

## ВОЗМОЖНЫЕ ПАРАМЕТРЫ УСКОРЕНИЯ ПРОТОНОВ НА ОБРАТНОЙ ГАРМОНИКЕ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

*В. В. Парамонов*<sup>1</sup>

Институт ядерных исследований РАН, Москва

Проведенный анализ показывает, что при ускорении протонов в диапазоне средних энергий полем обратной гармоники бегущей волны существует область практически реализуемых параметров ускоряющей структуры, позволяющая одновременно обеспечить устойчивость продольного, поперечного движений частиц и высокий темп ускорения. Эффект фокусировки обеспечивается полем медленной основной гармоники. Приводятся расчетные характеристики ускоряющей структуры и оценка параметров линейного ускорителя протонов для участка энергии 15–230 МэВ.

Approximated analytical analysis shows that accelerating particle in intermediate velocity range using backward harmonic of the traveling wave is possible to provide simultaneously stability conditions for both longitudinal and transverse particle motion. Calculated parameters of the corresponding accelerating structure are given and proton linac parameters for energy region 15–230 MeV are estimated.

PACS: 29.27.-a; 41.85.-p; 07.78.+s

### ВВЕДЕНИЕ

Круглый диафрагмированный волновод (КДВ) является наиболее распространенной и хорошо изученной ускоряющей структурой (УС) для ускорения в режиме бегущей волны (БВ) легких частиц — электронов — в области высоких энергий,  $\beta \sim 1$ , с высоким,  $\geq 10$  МэВ/м, темпом ускорения. Режим БВ определяет применения УС на высоких,  $\geq 2,5$  ГГц, частотах. Обычно применяют КДВ на основной гармонике  $n = 0$  и только в одном ускорителе электронов [1], для специальной цели уменьшения возбуждения высших мод пучком частиц применен КДВ на обратной гармонике  $n = -1$ .

Ускорение на обратной гармонике позволяет ослабить естественное ухудшение ВЧ-характеристик КДВ с  $n = 0$  для ускорения частиц с более низкой относительной скоростью  $0,1 \leq \beta \leq 0,6$  и предложить УС для ускорения в области средних энергий частиц промежуточной массы — мюонов и протонов [2, 3]. В этом случае в распределении поля всегда присутствует более медленная основная гармоника. Возможность обеспечения устойчивости радиального движения тяжелых ионов полем медленной гармоники, распространяющейся в одном направлении с ускоряющей, показана в [4].

---

<sup>1</sup>E-mail: paramono@inr.ru

В работе рассмотрена возможность применения УС на основе КДВ с  $n = -1$  для ускорения частиц промежуточной массы в области средних энергий в режиме, одновременно обеспечивающем ускорение и фокусировку частиц, высокий темп ускорения и допустимую для надежной работы максимальную напряженность электрического поля  $E_{s \max}$  на поверхности УС.

### 1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ И ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ

В периодической УС распределение любой компоненты электромагнитного поля может быть представлено в комплексном виде, удовлетворяющем теореме Флоке, и в виде суммы пространственных гармоник [5]:

$$E_z(r, z) = \widehat{E_z(r, z)} e^{-i\psi_z(r, z)}, \quad 0 \leq z \leq d_p, \quad E_z(r, z + md_p) = \widehat{E_z(r, z)} e^{-i(\psi_z(r, z) + m\theta)},$$

$$E_z(r, z) = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{n \rightarrow +\infty} E_{(n)} I_0(k_{s,n} r) e^{-ik_{z,n} z}, \quad (1)$$

$$k_{zn} = \frac{\theta + 2n\pi}{d_p}, \quad k_{s,n}^2 = k_{z,n}^2 - k^2, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty,$$

