

## КХД-АНАЛИЗ СТРУКТУРНОЙ ФУНКЦИИ $F_3$ В РАМКАХ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ОСНОВЕ ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЛЛИНА

*А. В. Сидоров<sup>а</sup>, О. П. Соловцова<sup>а,б</sup>*

<sup>а</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

<sup>б</sup> Гомельский государственный технический университет, Гомель, Белоруссия

На основе аналитической теории возмущений методом обратного преобразования Меллина проведен КХД-анализ комбинированного набора экспериментальных данных по структурной функции  $F_3$ . В этом подходе определена форма структурной функции  $F_3$ , значение масштабного КХД-параметра  $\Lambda$  и  $x$ -зависимость вклада высших твистов. Дана оценка точности метода полиномов Якоби.

On the basis of the analytical perturbation theory we apply the inverse Mellin transform method for the QCD analysis of the combined set of experimental data on structure function  $F_3$ . In this approach the form of the structure function  $F_3$ , the value of the QCD scale parameter  $\Lambda$  and the  $x$ -shape of the higher twists contribution are defined. The assessment of accuracy of a method of Jacobi polynomials is given.

PACS: 12.38.-t; 12.38.Qk; 12.38.Bx; 11.55.Bg; 11.55.Fv

### ВВЕДЕНИЕ

Глубоконеупругое рассеяние лептонов на нуклоне является одним из ключевых процессов для проверки теории сильных взаимодействий — квантовой хромодинамики (КХД) и определения формы распределений кварков и глюонов в нуклоне.

Одним из наиболее простых и удобных объектов КХД-анализа являются данные по структурной функции  $F_3$ , поскольку в несинглетной структурной функции отсутствует вклад морских кварков и глюонов.  $Q^2$ -эволюция несинглетных моментов структурной функции имеет простую форму и в лидирующем порядке определяется лишь константой сильного взаимодействия  $\alpha_s$  и значениями несинглетной аномальной размерности [1, 2].

В нашем исследовании применяется аналитический подход в КХД, названный аналитической теорией возмущений (АТВ) [3, 4] (см. также обзоры [5, 6]). В рамках этого подхода ренормализационная инвариантность коррелируется с требованием аналитичности по квадрату переданного импульса  $Q^2$ . Как известно, модификация теории возмущений (ТВ), выполненная в соответствии с принципом ренормализационной инвариантности, позволяет улучшить свойства пертурбативных разложений в ультрафиолетовой области,

однако приводит к нефизическим особенностям инвариантного заряда  $\alpha_s(Q^2)$  в инфракрасной области. Такие нефизические особенности у инвариантного заряда в квантовой электродинамике и в КХД представляют собой известную трудность теории<sup>1</sup>. В рамках АТВ устранение нефизических особенностей  $\alpha_s(Q^2)$ , а также целых степеней  $[\alpha_s(Q^2)]^n$  основывается на наложении требования аналитичности по переменной  $Q^2$ , которое вытекает из отражающего основные принципы локальной квантовой теории поля спектрального представления Челлена–Лемана.

Применение АТВ при проведении КХД-анализа экспериментальных данных по глубоководному рассеянию потребовало расширения аппарата АТВ на случай нецелых степеней инвариантного заряда<sup>2</sup>. Такое обобщение было предложено в работе [7] (см. также обзор [8] и работу [9]) и успешно применено при анализе низкоэнергетических данных по нуклонным спиновым правилам сумм  $\Gamma_1^{p,n}(Q^2)$  [10], данных по структурной функции  $F_2(x, Q^2)$  [11–13] и  $F_3(x, Q^2)$  [14, 15], поляризованных несинглетных комбинаций  $\Delta q_3(x, Q^2)$  и  $\Delta q_8(x, Q^2)$  и несинглетной комбинации функции фрагментации пиона  $D_{u_v}^+(z, Q^2)$  [16, 17].

В течение многих лет КХД-анализ структурных функций нуклона успешно осуществлялся с помощью метода разложения по системе ортогональных полиномов Якоби (метод полиномов Якоби), предложенного еще в работе [18] и получившего развитие в работах [19, 20]. Неоспоримым преимуществом этого метода является возможность восстановления  $x$ -зависимости структурной функции с использованием небольшого числа первых моментов, высокая скорость проведения численных расчетов и приемлемая точность определения партонных распределений и  $\alpha_s(Q^2)$  [21–24]. В последние годы интерес к методу полиномов Якоби снова возник в связи с необходимостью проведения КХД-анализа структурных функций с использованием новых подходов, в частности, в рамках АТВ.

В данной работе представлен КХД-анализ экспериментальных данных по структурной функции  $F_3$  высокоточным методом на основе обратного преобразования Меллина. Применение этого метода потребовало аналитического продолжения моментов структурной функции в область комплексных значений меллиновских моментов.

На основе метода обратного преобразования Меллина в обычной ТВ и в АТВ определена форма структурной функции  $F_3(x)$ , найдены значения масштабного параметра  $\Lambda$  и  $x$ -зависимость вклада высших твистов. Приведена оценка точности результатов, полученных ранее методом разложения структурной функции по полиномам Якоби [15].

## 1. КХД-ЭВОЛЮЦИЯ МОМЕНТОВ СТРУКТУРНОЙ ФУНКЦИИ В ПОДХОДЕ АТВ

Ренормгрупповая эволюция моментов структурных функций с изменением  $Q^2$  хорошо известна (см., например, [1, 25]). В лидирующем порядке ТВ в несинглетном приближе-

<sup>1</sup>Подробное рассмотрение этого вопроса можно найти в обзоре [6].

