Письма в ЭЧАЯ. 2021. Т. 18, № 6(238). С. 534–540

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

КВАНТОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ПЕРЕМЕННЫХ БОГОЛЮБОВА

М. В. Останина[1], *П. А. Томази-Вшивцева*[2]
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Представлена первая из серии из трех статей, в которой предлагается способ квантования нелинейных полей на классическом фоне при помощи переменных Боголюбова. В первой статье изложены основные идеи. В последующих статьях схема квантования будет развита на примере нестационарных взаимодействующих полей — скалярного и гравитационного. Метод позволяет совместить точный учет законов сохранения и избежать проблемы нулевых мод.

The first of a series of three articles in which we propose a method of quantization of nonlinear fields on the classical background by using Bogolyubov variables is presented. It outlines the main ideas. In subsequent articles, the quantization scheme will be developed on the example of nonstationary interacting fields — scalar and gravitational. The method allows one to combine accurate accounting of conservation laws and avoid the problem of zero modes.

PACS: 03.70.+k; 03.65.Fd; 04.60.-m

ВВЕДЕНИЕ

В данной статье рассматривается схема квантования нелинейных полей на классическом фоне. Теории квантования на классическом фоне сталкиваются с двумя принципиальными трудностями.

Во-первых, и это главное — проблема законов сохранения.

Явное выделение классической компоненты приводит к нарушению законов сохранения. Запишем явное выделение классического поля в форме

$$\hat{\phi}(x) = \phi_0(x)\hat{E} + \hat{\phi}_1(x).$$

Многие системы имеют непрерывные пространственные симметрии, и каждая теория, претендующая на роль общей теории, должна быть релятивистски инвариантной. Предположим, что известно представление группы симметрии, которой обладает система (пространственная или симметрия относительно преобразования группы Пуанкаре). Оператор $\hat{S}$, описывающий преобразование этой группы, не меняет классическое поле:

$$\hat{S}\hat{\phi}(x)\hat{S}^{+} = \phi_0(x) + \hat{S}\hat{\phi}_1(x)\hat{S}^{+},$$

[1] E-mail: kite_qwerty@yahoo.com
[2] E-mail: polina@physics.msu.ru

т. е.

$$\hat{\phi}(x') = \phi_0(x) + \hat{\phi}_1(x').$$

Очевидно, что в таком случае классическое поле можно рассматривать как внешнее.

Второй трудностью квантования на классическом фоне является проблема нулевых мод. Для разрешения этих проблем требуется развитие особого метода квантования на классическом фоне. Этим особым методом квантования может служить метод групповых переменных Боголюбова.

В 1950 г. Н. Н. Боголюбов в работе [1], посвященной проблеме полярона «Об одной новой форме адиабатической теории возмущений в задаче о взаимодействии частицы с квантовым полем», сформулировал метод решения проблемы. Этот метод фактически является квантовой версией классического метода Боголюбова–Крылова в теории нелинейных колебаний. В случаях систем с адиабатической связью необходимо произвести переход к некоторым обобщенным координатам, что позволяет выделить переменные, от которых зависит волновая функция. Эти переменные действием трансляций подвергаются простому сдвигу, при этом остальные переменные выбираются трансляционно-инвариантными. Волновая функция, выраженная в терминах новых переменных, имеет простые трансформационные свойства относительно преобразований группы трансляций. Получаются некоторые новые обобщенные координаты, канонически сопряженные импульсы которых совпадают с интегралами движения, которые определены групповыми свойствами гамильтониана. Таким образом, предложенный метод позволяет строить состояния, являющиеся собственными для операторов полного импульса системы, и одновременно обеспечивает выполнение соответствующих законов сохранения.

Однако если группа инвариантности системы включает преобразование времени, то возникают трудности, связанные с тем, что для получения выражения для гамильтониана как генератора временных трансляций нужно знать уравнения движения, а для записи уравнений движения в явном виде нужно знать выражение для гамильтониана, поэтому был предложен способ квантования, который позволяет использовать переменные Боголюбова для систем, инвариантных относительно группы Пуанкаре. В данной работе способ квантования развит для систем, имеющих произвольную группу симметрии (при условии, что мы знаем представление этой группы), в том числе и для нестационарных систем.

1. ОСНОВНЫЕ ИДЕИ СХЕМЫ КВАНТОВАНИЯ

В этом разделе мы представляем схематично основные идеи квантования бозонных полей методом переменных Боголюбова. Эта схема применима для любых систем, допускающих существование инвариантных симплектических структур вида

$$\omega(f(x), g(x)) = \int\limits_{\Sigma} (f_n(x)g(x) - f(x)g_n(x))\, dx, \tag{1}$$

где Σ — некоторая пространственноподобная поверхность, на которой задано поле нормалей $\mathbf{n}$; $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции, определенные на Σ, $f_n(x)$ обозначает нормальную производную $f(x)$ на Σ. (Будем считать, что нам известно представление группы симметрии, относительно которой система инвариантна.)

