

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ ПОЛНЫХ И НЕПОЛНЫХ ФРАКТАЛОВ

*Т. Г. Дедович, М. В. Токарев*<sup>1</sup>

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна  
Государственный университет «Дубна», Дубна, Россия

В работе использовались SePaC- и BC-методы для фрактального анализа смешанных событий, содержащих различные виды полных, неполных фракталов и примеси. Предложена процедура анализа SePaC-методом неполных фракталов, а также способ коррекции в определении размерности  $D_F$  для фракталов с комбинированным делением частей. Установлено, что SePaC-методом полностью реконструируются неполные фракталы и подавляется фон, а разделение фракталов и фоновых событий BC-методом зависит от основания образования фракталов. Показано, что с помощью SePaC-метода более точно восстанавливается распределение фракталов по размерности  $D_F$  по сравнению с BC-методом.

The SePaC and BC methods are used for fractal analysis of mixed events containing incomplete fractals. Reconstruction of the distribution of events by dimension  $D_F$  is studied. The procedures for analyzing incomplete fractals and correcting the determination of  $D_F$  of combined fractals by the SePaC method are proposed. We find that the SePaC method fully reconstructs incomplete fractals and suppresses background, separation of incomplete fractals and background by the BC method depends on the basis of the formation of the fractal. The distribution of events by value of  $D_F$  is more accurately reconstructed by the SePaC method in comparison with the BC method.

PACS: 89.75.Da; 89.75.Fb

### ВВЕДЕНИЕ

Множественное рождение частиц во взаимодействиях лептонов, адронов и ядер высоких энергий включает в себя много процессов. В Монте-Карло генераторе PYTHIA [1], широко используемом в физике высоких энергий, механизм рождения частиц соответствует следующему сценарию. Столкновения адронов и ядер описываются в терминах кварков и глюонов. Жесткое взаимодействие рассматривается в рамках пертурбативной квантовой хромодинамики (КХД). Непертурбативная часть является модельно-зависимой и связана как с выбором партонной функции распределения и функции фрагментации, так и с масштабами факторизации, ренормализации и фрагментации. Как правило, считают, что эти масштабы равны. После жесткого рассеяния каждый партон излучает дочерние партоны и образует ливень в конечном состоянии. Кинематика процесса описывается долей импульса, уносимого дочерними партонами, и углом раскрытия между

---

<sup>1</sup>E-mail: tokarev@jinr.ru

ними. Углы раскрытия вторичных партонов упорядочены и не превышают углов раскрытия родительского партона. Ливень в конечном состоянии является времениподобным. Максимально позволенный масштаб виртуальности  $Q_{\max}^2$  определяется жестким процессом. Виртуальность уменьшается в каждом подпроцессе распада вплоть до значения  $Q_0^2$ . Кроме этого происходят многочастичные взаимодействия, адронизация, распад нестабильных адронов.

Предполагается, что механизм развития партонного ливня самоподобен. Порог излучения по виртуальности  $Q_0^2$  приводит к тому, что партоны прекращают распадаться на различных уровнях и образуют неполную фрактальную структуру. Фрактальный характер партонных ливней может исказиться вторичными взаимодействиями и процессом адронизации. В этом случае возникает вопрос о степени нарушения фрактальности и возможности восстановления информации о характеристиках первичного процесса.

Фрактальные процессы характеризуются размерностью  $D_F$ , количеством уровней  $N_{\text{lev}}$  и основанием образования  $P$ -фрактала. Отметим некоторые особенности этих характеристик. Существуют различные определения фрактальной размерности. Наиболее часто используют размерность Минковского  $D_b$  (см. прил. А). Для ее вычисления существуют простые алгоритмы, например ВС-метод [2,3]. Размерность Хаусдорфа–Безиковича  $D_H$  (см. прил. А) является инвариантом метрических пространств [4]. В работах [5,6] предложены PaC- и SePaC-методы ее определения. Для некоторых видов фракталов эти размерности совпадают. Вид фрактала, количество уровней и основание определяются процессом его образования (см. прил. Б). С помощью PaC- и SePaC-методов дополнительно вычисляют  $N_{\text{lev}}$  и  $P$ . Для неполных фракталов следует различать количество полностью и частично развитых уровней.

В этой работе изучаются особенности анализа неполных фракталов и восстановление распределений по размерности  $D_F$ . В разд. 1 представлено краткое описание SePaC- и ВС-методов фрактального анализа, используемых в работе. В разд. 2 описаны способ получения неполных фракталов и процедура их выделения SePaC- и ВС-методами из смешанного набора данных, содержащего примеси. В разд. 3 показаны результаты восстановления распределений различных видов фракталов по размерности  $D_F$ , полученные SePaC- и ВС-методами. Основные выводы сформулированы в заключении.

## 1. МЕТОДЫ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА

В данном разделе приводится краткое описание SePaC- и ВС-методов анализа, используемых в данной работе.

**1.1. Метод систем уравнений.** Метод систем уравнений (SePaC-метод) основан на определении размерности Хаусдорфа–Безиковича (см. прил. А). Рассматриваются различные наборы распределений исследуемой величины (например, псевдобыстроты). Количество бинов  $\{M_i\}$  в распределениях каждого набора меняется по степенному закону  $M_i = (P)^i$ , где  $i = 1, 2, \dots, \text{lev}$ . Значение  $\text{lev}$  определяется из условия насыщения количества ненулевых бинов в распределениях. Наборы отличаются величиной основания, принимающего значения  $P = 3, \dots, P_{\max}$ , где  $P_{\max}$  — параметр метода. Для каждого покрытия проверяются различные гипотезы формирования фракталов. Возможно как отдельное применение гипотез независимого и зависимого деления, так и их одновременное

использование. Для проверки гипотезы строится система уравнений

$$\sum_{j=1}^{K_i} (d_{ji})^{D_i} = 1, \quad (1)$$

где  $K_i$  — количество допустимых диапазонов  $i$ -го уровня, а  $d_{ji}$  — длина  $j$  допустимого диапазона на  $i$ -м уровне. Для каждого уравнения вычисляется размерность  $D_i$ . Рассматриваемый набор точек считается фракталом, образованным проверяемой гипотезой, если выполнено условие

$$\frac{|D_i - \langle D \rangle|}{\langle D \rangle} < \text{Dev}, \quad (2)$$

где  $\langle D \rangle$  — среднее значение размерностей  $D_i$ , а  $\text{Dev}$  — параметр метода.

Для фрактала определяются основание образования  $P$ , фрактальная размерность  $D_F = \langle D \rangle$  и количество уровней  $\text{lev}$ . Этот метод имеет два параметра: основание максимального степенного покрытия  $P_{\max}$  и предельное относительное отклонение  $\text{Dev}$  фрактальных размерностей различных уровней от их среднего. В базовом методе присутствует ограничение  $N_i = (N_1)^i$ , где  $N_1$  и  $N_i$  — количество ненулевых бинов на 1-м и  $i$ -м уровне соответственно.

Более подробное описание, особенности и результаты применения SePaC-метода для восстановления различных видов фракталов представлены в работах [6–10]. Двухступенчатая процедура анализа, предложенная в работе [10], позволяет увеличить эффективность восстановления  $D_F$ ,  $N_{\text{lev}}$  и  $P$  в наборах данных, содержащих различные виды фракталов. Модификация алгоритма для ускорения работы описана в прил. В.