<sup>2</sup>Напомним, что значения несинглетной аномальной размерности не являются целыми числами для целых номеров моментов Меллина.

нии  $Q^2$ -эволюция записывается в виде

$$M(N, Q^2) = \left[ \frac{\alpha_s(Q^2)}{\alpha_s(Q_0^2)} \right]^{\nu(N)} M(N, Q_0^2), \quad (1)$$

$$\nu(N) = \frac{\gamma_{\text{NS}}^{(0),N}}{2\beta_0}, \quad N = 2, 3, \dots, \quad (2)$$

где  $\gamma_{\text{NS}}^{(0),N}$  — несинглетные аномальные размерности;  $\beta_0 = 11 - 2n_f/3$ ,  $n_f$  — число активных ароматов ( $n_f = 4$  в нашем анализе). Неизвестные величины  $M(N, Q_0^2)$  могут быть представлены как меллиновские моменты структурной функции в некоторой точке  $Q_0^2$ :

$$M(N, Q_0^2) = \int_0^1 dx x^{N-1} F(x, Q_0^2) = \int_0^1 dx x^{N-2} A x^a (1-x)^b (1+\gamma x). \quad (3)$$

Параметры  $A$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\gamma$ , а также масштабный параметр  $\Lambda_{\text{КХД}}$ , входящий в  $\alpha_s$ , определяются из фита экспериментальных данных. Детальное описание процедуры фитирования можно найти, например, в работе [21].

В случае применения АТВ выражение (1) принимает вид

$$\mathcal{M}_3^{\text{АТВ}}(N, Q^2) = \frac{\mathcal{A}_{\nu(N)}(Q^2)}{\mathcal{A}_{\nu(N)}(Q_0^2)} \mathcal{M}_3(N, Q_0^2), \quad (4)$$

где аналитические несингулярные функции  $\mathcal{A}_{\nu}(Q^2)$  находятся из спектрального представления Челлена–Лемана и выражаются через скачок  $\nu$ -й степени пертурбативного инвариантного заряда:

$$\mathcal{A}_{\nu}(Q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\sigma \frac{\text{Im} \{ [\alpha_{\text{ТВ}}(-\sigma - i\varepsilon)]^{\nu} \}}{\sigma + Q^2}. \quad (5)$$

При  $\nu = 1$  выражение (5) определяет аналитический инвариантный заряд в евклидовой области,  $\alpha_{\text{АТВ}}(Q^2) \equiv \mathcal{A}_{\nu=1}(Q^2)$ , который в лидирующем порядке (ЛО) имеет вид [3]

$$\alpha_{\text{АТВ}}^{\text{ЛО}}(Q^2) = \alpha_{\text{ТВ}}^{\text{ЛО}}(Q^2) - \frac{4\pi}{\beta_0} \frac{\Lambda^2}{Q^2 - \Lambda^2}. \quad (6)$$

Важно отметить, что инфракрасное предельное значение аналитического инвариантного заряда  $\alpha_{\text{АТВ}}(Q^2)$  является универсальным в том смысле, что оно не зависит от порядка приближения, не зависит от масштабного параметра  $\Lambda$ , выбора схемы перенормировки, а определяется лишь первым коэффициентом разложения  $\beta$ -функции [5]. Это определяет значительное отличие результатов ТВ и АТВ в области малых значений  $Q^2$ , порядка 1–2 ГэВ<sup>2</sup> и ниже (см., например, [26, 27]). Сохранение в АТВ требуемых аналитических свойств по переменной  $Q^2$  обеспечивает корректность перехода из евклидовой области в область минковского (временеподобную) и наоборот [6]. Нередко подразумевается, что поведение инвариантного заряда в евклидовой и минковского областях

симметрично. Как было показано в общем виде в [28], действительно, эти инвариантные заряды имеют одно и то же инфракрасное предельное значение, однако полной симметрии нет.

При любых значениях  $\nu$  выражение для  $\mathcal{A}_\nu^{\text{LO}}$  можно представить в аналогичном выражении (6) виде [7]

$$\mathcal{A}_\nu^{\text{LO}}(Q^2) = [\alpha_{\text{TB}}^{\text{LO}}(Q^2)]^\nu - \left(\frac{4\pi}{\beta_0}\right)^\nu \frac{\text{Li}_\delta(t)}{\Gamma(\nu)}, \quad \delta = 1 - \nu, \quad t = \frac{\Lambda^2}{Q^2}. \quad (7)$$

Здесь первое слагаемое определяется  $\nu$ -й степенью пертурбативного инвариантного заряда,  $\alpha_{\text{TB}}^{\text{LO}}(Q^2) = 4\pi / [\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda_{\text{TB}}^2)]$ , и сохраняет требуемое ультрафиолетовое поведение. Второе слагаемое, выражающееся через функцию полилогарифма  $\text{Li}_\delta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k/k^\delta$ , исчезает в пределе больших значений  $Q^2 \gg \Lambda^2$ , тогда как в инфракрасной области  $Q^2 \lesssim \Lambda^2$  компенсирует нефизические особенности первого слагаемого.

Отметим, что пакеты компьютерных программ FAPT [29] и anQCD [30] позволяют вычислять аналитические функции-образы (5) как для целых, так и для нецелых степеней пертурбативного заряда  $[\alpha_{\text{TB}}^{(\ell)}(Q^2)]^\nu$  вплоть до четырехпетлевого уровня ( $\ell = 4$ ) в евклидовой  $\mathcal{A}_\nu(Q^2)$  и минковского  $\mathfrak{A}_\nu(s)$  областях.

