

О ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ОСНОВАХ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОПТИКИ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В. Г. Куракин^{а, 1}, *П. В. Куракин*^б

^а Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва

^б Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва

На основе функции распределения, описывающей процесс многократного кулоновского рассеяния, исследуется динамика пучка заряженных частиц в рассеивающей среде. Приводятся формулы, описывающие фазовый портрет рассеянного пучка, выраженные через параметры падающего на мишень пучка и параметры рассеивающей среды, вводится понятие согласованного с мишенью пучка. Исследуются процессы отражения и преломления пучка на наклонной границе, разделяющей рассеивающую среду и вакуум. Предлагается математический аппарат, описывающий указанные процессы.

Distribution function is used to explore phase portrait transformation as well as refraction and reflection phenomena of charged particle beam in scattering media, multiple Coulomb scattering being taken into account only. Mathematical model of flow tubes is suggested to make appropriate calculations.

PACS: 41.85.-p

ВВЕДЕНИЕ

Распространение пучка заряженных частиц в среде сопровождается стохастическими процессами взаимодействия частиц пучка с атомами и ядрами среды. Результатом такого взаимодействия является увеличение фазового объема (эмиттанса) пучка, и с точки зрения пользовательских характеристик последнего (применения в ускорителях, накопителях, трактах транспортировки) его параметры ухудшаются. Между тем, металлические фольги и диэлектрические пленки (мишени), устанавливаемые на пути пучка, являются совершенно необходимыми элементами в практике ускорителей и накопителей, поэтому влиянию последних на динамику частиц в указанных приборах посвящено большое количество работ. В большинстве из них, как правило, прослеживается эволюция отдельных частиц при движении в оптической системе с рассеивающей мишенью с последующим вычислением фазового объема. На наш взгляд, представляется интересным вычлнить саму мишень из всей оптики и проследить формирование фазового портрета пучка в самой мишени, поскольку только она ответственна за деградацию пучка. Забегая вперед, отметим, что такой подход позволяет «согласовать» пучок с мишенью и минимизировать

¹E-mail: vgkurakin@mail.ru

деградацию эмиттанса при пересечении последней. Далее, экспериментаторам известен факт, что при наклонном падении пучка на мишень наблюдается отклонение прошедшего через мишень пучка от первоначального направления движения. Авторы работы [1] провели соответствующие измерения для электронного пучка из микротрона при его наклонном падении на мишень в виде различных металлических фольг. Теоретические работы, посвященные объяснению преломления пучка при пересечении мишени и его отражения от последней, авторам данной работы не известны. Упомянутые обстоятельства явились стимулом для построения соответствующих теоретических представлений. Решение отмеченных задач проводится в работе единым методом на основе использования функции распределения для поперечных координат и углов, причем во внимание принимается только процесс многократного кулоновского рассеяния на ядрах мишени.

1. ФОРМИРОВАНИЕ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯЖЕННОГО СГУСТКА В РАССЕЙВАЮЩЕЙ СРЕДЕ

При рассмотрении движения в среде частицы, несущей единичный элементарный заряд, будем пренебрегать потерями энергии и считать основным процессом многократное кулоновское рассеяние на ядрах среды. В этом случае для функции распределения в каждом из двух взаимно-перпендикулярных направлений, поперечных по отношению к направлению движения заряда (ось x), имеет место следующая формула [2, 3]:

$$P(x, y, \theta) dy d\theta = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{\Theta_s^2 x^2} \exp \left[-\frac{4}{\Theta_s^2 x} \left(\theta^2 - \frac{3y\theta}{x} + \frac{3y^2}{x^2} \right) \right] dy d\theta. \quad (1)$$

Здесь $P(x, y, \theta) dy d\theta$ — вероятность обнаружения заряда на глубине x в интервалах $(y, y + dy)$, $(\theta, \theta + d\theta)$ поперечного смещения и угла, составляемого движущимся зарядом с осью x , а величину Θ_s удобно выразить через параметры, описывающие радиационные процессы в веществе:

$$\Theta_s^2 = \left(\frac{E_s}{\beta c p} \right)^2 \frac{1}{X_0}, \quad E_s = \left(\frac{4\pi}{\alpha} \right)^{1/2} m_e c^2 = 21 \text{ МэВ}, \quad (2)$$

