC (б) и SePaC (в)

дается для фракталов с зависимым и комбинированным делением частей [2, 3]. PaC-метод восстанавливает фрактальную размерность точно для фракталов с независимым делением [1]. Положительное смещение ошибок наблюдается для фракталов с зависимым и комбинированным делением частей [2, 3]. Для фракталов с независимым и зависимым делением SePaC-метод восстанавливает фрактальную размерность точно [1, 2]. Положительное смещение ошибок видно при анализе фракталов с комбинированным делением частей [3]. Двухступенчатая процедура SePaC-метода показывает наилучшие результаты по восстановлению фрактальной размерности (наибольшее количество фракталов с точно восстановленной размерностью D_F) при анализе полного набора тестовых фракталов.

На рис. 6 показаны нормированные распределения ошибок восстановления основания фрактала Err_P , полученные методами BC (a), PaC (б) и SePaC (в). В BC-методе используется одно основание ($P = 2$), поэтому распределение ошибок характеризует исследуемый блок данных. Большинство фракталов в рассматриваемом наборе имеют основание $P = 8$, поэтому максимум в распределении Err_P соответствует $Err_P = (2 - 8)/8 = -0,75$ (максимальный пик). PaC- и SePaC-методы точно восстанавливают основание для 54 и 86 % фракталов. Двухступенчатая процедура SePaC-метода показывает наилучшие результаты по восстановлению основания фрактала при анализе общего блока данных.

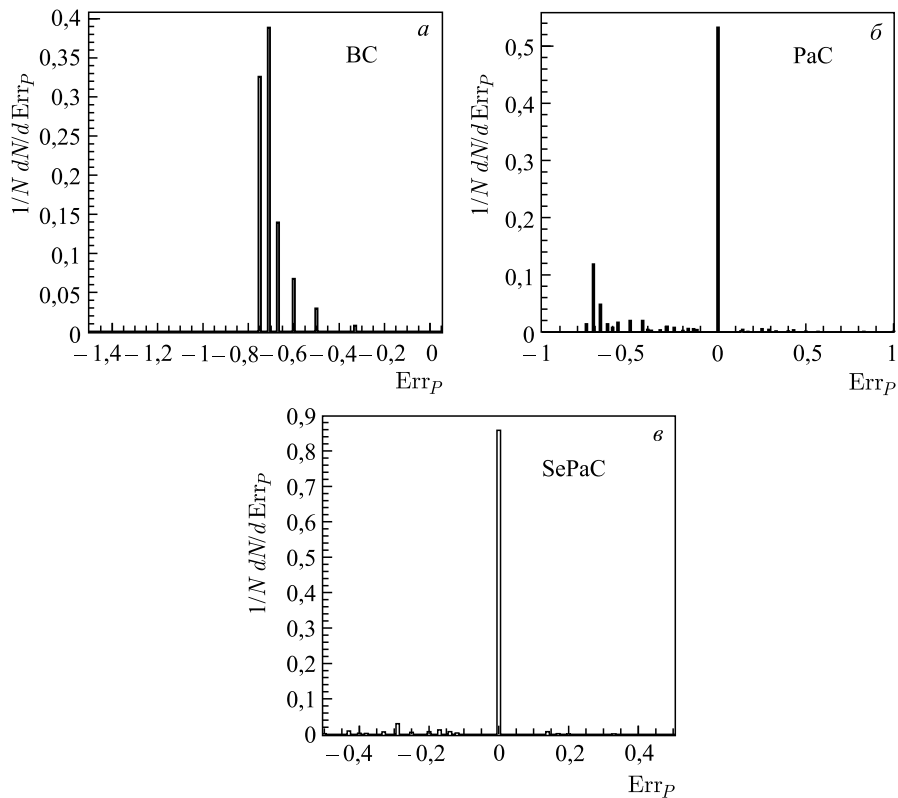


Рис. 6. Нормированные распределения ошибок восстановления основания фракталов Err_P , полученные методами BC (a), PaC (б) и SePaC (в)