## 2. МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ X-ЗАВИСИМОСТИ СТРУКТУРНОЙ ФУНКЦИИ

**2.1. Метод полиномов Якоби.** Данный метод основан на разложении структурной функции в ряд по системе ортогональных полиномов Якоби и позволяет связать поведение структурной функции с известными выражениями для эволюции ее меллиновских моментов [19]. Соответствующие выражения для лидирующего твиста (ЛТ) в ТВ и в АТВ имеют вид

$$xF_3^{\text{ЛТ}, N_{\text{max}}}(x, Q^2) = \begin{cases} \text{ТВ: } x^\alpha(1-x)^\beta \sum_{n=0}^{N_{\text{max}}} \Theta_n^{\alpha,\beta}(x) \sum_{j=0}^n c_j^{(n)}(\alpha, \beta) M_3(j+2, Q^2), & (8a) \\ \text{АТВ: } x^\alpha(1-x)^\beta \sum_{n=0}^{N_{\text{max}}} \Theta_n^{\alpha,\beta}(x) \sum_{j=0}^n c_j^{(n)}(\alpha, \beta) \mathcal{M}_3(j+2, Q^2). & (8b) \end{cases}$$

Здесь  $\Theta_n^{\alpha,\beta}$  — полиномы Якоби;  $c_j^{(n)}(\alpha, \beta)$  — комбинаторные коэффициенты, записанные в терминах  $\Gamma$ -функций, а  $\alpha$  и  $\beta$  определяют весовые функции полиномов Якоби. Эволюция моментов в ТВ и АТВ ( $M_3$  и  $\mathcal{M}_3$ ) определяется выражениями (1) и (4) соответственно.

Следует отметить, что в исследуемом наборе экспериментальных данных по структурной функции  $F_3$  значительное число экспериментальных точек лежит в области малых значений  $Q^2$ . Поэтому наряду с вкладом лидирующего твиста необходим учет вклада высших твистов, который в следующем за лидирующим порядке параметризуется слагаемым, обратно пропорциональным  $Q^2$ . Тогда экспериментальные значения структурной

функции  $xF_3^{\text{exp}}(x, Q^2)$  можно параметризовать согласно выражению

$$xF_3^{\text{exp}}(x, Q^2) = xF_3^{\text{пт}, N_{\text{max}}}(x, Q^2) + \frac{h(x)}{Q^2}, \quad (9)$$

в котором вклад высших твистов, следуя работе [31], задан в аддитивной форме<sup>1</sup>, а функция  $h(x)$  определяется из фита экспериментальных данных. Отметим, что при фитировании поправки на конечность массы мишени учитываются с точностью до первого члена разложений по величине  $M_N^2/Q^2$  (см., например, [22]).

**2.2. Метод обратного преобразования Меллина.** Структурная функция для некоторого значения  $Q^2$  может быть получена с помощью обратного преобразования Меллина [34–36], если известно аналитическое продолжение функций  $M_3(n, Q^2)$  и  $\mathcal{M}_3(n, Q^2)$  в область комплексных значений  $n$ , а контур интегрирования лежит справа от всех сингулярностей подынтегрального выражения:

$$xF_3(x, Q^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dn x^{-n} \begin{cases} \text{ТВ: } M_3(n, Q^2), \\ \text{АТВ: } \mathcal{M}_3(n, Q^2). \end{cases} \quad (10a)$$

В случае ТВ известно аналитическое продолжение аномальных размерностей (2) в область комплексных значений  $n$  (см., например, [2]). В случае АТВ функции  $\mathcal{A}_\nu(Q^2)$  в области комплексных значений моментов Меллина нами вычисляются по формуле (7), при этом входящая во второе слагаемое функция полилогарифма  $\text{Li}_\delta(t)$  рассчитывается путем численного суммирования ряда.

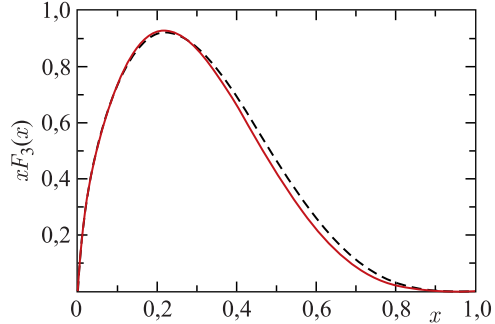
### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ КХД-АНАЛИЗА КОМБИНИРОВАННОГО НАБОРА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПО СТРУКТУРНОЙ ФУНКЦИИ $F_3$

Набор экспериментальных данных по структурной функции  $xF_3$ , включенных в анализ, представляет результаты различных экспериментов по глубоконеупругому рассеянию нейтрино: CDHS [37], SCAT [38], BEBC-GARGAMELLE [39], BEBC-WA59 [40], NuTeV [41] и CHORUS [42]. Имеющиеся 289 экспериментальных точек лежат в широкой кинематической области:  $0,015 < x < 0,8$  и  $0,5 < Q^2 < 196 \text{ ГэВ}^2$ . Поскольку мы стремимся получить наиболее точное сравнение результатов КХД-анализа с использованием ТВ и АТВ, то не вводим нормализационные факторы для экспериментальных данных отдельных коллабораций.

В результате фитирования комбинированного набора экспериментальных данных по структурной функции  $xF_3$  при  $Q_0^2 = 3 \text{ ГэВ}^2$  были найдены параметры формы лидирующего твиста структурной функции  $A$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\gamma$ , масштабный параметр КХД  $\Lambda$  и  $x$ -зависимость вклада высших твистов. Вклад высших твистов учитывается согласно выражению (9). Полученные результаты приведены в табл. 1 и 2, а также на рис. 1–5.