**1.2. Метод подсчета клеток.** Метод подсчета клеток (ВС-метод) основан на определении клеточной размерности (см. прил. А). Размерность вычисляется как параметр наклона  $D$  дважды логарифмической зависимости  $\ln N \sim \ln M^D$  количества ненулевых бинов  $N$  в распределении исследуемой величины от их общего количества  $M$ . Параметр наклона можно определять при использовании различного количества уровней. Максимальное количество уровней определяется условием насыщения  $N$ . Как правило, рассматривается набор распределений, в которых количество бинов  $\{M_i\}$  меняется по степенному закону ( $M_i = (P)^i, i = 1, 2, \dots$ ), а в качестве основания выбирается  $P = 2$ . Рассматриваемый набор точек считается фракталом с размерностью  $D_F = D$ , если  $\chi^2$  линейной аппроксимации зависимости  $\ln N$  от  $\ln M$  меньше заданного значения  $\chi_{\text{lim}}^2$ , являющегося параметром ВС-метода.

## 2. РАЗДЕЛЕНИЕ НЕПОЛНЫХ ФРАКТАЛОВ И ФОНОВЫХ СОБЫТИЙ

Кратко опишем построение неполных фракталов с независимым делением частей. Напомним процесс рекурсивной процедуры формирования полного фрактала. Исходное множество представляет собой отрезок фиксированной длины  $L$ , который делится на  $P$  интервалов равной длины,  $m$  ( $m < P$ ) из которых образуют первый уровень фрактала. Каждый последующий уровень строится аналогично делением интервалов предыдущего уровня. Количество интервалов на  $i$ -м уровне равно  $m^i$ . Неполный фрактал, в отличие от полного, характеризуется тем, что первые уровни заполнены полностью, а последующие

частично. В этом случае количество интервалов на не полностью заполненном уровне  $j$  меньше  $m^j$ . Переход к дискретному случаю соответствует переходу к множеству точек, принадлежащих интервалам последнего уровня.

**2.1. Описание набора данных.** В этом пункте анализируются дискретные неполные фракталы, состоящие из  $N$  точек:  $\{x_i\}$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Рекурсивная порождающая процедура представлена так:

$$x_1 = x_0, \quad x_i = f_j(x_{i-1}), \quad (3)$$

где  $x_0$  — начальное значение;  $f_j$  — вспомогательные функции, а  $j$  принимает значение один или два случайным образом. Функции  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  задаются уравнениями

$$f_1(x) = \frac{1}{P}x, \quad f_2(x) = \frac{P-1}{P} + \frac{1}{P}x, \quad (4)$$

где  $P$  — основание образования фрактала.

С помощью описанной процедуры генерируют множество точек, расположенных в интервале от 0 до 5, которое является фракталом с независимым делением частей и с заполненными первой и последней частями (прил. Б). Фрактал, известный как триадное канторовское множество, получают при  $P = 3$ . В работе рассматриваются фракталы с основаниями  $P = 3-8$  и множественностью  $N = 64$ . Выбор множественности связан с однозначным разделением полных фракталов и фоновых событий с  $N \geq 64$  [11]. Для каждого типа фракталов генерировалась тысяча различных наборов.

В качестве фоновых событий рассматриваются наборы, состоящие из  $N = 64$  точек, случайно распределенных в том же интервале, что и фракталы. Распределения по множественности фоновых и фрактальных событий совпадают.

Смешанные данные содержат 50 % неполных фракталов и 50 % фоновых событий.

**2.2. Разделение неполных фракталов и фоновых событий SePaC-методом.** SePaC-метод имеет два параметра:  $P_{\max}$  и Dev. В работе [11] разработана процедура выбора их оптимальных значений для анализа полных фракталов. Она основана на анализе зависимостей доли событий Prtn, восстанавливаемых как фракталы, от параметров  $P_{\max}$  и Dev. Показано, что полные фракталы всех видов с  $P = 3-8$  и множественностью  $N \geq 64$  восстанавливаются полностью и однозначно отделяются от фоновых событий при оптимальных значениях параметров.

SePaC-методом с большой эффективностью восстанавливаются основание и количество уровней различных типов фракталов [7-9]. Предполагается, что неполные фракталы можно восстановить, если количество полностью заполненных уровней не меньше трех. Поэтому для определения, является ли набор точек фракталом, условие (2) с помощью SePaC-метода проверяется только для трех уровней. Дальнейшая проверка условия позволяет определять количество полных уровней в событии.

На рис. 1, а показана зависимость доли событий Prtn с множественностью  $N = 64$ , восстановленных как фракталы, от параметра  $P_{\max}$  при Dev = 0,01 для неполных фракталов с основанием образования  $P = 3$  (квадраты), фоновых событий (кружки) и смешанных данных, содержащих неполные фракталы с  $P = 3$  (треугольники). Также из рисунка видно, что неполные фракталы с  $P = 3$  восстанавливаются полностью при  $P_{\max} \geq 3$ . Фоновые события восстанавливаются (Prtn  $\neq$  0) при  $P_{\max} \geq 9$ . Для смешанных данных при значениях  $P_{\max} = 3-8$  наблюдается плато, соответствующее полному восстановлению фракталов (Prtn = 0,5), а также дальнейшее возрастание доли Prtn с увеличением

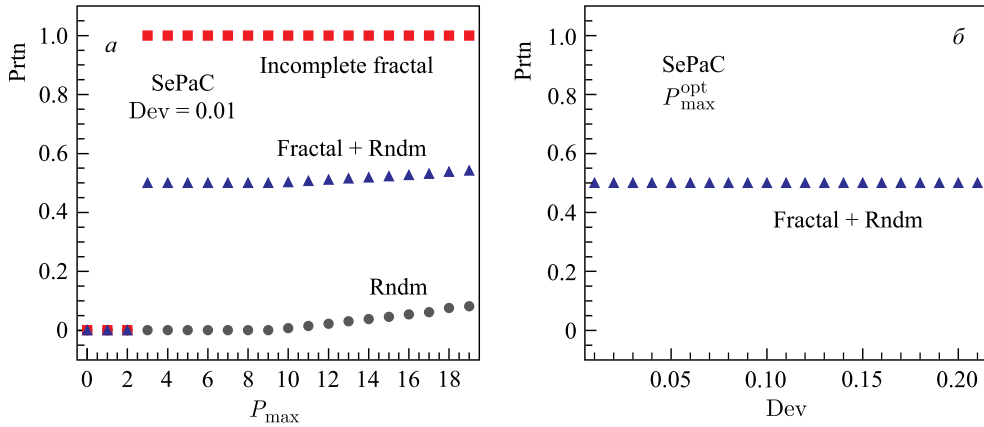


Рис. 1. Анализ SePaC-методом событий с  $N = 64$ . Зависимость доли событий  $Prtn$ , восстановленных как фракталы, от  $P_{max}$  при  $Dev = 0,01$  (а) и от  $Dev$  при оптимальных значениях  $P_{max}^{opt}$  (б)

$P_{max}$ . Выбор  $P_{max}$  как минимального значения на плато считается оптимальным. Значение  $Prtn$  при оптимальных значениях  $P_{max}^{opt}$  не зависит от  $Dev$  (рис. 1, б).

