Письма в ЭЧАЯ. 2022. Т. 19, № 4(243). С. 223–229

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

МОЖЕТ ЛИ НАШЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ ПРОИСХОДИТЬ ИЗ ПРОСТРАНСТВА АНТИ-ДЕ СИТТЕРА?

М. В. Алтайский [а, 1], *Р. Радж* [б, 2]

[а] Институт космических исследований РАН, Москва

[б] Университет им. М. Ганди, Коттаям, Керала, Индия

Представлена модель, показывающая, что наше четырехмерное пространство, обладающее сигнатурой Минковского $(+,-,-,-)$ и почти исчезающей положительной кривизной, могло образоваться путем древовидного b-адического процесса деления одного дискретного объекта и пространство AdS_5 связано именно с этим процессом.

We present a model showing that our four-dimensional spacetime with the signature $(+,-,-,-)$ and almost vanishing positive curvature may have originated from a b-ary tree-like branching of a single discrete entity, and the AdS_5 space is related to this branching process.

PACS: 04.20.Cv

Стандартная космологическая модель (ΛCDM) основана на теории Большого взрыва. Последняя объясняет эволюцию наблюдаемой Вселенной как последовательное расширение горячей и очень плотной материи от масштабов квантовой гравитации до современного размера Вселенной [1]. На масштабах квантовой гравитации пространство предполагается дискретным, возможно, представляет собой спиновую сеть [2, 3]. По этой причине важность вопроса о происхождении нашего непрерывного и дифференцируемого пространства-времени из дискретного невозможно переоценить [2].

«Обратная инженерия» Вселенной, расширяющейся под действием темной энергии, холодной темной материи и обычной материи согласно уравнениям Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + \Lambda g_{\alpha\beta} = -\kappa T_{\alpha\beta}, \tag{1}$$

приводит к сингулярности Большого взрыва.

[1] E-mail: altaisky@rssi.ru

[2] E-mail: robuka97@gmail.com

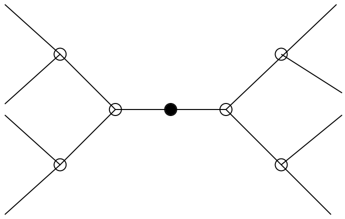

Рис. 1. Самоподобная фрагментация одного объекта (•) на b частей согласно b-адическому дереву. Показан случай $b = 2$

На эту проблему можно взглянуть и с другой точки зрения. Допустим, у нас имеется одна дискретная сущность, которая фрагментирует на отдельные части, согласно графу, изображенному на рис. 1. Можем ли мы сконструировать четырехмерное де-ситтеровское пространство-время с сигнатурой Минковского, используя процесс фрагментации с некоторым фиксированным значением b?

b-адические деревья, т. е. деревья с фиксированным фактором ветвления, равным b, тесно связаны с гиперболическими пространствами. В самом деле, если мы попытаемся определить «длину окружности» на дереве как число узлов, находящихся на расстоянии от корня, в точности равном r, то эта длина окажется пропорциональной b^r [4]. Для достаточно больших значений r эта зависимость совпадает с длиной окружности в гиперболическом пространстве $l(r) = 2\pi \sinh(\zeta r)$, если положить $\zeta = \ln b$. Строго говоря, регулярности дерева, т. е. точного самоподобия процесса ветвления, не требуется: как только некоторая классификация узлов, элементов множества, хотя бы приблизительно является деревом, соответствующее пространство имеет отрицательную кривизну [5]. Этот факт широко используется при исследовании различных классификаций в интернете, социальных сетях и др. (см., например, работу [4] и ссылки в ней).