<sup>1</sup>Другой возможный способ параметризации вклада высших твистов предложен, например, в работах [32,33].

**3.1. Форма структурной функции.** На рис. 1 представлена форма структурной функции  $x F_3(x, Q_0^2)$  для лидирующего твиста, полученная методом обратного преобразования Меллина при  $Q_0^2 = 3 \text{ ГэВ}^2$  в АТВ (сплошная кривая) и в ТВ (штриховая). Соответствующие этим кривым параметры  $A, a, b$  и  $\gamma$  приведены в табл. 1. Как видно из этой таблицы, при использовании метода обратного преобразования Меллина достигается несколько меньшее значение  $\chi_{d.f.}^2$  по сравнению с методом полиномов Якоби как в ТВ-, так и в АТВ-подходах.



Как видно из рис. 1, в области значений  $x > 0,3$  результат, получаемый в АТВ, лежит ниже, чем в случае применения ТВ. В области значений  $x < 0,3$  ситуация меняется на противоположную. Следует отметить, что такое поведение кривых в АТВ и ТВ при использовании метода обратного преобразования Меллина полностью согласуется с полученным ранее результатом методом полиномов Якоби [15]. Для того чтобы прояснить отличие в форме структурной функции  $x F_3(x, Q_0^2)$ , связанное с использованием метода полиномов Якоби, мы исследовали разности, которые представлены на рис. 2 и 3.

Рис. 1. Форма структурной функции  $x F_3^{\text{ЛТ}}(x, Q_0^2)$ , полученная методом обратного преобразования Меллина в АТВ (сплошная кривая) и в ТВ (штриховая)

На рис. 2 изображена разность значений функции  $x F_3^{\text{ЛТ}}$ , полученных методом обратного преобразования Меллина и методом полиномов Якоби  $\Delta x F_3^{M-J}(x) = x F_3^M(x) - x F_3^J(x)$  в АТВ (сплошная кривая) и в ТВ (штриховая) при  $Q_0^2 = 3 \text{ ГэВ}^2$ . Как видно из этого рисунка, величина разности  $\Delta x F_3^{M-J}(x) < 0,025$ , что соответствует точности метода полиномов Якоби на уровне лучше 10 % как в ТВ, так и в АТВ. Эта оценка находится в качественном согласии с результатом работы [13], полученным для структурной функции  $F_2(x)$  в несинглетном приближении.

На рис. 3 дается сравнение разности значений структурной функции  $\Delta x F_3^{\text{АТВ-ТВ}} = x F_3^{\text{АТВ}} - x F_3^{\text{ТВ}}$ , полученных в АТВ- и в ТВ-подходах для метода обратного преобразования Меллина (сплошная линия) и метода полиномов Якоби (штриховая). Как видно

Таблица 1. Результаты фитирования комбинированного набора экспериментальных данных по структурной функции  $x F_3$  в лидирующем порядке КХД ( $Q_0^2 = 3 \text{ ГэВ}^2, Q^2 > 0,5 \text{ ГэВ}^2, n_f = 4$  и  $N_{\text{max}} = 11$ )

Параметр	ТВ		АТВ	
	Метод Меллина	Метод Якоби	Метод Меллина	Метод Якоби
$A$	$3,05 \pm 1,08$	$3,75 \pm 1,97$	$2,43 \pm 0,64$	$3,74 \pm 0,59$
$a$	$0,59 \pm 0,10$	$0,65 \pm 0,14$	$0,54 \pm 0,07$	$0,65 \pm 0,04$
$b$	$3,64 \pm 0,80$	$3,62 \pm 0,07$	$3,99 \pm 0,03$	$3,97 \pm 0,04$
$\gamma$	$3,75 \pm 1,79$	$2,75 \pm 2,33$	$6,06 \pm 1,78$	$3,56 \pm 0,82$
$\chi_{d.f.}^2$	516/289	519/289	522/289	529/289

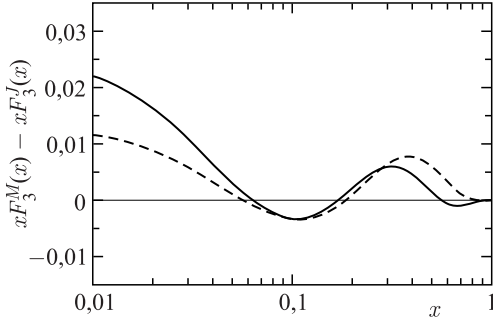


Рис. 2. Различие в форме структурной функции, возникающее при использовании методов обратного преобразования Меллина и полиномов Якоби в АТВ (сплошная линия) и в ТВ (штриховая) при  $Q_0^2 = 3 \text{ ГэВ}^2$

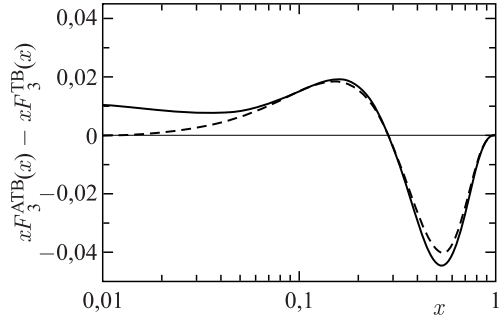


Рис. 3. Различие в форме структурной функции между АТВ и ТВ при использовании обратного преобразования Меллина (сплошная линия) и полиномов Якоби (штриховая) при  $Q_0^2 = 3 \text{ ГэВ}^2$

из этого рисунка, разности приблизительно совпадают при значениях  $x > 0,05$ , однако при  $x < 0,05$  разность  $\Delta xF_3^{\text{ATB}-\text{TB}}$  для метода полиномов Якоби зануляется, в то время как для метода обратного преобразования Меллина отлична от нуля. Можно сказать, что в кинематической области малых значений  $x$  при использовании приближенного метода Якоби не видно различия между ТВ и АТВ, тогда как более точный метод обратного преобразования Меллина это различие воспроизводит.