где β, p, c — соответственно приведенная скорость заряда, его импульс и скорость света; X_0 — радиационная длина; $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ — постоянная тонкой структуры; e, m_e — заряд электрона и его масса; \hbar — постоянная Планка. Соотношение (1) описывает двумерное гауссово распределение на глубине x в поперечном фазовом пространстве (y, θ) смещений y и углов $\theta = p_y/p$, где p_y — поперечный импульс частицы. В указанной фазовой плоскости линии равной вероятности

$$3\eta^2 - 3\eta\theta + \theta^2 = f = \text{const} \quad (3)$$

представляют собой эллипсы, а охватываемая ими площадь определяет относительное число частиц из интервала изменения фазовых переменных $\theta, \eta = y/x$:

$$3\eta^2 - 3\eta\theta + \theta^2 \leq f. \quad (4)$$

При каком-то характерном значении f , например его среднем $\langle f \rangle$ по бесконечной области изменения переменных θ, η , эту площадь можно принять за эмиттанс (в данном случае

безразмерный, нормированный на толщину мишени), являющийся одной из ключевых характеристик сгустка в оптике пучков заряженных частиц:

$$s = \frac{2\pi\langle f \rangle}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \Theta_s^2 x. \quad (5)$$

Заметим, что отличный от нуля эмиттанс, как и занимаемая сгустком область на фазовой плоскости — его фазовый портрет, сформирован в результате рассеяния на мишени точечного (исходный фазовый портрет) сгустка, имеющего нулевой эмиттанс. Из функции распределения (1) можно вычислить и другие характеристики рассеянного точечного сгустка [2]. Функция распределения по углам $Q(x, \theta)$ рассеянного точечного сгустка вычисляется интегрированием (1) по бесконечной области изменения поперечного смещения y , соответственно, функция распределения по поперечной координате $S(x, y)$ — по углу θ :

$$Q(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Theta_s \sqrt{x}} \exp\left(-\frac{\theta^2}{\Theta_s^2 x}\right), \quad S(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Theta_s x^{3/2}} \exp\left(-\frac{3y^2}{\Theta_s^2 x^3}\right). \quad (6)$$

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА ЗАРЯЖЕННОГО СГУСТКА ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЧЕРЕЗ РАССЕЙВАЮЩУЮ СРЕДУ

Из интуитивных рассуждений следует (и формальные расчеты [4] это подтверждают), что распределение вероятностей для налетающей частицы с координатами (Y, Θ) на фазовой плоскости после рассеяния на мишени будет описываться той же формулой (1), в которой произведена замена

$$y \rightarrow y - Y - h\Theta, \quad \theta \rightarrow \theta - \Theta. \quad (7)$$

При этом огибающая к множеству эллипсов рассеяния (3) с центрами, локализованными на эллипсе, описываемому уравнением

$$A_1(\eta - \theta)^2 + A_2(\eta - \theta)\theta + A_3\theta^2 = F, \quad (8)$$

определяет границу фазовой плоскости, охватывающую множество точек исходного фазового портрета налетающего сгустка после рассеяния. Коэффициенты уравнения (8) — суть коэффициенты эллипса, описывающего фазовый портрет сгустка перед мишенью:

$$A_1\eta^2 + A_2\eta\theta + A_3\theta^2 = F. \quad (9)$$

Найдем огибающую геометрическим методом. Перейдем к системе координат, в которой эллипсы рассеяния представляют собой окружности, а фазовый портрет налетающего пучка описывается уравнением