где  $\widehat{E_z(r, z)}$  и  $\psi_z(r, z)$  — распределения амплитуды и фазы компоненты  $E_z$  в периоде структуры;  $d_p$  — длина периода;  $0 \leq \theta \leq \pi$  — набег фазы поля на период структуры;  $m$  — номер периода;  $E_{(n)}$  — амплитуда  $n$ -й пространственной гармоники и  $I_0(k_{s,n} r)$  — модифицированная функция Бесселя. Действующая на частицу сила Лоренца  $F_L$  в цилиндрической системе координат

$$\mathbf{F}_L = q(\mathbf{z}_0 E_z + \mathbf{r}_0 (E_r - \beta Z_0 H_\phi)), \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}, \quad (2)$$

где  $q$  — заряд частицы;  $\beta$  — относительная скорость ускоряемых частиц. Длина периода УС выбирается из условий синхронизма с используемой гармоникой:

$$n = 0, \quad d_p = \frac{\beta_a \theta \lambda}{2\pi}, \quad k_{z,0} = \frac{k}{\beta_a}, \quad k_{z,-1} = \frac{k(\theta - 2\pi)}{\beta_a \theta}, \quad k = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$$n = -1, \quad d_p = \frac{\beta_a (2\pi - \theta) \lambda}{2\pi}, \quad k_{z,0} = \frac{k\theta}{\beta_a (2\pi - \theta)}, \quad k_{z,-1} = -\frac{k}{\beta_a}. \quad (3)$$

При  $n = 0$  частица движется в одном направлении с фронтом нарастания фазы волны, а при  $n = -1$  — навстречу фронту нарастания фазы. Образует разность фазы волны в (1) и частицы  $\Delta\psi_z = \psi_z(0, z) + (2\pi z)/(\beta_a \lambda)$ .

На рис. 1 показаны конфигурации УС для  $n = 0, n = -1$  и соответствующие распределения  $\Delta\psi_z$ , амплитуд  $E_{za}, E_{ra}$  и эффективных, действующих на частицу составляющих поля  $E_{ze}, E_{re}$  на оси периода УС. При  $n = 0$  всегда  $|\Delta\psi_z| < \pi/2$ ,  $\Delta\psi_z = 0$  при  $z = 0, d_p/2, d_p$  и ускорение непрерывно. При  $n = -1$   $\Delta\psi_z$  монотонно нарастает от 0 до  $2\pi$ , при этом на длине периода фаза волны изменяется на  $\theta$ , а фаза частицы — на  $2\pi - \theta$ .

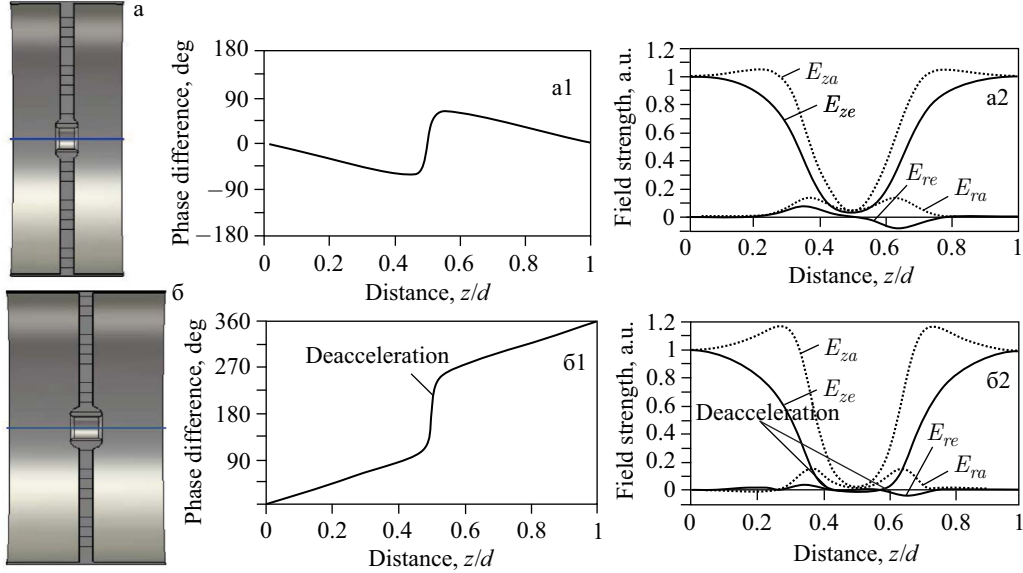


Рис. 1. Конфигурации УС для  $n = 0, n = -1$  (а, б) и соответствующие распределения  $\Delta\psi_z$  (а1, б1), амплитуд  $E_{za}, E_{ra}$  и эффективных, действующих на частицу составляющих поля  $E_{ze}, E_{re}$  на оси УС (а2, б2)