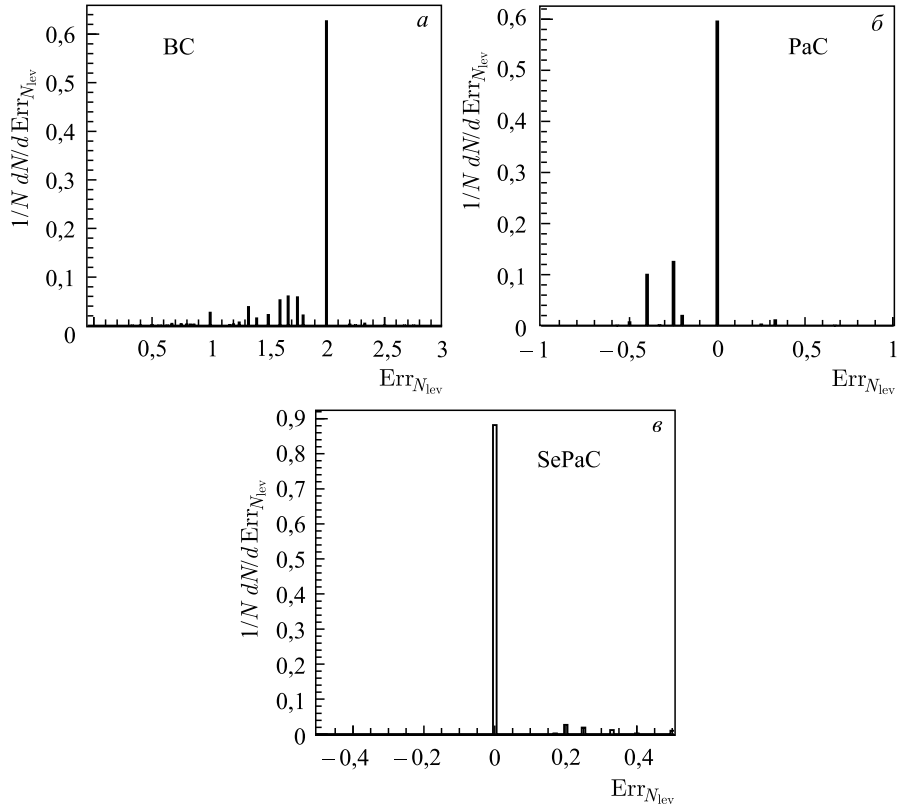


Рис. 7. Нормированные распределения ошибок восстановления количества уровней фракталов $Err_{N_{lev}}$, полученные методами BC (а), PaC (б) и SePaC (в)

На рис. 7 показаны нормированные распределения ошибок восстановления количества уровней фрактала $Err_{N_{lev}}$, полученные методами BC (а), PaC (б) и SePaC (в). Для фрактала с основанием $P = 8$, имеющего 512 точек ($N_{lev} = 3$), покрытие с $P = 2$ (BC-метод) соответствует количеству уровней $N_{lev} = 9$ и ошибке $Err_{N_{lev}} = (9 - 3) / 3 = 2$. Таких фракталов в наборе данных большинство, поэтому пик распределения соответствует $Err_{N_{lev}} = 2$. PaC- и SePaC-методы точно восстанавливают основание для 60 и 88 % фракталов соответственно. Таким образом, двухступенчатая процедура SePaC-метода показывает наилучшие результаты по восстановлению основания фрактала при анализе общего блока данных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложена двухступенчатая процедура SePaC- и PaC-методов фрактального анализа. Эта процедура была применена для реконструкции фракталов с использованием BC-метода, а также базовой и модифицированной версий PaC- и SePaC-методов. Проведен анализ восстановления характеристик фракталов с независимым, зависимым и комбинированным делением частей этими методами. Найдены оптимальные значения параметров (χ_{lim}^2 , P_{max} , Dev) этих методов. Они были использованы для опреде-