В работе установлено, что описанный выбор  $P_{max}$  и  $Dev = 0,01$  позволяет полностью разделить фоновые события и неполные фракталы с различными основаниями:  $P = 3-8$ . Заметим, что процедура выбора оптимальных параметров для полных и неполных фракталов совпадает.

**2.3. Разделение неполных фракталов и фоновых событий ВС-методом.** ВС-метод имеет один параметр:  $\chi_{lim}^2$ . В работе [11] установлено, что полные фракталы всех видов с  $P = 3-8$  и множественностью  $N \geq 64$  однозначно отделяются от фоновых событий при  $\chi_{lim}^2 = 0,6$ . Доля восстановленных фракталов варьируется от 90 до 96 % в зависимости от типа фрактала.

ВС-методом с малой эффективностью восстанавливаются основание и количество уровней различных типов фракталов [7-9]. Поэтому, в отличие от SePaC-метода, при анализе ВС-методом использовались все определяемые уровни. Зависимость доли  $Prtn$  восстановленных фракталов с множественностью  $N = 64$  и основаниями  $P = 9$  (треугольники), 5 (кружки) и 3 (квадраты) от параметра  $\chi_{lim}^2$  представлена на рис. 2, а. Фракталы с основаниями  $P = 9, 5$  и 3 восстанавливаются ( $Prtn \neq 0$ ) при значениях  $\chi_{lim}^2 \geq 0,4$ , а также 0,8 и 1,1 соответственно. С ростом параметра доля  $Prtn$  возрастает для каждого типа фракталов. Фракталы с основаниями  $P = 9$  и 5 полностью восстанавливаются при  $\chi_{lim}^2 = 0,6$  и 2,0. Для фракталов с  $P = 3$  доля  $Prtn$  достигает значения 0,4 при  $\chi_{lim}^2 = 2,5$ . Отметим, что по форме зависимости  $Prtn(\chi_{lim}^2)$  фракталы можно разбить на три класса: с  $P = 3, 4-7$  и 8-12. Это разделение связано с разными значениями  $\chi_{lim}^2$ , при которых наблюдается максимальное восстановление фракталов.

На рис. 2, б представлена функция  $Prtn(\chi_{lim}^2)$  для смешанных данных, содержащих фракталы с  $P = 9$  (треугольники), 5 (кружки), 3 (квадраты), а также для случайных событий (ромбы). Все зависимости имеют характерное поведение: начиная с минимального значения  $\chi_{lim}^2$ , доля случайных событий, восстанавливаемых как фракталы, превышает 1%. С увеличением параметра доля  $Prtn$  возрастает, затем выходит на плато,

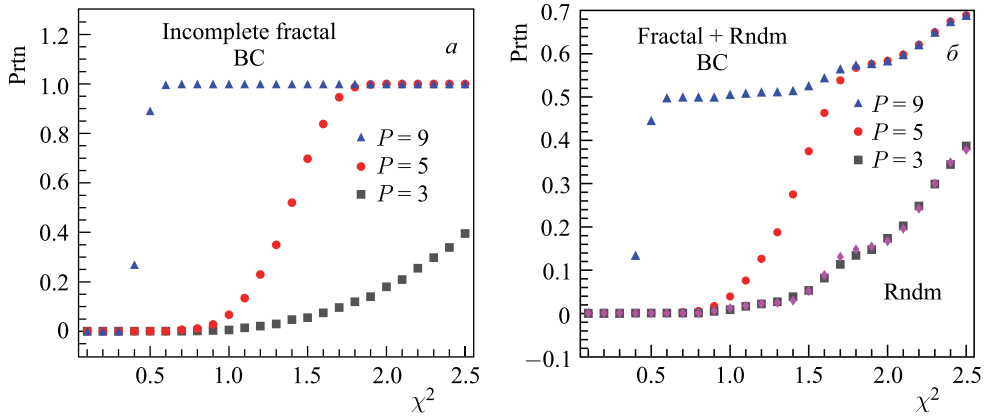


Рис. 2. Анализ ВС-методом событий с  $N = 64$ . Зависимость доли событий  $Prtn$ , восстановленных как фракталы, от  $\chi_{lim}^2$  для неполных фракталов (а) и смешанных данных (б)

по окончании которого продолжает расти. Зависимости  $Prtn(\chi_{lim}^2)$  для набора данных, содержащих фракталы с  $P = 3$ , и для фоновых событий практически совпадают. Это означает невозможность их разделения. Неполные фракталы с основаниями  $P \geq 3$  наилучшим способом отделяются от фоновых событий при выборе значения  $\chi_{lim}^2$  как минимального на плато. Так, для наборов, содержащих фракталы с  $P = 5$  и  $9$ , найдены значения  $\chi_{lim}^2 = 1,7$  и  $0,5$  соответственно. Для данных, включающих фракталы с  $P = 5$ , выделенный набор содержит 13 % фоновых событий. Данные, включающие фракталы с  $P = 9$ , однозначно отделяются от фоновых событий (рис. 2, б).

Установлено, что использование ограниченного числа уровней в ВС-методе не привело к улучшению результатов.

Отметим различия в разделении полных и неполных фракталов с фоновыми событиями. Оптимальные значения  $\chi_{lim}^2$  для полных и неполных фракталов в общем случае различны. Полные фракталы с  $P = 3$  и фоновые события с множественностью  $N \geq 64$  разделяются однозначно [11] в отличие от неполных фракталов.

### 3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ФРАКТАЛОВ ПО РАЗМЕРНОСТИ $D_F$

В этом разделе рассматривается выделение различных типов фракталов из смешанных данных, а также восстановление распределений событий по размерности  $D_F$ . Точность определения  $D_F$  оценивается ошибкой  $Err_{D_F} = (D_F^{rec} - D_F^{test})/D_F^{test}$ , где  $D_F^{rec}$  и  $D_F^{test}$  — восстановленная и тестовая размерности. Анализ проводится SePaC- и ВС-методами.

**3.1. Описание набора данных.** Набор смешанных данных состоит из 4002 событий. Он включает 50 % фракталов и 50 % примесей. Фракталы различаются по следующим типам: неполным с независимым делением, полным с зависимым и комбинированным делением частей (см. прил. Б). В наборе присутствует одинаковое количество фракталов каждого типа с множественностью  $N \geq 64$  и основаниями  $P = 3-8$ . Фракталы с независимым и зависимым делениями имеют обязательно заполненные крайние части. Фоновые

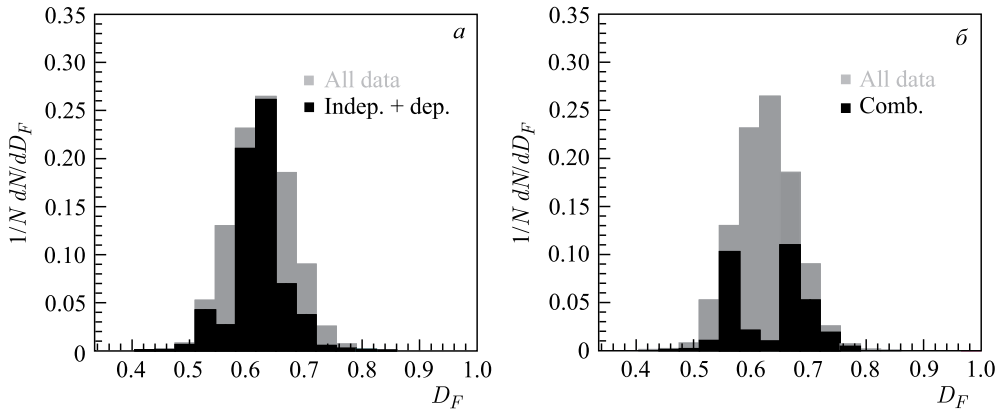


Рис. 3. Распределение тестовых фракталов по размерности  $D_F$ . Суммарный вклад для фракталов с независимым и зависимым делением (а), а также вклад фракталов с комбинированным делением частей (б) выделен черным цветом; серым цветом отмечено распределение для всех фракталов

события представляют собой случайный набор точек. Распределения по множественности фоновых и фрактальных событий совпадают.