При  $z = d_p/2$   $\Delta\psi_z = \pi$  и есть участок на оси УС, на котором  $\pi/2 \leq \Delta\psi_z \leq 3\pi/2$  и происходит торможение частиц.

Для проведения аналитического исследования движения протонов при  $0,1 \leq \beta \leq 0,6$ , следуя [4], предположим, что распределение электромагнитного поля описывается двумя гармониками — основной,  $n = 0$ , фокусирующей с индексом « $f$ », и первой обратной,  $n = -1$ , ускоряющей, с индексом « $a$ ». В периодической УС поля высших гармоник по мере приближения к оси УС  $r \rightarrow 0$  затухают экспоненциально, поэтому на оси УС в разложении поля (1) существенными остаются только низшие гармоники.

Ускоряемая частица движется слева направо,  $dz = c\beta_a dt$ , поэтому фаза поля в (1) должна убывать слева направо. В приближении двух гармоник  $n = 0$  и  $n = -1$

$$E_z(r, z) = E_f \left( I_0(k_{s,0}r) \exp \left[ -i \left( \omega t + \frac{kz}{\beta_f} \right) \right] + \right. \\ \left. + \chi I_0(k_{s,-1}r) \exp \left[ -i \left( \omega t - \frac{kz}{\beta_a} \right) \right] \right), \quad \chi = \frac{E_{(-1)}}{E_{(0)}} = \frac{E_a}{E_f}. \quad (4)$$

На рис. 2 показаны распределения амплитуды  $E_z$  на оси УС, полученные прямым численным моделированием распределения поля, т. е. полный набор гармоник в разложении (1), и приближения двух гармоник. При  $\beta \sim 0,2, \sim 0,4$  приближение двух гармоник достаточно хорошо описывает величину и вид зависимости  $E_z(z)$  для рассматриваемой конфигурации УС. В общем случае соотношение амплитуд гармоник  $E_{(n)}$  в (1) сильно зависит от приосевой конфигурации ячеек УС.