Поскольку метод обратного преобразования Меллина позволяет находить форму структурной функции  $xF_3^{\text{ПГ}}(x, Q^2)$  с заданной точностью, определенным интерес представляет оценка точности метода полиномов Якоби в зависимости от задаваемого числа полиномов  $N_{\text{max}}$ . На рис. 4 демонстрируются результаты такого исследования при выборе  $Q_0^2 = 3$  и  $Q^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$ . Отметим, что значения переменной  $x$  взяты для нерезонансной кинематической области  $W^2 > 4 \text{ ГэВ}^2$ . На рис. 4 изображена разность  $\Delta xF_3^{M-J}(x)$  при фиксировании в выражениях (8а) и (8б) разного числа полиномов Якоби  $N_{\text{max}} = 6, 9, 11$ : для ТВ — это рис. 4, а, а для АТВ — рис. 4, б. Как видно из этого рисунка, при  $N_{\text{max}} = 6$

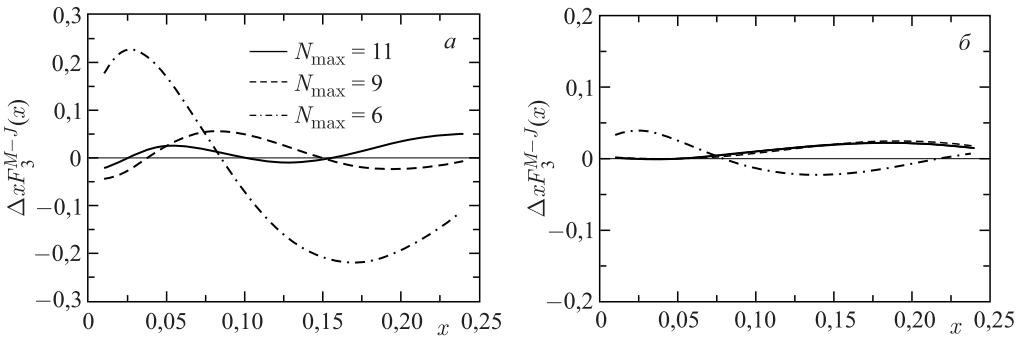


Рис. 4. Разность  $\Delta xF_3^{M-J} = xF_3^M(x) - xF_3^J(x)$  между результатами, полученными с помощью метода обратного преобразования Меллина и метода полиномов Якоби при выборе разного числа полиномов Якоби  $N_{\text{max}}$  при  $Q_0^2 = 3 \text{ ГэВ}^2$  и  $Q^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$  в ТВ (а) и в АТВ (б)

Таблица 2. Значения параметра  $\Lambda_{\text{QCD}}$ , полученные в рамках ТВ и АТВ методом обратного преобразования Меллина и методом разложения по полиномам Якоби

Метод анализа	$\Lambda_{\text{ТВ}}$ , МэВ	$\Lambda_{\text{АТВ}}$ , МэВ
Обратное преобразование Меллина	$378 \pm 49$	$422 \pm 77$
Разложение по полиномам Якоби [15]	$363 \pm 49$	$407 \pm 74$

точность восстановления структурной функции в подходе ТВ неудовлетворительная. При  $N_{\text{max}} \geq 9$  метод полиномов Якоби восстанавливает структурную функцию в подходе ТВ с точностью порядка  $\Delta x F_3^{M-J} \leq 0,05$ . В подходе АТВ точность восстановления оказывается лучше и составляет  $\Delta x F_3^{M-J} \leq 0,02$ . Таким образом, метод полиномов Якоби оказывается более эффективным в случае АТВ.

**3.2. Масштабный КХД-параметр  $\Lambda$ .** В табл.2 приведен результат фитирования экспериментальных данных по структурной функции  $x F_3$ , полученный для масштабного параметра  $\Lambda$ . Как видно из этой таблицы, точность определения  $\Lambda$  методом полиномов Якоби составляет примерно 15 МэВ как для ТВ, так и для АТВ:  $\Delta \Lambda^{M-J} = \Lambda_{\text{АТВ/ТВ}}^M - \Lambda_{\text{АТВ/ТВ}}^J \approx 15$  МэВ. Кроме того, полученное ранее методом полиномов Якоби различие в значениях  $\Lambda$ :  $\Lambda_{\text{АТВ}}^J - \Lambda_{\text{ТВ}}^J \simeq 44$  МэВ [15], сохраняется и при использовании метода обратного преобразования Меллина:  $\Lambda_{\text{АТВ}}^M - \Lambda_{\text{ТВ}}^M \simeq 44$  МэВ. Таким образом, результат анализа  $x F_3$ -данных методом обратного преобразования Меллина подтверждает соотношение  $\Lambda_{\text{АТВ}} > \Lambda_{\text{ТВ}}$ , полученное методом Якоби [15].