На рис. 3 показано распределение тестовых фракталов по размерности  $D_F$ .

**3.2. Анализ данных SePaC-методом.** Разделение фракталов и фоновых событий проводилось SePaC-методом с проверкой условия (2) для трех уровней и одновременного использования гипотез независимого и зависимого деления. Для каждого значения  $Dev$  анализировалась зависимость  $Prtn(P_{max})$  и определялось оптимальное значение  $P_{max}$  как минимальное на плато, а также соответствующее ему значение доли  $Prtn$ . На рис. 4, а показана функция  $Prtn(P_{max})$  при  $Dev = 0,08$ . Существование плато при  $P_{max} = 8-10$  указывает на возможность однозначного разделения фракталов и фоновых событий. Оптимальным выбрано значение  $P_{max} = 8$ , которому соответствует  $Prtn = 0,5$ .

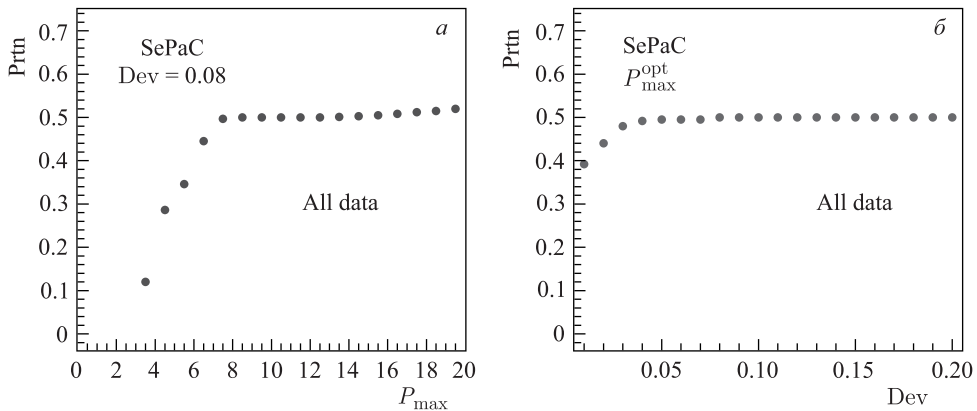


Рис. 4. Анализ SePaC-методом смешанных событий. Зависимость доли событий  $Prtn$ , восстановленных как фракталы, от параметра  $P_{max}$  при  $Dev = 0,08$  (а) и от параметра  $Dev$  при оптимальном  $P_{max}^{opt}$  (б)

На рис. 4, б показана зависимость  $Prtn$  от параметра  $Dev$  при оптимальном  $P_{max}^{opt}$ . Значение доли достигает максимума  $Prtn = 0,5$  при  $Dev = 0,08$  и далее не меняется. При значениях параметров  $Dev = 0,08$  и  $P_{max} = 8$  однозначно разделены фракталы и фоновые события. Выделенный набор данных состоит из 2001 фрактала.

На следующем этапе обсуждается вопрос о восстановлении фрактальной размерности. В работе [10] установлено, что размерность фракталов с независимым и зависимым делением частей восстанавливается с ошибкой меньше 1% при использовании базового SePaC-метода. Поэтому на первом шаге к выделенному набору применяется базовый метод. При исследовании зависимости  $Prtn$  от параметров  $P_{max}$  и  $Dev$  установлены оптимальные значения параметров  $P_{max} = 8$  и  $Dev = 0,01$ . Фрактальная размерность определяется точно у всех фракталов с независимым и зависимым делением частей. Фракталы с комбинированным делением не восстанавливаются. Они образуют новый блок данных. На рис. 5 показаны распределения по тестовой (серая область) и восстановленной (черные крестики) размерности  $D_F$  фракталов с независимым и зависимым делением для различного количества бинов. Как можно видеть из рис. 5, форма распределения восстанавливается при любом количестве бинов.

Далее, новый блок данных, содержащий фракталы с комбинированным делением, анализируется SePaC-методом. Напомним, что этим методом можно проверять различные гипотезы формирования фракталов (с независимым и зависимым делением частей, а также с одновременным использованием этих гипотез). Для всех случаев оптимальные параметры выбираются стандартной процедурой исследования поведения доли  $Prtn$  от  $P_{max}$  и  $Dev$ . Во всех рассматриваемых случаях сравниваются распределения по размерности  $D_F$ , в которых общее количество бинов равно 19.

Применение гипотезы зависимого деления с оптимальными значениями  $P_{max} = 15$  и  $Dev = 0,2$  приводит к уменьшению определяемой размерности  $D_F^{Dep}$ . Среднее значение  $\langle D_F^{Dep} \rangle = 0,5612$  меньше тестового  $\langle D_F^{test} \rangle = 0,6277$ . Значение ошибки  $Err_{D_F}$  отрицательно и может достигать 30% (рис. 6, в). Распределение восстановленной размерности (заштрихованная область на рис. 6, а) не воспроизводит форму исходного распределения (серая область на рис. 6, а).

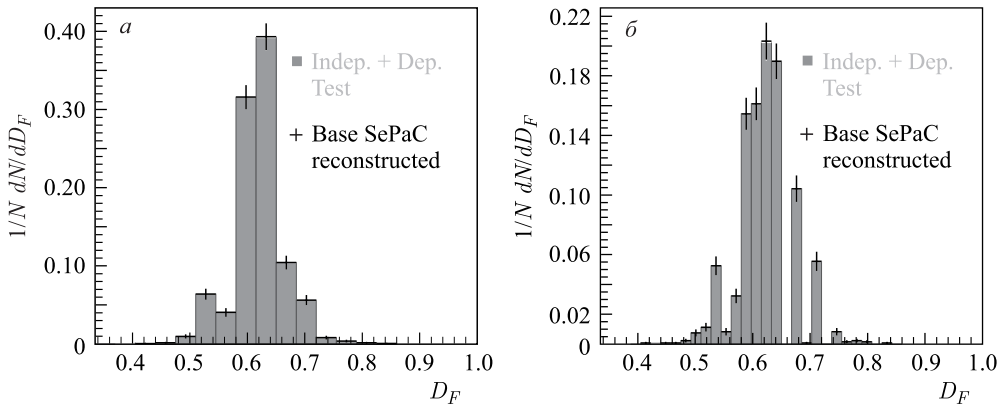


Рис. 5. Анализ базовым SePaC-методом выделенных фракталов. Распределения фракталов с независимым и зависимым делением по тестовой и восстановленной размерности  $D_F$  для 19 (а) и 38 (б) бинов в распределениях