$$B_1\xi^2 + B_2\xi\chi + B_3\chi^2 = F. \quad (10)$$

Здесь

$$B = M_3 M_2 M_1 A, \quad (11)$$

а A и B — матрицы-столбцы, составленные из коэффициентов A_i, B_i , $i = 1, 2, 3$; M_1, M_2, M_3 — квадратные матрицы третьего порядка:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{3}{2\sqrt{13}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{13}} \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{2\sqrt{13}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В преобразованной системе координат фазовый портрет пучка представляет собой фигуру, границей которой является линия, соединяющая концы отрезков перпендикуляров, проведенных к каждой точке эллипса (10). Длина множества этих отрезков равна малой полуоси эллипса рассеяния. По многим причинам удобно аппроксимировать эту границу эллипсом с полуосями с той же ориентацией, как у эллипса (10), и увеличенными на длину малой полуоси эллипса рассеяния. Не отвлекаясь на нахождение параметров C'_i , $i = 1, 2, 3$ аппроксимирующего эллипса (это стандартные процедуры аналитической геометрии), отметим лишь, что параметры эллипса, являющегося границей фазового портрета рассеянного пучка, определяются преобразованием

$$C = M_2^{-1} M_3^{-1} C'. \quad (13)$$

Из описанной процедуры нахождения фазового портрета рассеянного пучка следует одно важное обстоятельство, а именно: приращение эмиттанса пучка после рассеяния на мишени минимально, если в преобразованной системе координат пучок, как и эллипс рассеяния, описывается окружностью. Простые преобразования приводят к формуле [4]

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_0} + \sqrt{s}. \quad (14)$$

Здесь S_0, S, s — соответственно эмиттансы исходного и рассеянного пучков и эмиттанс рассеяния. Назовем пучок с минимальным приращением эмиттанса после рассеяния согласованным с мишенью. Из приведенных выше формул следует, что перед рассеянием на мишени такой пучок описывается эллипсом

$$3\eta^2 + 3\eta\theta + \theta^2 = F. \quad (15)$$

3. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПУЧКА НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА РАССЕЙВАЮЩЕЙ СРЕДЫ И ВАКУУМА

Функция распределения (1) является решением соответствующего уравнения в частных производных для неограниченной среды, однако на его основании можно построить распределение и модельные представления, адекватно описывающие процессы рассеяния

на границе рассеивающей среды и вакуума. Как следует из (6), вероятность обнаружить рассеянный заряд в пределах интервала $(0, y)$ равна

$$W(y) = \int_0^y S(x, \xi) d\xi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Theta_s x^{3/2}} \int_0^y \exp\left(-\frac{3\xi^2}{\Theta_s^2 x^3}\right) d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\sqrt{3}y}{\Theta_s x^{3/2}}} \exp(-t^2) dt. \quad (16)$$

Эта вероятность постоянна вдоль линии

$$y = \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \Theta_s x^{3/2}, \quad (17)$$

где

$$\kappa = \text{erf}^{-1}(2W). \quad (18)$$

Здесь $\text{erf}^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к интегралу ошибок и $\text{erf}(\cdot)$:

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\xi^2) d\xi. \quad (19)$$

Как следует из функции распределения, средний угол рассеяния в точке с координатами (x, y) равен $3y/2x$, и этот угол (при условии его малости) совпадает с направлением касательной к линии (17). По этой причине можно говорить об этих линиях как о линиях тока, а дифференциалы

$$dy = \frac{1}{\sqrt{3}} \Theta_s x^{3/2} d\kappa \quad (20)$$

условно рассматривать как трубки тока, ширина которых меняется от нуля в точке старта заряда до значения, определяемого формулой (20) на глубине x . Если граница рассеивающей среды и вакуума описывается линией $x = h + ky$, вычисления для среднего угла рассеяния для частиц, вылетевших в вакуум, дают