С учетом приведенных в табл.2 значений  $\Lambda_{\text{АТВ/ТВ}}$  получаем, что точность определения масштабного КХД-параметра  $\Lambda$  методом полиномов Якоби составляет примерно 4,4 % для ТВ и 2,5 % для АТВ. Отметим, что погрешность определения параметра  $\Lambda$  при анализе  $x F_3$ -данных методом полиномов Якоби гораздо меньше неопределенностей в параметре  $\Lambda$ , обусловленных статистическими и систематическими ошибками (см., например, [22]).

**3.3. Форма вклада высших твистов  $h(x)$ .** На рис. 5 представлены результаты анализа  $x$ -зависимости вклада высших твистов методами обратного преобразования Меллина и полиномов Якоби: для ТВ — на рис. 5, а, для АТВ — 5, б. Как видно из этого рисунка, при  $x > 0,5$  результат применения метода обратного преобразования Меллина для  $h(x)$

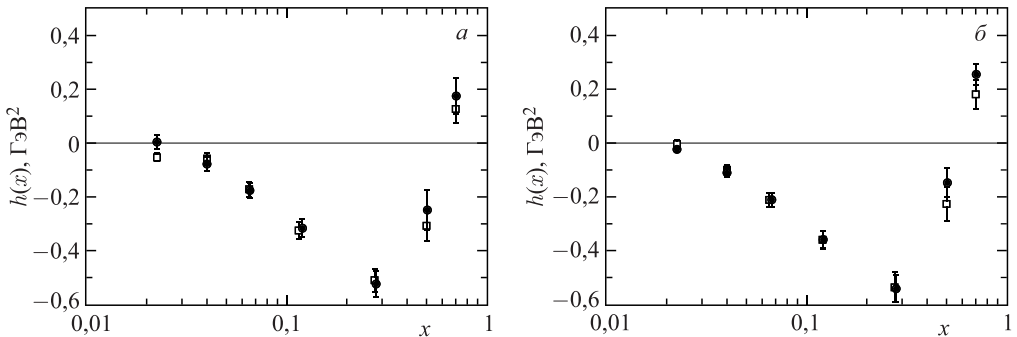


Рис. 5. Результаты нахождения  $x$ -зависимости вклада высших твистов методами Меллина (темные кружки) и полиномов Якоби (светлые квадраты) в подходе ТВ (а) и в подходе АТВ (б)



в подходе АТВ больше, чем в ТВ. Таким образом, подтверждается результат, полученный ранее методом полиномов Якоби [15], о том, что в этой области величина высшего твиста в рамках АТВ больше, чем в ТВ.

Отметим, что при больших значениях  $x > 0,3$  результат применения метода обратного преобразования Меллина оказывается выше, чем метода полиномов Якоби примерно на одно стандартное отклонение как в ТВ, так и в АТВ. Это позволяет сделать приближенную оценку погрешности определения вклада высших твистов методом полиномов Якоби:  $|\Delta h^{M,J}(x)| \approx 0,08 \text{ ГэВ}^2$ . В области малых значений  $x < 0,3$  погрешность оказывается еще меньше:  $|\Delta h^{M,J}(x)| < 0,02 \text{ ГэВ}^2$ .

Следует отметить, что полученная форма  $h(x)$  находится в хорошем согласии с результатами работ [14, 21], в которых форма  $h(x)$  находилась методом полиномов Якоби для других наборов экспериментальных данных по структурной функции  $F_3$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведен КХД-анализ комбинированного набора данных по структурной функции  $x F_3(x)$  в рамках подходов АТВ и ТВ методом обратного преобразования Меллина. Определена форма структурной функции  $x F_3(x)$ , значение масштабного параметра  $\Lambda$  и форма  $x$ -зависимости вклада высших твистов.

Сравнение результатов, полученных методами полиномов Якоби и обратного преобразования Меллина, показало, что погрешность определения формы структурной функции методом полиномов Якоби находится в пределах 10%. Погрешность определения масштабного параметра  $\Lambda$  методом полиномов Якоби составляет 4,4% для ТВ и 2,5% для АТВ. Следует отметить, что метод полиномов Якоби оказался более эффективным в случае АТВ — приближенная форма, полученная этим методом для структурной функции, быстрее сходится к точному результату с ростом числа используемых полиномов. Полученное методом обратного преобразования Меллина значение масштабного параметра  $\Lambda$  подтверждает соотношение  $\Lambda_{\text{АТВ}} > \Lambda_{\text{ТВ}}$ .

Замечено, что в области малых значений  $x < 0,05$  при использовании приближенного метода полиномов Якоби не видно различия между подходами ТВ и АТВ, тогда как более точный метод обратного преобразования Меллина это различие воспроизводит.

Анализ  $x$ -зависимости вклада высших твистов показал, что для больших значений  $x$  результат метода обратного преобразования Меллина оказывается выше результата метода полиномов Якоби примерно на одно стандартное отклонение как в ТВ, так и в АТВ:  $|\Delta h^{M,J}(x)| \approx 0,08 \text{ ГэВ}^2$  при  $x > 0,3$ . При малых значениях  $x$  это отличие меньше:  $|\Delta h^{M,J}(x)| < 0,02 \text{ ГэВ}^2$  при  $x < 0,3$ . Таким образом, найденные значения  $|\Delta h^{M,J}(x)|$  меньше неопределенностей  $h(x)$ , связанных с экспериментальными ошибками, полученными при обработке данных коллаборации CCFR [43], например, в работах [14, 21–23], что подтверждает выводы этих работ о величине вклада высших твистов в структурные функции при использовании метода полиномов Якоби.