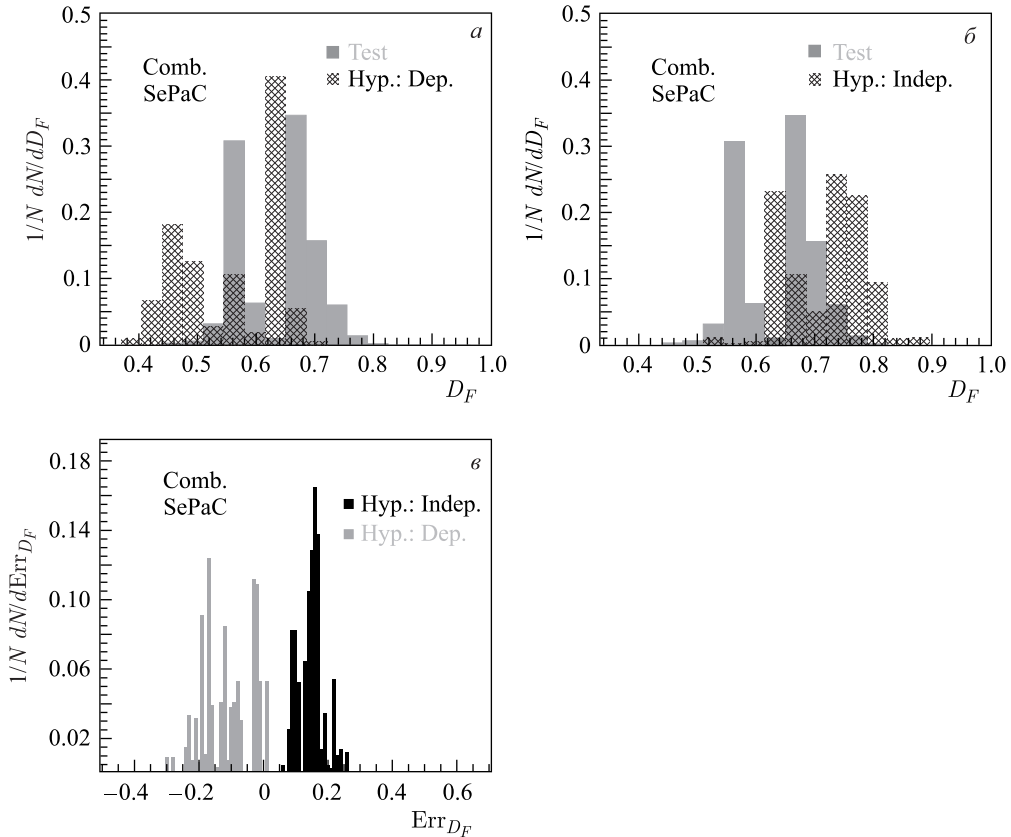


Рис. 6. Анализ фракталов с комбинированным делением SePaC-методом. Распределения фракталов по тестовой и восстановленной размерности  $D_F$ , полученные с использованием гипотез зависимого (а) и независимого (б) деления. Распределение фракталов по ошибке  $Err_{D_F}$ , полученное с использованием различных гипотез (в)

Установлено, что применение гипотезы с независимым делением при оптимальных значениях  $P_{\max} = 10$  и  $Dev = 0,08$  приводит к увеличению определяемой размерности  $D_F^{\text{Indep}}$ . Так, среднее значение  $\langle D_F^{\text{Indep}} \rangle = 0,7195$  больше тестового. На рис. 6, б показаны распределения по тестовой (серая область) и восстановленной (заштрихованная область) размерностям. Видно, что восстановленное распределение сдвинуто в сторону больших значений  $D_F$  относительно тестового. Оба распределения имеют два пика, расстояние между которыми составляет один бин. На рис. 6, в показано распределение фракталов по ошибке  $Err_{D_F}$ . Значение ошибок положительно и не превышает 25%. Установлено, что при одновременном использовании гипотез в 90% событий выбирается гипотеза с независимым делением.

Опишем процедуру коррекции  $D_F$ , используя тот факт, что распределения фракталов по размерности, полученные с использованием гипотез независимого и зависимого деления, сдвигаются в разные стороны от тестового. В каждом событии найденное значение  $D_F$  сдвигаем на величину  $Shift = (\langle D_F^{\text{Indep}} \rangle - \langle D_F^{\text{Dep}} \rangle) / 2$ . Для гипотезы независимого

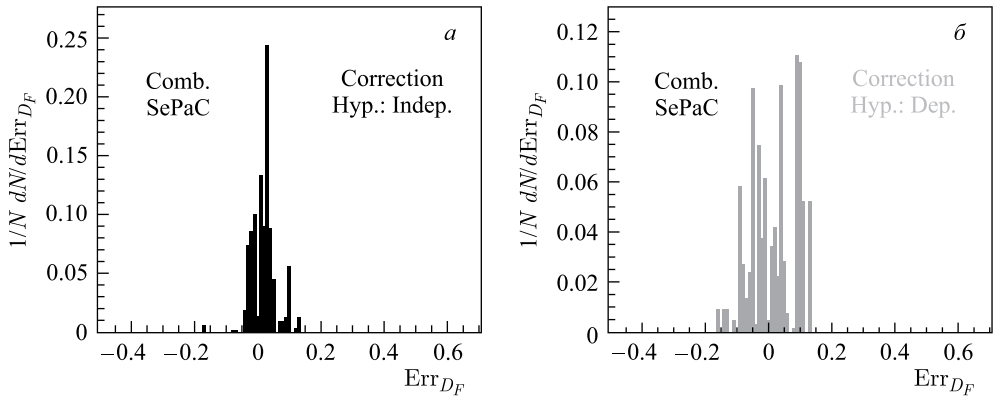


Рис. 7. Анализ фракталов с комбинированным делением SePaC-методом с коррекцией  $D_F$ . Распределения фракталов по ошибке  $Err_{D_F}$ , полученные с использованием гипотез независимого (а) и зависимого (б) деления

деления переопределяем  $D_F$  на  $D_F - Shift$ , а в случае гипотезы зависимого деления — на  $D_F + Shift$ . Ошибки  $Err_{D_F}$ , полученные после коррекции, показаны на рис. 7. Видно, что в распределениях для обеих гипотез присутствуют как положительные, так и отрицательные значения. Для большинства событий величина ошибок, полученных с использованием гипотезы независимого деления, не превышает 10% и меньше ошибки, полученной с использованием гипотезы зависимого деления (15%). Поэтому для восстановления размерности была выбрана гипотеза независимого деления с учетом сдвига.

Тестовое распределение фракталов по размерности  $D_F$  (серая область), а также полученное при использовании гипотезы независимого деления с коррекцией (заштрихованная область) представлены на рис. 8, а. Установлено, что распределения хорошо совпадают. Суммарное побиновое отклонение от тестового равно  $\Delta = 0,23$ , а максимальное отклонение в бинах равно  $\delta_{max} = 0,05$ .