Развитие схемы квантования происходит в три основных этапа.

2. ВВЕДЕНИЕ НОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

На первом этапе мы переходим к новым переменным — групповым переменным Боголюбова — и все рассматриваемые величины мы выражаем в терминах новых переменных.

Пусть у нас есть некоторая система полей Φ, обладающая некоторой пространственной симметрией, которая обусловливает существование интегралов движения $O(\Phi)$.

Мы можем провести квантование системы путем следующей замены:

$$\Phi \to \hat{q}, \qquad \Phi_n \to \hat{p}.$$

Если эти операторы удовлетворяют формальному коммутационному соотношению

$$[\hat{q}(x), \hat{p}(x')] = i\delta(x - x'),$$

то мы можем трактовать $\hat{q}(x)$ и $\hat{p}(x)$ как операторы координаты и импульса осцилляторов поля и развить схему вторичного квантования.

Определим явный вид операторов $\hat{q}(x)$ и $\hat{p}(x)$ как функционалов от некоторых функций f на некоторой пространственноподобной поверхности Σ следующим образом:

$$\hat{q}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(f(x) + i\frac{\delta}{\delta f_n(x)}\Big), \qquad \hat{p}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(f_n(x) - i\frac{\delta}{\delta f(x)}\Big).$$

Они эрмитовы в пространстве, где скалярное произведение имеет вид

$$\langle F_1 | F_2 \rangle = \int Df Df_n F_1[f, f_n] F_2[f, f_n],$$

и удовлетворяют формальному коммутационному соотношению

$$[\hat{q}(x), \hat{p}(x')] = i\delta(x - x').$$

(Следует, однако, отметить, что имеется другая пара самосопряженных операторов, построенных из $f(x)$, $f_n(x)$, $\delta/\delta f(x)$ и $\delta/\delta f_n(x)$, которые удовлетворяют тем же самым коммутационным соотношениям. Таким образом, число возможных состояний поля оказывается удвоенным и требует редукции. Поэтому мы поступим следующим образом: разовьем схему теории возмущений, невзирая на появление лишних состояний. После этого сделаем редукцию числа состояний, т. е. эта редукция будет по сути своей динамической схемой.)

Теперь определим преобразование Боголюбова для функции $f(x)$.

Как будет видно из дальнейшего, это преобразование связано с явным выделением классической компоненты поля. Но физический смысл будет раскрыт после получения уравнений, которым должны соответствовать компоненты поля $f(x)$, а пока это просто некоторое формальное математическое преобразование.

Определим преобразование Боголюбова следующим образом:

$$f(x) = v(x') + u(x'),$$

здесь переменные x' связаны с x групповым преобразованием:

$$x' = F(x,a), \qquad x'' = F\left(F(x,a),b\right) = F(x,c), \qquad c = \varphi\left(a,b\right).$$

Вариации координат при вариации параметров группы a:

$$\left(\delta x'\right)^i = \xi_s^i(x')B_p^s(a)\delta a^p,$$

где $i = 0,1,2,3$ — номер координаты; $p = 1,\ldots,r$ и k — число генераторов группы, групповые свойства преобразования определены тензором $B_p^s(a)$.

В преобразовании Боголюбова $f(x) = v(x')+u(x')$ предполагаем, что $v(x') \gg u(x')$ и $(u(x'),a)$ — независимые новые переменные (переменные Боголюбова). Явно выделенная большая компонента зависит от x', так же как и малая часть. Тем самым мы восстанавливаем инвариантность относительно группы преобразований, которая была нарушена явным выделением классической компоненты (это было отмечено выше, в разд. 1).

Однако рассмотрение переменных a как независимых приводит к тому, что в правой части нашего уравнения становится на k переменных больше, чем в левой. Чтобы уравнять число переменных, наложим на $u(x')$ некоторые инвариантные условия.

Сделаем это следующим образом: выберем некоторые функции $N^a(x')$ (число функций равно числу параметров группы) и наложим на функцию $u(x)$ условия

$$\omega(N^a, u) = 0,$$

напомним, что $\omega(N^a, u)$ — инвариантная симплектическая форма (1).