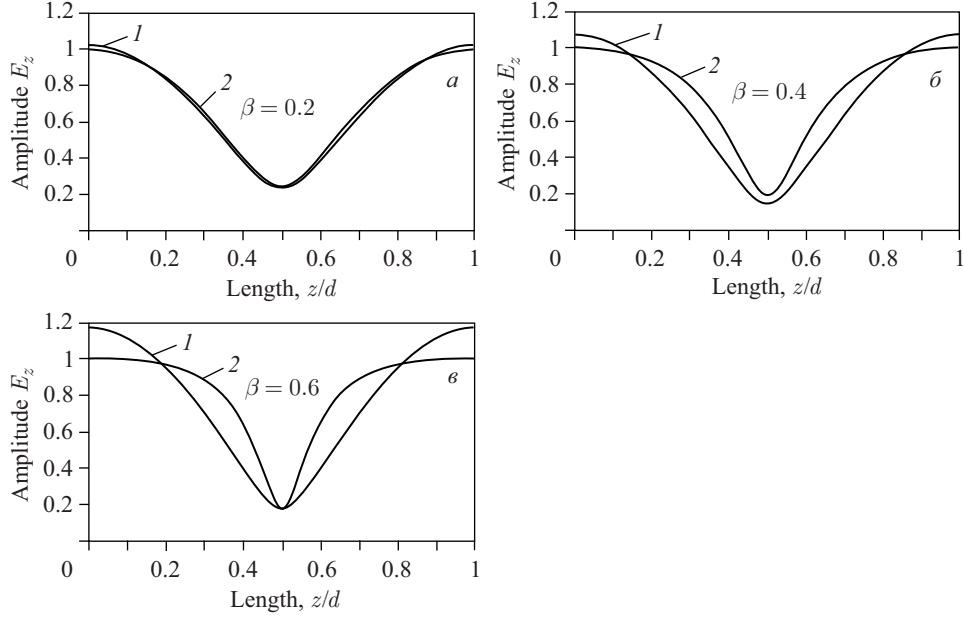


Рис. 2. Распределение амплитуды  $E_z$  полного поля (2) и приближения двух гармоник (1) при  $\beta = 0,2; 0,4; 0,6$

Используя уравнения Максвелла, из (4) найдем соответствующие гармоники для поперечных компонент  $E_r, H_\phi$  и, разлагая в ряды функции Бесселя, получим линейные приближения для составляющих  $F_L$  вблизи оси:

$$\begin{aligned}
 F_{Lz}(r, z) &\approx qE_f \left( \exp \left[ -i \left( \omega t + \frac{kz}{\beta_f} \right) \right] + \chi \exp \left[ -i \left( \omega t - \frac{kz}{\beta_a} \right) \right] \right), \\
 F_{Lr}(r, z) &\approx \frac{ikrE_f}{2} \left( \left( \frac{1}{\beta_f} - \beta \right) \exp \left[ -i \left( \omega t + \frac{kz}{\beta_f} \right) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \chi \left( \frac{1}{\beta_a} + \beta \right) \exp \left[ -i \left( \omega t - \frac{kz}{\beta_a} \right) \right] \right).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Рассматривая ускорение протонов до средних энергий,  $\beta \sim 0,6$ , с учетом вклада  $H_\phi$  в  $F_{Lr}$ , предположим режим малого тока пучка и относительно медленное ускорение протонов,  $\Delta\beta/\beta \ll 1$ , где  $\Delta\beta$  — прирост скорости частиц на периоде колебаний. Запишем уравнения продольного и поперечного движений:

$$\begin{aligned}
 \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d^2 z}{dt^2} &= qE_f (\cos \varphi_f + \chi \cos \varphi_a), \\
 \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d^2 r}{dt^2} &= \frac{qkrE_f}{2} \left( \left( \frac{1}{\beta_f} - \beta \right) \sin \varphi_f - \chi \left( \frac{1}{\beta_a} + \beta \right) \sin \varphi_a \right),
 \end{aligned} \tag{6}$$

где  $m_0$  — масса покоя частицы;  $\varphi_a$  — фаза частицы относительно ускоряющей гармоники;  $\varphi_f$  — фаза частицы относительно основной гармоники.

Следуя методике работы [4], преобразуем уравнение продольного движения в (6) в уравнение для малых фазовых отклонений  $\psi = \varphi_a - \varphi_s \ll 1$  в нормированных координатах  $\xi = z/\lambda$ ,  $\eta = r/\lambda$ ,  $dt = (dz)/(\beta_a c) = (d\xi\lambda)/(\beta_a c)$ , где  $\varphi_s$  — равновесная фаза синхронной частицы относительно ускоряющей гармоники. Отклонение фазы частицы относительно фокусирующей гармоники:  $\psi_f = -\psi_a \nu$ . Эти приращения имеют разные знаки из-за противоположной направленности гармоник. Получим уравнения для малых отклонений частиц по фазе и по радиусу:

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \frac{2\pi A_1}{\beta_a^3} (\nu \sin \varphi_{fs} - \chi \sin \varphi_s) \psi = 0, \quad A_1 = \frac{qE_a \lambda \sqrt{1 - \beta^2}}{\chi m_0 c^2}, \quad \nu = \left| \frac{\beta_f}{\beta_a} \right|, \quad (7)$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \frac{A_1 \pi}{\beta_a^2} \left( \left( \frac{1}{\beta_f} - \beta \right) \sin \varphi_f - \chi \left( \frac{1}{\beta_a} + \beta \right) \sin \varphi_a \right) \eta = 0.$$