Решение Фридмана–Леметра–Робетсона–Уокера (FLRW) для уравнений Эйнштейна (1) приводит к однородной и изотропной метрике

$$dl^2 = c^2 dt^2 - S^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right], \tag{2}$$

которая определяет расширяющуюся Вселенную ($k > 0, \Lambda = 0$) в терминах системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$2\frac{\ddot S}{S} + \frac{\dot S^2 + kc^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{c^2} T_i^i, \quad i = \overline{1,3}, \qquad \frac{\dot S^2 + kc^2}{S^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} T_0^0, \tag{3}$$

где T_α^β — тензор энергии-импульса полей материи; точки, как обычно, обозначают дифференцирование по временной переменной t.

Функция $S(t)$ понимается как скорость расширения Вселенной, которую испытывает любой локальный наблюдатель в момент времени t в любой точке пространства. Однако за пределами модели (2) не является самоочевидным утверждение о том, что скорость расширения Вселенной — однозначная функция локального времени. Вселенная, например, может быть связной, но не односвязной [6], и вычисление S вдоль различных траекторий может давать различные результаты (рис. 2). По этой причине представляется более общим рассматривать радиус (или кривизну) Вселенной в качестве *независимой координаты*, отражающей глобальную историю Вселенной.

В этом смысле можно представить, что мы живем на четырехмерной границе пятимерной гравитации, которая возникает, например, в низкоэнергетическом пределе теории струн [7, 8]. Если бы расширение Вселенной остановилось (мысленный эксперимент!), наше локальное пространство-время должно было бы стать пространством

Минковского: скорость света должна быть одной и той же во всех инерциальных системах отсчета.

Нашей целью является объяснение возможности появления локального пространства-времени положительной кривизны с сигнатурой Минковского $(+,-,-,-)$ в терминах некоторого глобального процесса фрагментации. Ситуация напоминает надувание воздушного шарика, поверхностью которого является наше пространство-время. Изменения полей материи, живущих на поверхности шарика, происходят вследствие: 1) локальной эволюции, имеющей место в локальной системе отсчета; 2) процесса фрагментации, приводящего к раздуванию шарика. Таким образом, число «скачков» от начала инфляции играет роль, сходную с ролью обычного локального времени, но не идентичную ей. Локальным наблюдателям, находящимся на поверхности шарика, доступно лишь измерение интервалов локального времени, но не числа скачков, т. е. *объемная геометрия*. Если процесс фрагментации будет кем-то остановлен на определенном числе скачков (ветвлений), то наша игрушечная Вселенная будет заморожена на поверхности постоянной кривизны.

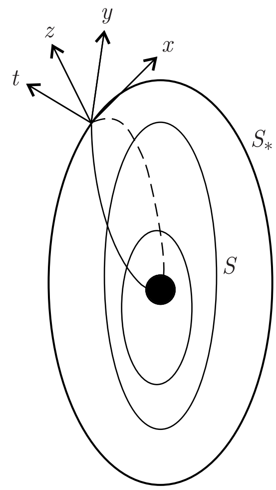

Рис. 2. Различные пути от Большого взрыва могут приводить к различным значениям локального времени (t) на одной и той же поверхности постоянной кривизны (S)

Поскольку описанная выше динамическая структура имеет характер дерева, она должна быть описана пятимерным пространством отрицательной кривизны — дополнительная «временная» координата ρ требуется для описания процесса фрагментации. Такое пятимерное пространство может быть сконструировано путем вложения двухвременного аналога сферы Минковского

$$x_0^2 + x_6^2 - \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = L^2 \tag{4}$$

в шестимерное пространство Минковского с метрикой

$$dl^2 = dx_0^2 + dx_6^2 - \sum_{i=1}^{4} dx_i^2.$$

Полученное таким образом пространство известно как AdS_5 и широко известно в контексте соответствия AdS/CFT в квантовой теории поля [9, 10]. Антидеситтеровское пространство AdS_5 инвариантно относительно группы симметрии $SO(2,4)$, что обуславливает естественный выбор координат на нем:

$$\begin{aligned} x_0 &= L\cosh\rho\cos\tau, \\ x_6 &= L\cosh\rho\sin\tau, \\ x_i &= L\sinh\rho\;\Omega_i, \quad i = \overline{1,4}, \end{aligned} \tag{5}$$

где Ω_i — координаты на единичной сфере в четырех измерениях. Гиперболическая координата ρ представляет собой искомую координату фрагментации. Таким образом, мы ожидаем, что каждое сечение $\rho = \mathrm{const}$ есть четырехмерное пространство-время, замороженное на данном шаге фрагментации.