$$\langle \theta \rangle_p = \frac{3y}{2x} + \delta, \quad (21)$$

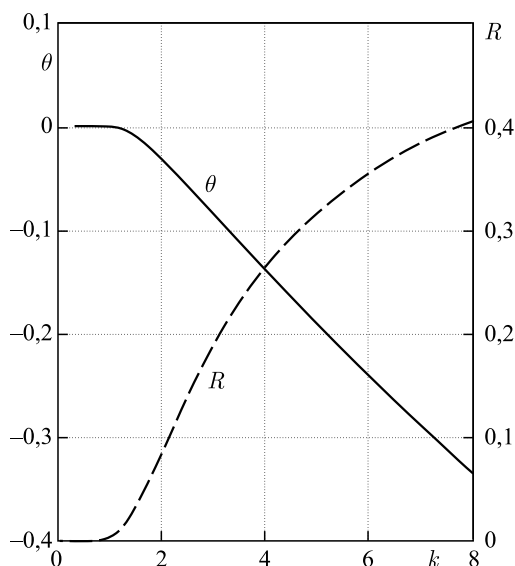
где

$$\delta = \frac{\Theta_s \sqrt{x}}{2\sqrt{\pi}N} \left[\exp \left[-\frac{4}{\Theta_s^2 x} \left(\frac{\pi}{2} + \text{arctg}(k) + \frac{3y}{2x} \right)^2 \right] - \exp \left[-\frac{4}{\Theta_s^2 x} \left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(k) - \frac{3y}{2x} \right)^2 \right] \right], \quad (22)$$

$$N = \text{erf} \left[\frac{2}{\Theta_s \sqrt{x}} \left(\frac{\pi}{2} + \text{arctg}(k) + \frac{3y}{2x} \right) \right] + \text{erf} \left[\frac{2}{\Theta_s \sqrt{x}} \left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(k) - \frac{3y}{2x} \right) \right]. \quad (23)$$

Используя формулу для координатного распределения $S(y, x)$, получим следующее выражение для среднего угла движения частиц, вылетевших в вакуум (с пределами интегрирования от $-\infty$ до κ_{max} , определяемого ниже):

$$\langle \theta \rangle = \frac{\int (\theta)_p(\kappa) N(\kappa) \exp(-\kappa^2) d\kappa}{\int N(\kappa) \exp(-\kappa^2) d\kappa}. \quad (24)$$



Угол преломления θ и коэффициент отражения R электронного пучка в зависимости от наклона границы раздела рассеивающей среды и вакуума при $\Theta_s^2 = 1 \text{ см}^{-1}$, $h = 1 \text{ мм}$

График зависимости угла преломления от наклона среза рассеивающей среды приведен на рисунке. Имеют место два механизма преломления и отражения. Часть линий тока при положительных значениях κ , начиная с определенных его значений, не пересекает границу раздела (полное внутреннее отражение), соответствующая часть потока частиц обедняется, соответственно, меняется средний угол движения частиц, вылетевших из рассеивающей среды в вакуум. Линии тока, пересекающие наклонную границу, также преломляются в силу того, что часть частиц рассеивается в направлениях, не пересекающих данную границу. И это второй механизм преломления и отражения. Упомянутое выше граничное значение κ (верхний предел интегрирования в (24)) легко вычисляется:

$$\kappa_{\max} = \frac{2}{3} \frac{1}{\Theta_s \sqrt{hk}}. \quad (25)$$

Это значение κ_{\max} соответствует случаю, когда линия тока является касательной к границе раздела.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследован процесс формирования фазового портрета падающего на мишень пучка на основе параметров рассеянного игольчатого пучка. Показано, что при наклонном падении пучка на мишень процесс рассеяния сопровождается, как и в световой оптике, явлениями преломления и отражения пучка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Koltsov A. V., Serov A. V., Mamonov I. A.* Experimental Study of the Scattering of 7.4-MeV Electrons Intersecting a Foil at Angle of 5–60 Degrees to Its Surface // Proc. of RuPAC-2016, Obninsk, Russia, Oct. 6–10, 2014. P. 401–403. <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/rupac2014/thpsc36.pdf>.
2. *Росси Б.* Частицы больших энергий: Пер. с англ. М.: Гостехтеоретиздат, 1955. 536 с.
3. *Беленький С. З.* Лавинные процессы в космических лучах. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 244 с.
4. *Kurakin V. G., Kurakin P. V.* Charged Beams Optical Properties of Scattering Media // Proc. of RuPAC-2016, St. Petersburg, Russia, Nov. 21–25, 2016. P. 521–523.