Переходя в (7) к новой переменной  $u = \varphi_{fs}$  ( $du = \frac{2\pi(1+\nu)d\xi}{\beta_a \nu}$ ) и рассматривая радиальное движение равновесной частицы, получим два уравнения Матъе:

$$\frac{d^2\psi}{du^2} + (\delta_\varphi + \varepsilon_\varphi \sin u) \psi, \quad \frac{d^2\eta}{du^2} + (\delta_r + \varepsilon_r \sin u) \eta, \quad (8)$$

$$\delta_\varphi = \frac{A_1 \chi \nu^2}{2\pi \beta_a (1 + \nu)^2} \sin \varphi_s, \quad \varepsilon_\varphi = -\frac{A_1 \nu^3}{2\pi \beta_a (1 + \nu)^2},$$

$$\delta_r = \frac{A_1 \chi (1 + \beta_a^2) \nu^2}{4\pi \beta_a (1 + \nu)^2} \sin \varphi_s, \quad \varepsilon_r = -\frac{A_1 \nu (1 - \nu \beta_a^2)}{4\pi \beta_a (1 + \nu)^2}.$$

При ускорении протонов  $A_1 \leq 0,1$ ,  $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_r \ll 1$  и границы рабочей области — первой зоны устойчивости для продольного и радиального движений — определяются неравенствами [6]

$$\delta_{\varphi,r} \geq -\frac{\varepsilon_{\varphi,r}^2}{2}, \quad \delta_{\varphi,r} \leq \frac{1 - 2\varepsilon_{\varphi,r}}{4}. \quad (9)$$

Для оценки ширины области устойчивости продольного движения учтем, следуя [4, 7], что в продольном движении частиц (7) присутствуют как медленно меняющаяся сила от ускоряющей гармоники, так и быстро осциллирующая сила от фокусирующей. Потенциальная функция  $U_e$  может быть представлена [7] в виде суммы потенциальной функции для медленных продольных колебаний  $U_0$  и добавки из-за быстро осциллирующей силы. Проводя вычисления  $U_e$ , раскладывая полученное выражение в ряд по  $\Delta\varphi$  до кубичных членов и находя экстремумы  $U_e$ , приближенно оценим фазовую протяженность  $\Psi$  области устойчивости продольного движения:

$$U_e = \frac{qE_a \beta_a \lambda}{2\pi} \left( \Delta\varphi \cos \varphi_s - \sin(\varphi_s + \Delta\varphi) + \frac{A_1 \chi \nu^2}{2\pi(1+\nu)^2} \sin^2 \frac{\nu \Delta\varphi}{2} \right) + C, \quad (10)$$

$$\Psi \approx 3\varphi_m, \quad \varphi_m = \frac{\sin \varphi_s + \frac{A_1 \chi \nu^4 \Delta\varphi^2}{8\pi(1+\nu)^2}}{\cos \varphi_s}.$$

Анализ результатов показывает, что сокращение ширины области устойчивости продольного движения в (10) из-за осциллирующей добавки не очень существенно. Из (8) следует, что есть пересечение областей устойчивости радиального и продольного движений. Но область устойчивости радиального движения уже и находится внутри области устойчивости продольного движения. Это и накладывает ограничение на допустимую амплитуду фазовых колебаний. Сгусток должен полностью уместиться на участке торможения на оси УС (см. рис. 1, б2), и внутри этого участка при формировании УС необходимо разместить максимумы распределения  $E_r$ .

Приводимые аналитические результаты получены с использованием ряда допущений и упрощений. Для уточнения оценок необходимо прямое численное моделирование движения частиц.