Выражая метрику на AdS_5 в координатах (5) и полагая, для краткости, $L = 1$ здесь и далее, получим

$$\begin{aligned} dl^2 &= \cosh^2\rho\, d\tau^2 - d\rho^2 - \sinh^2\rho\, d\Omega_3^2, \\ d\Omega_3^2 &= d\chi^2 + \sin^2\chi\, d\theta^2 + \sin^2\chi \sin^2\theta\, d\phi^2, \end{aligned} \tag{6}$$

где $d\Omega_3^2$ — квадрат интервала на единичной сфере S^3:

$$\begin{aligned} x_4 &= \cos\chi, & x_1 &= \sin\chi\cos\theta, \\ x_2 &= \sin\chi\sin\theta\cos\phi, & x_3 &= \sin\chi\sin\theta\sin\phi. \end{aligned}$$

Используя координаты $[\tau, \chi, \theta, \phi]$ и метрику (6) на гиперповерхности ($\rho = \mathrm{const}$), мы получаем локальную метрику нашей четырехмерной вселенной:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \cosh^2\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sinh^2\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sinh^2\rho\sin^2\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sinh^2\rho\sin^2\chi\sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad \mu, \nu \in [\tau, \chi, \theta, \phi]. \tag{7}$$

Символы Кристоффеля для метрики (7) имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma^{\chi}_{\theta\theta} &= -\cos\chi\sin\chi, \quad \Gamma^{\chi}_{\phi\phi} = -\cos\chi\sin\chi\sin^2\theta, \\ \Gamma^{\theta}_{\chi\theta} &= \Gamma^{\phi}_{\chi\phi} = \cot\chi, \quad \Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\cos\theta\sin\theta, \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \cot\theta. \end{aligned}$$

Метрика (7) определяет пространство-время положительной кривизны, в котором отличные от нуля компоненты тензора Римана равны

$$\begin{aligned} R^{\theta}{}_{\chi\theta\chi} &= R^{\phi}{}_{\chi\phi\chi} = 1, \\ R^{\chi}{}_{\theta\theta\chi} &= -R^{\phi}{}_{\theta\phi\theta} = -\sin^2\chi \\ R^{\chi}{}_{\phi\phi\chi} &= R^{\theta}{}_{\phi\phi\theta} = -\sin^2\chi\sin^2\theta, \end{aligned}$$

где

$$R^{l}{}_{ijk} = \Gamma^{l}_{ik,j} - \Gamma^{l}_{ij,k} + \Gamma^{m}_{ik}\Gamma^{l}_{mj} - \Gamma^{m}_{ij}\Gamma^{l}_{mk}.$$

Скалярная кривизна $R = g^{ik}R_{ik}$ положительна для метрики (7):

$$R = \frac{6}{\sinh^2\rho}, \tag{8}$$

при этом отличные от нуля компоненты тензора Риччи

$$R_{ql} = R^{i}{}_{qli}$$

равны

$$R_{\chi\chi} = -2, \; R_{\theta\theta} = -2\sin^2\chi, \; R_{\phi\phi} = -2\sin^2\chi\sin^2\theta.$$

Отличные от нуля компоненты тензора Эйнштейна

$$G_{ql} = R_{ql} - \frac{1}{2} g_{ql} R$$

имеют вид

$$G^{\tau}_{\tau} = -\frac{3}{\sinh^2 \rho}, \quad G^{\chi}_{\chi} = G^{\theta}_{\theta} = G^{\phi}_{\phi} = -\frac{1}{\sinh^2 \rho}. \tag{9}$$

В пределе $\rho \to \infty$ кривизна (8) обращается в нуль, и мы приходим к плоскому пространству Минковского, свободному от полей материи. Для любого конечного значения ρ тензор Эйнштейна (9) приводит к расширению Вселенной вследствие рассмотренного процесса фрагментации. Из соображений размерности мы заключаем, что для пространства AdS_n фактор ветвления должен быть равен размерности ($b = n$), и, следовательно, в нашем случае $b = 5$.