Авторы выражают благодарность Д. В. Ширкову за поддержку и неоценимое научное влияние, а также С. В. Михайлову и О. В. Теряеву за стимулирующие обсуждения.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 14-01-00647, 16-02-00790) и БелРФФИ–ОИЯИ (грант № Ф16Д-004).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Buras A. J.* Asymptotic Freedom in Deep Inelastic Processes in the Leading Order and Beyond // *Rev. Mod. Phys.* 1980. V. 52. P. 199.
2. *Индурайн Ф.* Квантовая хромодинамика. М.: Мир, 1986. 284 с.
3. *Shirkov D. V., Solovtsov I. L.* Analytic Model for the QCD Running Coupling with Universal  $\bar{\alpha}_s(0)$  Value // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 79, No. 7. P. 1209.
4. *Milton K. A., Solovtsov I. L.* Analytic Perturbation Theory in QCD and Schwinger's Connection between the  $\beta$ -Function and the Spectral Density // *Phys. Rev. D.* 1997. V. 55, No. 9. P. 5295.
5. *Соловцов И. Л., Ширков Д. В.* Аналитический подход в квантовой хромодинамике // *ТМФ.* 1999. Т. 120, №3. С. 482; *Theor. Math. Phys.* 1999. V. 120. P. 1220.
6. *Ширков Д. В., Соловцов И. Л.* Десятилетие аналитической теории возмущений в КХД // *ТМФ.* 2007. Т. 150, №1. С. 152; *Ten Years of the Analytic Perturbation Theory in QCD* // *Theor. Math. Phys.* 2007. V. 150. P. 132.
7. *Bakulev A. P., Mikhailov S. V., Stefanis N. G.* QCD Analytic Perturbation Theory: From Integer Powers to Any Power of the Running Coupling // *Phys. Rev. D.* 2005. V. 72. P. 074014; Erratum // *Ibid.* P. 119908(E).
8. *Бакулев А. П.* Глобальная дробно-аналитическая теория возмущений в КХД и ее некоторые приложения // *ЭЧАЯ.* 2009. Т. 40, вып. 5. С. 1352; *Phys. Part. Nucl.* 2009. V. 40. P. 715.
9. *Cvetic G., Kotikov A. V.* Analogs of Noninteger Powers in General Analytic QCD // *J. Phys. G.* 2012. V. 39. P. 065005.
10. *Pasechnik R. S. et al.* Nucleon Spin Structure and pQCD Frontier on the Move // *Phys. Rev. D.* 2010. V. 81. P. 016010.
11. *Cvetic G. et al.* Small- $x$  Behavior of the Structure Function  $F_2$  and Its Slope  $\partial \ln F_2 / \partial \ln(1/x)$  for "Frozen" and Analytic Strong-Coupling Constants // *Phys. Lett. B.* 2009. V. 679. P. 350.
12. *Kotikov A. V., Krivokhizhin V. G., Shaikhhatdenov B. G.* Analytic and "Frozen" QCD Coupling Constants in QCD up to NNLO from DIS Data // *Phys. At. Nucl.* 2012. V. 75. P. 507.
13. *Ayala C., Mikhailov S. V.* How to Perform a QCD Analysis of DIS in Analytic Perturbation Theory // *Phys. Rev. D.* 2015. V. 92, No. 1. P. 014028.
14. *Sidorov A. V., Solovtsova O. P.* The QCD Analysis of  $x F_3$  Structure Function Based on the Analytic Approach // *Nonlin. Phenom. Complex Syst.* 2013. V. 16. P. 397.
15. *Sidorov A. V., Solovtsova O. P.* The QCD Analysis of the Combined Set for the  $F_3$  Structure Function Data Based on the Analytic Approach // *Mod. Phys. Lett. A.* 2014. V. 29, No. 36. P. 1450194.
16. *Sidorov A. V., Solovtsova O. P.* Non-Singlet  $Q^2$ -Evolution and the Analytic Approach to Quantum Chromodynamics // *Nonlin. Phenom. Complex Syst.* 2015. V. 18. P. 222.
17. *Sidorov A. V., Solovtsova O. P.* Polarized Nonsinglet  $\Delta q_3$  and Nonsinglet Fragmentation Function  $D_{u_v}^{pi^+}$  in the Analytic Approach to QCD // *PoS (Baldin ISHEPP XXII).* 2015. Art. 019; arXiv:1411.6975 [hep-ph].
18. *Parisi G., Sourlas N.* A Simple Parametrization of the  $Q^2$  Dependence of the Quark Distributions in QCD // *Nucl. Phys. B.* 1979. V. 151. P. 421.
19. *Krivokhizhin V. G. et al.* QCD Analysis of Singlet Structure Functions Using Jacobi Polynomials: The Description of the Method // *Z. Phys. C.* 1987. V. 36. P. 51.
20. *Krivokhizhin V. G. et al.* Next-to-Leading Order QCD Analysis of Structure Functions with the Help of Jacobi Polynomials // *Z. Phys. C.* 1990. V. 48. P. 347; *Benvenuti A. C. et al. (BCDMS Collab.).* Test of QCD and a Measurement of  $\Lambda$  from Scaling Violations in the Proton Structure Function  $F_2(x, Q^2)$  at High  $Q^2$  // *Phys. Lett. B.* 1987. V. 223. P. 490;