### 2. УСКОРЯЮЩАЯ СТРУКТУРА

В режиме БВ наиболее важными параметрами УС являются величина достижимого поля  $E_a$  при ВЧ-мощности питания  $P_i$  и величина затухания  $\alpha$ . Надежность работы УС зависит от величины  $E_{s\max}$ , выражаемой в единицах критерия Килпатрика,  $E_K \approx 47$  МВ/м,  $\lambda = 10$  см. Отношение  $\nu = \left| \frac{\beta_f}{\beta_a} \right| = \frac{2\pi - \theta}{\theta}$  определяется выбором  $\theta$ .

В выражениях для  $E_a$  и  $\alpha$

$$E_a = \sqrt{\frac{2\pi Z_{en} P_i}{\lambda |\beta_g| Q}}, \quad \alpha = \frac{\pi}{\lambda |\beta_g| Q} \tag{11}$$

величины  $\beta_g, Q$  — групповая скорость волны и добротность ячейки УС;  $Z_{en}$  — эффективное шунтовое сопротивление для  $n$ -й гармоники. Детально характеристики КДВ для гармоник  $n = 0, n = -1$  рассмотрены в [2].

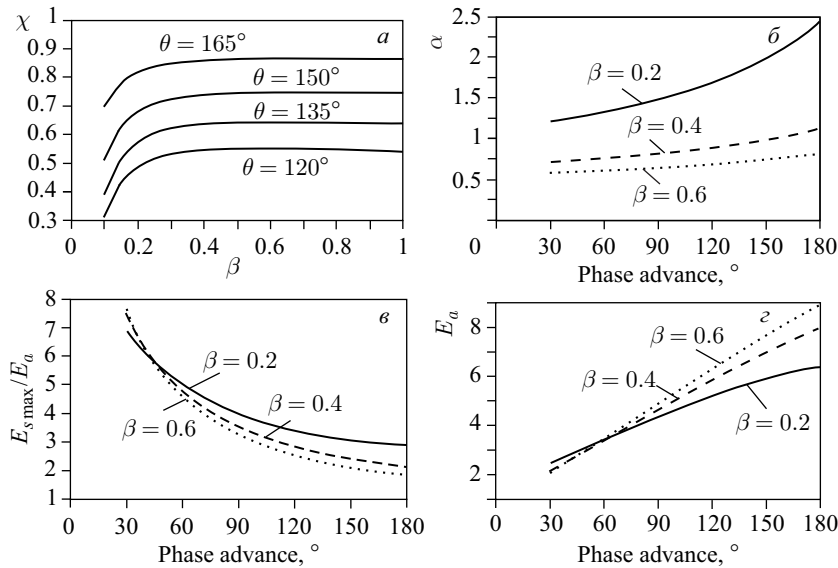


Рис. 3. Графики зависимостей параметров УС. Отношение амплитуд гармоник  $\chi$  (а), затухание  $\alpha$  (б),  $E_{s\max}/E_a$  (в),  $E_a$  ( $P_i = 1$  МВт) (г)

**Варианты линейного ускорителя,  $N_s$ ,  $W_i$  (МэВ),  $W_o$  (МэВ) — номер секции УС, входная и выходная энергии протонов для секции,  $\varphi_s = 25^\circ$ ,  $E_{ac} = E_a \sin \varphi_s$**

$N_s$	$E_{ac}$ , МВ/м	$W_i$	$W_o$	$E_{s \max}/E_K$	$E_{ac}$ , МВ/м	$W_i$	$W_o$	$E_{s \max}/E_K$
	$P_i = 9,5$ МВт				$P_i = 22$ МВт			
1	8,44	9,25	18,73	0,89	14,32	17,1	38,78	1,01
2	9,39	18,73	32,48	0,79	16,22	38,78	63,34	1,00
3	10,28	32,48	48,11	0,79	17,36	63,34	89,72	1,03
4	11,00	48,11	64,56	0,7	17,74	89,72	116,66	1,03
5	11,38	64,56	81,6	0,74	18,24	116,66	144,13	1,04
6	11,66	81,6	99,41	0,74	18,71	144,13	172,55	1,05
7	11,965	99,41	117,27	0,72	18,99	172,55	201,07	1,05
8	12,126	117,27	135,33	0,70	19,09	201,07	230	1,05
9	12,278	135,33	153,78	0,70				
10	12,359	153,78	172,34	0,68				
11	12,435	172,34	191,35	0,68				
12	12,444	191,35	210,5	0,67				
13	12,643	210,5	230	0,66				