Описанный способ восстановления размерностей фракталов с комбинированным делением был проверен и на другом наборе данных. Тестируемый набор включал все виды

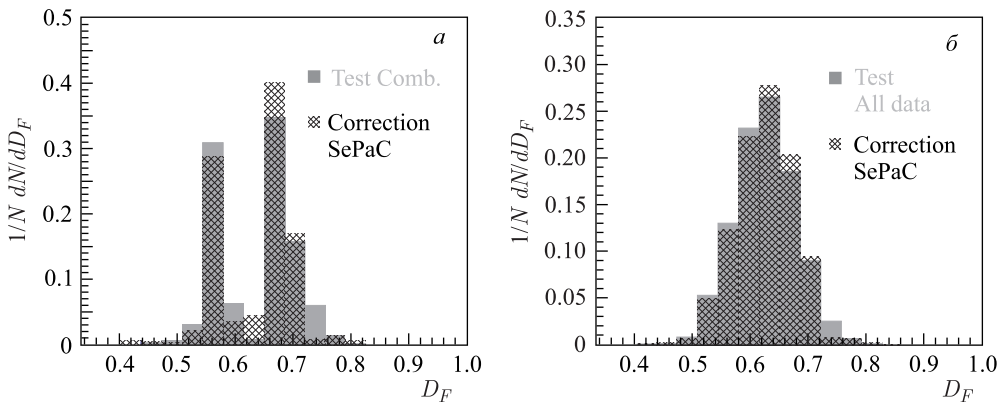


Рис. 8. Анализ фракталов SePaC-методом с коррекцией  $D_F$ . Распределения фракталов с комбинированным делением (а) и исходного набора (б) по тестовой и восстановленной размерностям  $D_F$

комбинированных фракталов с основаниями  $P = 3-8$  и множественностью  $N \geq 64$ . Рассматривались распределения по  $D_F$  с различным количеством бинов. Установлено, что количество пиков и границы восстановленных распределений совпадают с исходными, если ширина бинов не меньше 0,03.

На рис. 8, б показано тестовое (серая область) и восстановленное (заштрихованная область) распределения исходного набора фракталов по  $D_F$ . Напомним, что размерность определялась следующим образом: вначале использовался базовый SePaC-метод, который позволил наиболее точно восстановить  $D_F$  фракталов с независимым и зависимым делением частей, далее размерность фракталов с комбинированным делением определялась гипотезой независимого деления с учетом коррекции. Из этого рисунка также видно, что границы и форма распределений хорошо совпадают. Значения суммарного побинового отклонения от тестового  $\Delta = 0,08$  и максимального отклонения в бинах  $\delta_{\max} = 0,02$  являются незначительными.

**3.3. Анализ данных ВС-методом.** В этом разделе используется ВС-метод для выделения фракталов из смешанных данных, а также определяется точность восстановления размерности.

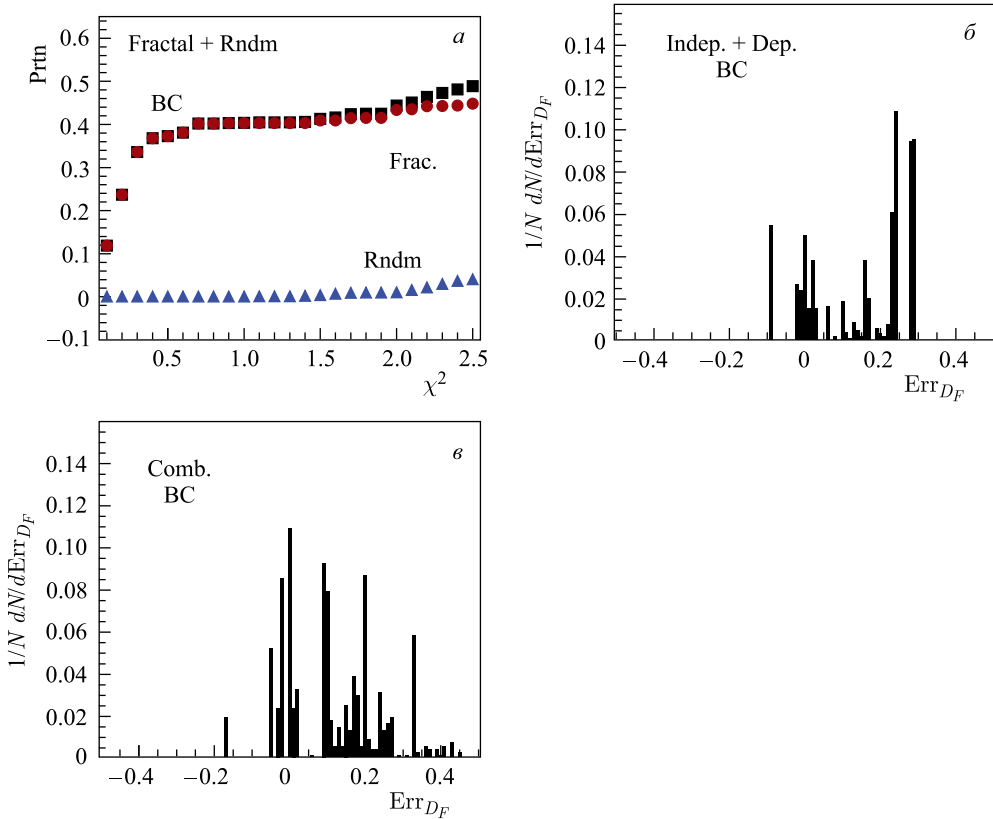


Рис. 9. Анализ данных ВС-методом. Зависимость доли смешанных событий  $Prtn$ , восстановленных как фракталы, от  $\chi^2_{lim}$  (а). Распределение фракталов с независимым и зависимым (б), а также комбинированным (в) делением по ошибке  $Err_{D_F}$

Оптимальное значение параметра ВС-метода  $\chi_{lim}^2$  определяется путем анализа зависимости  $Prtn(\chi_{lim}^2)$ , показанной на рис. 9, а. Случайные события (треугольники) восстанавливаются как фракталы при  $\chi_{lim}^2 \geq 1,5$ . Для фракталов (кружки) и смешанных событий (квадраты) наблюдается сходное поведение  $Prtn(\chi_{lim}^2)$ . Видно, что значение доли  $Prtn$ , отличное от нуля при  $\chi^2 = 0,1$ , с ростом параметра  $Prtn$  увеличивается и выходит на плато при  $\chi^2 = 0,7$ . Начиная со значения  $\chi^2 = 1,5$ , доля  $Prtn$  продолжает расти. Отметим, что скорость роста смешанных событий больше скорости роста фракталов из-за примеси случайных событий. Выбор значения  $\chi_{lim}^2 = 0,7$  как минимального на плато считается оптимальным. В этом случае случайные события не восстанавливаются, а доля восстановленных фракталов составляет 80 %.