Использование этого условия позволяет получить уравнения, которые определяют групповые переменные как функционалы исходных $f(x)$ и $f_n(x)$ на Σ в дифференциальной форме:

$$\frac{\delta\tau^a}{\delta f(x)} = -Q_b^a\tilde{N}_n^b(x'), \qquad \frac{\delta\tau^a}{\delta f_n(x)} = Q_b^a\tilde{N}^b(x'),$$

где Q_b^a — решение уравнения

$$Q_b^a = \delta_b^a - R_c^a Q_b^c.$$

$\tilde{N}^a$ — линейная комбинация N^a такая, что выполняются соотношения $\omega(\tilde{N}^a, v_b) = 0$; и R_c^a является c-числом, полученным с помощью $v(x')$ и $u(x')$.

Напомним, что у нас определены квантовые операторы координаты и импульса. Поскольку они определяются через $f(x)$ и $f_n(x)$, а $f(x)$ и $f_n(x)$ выражены в терминах новых переменных $u(x'), \tau$, то, соответственно, и операторы $\hat{q}(x), \hat{p}(x)$ и, следовательно, интегралы движения O выражены через $u(x')\tau$, и квантование теперь можно провести в новых переменных (Боголюбова).

3. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

В терминах новых переменных $\hat{q}(x)$ и $\hat{p}(x)$ — ряды по степеням $u(x')$. Следовательно, и интегралы движения O системы тоже являются рядами:

$$O = O_{-2} + O_{-1} + O_0 + O_1 + \ldots$$

Прямые вычисления показывают, что O_{-2} — c-числа, а операторы O_{-1} линейны по $u(x')$, $u_n(x')$, $\partial/\partial u(x')$, $\partial/\partial u_n(x')$. Поскольку не существует нормируемых собственных векторов таких операторов, то для корректного развития теории возмущений нужно, чтобы они были тождественно равны нулю. Это требование выполняется, если (при соблюдении некоторых граничных условий) классическая компонента удовлетворяет уравнениям движения. Тогда операторы O_{-1} равны нулю.

Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что классическая часть системы является решением задачи Коши с граничными условиями на Σ.

То есть, анализируя полученные в новых переменных выражения, мы получаем условия, при которых применение теории возмущений корректно, а именно: классическая часть должна удовлетворять некоторым уравнениям. Эти уравнения оказываются совпадающими с уравнениями Эйлера–Лагранжа. Однако этот результат не является тривиальным: он был получен не как следствие вариационного принципа, а как условие развития пертурбативной схемы для нашей системы в терминах новых переменных. Причем для получения этих уравнений нам не нужно было знать структуру гамильтониана как генератора трансляций по времени.

Итак, на втором этапе мы получаем уравнения движения для классической компоненты.

4. ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ

Далее следует построить пространство состояний системы.

Выше мы упомянули, что число возможных полевых состояний удвоено по сравнению с реальной ситуацией, и потому необходима редукция числа состояний.

Прежде всего проанализируем число независимых переменных. Первоначальное число независимых переменных было ∞. После определения групповых переменных Боголюбова (они, напомним, рассматриваются как независимые) это число стало $\infty + k$. Это число было удвоено из-за способа определения операторов рождения–уничтожения: $(\infty + k) \cdot 2 = 2 \cdot \infty + 2 \cdot k$. Дополнительные условия, которые вводятся вместе с определением преобразования Боголюбова, уменьшают число независимых переменных на k (число параметров группы). И в настоящий момент число возможных полевых состояний — $2 \cdot \infty + k$.

Выделим из полевых переменных $u(x')$ k переменных r_a, которые не имеют никакого физического смысла и связаны с методом реализации теории возмущений. Тогда число состояний $2 \cdot \infty$ и поле можно описывать через переменные $w(x')$, которые определены следующим образом:

$$u(x') = w(x') + \tilde{N}^a(x') r_a, \qquad u_n(x') = w_n(x') + \tilde{N}^a_n(x') r_a.$$

Необходимая редукция числа состояний может быть сделана следующим образом: предположим, что состояние поля определено функционалами $w(x')$ и $w_n(x')$, на которых $\delta/\delta w(x')$ и $\delta/\delta w_n(x')$ действуют следующим образом:

$$\frac{\delta}{\delta w(x')} \longrightarrow \frac{\delta}{\delta w(x')} - i w_n(x'), \qquad \frac{\delta}{\delta w_n(x')} \longrightarrow -i w(x').$$

(Этого можно добиться, например, введением голоморфного представления в некотором изоморфно сопряженном пространстве.) После редукции мы будем иметь следующие независимые переменные:

$$(k \text{ групповых параметров}) + (k \text{ переменных } r_a) +$$
$$(\ \infty - k - \text{мерное пространство функций } w\ ).$$

Переменные r_a не имеют физического смысла. Они появились как остаток редукции пространства состояний в терминах групповых переменных Боголюбова. Выделение этих переменных связано со структурой интегралов движения в нулевом порядке и является динамическим по природе.