Мы не претендуем на строгое доказательство, но в случае аналитического продолжения в евклидово пространство, $\tau = \imath t$ в выражении (6), мы можем отобразить гиперповерхность ($\rho = \mathrm{const}$) на сферу S^4. Сфера S^4 допускает замещение четырехмерными симплексами, каждый из которых имеет пять вершин и пять гиперграней и может быть разбит на пять частей, соответствующих ветвям дерева. Это соответствует процессу фрагментации при $b = 5$.

Своей красотой и привлекательностью соответствие AdS/CFT во многом обязано тому факту, что теория квантовой гравитации может быть описана с помощью конформной теории поля на границе, которая является плоской. Классически конформная инвариантность может рассматриваться как масштабная инвариантность: поля ведут себя одинаково на разных масштабах, подобно тому, как это имеет место для фракталов, генерируемых путем древообразного процесса фрагментации [11]. В квантовой теории поля конформная инвариантность возможна для безмассовых полей. В этом контексте гравитация может рассматриваться как некоторая память о самоподобном процессе фрагментации, как своего рода голограмма мира, записанная на его границе [12, 13].

Наш подход расширяет эту точку зрения. Вместо того чтобы рассматривать только плоскую границу, мы рассматриваем набор различных сечений дискретного процесса фрагментации, проиндексированных с помощью числа скачков (r), отсчитанных от корня дерева ветвления; в непрерывном пределе этому соответствует гиперболическая координата ρ. Каждое такое сечение представляет нашу четырехмерную Вселенную, замороженную в фиксированный момент расширения. Чтобы понять динамику всей Вселенной, нам необходима не только динамика текущего сечения по отношению к локальному времени τ, но и вся история процесса фрагментации. Это означает, что нам необходимо знать, какие области из предыдущих сечений являются «родителями» по отношению к областям текущего сечения. Это тесно связано с энтропией запутывания [14] и должно рассматриваться в рамках формализма квантовой теории поля. В рамках нашего подхода «статическое» решение $\rho = \mathrm{const}$ имеет смысл, поскольку мы можем наполнить наше четырехмерное пространство-время квантовыми полями $\phi(t, x, y, z)$ и рассматривать их динамику в локальном времени t.

Наш подход не игнорирует стандартное фридмановское решение (FLRW); вместо этого, применяя постулат Вейля к траекториям, исходящим из Большого взрыва, мы можем рассмотреть случай

$$dS = \frac{\partial S}{\partial \tau} d\tau, \tag{10}$$

где

$$S = \sinh \rho \tag{11}$$

в соответствии с метрикой (6). Равенство (10) в нашем контексте является достаточно сильным физическим предположением. Оно говорит, что любое изменение локального времени τ и, следовательно, любая эволюция физических полей, происходят *синхронно и благодаря* изменению ρ — расширению Вселенной. Мы не хотели бы углубляться в философские проблемы, связанные с предположением (10), вместо этого мы рассмотрим некоторые формальные следствия этого предположения, проявляющиеся в пятимерном мире с метрикой (6).