На рис. 9, б, в показаны распределения фракталов по ошибке  $Err_{D_F}$ . Для сравнения SePaC- и ВС-методов отдельно рассматривались ошибки, полученные для фракталов с независимым и зависимым делением (б) и для фракталов с комбинированным делением (в) частей. Установлено, что для большинства фракталов значение ошибки положительно и достигает 30 % для фракталов с независимым и зависимым делением и 40 % — для фракталов с комбинированным делением. Напомним, что SePaC-методом точно восстанавли-

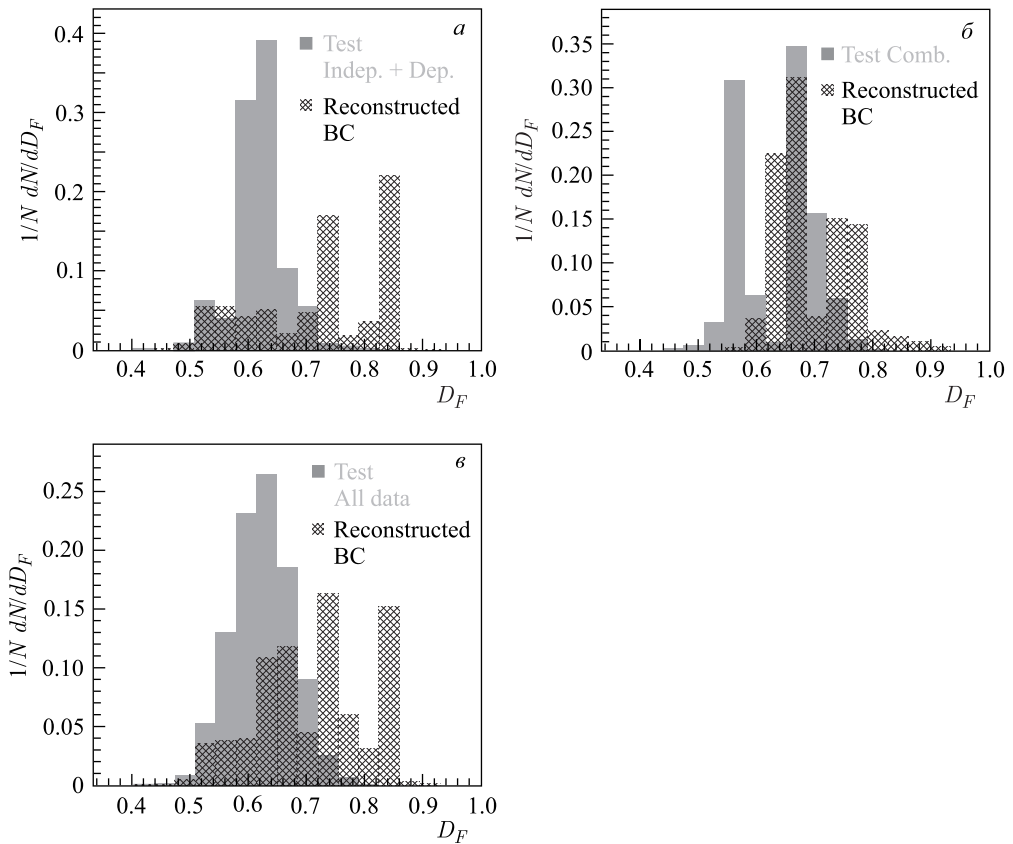


Рис. 10. Анализ фракталов ВС-методом. Распределения фракталов с независимым и зависимым (а), комбинированным (б) делением и исходного набора (в) по тестовой и восстановленной размерности  $D_F$

вается размерность фракталов с независимым и зависимым делением, а для большинства фракталов с комбинированным делением ошибка  $\text{Err}_{D_F}$  не превышает 10 %.

На рис. 10 показаны распределения для различных наборов фракталов по тестовой (серая область) и восстановленной ВС-методом (заштрихованная область) размерности  $D_F$ . Из этого рисунка также видно, что значения восстановленных размерностей для фракталов с независимым и зависимым делением (а), с комбинированным делением (б) частей и исходного набора фракталов (в) сдвинуты в область больших значений по сравнению с тестовыми. Восстановленные распределения не сохраняют исходную форму. Напомним, что для SePaC-метода (см. п. 3.2) разработана процедура, позволяющая восстановить форму исходного распределения.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведен фрактальный анализ смешанных данных, содержащих фракталы и фоновые события с множественностью  $N \geq 64$ . Исследуемый набор включал неполные фракталы с независимым делением и полные фракталы с зависимым и комбинированным делением частей. В качестве фоновых событий рассматривались случайные наборы точек, распределение по множественности которых совпадало с аналогичными распределениями для исследуемых фракталов.

В работе предложена процедура анализа неполных фракталов SePaC-методом, основанная на рассмотрении только трех уровней. Процедура выбора параметров метода совпадает для полных и неполных фракталов. Установлено, что SePaC-методом восстанавливаются все неполные фракталы и полностью подавляются фоновые события. Восстановление неполных фракталов ВС-методом, а также подавление фоновых событий зависит от основания образования фрактала  $P$  (чем больше значение основания, тем меньше примеси в выделенных событиях).

Исследована точность восстановления фрактальной размерности SePaC- и ВС-методами. Показано, что при использовании SePaC-метода для фракталов с комбинированным делением необходима коррекция в определении размерности  $D_F$ . В работе разработана и применена процедура такой коррекции, учитывающая различие значений восстановленных размерностей на основе гипотез независимого и зависимого деления частей. Показано, что для SePaC-метода размерности фракталов с независимым и зависимым делением восстанавливаются точно, а ошибки при определении  $D_F$  фракталов с комбинированным делением не превышают 10 %. Соответствующее распределение событий по  $D_F$  для тестовых и восстановленных фракталов хорошо совпадают (максимальное отклонение в бинах не превышает 2 %). Для ВС-метода размерность восстанавливается с ошибкой  $\text{Err}_{D_F} \leq 40\%$ , а соответствующие распределения по  $D_F$  сдвинуты в область больших значений и не сохраняют форму.

Таким образом, в работе показано преимущество SePaC-метода при выделении фракталов из смешанных событий и точности восстановления распределений по размерности  $D_F$  по сравнению с ВС-методом.

### ПРИЛОЖЕНИЕ А

Одной из основных характеристик фрактала является размерность, значение которой зависит от динамики его образования. Фракталы характеризуются различными размерностями: Хаусдорфа–Безиковича, Минковского (клеточной) и др. [2, 3].

Размерность Хаусдорфа–Безиковича  $D_H$  называется фрактальной и определяется как значение  $\delta$ , при котором мера  $M_\delta$  имеет конечное значение:

$$M_\delta = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N l_i^\delta. \quad (5)$$

Здесь оператор  $\inf$  означает минимальное из всех возможных покрытий  $K$  рассматриваемого множества,  $\{l_i\}$  — диаметры шаров покрытия, не превышающие значения  $\epsilon$ . Величина  $\epsilon^{-1}$  называется разрешением.

Размерность Минковского (клеточная размерность)  $D_b$  определяется по формуле

$$D_b = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta}. \quad (6)$$

Здесь  $N(\delta)$  — количество пробников размером  $\delta$ , покрывающих объект. Для фракталов с независимым делением (прил. Б) клеточная размерность совпадает с размерностью Хаусдорфа–Безиковича, а для фракталов с зависимым и комбинированным делением (прил. Б) они различны ( $D_b > D_H$ ). Клеточная размерность является более грубой характеристикой, так как предполагает одинаковую длину частей фрактала на одном уровне.

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

В данной работе рассматриваются различные типы фракталов (с независимым, зависимым и комбинированным делением частей), которые являются разновидностями канторовской пыли.

Рассмотрим фракталы с независимым делением частей. Наиболее известным представителем этого типа является триадное канторовское множество. Процесс формирования этого фрактала представлен на рис. 11, *а*. Пусть исходное множество представляет собой отрезок  $[-5; 5]$ . Условно разделим его на три части. На первом уровне фрактала остаются первая и третья части. На последующих уровнях процесс деления повторяется для каждой из оставшихся частей. Исходное множество условно делится на  $n = P^{\text{lev}}$  частей, где  $\text{lev}$  — уровень, а  $P$  — основание образования фрактала. Для триадного канторовского множества  $P$  равно трем. Каждая из частей делится независимо, поэтому такой тип фракталов будем называть фракталами с независимым делением частей.