На этом этапе построения нашей схемы мы добиваемся корректного числа степеней свободы системы, которое будет равно реальному его числу. В ходе реализации редукции мы получим уравнения движения квантовой поправки для нашего поля (уравнение окажется нелинейным). Также на этом этапе получаются явные выражения для операторов рождения–уничтожения квантов поля и спектр частот, т. е. фактически энергетический спектр. Кроме того, мы получим выражения для интегралов движения как генераторов соответствующих преобразований группы симметрии

$$O_0 = i\Im^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau^{\alpha}},$$

где $\Im^{\alpha}$ отражает свойства группы симметрии системы.

Отметим, что уравнения движения классической части и явный вид гамильтониана получены независимо, т. е. преодолена основная трудность описания нестационарных систем, которая рассмотрена во введении.

Также в нулевом порядке мы получим уравнения Гейзенберга в терминах новых переменных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, поскольку нелинейное бозонное поле всегда содержит классическую компоненту, возникает проблема квантования на классическом фоне. При явном выделении классического поля возникает проблема законов сохранения и нулевых мод. Представленная в этой статье схема квантования с помощью переменных Боголюбова позволяет разрешить эти проблемы, т. е. совместить точный учет законов сохранения и избежать проблемы нулевых мод. В последующих статьях мы применим предложенный способ для квантования взаимодействующих гравитационного и скалярного полей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбов Н. Н.* Об одной новой форме адиабатической теории возмущений в задаче о взаимодействии частицы с квантовым полем // УМЖ. 1950. Т. 2, № 2. С. 3–24.
2. *Тябликов С. П.* Адиабатическая форма теории возмущений в задаче о взаимодействии частицы с квантовым полем // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. С. 377–383.
3. *Москаленко В. А.* К теории теплового возбуждения полярона // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 346–354.
4. *Солодовникова Е. П., Тавхелидзе А. Н., Хрусталев О. А.* Осцилляторные уровни частицы как следствие сильного взаимодействия с полем // ТМФ. 1972. Т. 10, № 2. С. 162–181.
5. *Солодовникова Е. П., Тавхелидзе А. Н., Хрусталев О. А.* Преобразования Боголюбова в теории сильной связи. II // ТМФ. 1972. Т. 11, № 3. С. 317–330.
6. *Солодовникова Е. П., Тавхелидзе А. Н., Хрусталев О. А.* Преобразования Боголюбова в теории сильной связи. III // ТМФ. 1972. Т. 12, № 2. С. 164–178.
7. *Разумов А. В., Хрусталев О. А.* Применение метода Н. Н. Боголюбова к квантованию бозонных полей в окрестности классического решения // ТМФ. 1976. Т. 29, № 3. С. 300–308.
8. *Боголюбов П. Н., Дорохов А. Е.* Об устойчивости классических решений уравнений Янга–Миллса с источником // ТМФ. 1982. Т. 51, № 2. С. 224–233.
9. *Christ N. H., Lee T. D.* Quantum Expansion of Soliton Solution // Phys. Rev. D. 1975. V. 12, No. 6. P. 1606–1627.
10. *Tomboulis E.* Canonical Quantization of Nonlinear Waves // Ibid. P. 1678–1683.
11. *Шургая А. В.* Метод коллективных переменных в релятивистской теории // ТМФ. 1983. Т. 57, № 3. С. 392–405.
12. *Шургая А. В.* Метод коллективных переменных и обобщенный гамильтонов формализм // ТМФ. 1980. Т. 45, № 1. С. 46–53.
13. *Тюрин Н. Е., Шургая А. В.* Метод сильной связи в модели с фиксированным источником // ТМФ. 1973. Т. 16, № 2. С. 197–212.
14. *Комаров Л. И., Крылов Е. В., Нгуен Фыонг Лан, Феранчук И. Д.* Преобразование Боголюбова в теории сильной связи со скалярным полем // ТМФ. 1977. Т. 32, № 2. С. 262–270.
15. *Хрусталев О. А., Чичикина М. В., Спирина Е. Ю.* Нестационарный полярон // ТМФ. 2000. Т. 122, № 3. С. 417–425.
16. *Хрусталев О. А., Чичикина М. В.* Переменные Боголюбова для релятивистских систем // ТМФ. 1997. Т. 111, № 3. С. 417–425.
17. *Хрусталев О. А., Чичикина М. В.* Переменные Боголюбова в релятивистской квантовой теории поля // ТМФ. 1997. Т. 111, № 2. С. 242–251.
18. *Khrustalev O. A., Tchitchikina M. V.* Bogoliubov Group Variables in Relativistic Models // Phys. Part. Nucl. 2000. V. 31, No. 7A. P. 215–219.

Получено 1 января 2021 г.