Письма в ЭЧАЯ. 2020. Т. 17, № 5(230). С. 749

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

UNIVERSAL COCYCLES AND THE GRAPH COMPLEX ACTION ON HOMOGENEOUS POISSON BRACKETS BY DIFFEOMORPHISMS

R. Buring [a,1], *A. V. Kiselev* [b,c,2]

[a] Mathematical Institute, Johannes Gutenberg University of Mainz, Mainz, Germany

[b] Bernoulli Institute for Mathematics, Computer Science and Artificial Intelligence, University of Groningen, Groningen, the Netherlands

[c] Institut des Hautes Études Scientifiques, Bures-sur-Yvette, France

The graph complex acts on the spaces of Poisson bi-vectors $\mathcal{P}$ by infinitesimal symmetries. We prove that whenever a Poisson structure is homogeneous, i.e., $\mathcal{P} = \mathrm{L}_{\mathbf{V}}(\mathcal{P})$ w.r.t. the Lie derivative along some vector field $\mathbf{V}$, but not quadratic (the coefficients of $\mathcal{P}$ are not degree-two homogeneous polynomials), and whenever its velocity bi-vector $\dot{\mathcal{P}} = \mathcal{Q}(\mathcal{P})$, also homogeneous w.r.t. $\mathbf{V}$ by $\mathrm{L}_{\mathbf{V}}(\mathcal{Q}) = n\mathcal{Q}$ whenever $\mathcal{Q}(\mathcal{P}) = \mathbf{Or}(\gamma)(\mathcal{P}^{\otimes^n})$ is obtained using the orientation morphism $\mathbf{Or}$ from a graph cocycle γ on n vertices and $2n-2$ edges, then the 1-vector $\mathcal{X} = \mathbf{Or}(\gamma)(\mathbf{V}\otimes\mathcal{P}^{\otimes^{n-1}})$ is a Poisson cocycle. Its construction is uniform for all Poisson bi-vectors $\mathcal{P}$ satisfying the above assumptions, on all finite-dimensional affine manifolds M. Still, if the bi-vector $\mathcal{Q} \not\equiv 0$ is exact in the respective Poisson cohomology, so there exists a vector field $\mathcal{Y}$ such that $\mathcal{Q}(\mathcal{P}) = [\![\mathcal{Y}, \mathcal{P}]\!]$, then the universal cocycle $\mathcal{X}$ does not belong to the coset of $\mathcal{Y} \bmod \ker [\![\mathcal{P}, \cdot]\!]$. We illustrate the construction using two examples of cubic-coefficient Poisson brackets associated with the R-matrices for the Lie algebra $\mathfrak{gl}(2)$.

Комплекс графов действует инфинитезимальными симметриями на пространствах пуассоновых бивекторов $\mathcal{P}$. В предположении однородности пуассоновой структуры $\mathcal{P} = \mathrm{L}_{\mathbf{V}}(\mathcal{P})$, т. е. ее равенства производной Ли вдоль векторного поля $\mathbf{V}$, а также при условии, что скобка не квадратична (не все коэффициенты бивектора $\mathcal{P}$ суть полиномы второй степени), и в предположении, что бивектор $\dot{\mathcal{P}} = \mathcal{Q}(\mathcal{P})$ скорости скобки однороден также относительно поля $\mathbf{V}$ посредством $\mathrm{L}_{\mathbf{V}}(\mathcal{Q}) = n\mathcal{Q}$, а сам бивектор $\mathcal{Q}(\mathcal{P}) = \mathbf{Or}(\gamma)(\mathcal{P}^{\otimes^n})$ есть результат применения морфизма ориентации $\mathbf{Or}$ к графу-коциклу γ с вершинами n и ребрами $2n-2$ в каждом слагаемом, доказано утверждение теоремы: вектор $\mathcal{X} = \mathbf{Or}(\gamma)(\mathbf{V}\otimes\mathcal{P}^{\otimes^{n-1}})$ обязательно будет пуассоновым коциклом. Процедура его построения универсальна для всех пуассоновых бивекторов $\mathcal{P}$, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, притом на любых конечномерных аффинных многообразиях M. Отметим, что в случае, если бивектор $\mathcal{Q} \not\equiv 0$ окажется точным в соответствующей группе пуассоновых когомологий, т. е. если существует тривиализирующее векторное поле $\mathcal{Y}$ для $\mathcal{Q}(\mathcal{P}) = [\![\mathcal{Y}, \mathcal{P}]\!]$, то универсальный коцикл $\mathcal{X}$ не принадлежит смежному классу $\mathcal{Y} \bmod \ker [\![\mathcal{P}, \cdot]\!]$. Предложенный метод построения коцикла $\mathcal{X}$ иллюстрирован на примере двух кубических скобок Пуассона, заданных известными R-матрицами для алгебры Ли $\mathfrak{gl}(2)$.

PACS: 02.10.Ox

[1] E-mail: rburing@uni-mainz.de

[2] E-mail: A.V.Kiselev@rug.nl