На рис. 11, *б* представлен процесс формирования фрактала с зависимым делением частей. Исходное множество (отрезок  $[-5; 5]$ ) условно делится на четыре части. На первом уровне фрактала остаются первая, третья и четвертая части. На последующих уровнях формирования фрактала процесс деления повторяется с учетом того, что третья и четвертая части представляют собой единый отрезок (зависимое деление частей). Основание  $P$  рассмотренного фрактала равно четырем.

Процесс образования фрактала с комбинированным делением частей показан на рис. 11, *в*. Исходное множество условно делится на  $n = 5^{\text{lev}}$  частей (основание фрактала  $P = 5$ ). В каждом акте деления остаются вторая, третья и четвертая части. Несмотря на то, что оставшиеся части представляют собой единый отрезок, в процессе деления

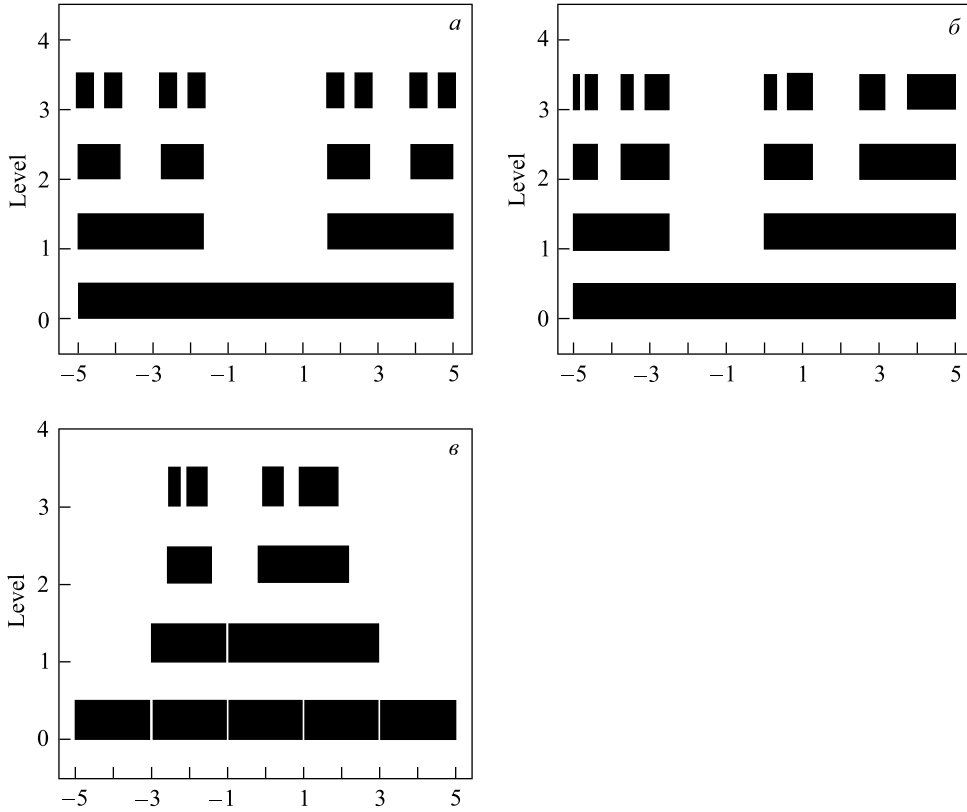


Рис. 11. Процесс формирования фракталов с независимым (а), зависимым (б) и комбинированным (в) делением

вторая часть делится независимо, а третья и четвертая части рассматриваются как единый объект (делятся зависимо). Такой процесс формирования фрактала будем называть комбинированным.

### ПРИЛОЖЕНИЕ В

В алгоритме SePaC [6–11] формирование наборов степенных распределений начинается с максимального основания  $P_{\max}$ . Если  $p$ -адический порядок  $k = \text{ord}_p(P_{\max})$  числа  $P_{\max} \geq 1$ , то рассматриваемый набор используется для построения степенных распределений с основанием  $P = p^m$ , где  $p$  — простое,  $m, k$  — целые числа и  $1 \leq m \leq k$ . Время работы алгоритма сокращается, если построение степенных распределений начинать не с наибольшего  $P_{\max}$ , а с наименьшего  $P_{\min}$  основания с учетом уменьшения числа рассматриваемых уравнений. Это уменьшение вызвано либо невыполнением условия точности (2) для рассматриваемого основания  $P$ , либо нахождением основания  $P < P_{\max}$ , удовлетворяющего условию (2) на всех уровнях. В связи с модификацией алгоритма название метода сохраняется, а аббревиатура SePaC расшифровывается следующим образом: System of equations of  $P$ -basic Coverage.

Напомним определение  $p$ -адического порядка  $k = \text{ord}_p(X)$  числа  $X$  [12]:

1) если  $X$  — целое число, то порядок  $\text{ord}_p(X)$  — наибольшая степень простого числа  $p$ , такая, что  $p^{\text{ord}_p(X)}$  является делителем  $X$ ;

2) если  $X$  — рациональное число ( $X = a/b$ , где  $a$  и  $b$  — целые числа), то порядок  $\text{ord}_p(X) = \text{ord}_p(a) - \text{ord}_p(b)$ ;

3) если  $X = 0$ , то порядок  $\text{ord}_p(0) = \infty$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sjöstrand T., Mrenna S., Skands P.* PУТНIA 6.4 Physics and Manual // JHEP. 2006. V.0605. P.026. hep-ph/0603175.
2. *Mandelbrot B.* The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman, 1982.
3. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
4. *Кроновер Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 332 с.
5. *Dedovich T., Tokarev M.*  $P$ -adic Coverage Method in Fractal Analysis of Showers // Phys. Part. Nucl. Lett. 2011. V. 8, No. 6. P. 521–532.
6. *Dedovich T., Tokarev M.* Method of Systems of the Equations of  $P$ -adic Coverages for Fractal Analysis of Events // Phys. Part. Nucl. Lett. 2011. V. 9, No. 6. P. 552–566.
7. *Dedovich T., Tokarev M.* Comparison of Fractal Analysis Methods in the Study of Fractals with Independent Branching // Phys. Part. Nucl. Lett. 2013. V. 10, No. 6. P. 481–490.
8. *Dedovich T., Tokarev M.* Analysis of Fractal with Dependent Branching by Box Counting,  $P$ -adic Coverages and System of Equations of  $P$ -adic Coverages // Ibid. P. 491–500.
9. *Dedovich T., Tokarev M.* Analysis of Fractals with Combined Partition // Phys. Part. Nucl. Lett. 2016. V. 13, No. 2. P. 169–177.
10. *Dedovich T., Tokarev M.* A Two-Step Procedure of Fractal Analysis // Ibid. P. 178–189.
11. *Dedovich T., Tokarev M.* Fractal Reconstruction in the Presence of Background // Phys. Part. Nucl. Lett. 2017. V. 14, No. 6. P. 865–873.
12. *Коблиц Н.*  $p$ -адические числа,  $p$ -адический анализ и дзета-функции. М.: Мир, 1981. 192 с.

Получено 18 декабря 2018 г.