При дополнении ячейки КДВ длинными трубками дрейфа для повышения отношения  $Z_{en}/Q$  в (11) [3] участок торможения на оси УС вырождается в участок дрейфа,  $E_z = 0$ , но резко возрастает отношение  $E_{s \max}/E_a$ . Заявляемые в [3, 8] величины  $E_{s \max} \geq 3E_K$ . Максимумы распределения  $E_r$  вблизи оси смещаются за пределы участка дрейфа. Предварительные оценки показывают, что реализовать условия радиальной устойчивости в этом случае не удастся — доминирует дефокусирующее действие ускоряющего зазора.

Рассматриваемая здесь конфигурация УС,  $n = -1$ , оптимизирована для минимизации отношения  $E_{s \max}/E_a$  с учетом формирования необходимой длины отрезка торможения на оси УС и обеспечения при этом достаточной величины  $E_a$ . На рис. 3 показаны графики основных зависимостей параметров УС — зависимости  $\chi(\beta)$ ,  $\alpha(\theta)$ ,  $E_{s \max}/E_a(\theta)$ ,  $E_a(\theta)$  — в предположении  $|\beta_g| = 0,003$ .

В таблице приведены характеристики двух вариантов ускорителя протонов, состоящего из секций КДВ, каждая длиной не более 1,5 м, запитываемая от клистрона ВЧ-мощностью  $P_i$  для  $P_i = 9,5$  МВт и  $P_i = 22$  МВт,  $\lambda = 10$  см. Общая длина структуры составляет 19,2 м в первом варианте и 12 м во втором. Возможна дальнейшая оптимизация представленных вариантов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приближенный аналитический анализ показывает возможность при ускорении частиц на обратной гармонике бегущей волны в области скоростей  $0,1 \leq \beta \leq 0,6$  одновременного обеспечения условий устойчивости продольного и поперечного движения при соответствующем выборе параметров ускоряющей структуры. Полученные выводы должны быть уточнены результатами прямого численного моделирования динамики частиц. В совокупности с приводимыми характеристиками ускоряющей структуры и оценками параметров реализуемого ускорителя результаты указывают на привлекательную возможность создания компактного, простого и надежного линейного ускорителя низкоинтенсивного пучка протонов с энергией от 15 до 230 МэВ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aizatsky M. I. et al.* High Current Electron Linac for Investigations in New Methods of Acceleration // *Fizika Plazmy*. Nauka, 1994. V. 20, No. 7, 8. P. 671.
2. *Paramonov V.* Limitations for Acceleration of Intermediate Mass Particles with Traveling Wave Structure // *Proc. of 2014 Linac Conf.* 2014. P. 935.
3. *Tronc D.* Traveling Wave Acceleration of Protons // *Nucl. Instr. Meth. A.* 1993. V. 327. P. 253–255.
4. *Баев В. К., Минаев С. А.* Эффективность фокусировки ионов в линейном ускорителе полем бегущей волны // *ЖТФ*. 1981. Т. 51, вып. 11. С. 2310.
5. *Лебедев А. Н., Шальнов А. В.* Основы физики и техники ускорителей. Т. 3. М.: Энергоатомиздат, 1981.
6. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических системах. М.: Изд-во иностр. лит., 1952.
7. *Линейные ускорители ионов / Ред. Б. П. Мурин.* Т. 1. М.: Атомиздат, 1978.
8. *Benedetti S. et al.* RF Design of a Novel S-Band Backward Traveling Wave Linac for Proton Therapy // *Proc. of 2014 Linac Conf.* 2014. P. 992.