ления фрактальной размерности D_F , количества уровней N_{lev} и основания P фракталов. Полученные результаты показали, что эффективность двухступенчатой процедуры выше, чем эффективность базового и модифицированного методов. Установлено преимущество двухступенчатой процедуры SePaC-метода при определении фрактальной размерности, числа уровней и основания фракталов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В данной работе предложена двухступенчатая процедура PaC- и SePaC-методов анализа различных типов фракталов — с независимым, зависимым и комбинированным делением частей. Все эти типы фракталов относятся к разновидностям фракталов, известных как канторовская пыль [4]. Ниже приведено краткое описание процедуры формирования таких фракталов.

Начнем с описания фракталов, получаемых процедурой независимого деления частей. На первом этапе исходное множество точек разбивается на P равных частей. Эта величина называется основанием фрактала. На втором этапе произвольным образом выбираются части, количество которых меньше P . Это означает, что формирование первого уровня закончено и выбранные части определяют структуру фрактала. Второй и последующие уровни фрактала формируются аналогичным образом: каждая из выбранных частей предыдущего уровня разбивается на P равных частей, затем выбираются части, повторяющие структуру фрактала. Поскольку в описанной процедуре формирования фрактала каждая из выбранных частей делится независимо, такой тип фракталов называется фракталами с независимым делением частей. В качестве примера рассмотрим фрактал, известный в специальной литературе как триадное канторовское множество [4]. На рис. 8, *а* показан процесс формирования этого фрактала. В качестве исходного множества берется отрезок $[-5; 5]$. Для триадного канторовского множества основание P равно трем. Выбираются первая и третья части исходного интервала, которые и определяют иерархическую структуру фрактала.

Далее опишем процедуру формирования фракталов методом зависимого деления частей. На первом этапе исходное множество точек разбивается на P равных частей. На втором этапе выбираются части, количество которых меньше P . Все части, соприкасающиеся между собой, рассматриваются в дальнейшем как единый объект. Полученные объекты определяют структуру фрактала. Второй и последующие уровни фрактала формируются аналогичным образом: каждый из выбранных объектов предыдущего уровня разбивается на P равных частей, затем выбираются объекты, повторяющие структуру фрактала. Поскольку в описанной процедуре формирования фрактала части, принадлежащие одному объекту, делятся зависимо, такой тип фракталов называется фракталами с зависимым делением частей. Данная процедура построения фрактала известна в специальной литературе как скейлинг с неравными отношениями [4]. Пример формирования фрактала методом зависимого деления частей показан на рис. 8, *б*. В качестве исходного множества берется отрезок $[-5; 5]$. Основание P для рассматриваемого фрактала равно четырем. Структура фрактала определяется двумя объектами: первый состоит из первой части, второй представляет собой объединение третьей и четвертой частей.

Остановимся вкратце на описании процедуры формирования фракталов методом комбинированного деления частей. На первом этапе исходное множество точек разбивается на P равных частей. На втором этапе выбираются части, количество которых меньше