- Kotikov A. V., Parente G., Sanchez-Guillen J.* Renormalization Scheme Invariant Analysis of the DIS Structure Functions  $F_2$  and  $F_L$  // *Z. Phys. C.* 1993. V. 58. P. 465;
- Kataev A. L., Sidorov A. V.* The Jacobi Polynomials QCD Analysis of the CCFR Data for  $xF_3$  and the  $Q^2$  Dependence of the Gross–Llewellyn Smith Sum Rule // *Phys. Lett. B.* 1994. V. 331. P. 179.
21. *Kataev A. L. et al.* Next to Next-to-Leading Order QCD Analysis of the Revised CCFR Data for  $xF_3$  Structure Function and the Higher Twist Contributions // *Phys. Lett. B.* 1998. V. 417. P. 374.
  22. *Kataev A. L., Parente G., Sidorov A. V.* Higher Twists and  $\alpha_s(M_Z)$  Extractions from the NNLO QCD Analysis of the CCFR Data for the  $xF_3$  Structure Function // *Nucl. Phys. B.* 2000. V. 573. P. 405.
  23. *Kataev A. L., Parente G., Sidorov A. V.* Improved Fits to the  $xF_3$  CCFR Data at the Next to Next-to-Leading Order and Beyond // ЭЧАЯ. 2003. Т. 34, вып. 1. С. 34; *Phys. Part. Nucl.* 2003. V. 34, No. 1. P. 20; Erratum // *Phys. Part. Nucl.* 2007. V. 38. P. 827.
  24. *Shaikhmatdenov B. G. et al.* QCD Coupling Constant at NNLO from DIS Data // *Phys. Rev. D.* 2010. V. 81. P. 034008.
  25. *Котиков А. В.* Глубокоупругое рассеяние:  $Q^2$ -зависимость структурных функций // ЭЧАЯ. 2007. Т. 38, вып. 1. С. 5.
  26. *Khandramai V. L. et al.* Four-Loop QCD Analysis of the Bjorken Sum Rule vs. Data // *Phys. Lett. B.* 2012. V. 706. P. 340.
  27. *Khandramai V. L., Solovtsova O. P., Teryaev O. V.* QCD Analysis of the Bjorken Sum Rule Revisited // *Phys. Part. Nucl.* 2014. V. 45. P. 49.
  28. *Milton K. A., Solovtsov I. L.* Can the QCD Effective Charge Be Symmetrical in the Euclidean and the Minkowskian Regions? // *Phys. Rev. D.* 1999. V. 59. P. 107701.
  29. *Bakulev A. P., Khandramai V. L.* “FAPT”: A Mathematica Package for Calculations in QCD Fractional Analytic Perturbation Theory // *Comp. Phys. Commun.* 2013. V. 184. P. 183.
  30. *Ayala C., Cvetic G.* “anQCD”: Fortran Programs for Couplings at Complex Momenta in Various Analytic QCD Models // *Comp. Phys. Commun.* 2016. V. 199. P. 114.
  31. *Sidorov A. V.* QCD Analysis of the CCFR Data for  $xF_3$  and Higher Twist Contribution // *Phys. Lett. B.* 1996. V. 389. P. 379;
  - Sidorov A. V.* Next to Next-to-Leading Order QCD Analysis of Combined Data for  $xF_3$  Structure Function and Higher Twist Contribution // *JINR Rapid Commun.* 1996. V. 80. P. 11.
  32. *Virchaux M., Milsztajn A.* A Measurement of  $\alpha_s$  and Higher Twists from a QCD Analysis of High Statistics  $F_2$  Data on Hydrogen and Deuterium Targets // *Phys. Lett. B.* 1992. V. 274. P. 221.
  33. *Parente G., Kotikov A. V., Krivokhizhin V. G.* Next to Next-to-Leading Order QCD Analysis of DIS Structure Functions // *Phys. Lett. B.* 1994. V. 333. P. 190.
  34. *Glück M., Reya E.* Operator Mixing and Scaling Deviations in Asymptotically Free Field Theories // *Phys. Rev. D.* 1976. V. 14. P. 3034.
  35. *Kosower D. A.* Evolution of Parton Distributions // *Nucl. Phys. B.* 1997. V. 506. P. 439.
  36. *Glück M., Reya E., Vogt A.* Dynamical Parton Distributions Revisited // *Eur. Phys. J. C.* 1998. V. 5. P. 461.
  37. *Berge J. P. et al.* A Measurement of Differential Cross-Sections and Nucleon Structure Functions in Charged Current Neutrino Interactions on Iron // *Z. Phys. C.* 1991. V. 49. P. 187.
  38. *Ammosov V. V. et al.* Study of Nucleon Structure Functions in Neutrino Interactions. IHEP Preprint 87-081. Serpukhov, 1987. 19 p.
  39. *Bosetti P. C. et al. (Aachen–Bonn–CERN–Democritos–London–Oxford–Saclay Collab.).* Comparison of Nucleon Structure Functions in Bubble Chamber Neutrino Experiments with QCD Predictions // *Nucl. Phys. B.* 1982. V. 203. P. 362.

40. *Varvell K. et al. (BEBC WA59 Collab.)*. Measurement of the Structure Functions  $F_2$  and  $xF_3$  and Comparison with QCD Predictions Including Kinematical and Dynamical Higher Twist Effects // *Z. Phys. C*. 1987. V. 36. P. 1.
41. *Tzanov M. et al. (NuTeV Collab.)*. Precise Measurement of Neutrino and Anti-neutrino Differential Cross Sections // *Phys. Rev. D*. 2006. V. 74. P. 012008.
42. *Onengut G. et al. (CHORUS Collab.)*. Measurement of Nucleon Structure Functions in Neutrino Scattering // *Phys. Lett. B*. 2006. V. 632. P. 65.
43. *Seligman W.G. et al. (CCFR Collab.)*. Improved Determination of  $\alpha_s$  from Neutrino Nucleon Scattering // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 79. P. 1213.

Получено 15 июня 2016 г.