Поскольку ограничение (10) превращает метрику (6) в четырехмерную метрику

$$dl^2 = \left[1 + S^2 - \frac{\dot{S}^2}{1+S^2}\right] d\tau^2 - S^2 \left[\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right], \tag{12}$$

где $r = \sin\chi$, и $d\rho = (dS)/(\sqrt{1+S^2})$, с точностью до конформного преобразования, метрика (12) эквивалентна стандартной фридмановской метрике (FLRW) (2). Ее классическая динамика во времени τ может быть изучена с помощью тензора Эйнштейна

$$\begin{aligned} G_i^i &= \frac{(S^2+1)^3\dot{S}^2 + 3S^2\dot{S}^4 - 2S(S^2+1)^3\ddot{S} - (S^2+1)^4}{S^2\left[\dot{S}^2 - (S^2+1)^2\right]^2}, \\ G_0^0 &= \frac{3}{S^2}\,\frac{(\dot{S}S)^2 + (S^2+1)^2}{\dot{S}^2 - (S^2+1)^2}, \quad i = \overline{1,3}, \end{aligned} \tag{13}$$

следующего из метрики (12). Анализ этой динамики может стать предметом отдельного исследования, но выходит за пределы данной работы.

Оставляя квантовополевой анализ для будущих исследований и пока оставаясь в рамках классического формализма, мы все же можем сказать, что фридмановское описание в терминах четырехмерных пространственно-временных координат является недостаточным для описания всего многообразия наблюдаемых явлений, и нам может потребоваться новая *независимая* инфляционная координата ρ для описания нашей расширяющейся Вселенной.

Когда эта работа уже была почти подготовлена, авторам стало известно о недавней публикации [15], где был предложен экспоненциальный древовидный рост плотности темной материи (χ) за счет энергии частиц термостата (ψ): $\chi\psi \to \chi\chi$. В некотором смысле наша работа представляется альтернативой такому подходу к избытку темной материи: экспоненциальный рост может быть связан с эволюцией пространства-времени от дискретного к непрерывному. На этом фоне, конечно, должны быть учтены поля материи.

Благодарности. Авторы признательны доктору О. Цупко, профессорам К. Ровелли и Е. Щепину за полезные обсуждения, а также профессору И. Оселедецу за полезные ссылки.

Заявление о соблюдении этических норм. Работа обоих авторов оплачивалась из бюджета без привлечения внешнего финансирования. Авторы не имеют конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Peebles P.* Principles of Physical Cosmology. Princeton Univ. Press, 2020.
2. *Penrose R.* Angular Momentum: An Approach to Combinatorial Spacetime // Quantum Theory and Beyond / Ed. T. Bastin. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1971. P. 151–180.
3. *Rovelli C., Smolin L.* // Phys. Rev. D. 1995. V. 52. P. 5743–5759.
4. *Krioukov D., Papadopoulos F., Kitsak M., Vahdat A., Boguñá M.* // Phys. Rev. E. 2010. V. 82. P. 036106.
5. *Gromov M.* Metric Structures for Riemannian and Non-Riemanian Spaces. Boston: Birkhäuser, 2007.
6. *Lachíeze-Rey M., Luminet J.-P.* // Phys. Rep. 1995. No. 3, V. 254. P. 135–214.
7. *Gross D., Witten E.* // Nucl. Phys. B. 1986. V. 277. P. 1.
8. *Bento M., Bertolami O.* // Phys. Lett. B. 1996. V. 368, No. 3. P. 198–201.
9. *Maldacena J.* // Adv. Theor. Math. Phys. 1998. V. 2. P. 231.
10. *Ryu S., Takayanagi T.* // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 96. P. 181602.
11. *Feder J.* Fractals. Plenum Press, 1988.
12. *Witten E.* // Adv. Theor. Math. Phys. 1998. V. 2. P. 253–291.
13. *Singh S.* // Phys. Rev. D. 2018. V. 97. P. 026012.
14. *Ryu S., Takayanagi T.* // JHEP. 2006. V. 2006. P. 045.
15. *Bringmann T., Depta P. F., Hufnagel M., Ruderman J. T., Schmidt-Hoberg K.* // Phys. Rev. Lett. 2021. V. 127. P. 191802.

Получено 17 января 2022 г.