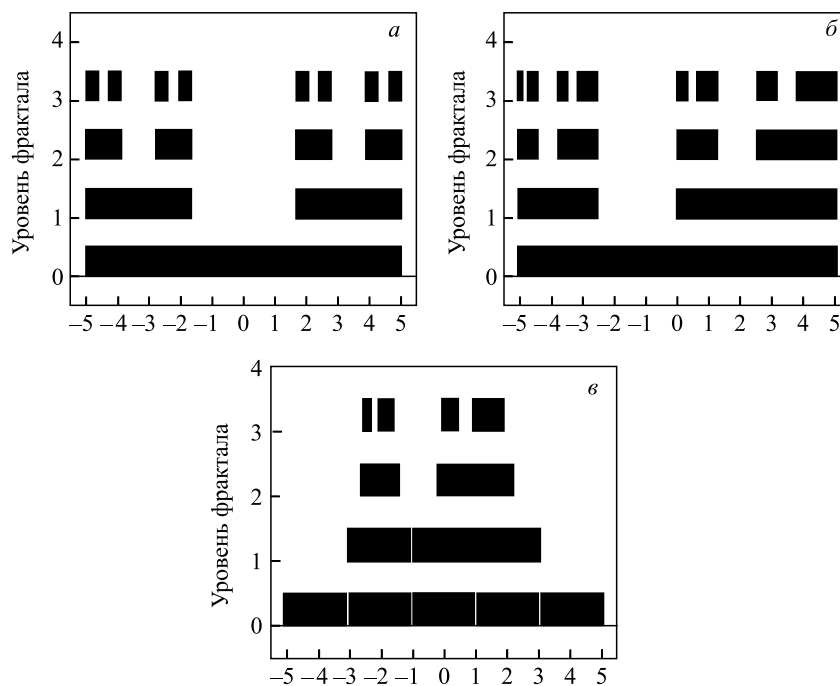


Рис. 8. Процесс формирования фракталов с независимым (а), зависимым (б) и комбинированным (в) делением частей

P . Соприкасающиеся части рассматриваются либо как единый объект, либо как независимые объекты. Набор полученных объектов определяет структуру фрактала. Второй и последующие уровни фрактала формируются аналогичным образом: каждый из выбранных объектов предыдущего уровня разбивается на P равных частей, затем выбираются объекты, повторяющие структуру фрактала. Поскольку в описанной процедуре формирования фрактала соприкасающиеся части делятся либо как единый объект, либо как независимые объекты, такой тип фракталов называется фракталами с комбинированным делением частей. На рис. 8, в приведен пример формирования фрактала методом комбинированного деления. В качестве исходного множества берется отрезок $[-5; 5]$. Основание P для рассматриваемого фрактала равно пяти. Структура фрактала определяется двумя объектами: первый состоит из второй части, а второй представляет собой объединение третьей и четвертой частей.

Анализируемый в работе набор фракталов включает 774 фрактала с независимым делением, 437 — с зависимым и 646 — с комбинированным делением. Для каждого типа фрактала величина основания P варьировалась от трех до восьми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дедович Т. Г., Токарев М. В. Сравнение методов фрактального анализа при изучении фракталов с независимым делением частей // Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, № 6(183). С. 791–804.
2. Дедович Т. Г., Токарев М. В. Анализ фракталов с зависимым делением частей ВС-, РаС- и SePaС-методами // Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, № 6(183). С. 805–818.

3. Дедович Т. Г., Токарев М. В. Анализ фракталов с комбинированным делением частей. Препринт ОИЯИ Р2-2015-92. Дубна, 2015; Письма в ЭЧАЯ. Т. 13, № 2(200). С. 273–285.
4. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.
5. Hausdorff F. Dimension und äusseres Mass // Math. Ann. 1919. V. 79. P. 157–179.
6. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman, 1982.
7. Barabasi A., Stanley H. Fractal Concepts in Surface Growth. New York: Cambridge Univ. Press, 1995.
8. Roueff F., Véhel J. L. A Regularization Approach to Fractional Dimension Estimation // Proc. of the Conf. “Fractals 98”, Malta, Oct. 1998.
9. Павлов А. Н., Анищенко В. С. Мультифрактальный анализ сложных сигналов // УФН. 2007. Т. 177, № 8. С. 859–876.
10. Dedovich T., Tokarev M. P -adic Coverage Method in Fractal Analysis of Showers // Phys. Part. Nucl. Lett. 2011. V. 8. P. 521.
11. Dedovich T., Tokarev M. Method of Systems of the Equations of P -adic Coverages for Fractal Analysis of Events // Phys. Part. Nucl. Lett. 2011. V. 9. P. 552.

Получено 20 октября 2015 г.